

ΓΡΑΠΤΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ
ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ Π.Ε. ΔΡΑΜΑΣ, ΞΑΝΘΗΣ & ΡΟΔΟΠΗΣ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της f .
- β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$.
- γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$.
- δ) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (3,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-3}\right)$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Έστω $f^{-1}(x) = e^{-x} + 3, x \geq 0$.

B2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$ (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της f^{-1} στο σημείο $B(0, f^{-1}(0))$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

B3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = e^{f(x)} + f^{-1}(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 8

B4. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, f^{-1} έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (e^{-4} + 3, 4)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{4}{x} + e^{-x} + \alpha x - \frac{1}{e^2}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) + \frac{1}{e^2} \leq \frac{4}{\ln x} + \frac{1+e^{-x}}{x} + \alpha$ για κάθε $x > 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(ex)}{(x-1)\ln x}$.

Μονάδες 5

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - \frac{1}{e^2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. (μονάδες 3)

β) Από σημείο $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f φέρουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ η οποία τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο K . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x \in (4, 5)$ τέτοιο, ώστε $MK = 1$. (μονάδες 5)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - \pi \cdot x + \pi \cdot \eta\mu x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $0 < x_1 < x_2 < \pi$ και $f(x_1) = f(x_2) = 2 - x_1 x_2$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) > 0$ για $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $f'(x) < 0$ για $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. (μονάδες 4)

β) $f(x) > 0$ για $x \in (0, \pi)$. (μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δίνεται η συνάρτηση $g:[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x\eta\mu x}{x-\pi}, & x \in [0, \pi) \\ -\pi, & x = \pi \end{cases}.$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο π .

Μονάδες 4

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. (μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(\frac{\pi}{2}) < 2f(\frac{x_1}{2} + \frac{\pi}{4})$. (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην **αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ