ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΜΦΙΛΩΝ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 12-01-10

ΤΑΞΗ: Γ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ –ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Καθηγητές: Κεφαλάς Νικόλαος - Κουτσουκέλλης Γεώργιος

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σ' ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και f(α) $\neq$ f(β) τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in$ (α, β) ώστε f(x_0)=η **(ΜΟΝΑΔΕΣ 15)**

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος:**

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in$ (α, β) τέτοιο ώστε f(x_0)=0 τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει f(α)$\cdot$f(β)<0

γ. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή.

δ. Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -2010$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με zw$\neq$0 για τους οποίους ισχύει : $|z+w| = |z-w|$ (1) και η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [α,β] με α<0<β . Να αποδείξετε ότι:

Α. Re (z$\overline{w}$) =0 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 9)**

Β. Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**

Γ. Αν z=α+if(α) με f(α)$\neq$0 και w=f(β)-βi μιγαδικοί που επαληθεύουν την παραπάνω ισότητα (1) τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). **(ΜΟΝΑΔΕΣ 8)**

ΘΕΜΑ 3^o

Έστω η συνάρτηση f(x)=x+e^x-1, x$\in R$

Α. i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να εξετάσετε αν αντιστρέφεται **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**

iii. Αποδείξτε ότι η εξίσωση f(x)=2010 έχει μια ακριβώς λύση. **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**

Β. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση g: $R \to R$ ώστε g(x)+$e^{g(x)}$=2x+1 τότε να αποδείξετε ότι:

i. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο R **(ΜΟΝΑΔΕΣ 6)**

ii. g(0)=0 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**

iii. Να λύσετε την ανίσωση: (g$\circ$f)(x)>0 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 3)**

iv. Να λύσετε την εξίσωση: f^{-1}(x) =1 **(ΜΟΝΑΔΕΣ 2)**

ΘΕΜΑ 4^o

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $R \to R$ για την οποία ισχύει : $f^2(x) + 2f(x)\eta\mu x = x^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$ για κάθε x$\in R$ και f(0)=1

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)+ημx, x$\in R$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

Β. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι f(x)=$\sqrt{x^2+1} - \eta\mu x$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 5)**

Γ. Να βρείτε τα όρια: **i.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x}$ **(ΜΟΝΑΔΕΣ 10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ