

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΡΙΟΔΟΥ: ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Έστω $\vec{a}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$. Να δείξετε ότι:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$$

(Μονάδες 6)

B. Στον παρακάτω πίνακα στη στήλη A γράφονται οι εξισώσεις κάποιων κωνικών τομών και στη στήλη B οι εξισώσεις εφαπτομένων τους στο σημείο επαφής $M(x_1, y_1)$. Να γράψετε στην κόλλα σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

A	B
α) $y^2=2px$	1) $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$
β) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	2) $yy_1 = p(x+x_1)$
γ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	3) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$
δ) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	4) $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$
	5) $xx_1 = p(y+y_1)$

(Μονάδες 2x4=8)

γ) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία E' και E .

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lambda_{\vec{a}} = \mu_{\vec{a}}$, τότε $\lambda = \mu$.

(Μονάδες 2)

β. Αν $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ τότε $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$ και αντιστρόφως.

(Μονάδες 2)

γ. Κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

(Μονάδες 2)

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{\Sigma A} - 2\overrightarrow{\Sigma P} = \overrightarrow{\Sigma B} + 3\overrightarrow{P\Gamma}$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

Β. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$.

(Μονάδες 5)

Γ. Αν $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, τότε να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι:

α. Ομόρροπα

β. Αντίρροπα

γ. Ίσα

δ. Κάθετα

ε. Αντίθετα

(Μονάδες 5)

Δ. Να δείξετε ότι $AB = \frac{3}{4}B\Gamma$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 3^ο

Θεωρούμε δυο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοια ώστε:

$$\vec{a} \perp \vec{b}, (\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (\vec{a} - 4\vec{b}) \text{ και } |\vec{a}| = \sqrt{6}.$$

α) Να δείξετε ότι: $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{a} - 2\vec{b}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\mu x - 6\mu y + 10\mu^2 - \mu + 1 = 0$ (1) όπου μ πραγματικός αριθμός.

α) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παίρνει μορφή

$$(x - \mu)^2 + (y - 3\mu)^2 = \mu - 1.$$

(Μονάδες 5)

β) Αν $\mu = 1$, τότε τι παριστάνει η εξίσωση (1);

(Μονάδες 4)

γ) Για ποιες τιμές του μ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο;

(Μονάδες 4)

δ) Αν η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, τότε:

i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

(Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του μ , πάνω σε ποια γραμμή ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραμμή αυτή.

(Μονάδες 8)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!
