<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: «ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ»

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν α,β,γ,δ$\in\Re$ και z_1=α+βi , z_2=γ+δi είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$$

Μονάδες 10

Α2. Έστω Μ(χ,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z = χ + yi στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε σαν μέτρο του z;

Μονάδες 5

Α3. *Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ) αν η πρόταση είναι* ***σωστή*** *και (Λ) αν αυτή είναι* ***λάθος****.*

ι)Το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών εκφράζει στο μιγαδικό επίπεδο την απόσταση των εικόνων τους.

ιι) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

ιιι) Αν z_1 , z_2 οι ρίζες της εξίσωσης αx^2+βχ+γ =0 με α,β,γ πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει: $z_1 = -\overline{z_2}$.

iv) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|^2=|\overline{z}||z|$.

v) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\left||z_1|-|z_2|\right| \geq |z_1+z_2| \geq |z_1|+|z_2|$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο μιγαδικός α=3+4i και ο μιγαδικός z με $\overline{a}\,z + a\,\overline{z} = 50.$

Β$_1$. Να δειχθεί ότι η εικόνα Μ του z κινείται στην ευθεία 3χ+4ψ-25=0. **Μονάδες 10**

Β$_2$. Να βρείτε τον μιγαδικό z_0 ο οποίος έχει το ελάχιστο μέτρο. Πόσο είναι το $|z_0|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο μιγαδικός z$\neq$1 και έστω w=$\dfrac{2+i\overline{z}}{1-\overline{z}}$.

Γ$_1$. Να δειχθεί ότι $\dfrac{w-2}{w+i} = \overline{z}$. **Μονάδες 6**

Γ$_2$. Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου (0,0) και ακτίνας 1 και Μ είναι η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να δειχθεί ότι το Μ κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση. **Μονάδες 10**

Γ$_3$. Για z=2 να δειχθεί ότι w^{2010} είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίδονται οι μιγαδικοί

$$z_1, z_2, w \;\mu\varepsilon\; z_1^{\nu} = 3+i\;, z_2^{\nu} = 1+3i \;\kappa\alpha\iota\; w = \frac{z_1}{z_2}.$$

Δ$_1$. Να δειχθεί ότι ο w δεν είναι πραγματικός . **Μονάδες 5**

Δ$_2$. Να δειχθεί ότι το $|w| = 1$. **Μονάδες 6**

Δ$_3$. Να δειχθεί ότι ο μιγαδικός $z = \dfrac{w-1}{w+1}$ είναι φανταστικός

Μονάδες 7

Δ$_4$. Να δειχθεί ότι $|a+w| + |a-w| \geq 2,\ \textit{οπου}\ \alpha \in \mathbb{C}.$

Μονάδες 7

Μυτιλήνη Οκτώβριος 2010

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ! ! !