

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Η διδακτέα-εξεταστέα ύλη του Πανελλαδικώς εξεταζόμενου μαθήματος «Μαθηματικά (Άλγεβρα)» ορίστηκε με την υπ' αριθ [Φ6/97381/Δ4/06.09.2023 \(Β' 5371\) Υπουργική Απόφαση](#), με την οποία καθορίστηκε η διδακτέα-εξεταστέα ύλη των Πανελλαδικώς εξεταζόμενων μαθημάτων της Γ' τάξης Ημερήσιου, Εσπερινού ΕΠΑ.Λ. και Πρότυπου ΕΠΑ.Λ. για το σχ. έτος 2023-24.

Οδηγίες Διδασκαλίας

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζεται ο προτεινόμενος ελάχιστος αριθμός ωρών διδασκαλίας ανά παράγραφο του σχολικού βιβλίου.

Παράγραφος	Προτεινόμενος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Προτεινόμενος αριθμός ωρών
1.1	4	2.1	2
1.2	3	2.2	10
1.3	8	2.3	13
1.4	10		
Σύνολο	25	Σύνολο	25

Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα:

- α) την σύνδεση της ανάλυσης και της στατιστικής με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα,
- β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά.

Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/-ητριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο <http://ebooks.edu.gr>). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους/στις μαθητές/-ήτριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Στις ειδικές οδηγίες κατά κεφάλαιο που ακολουθούν, περιγράφονται οι στόχοι και παρέχονται μερικά επιπλέον στοιχεία που μπορούν να υποστηρίξουν τον/την εκπαιδευτικό στη διδασκαλία.

Κεφάλαιο 1ο: Διαφορικός Λογισμός (Προτείνεται να διατεθούν 25 ώρες)

Σε όλο το κεφάλαιο γίνεται ευρεία χρήση της εποπτείας και των παραδειγμάτων για την ερμηνεία και για την κατανόηση των διάφορων εννοιών και προτάσεων.

§1.1 Συναρτήσεις (προτεινόμενες ώρες 4)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να μπορούν να βρίσκουν το όριο μίας συνάρτησης στο x_0 , όταν δίνεται η γραφική της παράσταση,
- να γνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά του να υπολογίζουν το όριο πολλών συναρτήσεων.

Διευκρινίζεται ότι στην αρχή του κεφαλαίου αυτού πρέπει να γίνει μία επανάληψη στην έννοια της συνάρτησης, με επιδίωξη οι μαθητές/-ήτριες να μπορούν:

- να βρίσκουν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης,
- να σχεδιάζουν τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων (ax , $ax + \beta$, ax^2 , a/x , $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$),
- από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να βρίσκουν την τιμή της σ' ένα σημείο x_0 , τη μονοτονία της κατά διαστήματα και τα ακρότατα,
- να βρίσκουν το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο απλών συναρτήσεων.

Στην αρχή της §1.1 γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και των ιδιοτήτων της. Πολλές από τις έννοιες και τους συμβολισμούς αυτού του κεφαλαίου είναι ήδη γνωστά στους/στις μαθητές/-ήτριες από προηγούμενες τάξεις (Άλγεβρα Α' και Β' ΕΠΑ.Λ. και Π.ΕΠΑ.Λ.) γι' αυτό και η διδασκαλία τους δεν πρέπει να στοχεύει στην αναλυτική παρουσίαση τους, αλλά στο να μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν όταν θα τους χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Στην ίδια παράγραφο **παρουσιάζεται μέσω διαισθητικών παραδειγμάτων και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η έννοια του ορίου** και γίνεται μια σύντομη αναφορά στην έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Επισημαίνεται ότι **η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της έννοιας της παραγώγου**. Δεν χρειάζεται επομένως να καθυστερήσει η διδασκαλία με άσκοπη "ασκησιολογία". Κατά τη διδασκαλία των εννοιών της παραγράφου αυτής, για εξοικονόμηση χρόνου, συνιστάται οι πίνακες, τα σχήματα και η ερμηνεία τους να προσφέρονται σε διαφάνειες ή σε φωτοτυπίες ή, στην περίπτωση που αυτό είναι αδύνατον, οι μαθητές/-ήτριες να χρησιμοποιούν τα βιβλία τους. Προτείνεται επίσης, η εννοιολογική κατανόηση της συνέχειας, να υλοποιηθεί με τη χρήση γραφημάτων και μόνο.

§1.2 Η έννοια της παραγώγου (προτεινόμενες ώρες 3)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης και να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής,
- να βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$.

Στην §1.2 εισάγεται η έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της. Η παράγωγος είναι ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία των Μαθηματικών και χρησιμοποιείται σε ένα ευρύ φάσμα επιστημών. Ο ορισμός της παραγώγου εισάγεται μέσω των προβλημάτων εφαπτομένης καμπύλης σε ένα σημείο A και της στιγμιαίας ταχύτητας. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A συμπίπτει με την οριακή θέση μιας τέμνουσας AM , καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπίπτει με το A . Με βάση την παρατήρηση αυτή ορίζουμε ως εφαπτομένη της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ την ευθεία η οποία διέρχεται από το A και έχει ως συντελεστή διεύθυνσης τον

αριθμό $\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Δεν δίνεται ο τύπος της εξίσωσης της εφαπτομένης της καμπύλης μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$. Όμως, μέσα από εφαρμογές, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο προσδιορίζεται κάθε φορά η εφαπτομένη αυτή, αφού γνωρίζουμε ένα σημείο της και μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης της.

Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι και άλλα παραδείγματα, όπως ο προσδιορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας ενός κινητού, του οριακού κόστους στην Οικονομία, της ταχύτητας μιας αντίδρασης στη Χημεία κ.τλ., οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, ονομάζεται παράγωγος της f στο t_0 . Έτσι το πρόβλημα της εφαπτομένης και το πρόβλημα της στιγμιαίας ταχύτητας προετοιμάζουν το έδαφος, ώστε να προκύψει φυσιολογικά ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της και η ερμηνεία της ως ρυθμού μεταβολής.

§1.3 Παράγωγος συνάρτησης (προτεινόμενες ώρες 8)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου συνάρτησης,
- να κατανοήσουν την έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης διαμέσου της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου αντίστοιχα, της τετμημένης $x(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα,
- να μπορούν να παραγωγίσουν βασικές συναρτήσεις,
- να αξιοποιούν τους κανόνες παραγωγίσης ανάλογα με τις μορφές των συναρτήσεων που εμφανίζονται,
- να μπορούν να παραγωγίζουν σύνθετες συναρτήσεις.

Στην §1.3 ορίζεται η (πρώτη) **παράγωγος** μιας **συνάρτησης** f . Με τον όρο **παράγωγος της** f εννοείται η συνάρτηση f' , η οποία σε κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f , όπου αυτή είναι παραγωγίσιμη, αντιστοιχίζει την παράγωγο της στο σημείο αυτό. Με ανάλογο τρόπο ορίζεται και η **δεύτερη παράγωγος** της f και ως παραδείγματα αναφέρονται η ταχύτητα $u(t) = x'(t)$ και η επιτάχυνση $a(t) = x''(t)$ στην ευθύγραμμη κίνηση ενός σώματος. Ακολουθεί η παραγωγή βασικών συναρτήσεων και οι κανόνες παραγωγίσης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου. **Επειδή οι μαθητές/-ήτριες δεν έχουν διδαχθεί την έννοια της σύνθετης συνάρτησης, θα πρέπει ο/η διδάσκων/-ουσα να αφιερώσει τον αναγκαίο χρόνο για την κατανόηση της έννοιας αυτής πριν τη διδασκαλία της παραγωγίσης σύνθετης συνάρτησης.** Προτείνεται η διδασκαλία της σύνθετης συνάρτησης να γίνει μέσω απλών παραδειγμάτων που εξυπηρετούν τις ανάγκες της τεχνικής εκπαίδευσης και να αποφευχθεί ο αυστηρός ορισμός της. Προτείνεται επίσης, να τροποποιηθούν κατάλληλα κάποια προβλήματα επόμενων παραγράφων ώστε να αξιοποιηθούν ως προβλήματα ρυθμού μεταβολής. Για παράδειγμα, η άσκηση 2 από τις γενικές, θα μπορούσε να αξιοποιηθεί με το ερώτημα «ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους για την παραγωγή 15 μονάδων προϊόντος». Τέλος, να πραγματοποιηθούν μόνο οι αποδείξεις όσων τύπων και κανόνων περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη.

§1.4 Εφαρμογές των παραγώγων (προτεινόμενες ώρες 10)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να μπορούν:

- να προσδιορίζουν τα διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση είναι σταθερή, γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα,
- να βρίσκουν τα τοπικά ακρότατα (αν υπάρχουν) μίας συνάρτησης,

- να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Στην §1.4 υλοποιείται ο κύριος στόχος της διδασκαλίας του κεφαλαίου, που είναι η αξιοποίηση των παραγώγων στον προσδιορισμό των ακροτάτων μιας συνάρτησης και την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Όπως και στις προηγούμενες παραγράφους, έτσι και εδώ για την κατανόηση των ιδιοτήτων κυριαρχεί η γεωμετρική εποπτεία. Για να συνδεθεί καλύτερα η σχέση του πρόσημου της πρώτης παραγώγου με τα ακρότατα, μπορεί ο/η διδάσκων/-σκουσα να αναφέρει παραδείγματα και από τη Φυσική. Έτσι, στο παράδειγμα της σελίδας 39 του βιβλίου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι πριν το σώμα φτάσει στο ψηλότερο σημείο, η ταχύτητα είναι θετική ($v(t) = h'(t) > 0$) και μετά είναι αρνητική ($v(t) = h'(t) < 0$). Ενώ, όταν το σώμα φτάσει στο υψηλότερο σημείο, η ταχύτητα του πρέπει να μηδενιστεί, διότι διαφορετικά το σώμα θα εξακολουθούσε να ανεβαίνει. Επομένως, βρίσκουμε ότι η χρονική στιγμή t (σε sec) που θα έχουμε το μέγιστο ύψος, δηλαδή το μέγιστο της συνάρτησης $h(t) = 20t - 5t^2$, είναι όταν $v(t) = h'(t) = 20 - 10t = 0$ m/sec. Άρα για $t = 2$ sec έχουμε το μέγιστο ύψος, που είναι ίσο με $h(2) = 40 - 20 = 20$ m.

Οι μέθοδοι του Διαφορικού Λογισμού για τον προσδιορισμό των ακροτάτων τιμών ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους έχουν πρακτική εφαρμογή σε πολλές περιοχές των επιστημών αλλά και της καθημερινής ζωής. Για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων αυτό που κυρίως προέχει είναι η μετατροπή του προβλήματος που είναι διατυπωμένο στην καθημερινή γλώσσα σε πρόβλημα **μεγίστου** ή **ελαχίστου** με τον ορισμό μιας συνάρτησης, της οποίας πρέπει να βρεθούν τα ακρότατα. Είναι σκόπιμο επομένως να τονιστούν, παράλληλα με την επίλυση κατάλληλου προβλήματος, οι αρχές "επίλυσης προβλήματος", τις οποίες έχουν γνωρίσει οι μαθητές/-ήτριες σε προηγούμενες τάξεις.

Σχετικά με την επίλυση προβλημάτων με τη βοήθεια του Διαφορικού Λογισμού πρέπει να αναφερθεί ότι πολλά προβλήματα μεγίστου ή ελαχίστου περιέχουν διακριτές μεταβλητές. Για παράδειγμα, ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων ενός προϊόντος, καθώς και ο αριθμός των εργαζομένων σε ένα εργοστάσιο πρέπει να είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί. Ωστόσο, μπορούμε μερικές φορές να οδηγηθούμε στη λύση ενός τέτοιου προβλήματος υποθέτοντας ότι κάθε μεταβλητή παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή σε κάποιο διάστημα του, ακόμα και αν η φυσική ερμηνεία της μεταβλητής έχει νόημα μόνο για διακριτές τιμές. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Διαφορικό Λογισμό βρίσκουμε επιλύουμε το μαθηματικό μοντέλο, και στη συνέχεια το πραγματικό πρόβλημα.

Συμπερασματικά, με τη διδασκαλία του 1ου κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- Να κατανοήσουν την έννοια της παραγώγου και να μπορούν να την ερμηνεύουν ως ρυθμό μεταβολής.
- Να μπορούν να βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων.
- Να κατανοήσουν ότι η γνώση του ρυθμού μεταβολής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το ίδιο το μέγεθος.
- Να μπορούν με τη βοήθεια των παραγώγων να επιλύουν προβλήματα ακροτάτων.

Κεφάλαιο 2ο: Στατιστική (Προτείνεται να διατεθούν 20 ώρες)

Για να μην καθυστερεί η διδασκαλία, οι στατιστικοί πίνακες και τα διαγράμματα, ο αριθμός των οποίων στο κεφάλαιο της Στατιστικής είναι μεγάλος, κρίνεται σκόπιμο να ετοιμάζονται σε φωτοτυπίες ή διαφάνειες πριν από το μάθημα. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, συνιστάται να γίνεται η επεξεργασία τους μέσα από το βιβλίο. Επιπλέον, προτείνεται η χρήση υπολογιστή τσέπης ή/και λογιστικού φύλλου.

§2.1 Βασικές έννοιες (προτεινόμενες ώρες 2)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να γνωρίζουν τις διαδοχικές φάσεις μίας στατιστικής έρευνας,
- να γνωρίζουν τις βασικές έννοιες της Περιγραφικής Στατιστικής και να χρησιμοποιούν σωστά τη σχετική ορολογία.

Στην §2.1 πρέπει να καταβληθεί προσπάθεια, ώστε με κατάλληλα παραδείγματα να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες **πληθυσμός**, **μεταβλητή** (ποσοτική, ποιοτική), **απογραφή** και **δείγμα**. Να διευκρινιστεί ότι δε συμπίπτει το σύνολο των τιμών μιας μεταβλητής με τις παρατηρήσεις από την εξέταση ενός πληθυσμού ως προς τη μεταβλητή αυτή. Για παράδειγμα, οι τιμές της μεταβλητής "ομάδα αίματος" είναι Α, Β, ΑΒ και Ο, ενώ οι παρατηρήσεις από την εξέταση δέκα ατόμων μπορεί να είναι Α, Α, Β, Β, Β, ΑΒ, Α, ΑΒ, Ο, Β.

Όταν είναι πρακτικά αδύνατο ή οικονομικά ασύμφορο να εξετάσουμε κάθε μέλος ενός πληθυσμού, οδηγούμαστε στην εξέταση ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν οι μαθητές/-ήτριες τη χρησιμότητα του αντιπροσωπευτικού δείγματος, από το οποίο μπορούν να προκύψουν αξιόπιστες πληροφορίες για ολόκληρο τον πληθυσμό.

Ολοκληρώνοντας την πρώτη αυτή παράγραφο, αναμένεται, μέσα από παραδείγματα, οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν τη διάκριση μεταξύ ποιοτικής και ποσοτικής μεταβλητής και να κρίνουν αν ένα δείγμα είναι αντιπροσωπευτικό.

§2.2 Παρουσίαση στατιστικών δεδομένων (προτεινόμενες ώρες 10)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- να μπορούν να διαβάσουν/ερμηνεύσουν και να κατασκευάσουν πίνακες κατανομής συχνοτήτων,
- να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα,
- να καταλαβαίνουν την αναγκαιότητα ομαδοποίησης παρατηρήσεων και να την υλοποιούν.

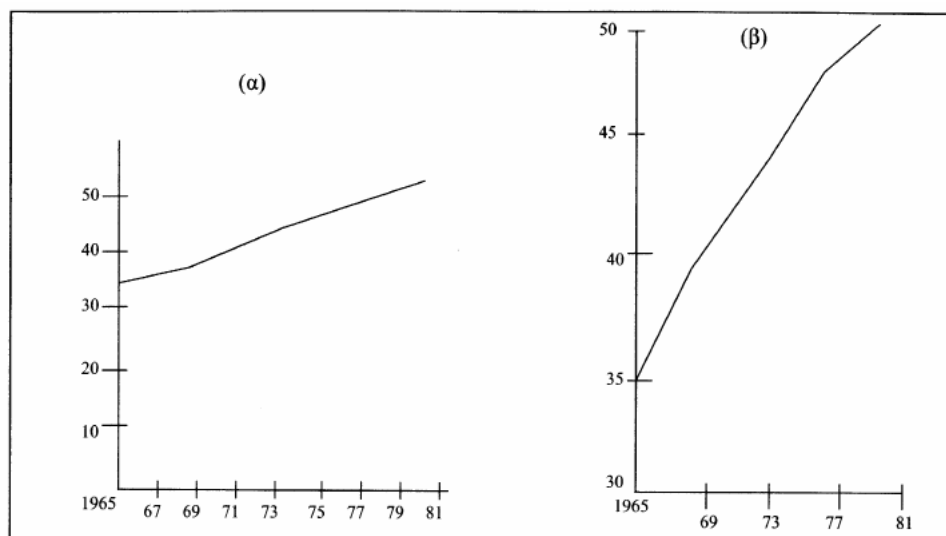
Στην §2.2 παρουσιάζονται οι κατανομές συχνοτήτων και οι γραφικές παραστάσεις τους. Μια από τις απλούστερες διαδικασίες για την οργάνωση και τη συνοπτική παρουσίαση των δεδομένων είναι η κατασκευή πινάκων κατανομής συχνοτήτων. Η κατανομή συχνοτήτων θεωρείται ως το πρώτο βήμα σε κάθε ανάλυση δεδομένων. Ανάλογα χρησιμοποιούνται η κατανομή σχετικών συχνοτήτων, η κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων και η κατανομή αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Οι μαθητές/-ήτριες αναμένεται να κατανοήσουν:

- τις έννοιες των απολύτων και σχετικών συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων,
- ότι η **σχετική συχνότητα** f_i , προσφέρεται για τη σύγκριση πληθυσμών, όταν εξετάζονται ως προς την ίδια μεταβλητή.
- ότι η **αθροιστική συχνότητα** N_i και η **αθροιστική σχετική συχνότητα** F_i , έχουν νόημα μόνο για ποσοτικές μεταβλητές.

Οι μαθητές/τριες αναμένεται να μπορούν να παραστήσουν γραφικά τα δεδομένα που έχουν συλλέξει, χρησιμοποιώντας κάθε φορά το κατάλληλο διάγραμμα. Ακόμη πρέπει να είναι σε θέση να «διαβάζουν» τα διάφορα διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν με άμεσο και οργανωμένο τρόπο τα στατιστικά δεδομένα και επιτρέπουν ορισμένες φορές να φανούν αμέσως οι σχέσεις που ενδεχομένως υπάρχουν. Συγχρόνως, πρέπει μέσα από κατάλληλα παραδείγματα να καλλιεργήσουμε στους/στις μαθητές/-ήτριες την κριτική ανάγνωση γραφημάτων και παρουσιάσεων, εφόσον συχνά υπάρχει κίνδυνος παραπλάνησης από την ανάγνωση ενός

στατιστικού διαγράμματος. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα τα δυο διαγράμματα (α) και (β) αναφέρονται στο ποσοστό των εργαζομένων γυναικών στο σύνολο του γυναικείου πληθυσμού μιας χώρας άνω των 16 ετών. Δίνουν όμως εντελώς διαφορετική εικόνα για το πως μεταβάλλεται το ποσοστό αυτό.



Το διάγραμμα (β) προκύπτει από το (α), αν απλώς μεγεθύνουμε την κλίμακα στον άξονα των y , σμικρύνουμε την κλίμακα στον άξονα των x και θεωρήσουμε ως αρχή μετρήσεων στον άξονα των y την ένδειξη 30. Το κριτικό διάβασμα των διαγραμμάτων σχετίζεται με την ικανότητα του σύγχρονου πολίτη να αντλεί συμπεράσματα και να λαμβάνει αποφάσεις.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μεγάλο, επιβάλλεται να γίνεται ομαδοποίηση. Στην ομαδοποίηση το **πλήθος των κλάσεων** ορίζεται αυθαίρετα από τον ερευνητή σύμφωνα με την πείρα του. Ωστόσο, για την διευκόλυνση των μαθητών/-ητριών, μπορούν να δοθούν έργα στα οποία να καθορίζεται από την εκφώνηση το πλήθος των κλάσεων. Με την ομαδοποίηση έχουμε απώλεια πληροφοριών, η οποία είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερος είναι ο αριθμός των κλάσεων. Όμως, με την ομαδοποίηση διευκολύνεται η επεξεργασία των δεδομένων και η παρουσίασή τους είναι εποπτικότερη.

§2.3 Μέτρα θέσης και διασποράς (προτεινόμενες ώρες 13)

Με τη διδασκαλία της παραγράφου αυτής επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να κατανοούν την χρησιμότητα και να υπολογίζουν:

- τις παραμέτρους θέσης μίας κατανομής συχνοτήτων,
- τις παραμέτρους διασποράς μίας κατανομής συχνοτήτων,
- την κανονική κατανομή,
- τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Στην § 2.3 εξετάζονται τα μέτρα θέσης και διασποράς μίας κατανομής. Ένας μεγάλος αριθμός δεδομένων μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να περιγραφεί με ένα μέτρο κεντρικής τάσης και με ένα μέτρο διασποράς. Μέσα από τη διδασκαλία χρειάζεται να αναδειχθούν οι περιορισμοί και δυνατότητες από τη χρήση καθενός από τα μέτρα θέσης και διασποράς. Είναι επίσης σημαντικό να φανεί μέσα από παραδείγματα ότι με την αντικατάσταση των δεδομένων από ένα μέτρο θέσης έχουμε μεν μια σύντομη πληροφόρηση, αλλά συγχρόνως έχουμε και μια σημαντική απώλεια πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε να

πληροφορήσουμε κάποιον για τη θερμοκρασία μιας πόλης θα ήταν κατάχρηση να του δώσουμε πλήρη κατάλογο των καθημερινών θερμοκρασιών. Δίνοντας του όμως για συντομία μόνο τη μέση ετήσια θερμοκρασία οπωσδήποτε δεν του δίνουμε πλήρη εικόνα της μεταβολής της θερμοκρασίας στη διάρκεια του έτους. Προτείνεται να συζητηθούν και να ερμηνευτούν με παραδείγματα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μέτρων θέσης που συνοψίζονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Μέση τιμή	
<ul style="list-style-type: none"> Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές 	<ul style="list-style-type: none"> Επηρεάζεται πολύ από ακραίες τιμές
<ul style="list-style-type: none"> Είναι μοναδική για κάθε σύνολο δεδομένων 	<ul style="list-style-type: none"> Μπορεί να μην αντιστοιχεί σε δυνατή τιμή της μεταβλητής. Όταν η X είναι διακριτή, με ακέραιες τιμές, τότε η μέση τιμή μπορεί να μην είναι ακέραιος
<ul style="list-style-type: none"> Είναι εύκολα κατανοητή 	<ul style="list-style-type: none"> Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
<ul style="list-style-type: none"> Ο υπολογισμός της είναι σχετικά εύκολος 	
<ul style="list-style-type: none"> Έχει μεγάλη εφαρμογή για περαιτέρω στατιστική ανάλυση 	

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Διάμεσος	
<ul style="list-style-type: none"> Είναι εύκολα κατανοητή 	<ul style="list-style-type: none"> Δε χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές για τον υπολογισμό της
<ul style="list-style-type: none"> Δεν επηρεάζεται από ακραίες τιμές 	<ul style="list-style-type: none"> Είναι δύσκολη η εφαρμογή της για περαιτέρω στατιστική ανάλυση
<ul style="list-style-type: none"> Υπολογίζεται και στην περίπτωση που οι ακραίες κλάσεις είναι ανοικτές 	<ul style="list-style-type: none"> Δεν υπολογίζεται για ποιοτικά δεδομένα
<ul style="list-style-type: none"> Ο υπολογισμός της είναι απλός 	<ul style="list-style-type: none"> Για τον υπολογισμό της μπορεί να χρειαστεί παρεμβολή
<ul style="list-style-type: none"> Είναι μοναδική σε κάθε σύνολο δεδομένων 	

Με την **κανονική κατανομή** μοντελοποιούνται διαδικασίες και φαινόμενα, αρκετά από τα οποία σχετίζονται με την καθημερινότητα του πολίτη. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι με αυτό το μοντέλο μπορούμε να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές ορισμένων μεταβλητών. Στην πράξη, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή για να αντλούμε συμπεράσματα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας για μεγάλα δείγματα (για παράδειγμα, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ » ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 ή 68%).

Μερικές φορές σε στατιστικούς υπολογισμούς είναι αναγκαίο όχι μόνο να υπολογίσουμε απλώς τις τυπικές αποκλίσεις, αλλά να συγκρίνουμε μεταξύ τους τα μεγέθη των τυπικών αποκλίσεων σε διαφορετικές στατιστικές συλλογές. Σε αυτές τις περιπτώσεις η μεταβλητότητα των δεδομένων μπορεί να συγκριθεί, αφού

πρώτα εκφράσουμε τις σχετικές ποσότητες σε μια κοινή βάση. Γι' αυτό υπάρχει ανάγκη ορισμού μέτρων **σχετικής** μεταβλητότητας, τα οποία να συνδυάζουν μέτρα θέσης με μέτρα διασποράς. Το πιο γνωστό μέτρο σχετικής μεταβλητότητας είναι ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο $CV = \frac{s}{\bar{x}}$ και συνήθως εκφράζεται ως ποσοστό.

Προτείνεται να συζητηθούν και να ερμηνευτούν με παραδείγματα τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των μέτρων διασποράς που συνοψίζονται στους πίνακες που ακολουθούν:

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Εύρος	
<ul style="list-style-type: none"> Είναι πολύ απλό στον υπολογισμό 	<ul style="list-style-type: none"> Δεν θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, επειδή βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.
<ul style="list-style-type: none"> Χρησιμοποιείται αρκετά στον έλεγχο ποιότητας 	<ul style="list-style-type: none"> Δεν χρησιμοποιείται για περαιτέρω στατιστική ανάλυση

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Διασπορά και τυπική απόκλιση	
<ul style="list-style-type: none"> Λαμβάνονται υπόψη για τον υπολογισμό τους όλες οι παρατηρήσεις 	<ul style="list-style-type: none"> Το κυριότερο μειονέκτημα της διασποράς είναι ότι δεν εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με το χαρακτηριστικό. Το μειονέκτημα αυτό παύει να υπάρχει με τη χρησιμοποίηση της τυπικής απόκλισης
<ul style="list-style-type: none"> Έχουν μεγάλη εφαρμογή στη στατιστική συμπερασματολογία 	<ul style="list-style-type: none"> Απαιτούνται περισσότερες αλγεβρικές πράξεις για τον υπολογισμό τους παρά στα άλλα μέτρα.
<ul style="list-style-type: none"> Σε κανονικούς πληθυσμούς το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στα διαστήματα $\bar{x} \pm s$, $\bar{x} \pm 2s$ και $\bar{x} \pm 3s$ προσεγγίζουν το 68%, 95%, 99,7% αντίστοιχα 	

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Συντελεστής μεταβολής	
<ul style="list-style-type: none"> Είναι καθαρός αριθμός (ποσοστό) 	<ul style="list-style-type: none"> Δεν ενδείκνυται στην περίπτωση που η μέση τιμή είναι κοντά στο μηδέν
<ul style="list-style-type: none"> Χρησιμοποιείται ως μέτρο σύγκρισης της μεταβλητότητας, όταν έχουμε ίδιες ή και διαφορετικές μονάδες μέτρησης. 	
<ul style="list-style-type: none"> Χρησιμοποιείται ως μέτρο ομοιογένειας ενός πληθυσμού 	

Συμπερασματικά, με τη διδασκαλία του 2ου κεφαλαίου επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες:

- Να κατανοήσουν τις βασικές έννοιες της Στατιστικής, για να παρουσιάζουν και να ερμηνεύουν δεδομένα.
- Να μπορούν να διαβάζουν με ορθό τρόπο, αλλά και να κατασκευάζουν οι ίδιοι στατιστικά διαγράμματα.
- Να μπορούν να βρίσκουν τα μέτρα θέσης και διασποράς μιας κατανομής, αλλά και να γνωρίζουν την αξία και τα όρια των μέτρων αυτών.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Βιβλίο:

«Ευκλείδεια Γεωμετρία Β' ΓΕΛ - Τεύχος Β'», των Αργυρόπουλου Η., Βλάμου Π., Κατσούλη Γ., Μαρκάτη Σ. και Σιδέρη Π.

Διδακτέα Ύλη

Κεφ. 10^ο: Εμβαδά

10.1 Πολυγωνικά χωρία

10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων (χωρίς τις αποδείξεις)

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου (να διδαχθεί μόνο ο τύπος του Ήρωνα χωρίς την απόδειξή του)

10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των Θεωρημάτων)

Κεφ. 11^ο: Μέτρηση Κύκλου

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων (χωρίς τις αποδείξεις των Θεωρημάτων και του Πορίσματος)

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.5 Μήκος τόξου

11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα

11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

Οδηγίες διδασκαλίας

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στη Γ' τάξη των ΕΠΑ.Λ. και Π.ΕΠΑ.Λ. θα πρέπει να προσανατολίζεται κυρίως στην αξιοποίηση των σημαντικότερων εννοιών και συμπερασμάτων στην επίλυση προβλημάτων υπολογισμού και σχέσεων (εμβαδών, μηκών, γωνιών). Στην αρχή της σχολικής χρονιάς είναι σκόπιμο να γίνει, για μία (1) διδακτική ώρα, μια αναφορά σε στοιχεία από τη Γεωμετρία των προηγούμενων τάξεων που θα χρησιμοποιηθούν στη Γ' Λυκείου, όπως είναι οι έννοιες και ιδιότητες των παραλληλογράμμων, οι σχέσεις μεταξύ τόξου και αντίστοιχης επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, εφόσον αυτά θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές (στα εμβαδά και στη μέτρηση κύκλου).