**Με ολοκληρώματα**

**ΓΡΑΠΤΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΗ ΔΟΚΙΜΑΣΙΑ**
**ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ Π.Ε. ΔΡΑΜΑΣ, ΞΑΝΘΗΣ & ΡΟΔΟΠΗΣ**
**ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2024**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η $f$ είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του Δ,

να αποδείξετε ότι η $f$ είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

**Μονάδες 6**

**Α2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

**Μονάδες 5**

**Α3.** Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f$;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της $f$.

**β)** Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$.

**γ)** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η $f$ διατηρεί σταθερό πρόσημο ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x)=0$.

**δ)** Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και $f'(x_0)=0$, τότε η $f$ παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο $x_0$.

**ε)** Έστω $f$ μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f:(3,4]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$.

**Β1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι «1-1» (μονάδες 2) και να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

Έστω $f^{-1}(x)=e^{-x}+3$, $x\geq 0$.

**Β2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $\mathrm{A}(4,f(4))$ (μονάδες 3) και να αποδείξετε ότι η (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της $f^{-1}$ στο σημείο $\mathrm{B}(0,f^{-1}(0))$ (μονάδες 3).

**Μονάδες 6**

**Β3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+f^{-1}(x)$ και να τη μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

**Μονάδες 8**

**Β4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=3+e^{-2}$.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{4}{x}+e^{-x}-x+\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_2^e\left[f(\ln x)-\dfrac{4}{\ln x}\right]dx=\ln 2-1-\dfrac{e-2}{e^2}$.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{e^2}$.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(ex)}{(x-1)\ln x}$.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=-x-\dfrac{1}{e^2}$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$. (μονάδες 3)

β) Από σημείο $\mathrm{M}(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης της $f$ φέρουμε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ η οποία τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x\in(4,5)$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{MK}=1$. (μονάδες 5)

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-\pi\cdot x+\pi\cdot\eta\mu x$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής $\mathrm{A}(x_1,f(x_1))$ και $\mathrm{B}(x_2,f(x_2))$ με $0<x_1<x_2<\pi$ και $f(x_1)=f(x_2)=2-x_1x_2$.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x)>0$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ και $f'(x)<0$ για $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. (μονάδες 4)

β) $f(x)>0$ για $x\in(0,\pi)$. (μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

Δίνεται η συνάρτηση $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x\eta\mu x}{x-\pi}, & x\in[0,\pi)\\ -\pi, & x=\pi\end{cases}.$$

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\pi$.

**Μονάδες 4**

**Δ4.** α) Να αποδείξετε ότι η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. (μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1)+f(\frac{\pi}{2})<2f(\frac{x_1}{2}+\frac{\pi}{4})$. (μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

## ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρηση: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**