

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ α' τετραμήνου

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα:

1^ο ΘΕΜΑ

A. Αν λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι :

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 8

B. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα οποία σχηματίζουν γωνία θ . Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων.

Τι συμβαίνει στο εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον από αυτά είναι το μηδενικό διάνυσμα;

Μονάδες 7

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Μονάδες 2

ii. Αν $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$ με $x \neq 0$, τότε $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{y}{x}$.

Μονάδες 2

iii. Αν $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Μονάδες 2

iv. Ισχύει $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Μονάδες 2

v. Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0$ ή $y = 0$

Μονάδες 2

2^ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ και $\Gamma(-4, -1)$ και τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta} = (2, -1)$, $\vec{u} = 3\vec{A\Gamma} - 2\vec{AB}$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{u} = (-11, -11)$

Μονάδες 6

iii. Να υπολογίσετε:

(α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$.

Μονάδες 7

(β) το συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{u}}$

Μονάδες 3

(γ) τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{u}$ με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

3^ο ΘΕΜΑ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{\alpha}| = 4, \quad |\vec{\beta}| = 5 \quad \text{και} \quad \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{5}{8} \vec{\alpha}$$

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 10$.

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\alpha} - \lambda \vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

Μονάδες 10

iii. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha} = \frac{2}{5} \vec{\beta}$.

Μονάδες 9

4^ο ΘΕΜΑ

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν:

$$\vec{\beta} + \vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}, \quad 2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \text{η γωνία των } (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$$

τότε:

i. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = 3$.

Μονάδες 8

ii. Να δείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 2\sqrt{3}$

Μονάδες 10

iii. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$.

Μονάδες 7

Εύχομαι Επιτυχία