

# **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**Θέματα Γραπτών Ανακεφαλαιωτικών  
Εξετάσεων**

**σχ. έτος 2022-2023**

**Επιμέλεια: Νικόλαος Φωτιάδης, Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03**

Το παρόν τεύχος περιλαμβάνει θέματα από τις γραπτές ανακεφαλαιωτικές εξετάσεις στα Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου σχολικού έτους 2022-2023 από Γυμνάσια των νομών Δράμας, Ξάνθης και Ροδόπης. Ελπίζουμε ότι το υλικό που συγκεντρώθηκε θα φανεί χρήσιμο σε μαθητές, σε συναδέλφους που διδάσκουν Μαθηματικά στο Γυμνάσιο και σε όποιον άλλο ενδιαφέρεται για τα Μαθηματικά της Γ' Γυμνασίου.

Νικόλαος Φωτιάδης  
Σύμβουλος Εκπαίδευσης ΠΕ03  
Δράμας, Ξάνθης, Ροδόπης

# Διαγώνισμα 1

Από τα 2 (δύο) θέματα της Θεωρίας, να επιλέξετε το 1 (ένα) και να απαντήσετε σε αυτό.

## ΘΕΩΡΙΑ 1

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες

i.  $(\alpha - \beta)^2 =$

ii.  $(\alpha - \beta)^3 =$

iii.  $(\alpha + \beta)^3 =$

iv.  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) =$

Μονάδες 7

## ΘΕΩΡΙΑ 2

α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή, να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα και να γράψετε την ισότητα των λόγων.

β) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση τότε είναι ίσα.

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τότε έχουν και τις τρίτες πλευρές τους ίσες.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

iv. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

Μονάδες 7

Από τα 3 (τρία) θέματα των Ασκήσεων, να επιλέξετε τα 2 (δύο) και να απαντήσετε σε αυτά.

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται το πολυώνυμο  $A(x) = (3x-1)^2 - 2x \cdot (3x-1)$

- Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι  $A(x) = 3x^2 - 4x + 1$
- Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου  $A(x)$  για  $x = 2$
- Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) = 0$

Μονάδες 6,5

### ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι παραστάσεις  $A(x) = x^2 - 4$  και  $B(x) = 2x - 4$

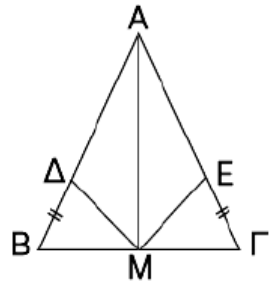
- Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση  $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$  και να την απλοποιήσετε
- Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) = B(x)$

Μονάδες 6,5

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ το σημείο M είναι μέσο της βάσης ΒΓ και  $ΒΔ = ΓΕ$ .

- Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα



Μονάδες 6,5

## Διαγώνισμα 2

### ΘΕΩΡΙΑ

- 1)α) Να συμπληρωθεί και να αποδειχθεί η ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ .  
β) Να αντιστοιχίσετε το γράμμα της πρώτης στήλης με έναν αριθμό της δεύτερης στήλης, ώστε να προκύψει ταυτότητα.

ΣΤΗΛΗ 1	ΣΤΗΛΗ 2
(Α) $(\alpha - \beta)^2$	(1) $\alpha^2 - \beta^2$
(Β) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$	(2) $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
(Γ) $(\alpha + \beta)^3$	(3) $\alpha^3 + \beta^3$
(Δ) $(\alpha - \beta)^3$	(4) $\alpha^3 - \beta^3$
	(5) $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
	(6) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

- 2)α) Να συμπληρώσετε τα κενά στα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων που ακολουθούν:  
Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:  
i) \_\_\_\_\_ ίσες και την \_\_\_\_\_ ίση.  
ii) \_\_\_\_\_ ίση και τις \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ ίσες.  
iii) \_\_\_\_\_ ίσες.
- β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:  
i) \_\_\_\_\_ ίσες μία προς μία.  
ii) \_\_\_\_\_ ίση και \_\_\_\_\_ ίση.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δίνονται η ρητή αλγεβρική παράσταση:

$$A = \frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x}{x^2-4}$$

- α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$$x^2 - 2x \text{ και } x^2 - 4.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η αλγεβρική παράσταση  $A$  ορίζεται.

γ) Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε το αποτέλεσμα.

- 2) α) Να λύσετε την εξίσωση:  $x^2 + x - 2 = 0$

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι  $-2$  και  $1$

να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 2 \\ -\alpha x - 5\beta y = 13 \end{cases},$$

όπου  $\alpha$  είναι η αρνητική ρίζα της εξίσωσης και  $\beta$  η θετική.

- 3) Στο διπλανό σχήμα είναι  
 $B\Gamma // \Delta E$ ,  $A\Delta = x+2$ ,  $A E = x+4$ ,  
 $\Delta B = x-1$  και  $E\Gamma = x$ .

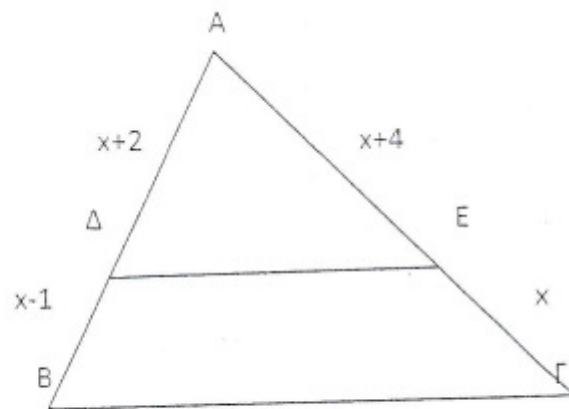
α) Να αποδείξετε ότι

τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και

$A\Delta E$  είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε το  $x$ .

γ) Να βρείτε το λόγο  
ομοιότητας  $\lambda$ .



(Να απαντήσετε ένα από τα δύο θέματα θεωρίας και να λύσετε δύο από τις τρεις ασκήσεις).

## Διαγώνισμα 3

### ΘΕΩΡΙΑ(ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΘΕΜΑΤΑ)

#### ΘΕΜΑ 1

Α) Να αποδείξετε ότι  $(a - \beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$

Β) Να ξαναγράψετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ισότητες συμπληρωμένες:

α)  $(\alpha + \beta)^2 =$

β)  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) =$

γ)  $(\alpha + \beta)^3 =$

δ)  $(\alpha - \beta)^3 =$

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ, αν η πρόταση είναι σωστή ,ή Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α ) Μονώνυμο είναι η αλγεβρική παράσταση , στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

β ) Όλα τα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

γ ) Κάθε αριθμός είναι πολυώνυμο.

δ) Το άθροισμα μονωνύμων είναι μονώνυμο.

#### ΘΕΜΑ 2

Α)Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Β)Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τα κενά , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α )Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς λέγεται.....

β)Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες..... μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.

γ )Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη ..... ίση, τότε είναι ίσα.

δ)Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες μία προς μία ίσες , τότε είναι.....

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ, αν η πρόταση είναι σωστή ,ή Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α )Σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών είναι μεγαλύτερο από 180° .

β )Οξυγώνιο είναι το τρίγωνο που έχει μία γωνία οξεία.

γ )Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

δ )Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ(ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΔΥΟ ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ)**

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} - y = 2 \\ \frac{2x+4}{2} + \frac{y+2}{4} = 1 \end{cases}$$

**A)** Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\begin{cases} x - 4y = 7 \\ 4x + y = -6 \end{cases}$$

**B)** Να λύσετε, με οποιαδήποτε αλγεβρική μέθοδο θέλετε, το σύστημα του ερωτήματος Α.

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Δίνεται το πολυώνυμο

$$A(x) = (2x - 1)^2 + (x + 1)^2 + 4(x + 1)(1 - x) - 2(x + 1)$$

**A)** Να δειχθεί ότι  $A(x) = x^2 - 4x + 4$

**B)** Να λυθεί η εξίσωση  $A(x) = 0$

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ , τότε

**A)** Να υπολογιστεί το  $\sigma\upsilon\nu\omega$ .

**B)** Να υπολογιστεί η  $\epsilon\varphi\omega$ .

**Γ)** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{2\sigma\upsilon\nu 120^\circ + \epsilon\varphi 135^\circ + 5\sigma\upsilon\nu\omega}{5\eta\mu(180^\circ - \omega) + 3\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)}$$



## Διαγώνισμα 4

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Τί ονομάζουμε ταυτότητα;

Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**B.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

i. Τα μονώνυμα  $5x^3y$  και  $-\frac{1}{5}x^3y$  είναι αντίθετα.

ii. Το γινόμενο δύο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά

iii. Ισχύει ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$ .

iv. Η ισότητα  $\alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$  είναι ταυτότητα.

**Γ.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις:

i. Κάθε σταθερό, μη μηδενικό, μονώνυμο είναι . . . . . βαθμού.

ii. Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε . . . . . του πολυωνύμου και . . . . . τα γινόμενα που προκύπτουν.

iii. Η παράσταση  $\frac{1}{x}$  ορίζεται όταν . . . . .

iv. Να συμπληρωθεί η ισότητα  $x^2 - y^2 = (\dots \dots) (\dots \dots)$

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**A.** Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια;

**B.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

i. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μια γωνία τους  $50^\circ$  τότε είναι όμοια.

ii. Δύο ίσα τρίγωνα είναι και όμοια με λόγο ομοιότητας 1.

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

iv. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία αντίστοιχη πλευρά τους ίση.

**Γ.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις.

i. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που φέρουμε από την κορυφή του προς την βάση του είναι και . . . . . και . . . . .

ii. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος . . . . από τα . . . . του ευθυγράμμου τμήματος.

iii. Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή του και είναι . . . . . στην ευθεία της . . . . . πλευράς.

iv. Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι . . . . . προς τα . . . . . τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{2x^3 + 6x^2 + 2x + 6}{x^2 + 1}$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η παράσταση  $A$  και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε και να δείξετε ότι  $A = 2x + 6$

β. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση  $B = \frac{2x^2}{A} - \frac{9}{x+3}$

γ. Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 + 7x = A$

### ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρούμε τις παραστάσεις  $A = (x + 2)^2 + (2x + 5)(2x - 5) - (2x - 1)^2$   
και  $B = -y - x^2 - 6x$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $A + B = 2x - y - 22$ .

β. Να λύσετε το σύστημα 
$$\begin{cases} A + B = 11 \\ \frac{y+1}{2} = 9 - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

γ. Αν  $(19, 5)$  η λύση του παραπάνω συστήματος, να ερμηνεύσετε γεωμετρικά αυτό το αποτέλεσμα.

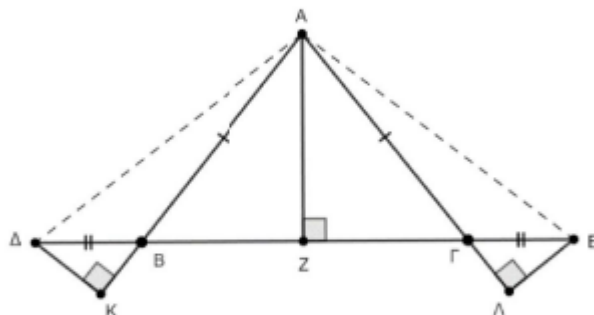
### ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Στις προεκτάσεις της βάσης  $B\Gamma$  παίρνουμε τα σημεία  $\Delta, E$  έτσι ώστε  $B\Delta=\Gamma E$ . Αν είναι  $\Delta K \perp AB$ ,  $E\Lambda \perp AG$  και  $AZ \perp B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι :

α. Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.

β. Τα τρίγωνα  $B\Delta K$  και  $\Lambda \Gamma E$  είναι ίσα.

γ. Τα τρίγωνα  $BK\Delta$  και  $\Lambda BZ$  είναι όμοια και να γράψετε τους αντίστοιχους ίσους λόγους που προκύπτουν.



### ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

α. Να απαντήσετε σε ένα (1) θέμα Θεωρίας και σε δύο (2) θέματα Ασκήσεων.

β. Να μεταφέρετε όλες τις απαντήσεις σας στην κόλλα αναφοράς.

## Διαγώνισμα 5

### ΘΕΜΑΤΑ

#### ΘΕΩΡΙΑ 1<sup>η</sup>

α) Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.

β) Πότε ένα τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό.

γ) Να απαντήσετε με **(Σ)** σωστή ή με **(Λ)** λανθασμένη στις παρακάτω προτάσεις.

1) Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$  και  $\gamma$  είναι ανάλογα προς τα τμήματα  $\beta$  και  $\delta$  όταν  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ .

2) Ισοσκελές λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.

3) Αμβλυγώνιο λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία αμβλεία.

#### ΘΕΩΡΙΑ 2<sup>η</sup>

α) Τι ονομάζεται ταυτότητα.

β) Να συμπληρώσετε τα αναπτύγματα στις παρακάτω ταυτότητες.

1)  $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

2)  $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

3)  $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

4)  $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**Οδηγία** Από τα **δύο θέματα θεωρίας** να απαντήσετε στο **ένα στην κόλλα αναφοράς**.

#### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{12}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8}}$  και το πολυώνυμο  $P(x)$  όπου

$$P(x) = (2x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2) - 3x(2x - 1).$$

α) Να δείξετε ότι  $P(x) = -3x^2 - x + 5$  και  $A = 2$ .

β) Να επιλύσετε την εξίσωση  $P(x) = 3A + (A + 1)x$ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η ρητή παράσταση  $B = \frac{-2A - 3x}{P(x) - 1}$

και κατόπιν να την απλοποιήσετε.

### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{y+2}{2} = 3 \\ \frac{2x-4}{2} - \frac{2+y}{4} = 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα παίρνει τη μορφή 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$$

β) Να επιλύσετε το σύστημα του ερωτήματος (α).

γ) Αν το ζεύγος  $(x, y)$  είναι η λύση του συστήματος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(2^3 \cdot y^5)^3}{64 \cdot y^{16}} + (x^{12} : y^{22}) + 2015.$$

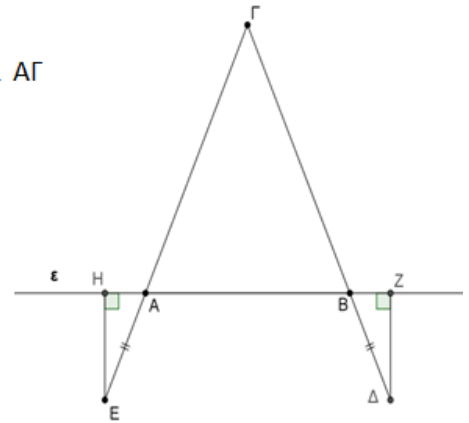
### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AG = BG$ ). Προεκτείνουμε τις  $GB$  και  $AG$  κατά ίσα τμήματα  $B\Delta = AE$ . Φέρνουμε  $\Delta Z \perp \epsilon$  και  $E\text{H} \perp \epsilon$  όπου  $\epsilon$  είναι η ευθεία της  $BA$ . Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα  $BZ\Delta$  και  $A\text{H}E$  είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα  $BZ\Gamma$  και  $\Gamma\text{H}A$  είναι ίσα.

γ) Το τρίγωνο  $Z\Gamma\text{H}$  είναι ισοσκελές.



**Οδηγία** Από τις τρεις ασκήσεις να απαντήσετε στις δύο στην κόλλα αναφοράς.

## Διαγώνισμα 6

### Θεωρία 1

α. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

(Μονάδες 2)

β. Να αποδείξετε ότι  $(a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2$

(Μονάδες 2,6)

γ. Να αντιστοιχίσετε τις παρακάτω ταυτότητες με τα αναπτύγματά τους:

(Μονάδες 2)

Ταυτότητες	Αναπτύγματα
1. $(x + y)^2$	α. $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
2. $(x - y)^3$	β. $x^2 + 2xy + y^2$
3. $(x - y)^2$	γ. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
4. $(x + y)^3$	δ. $x^2 - 2xy + y^2$

1	
2	
3	
4	

### Θεωρία 2

α. Να διατυπώσετε το κριτήριο ισότητας τριγώνων Γ-Π-Γ.

(Μονάδες 2,6)

β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

(Μονάδες 4)

- 1) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
- 2) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.
- 3) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- 4) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

## Άσκηση 1

α. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1)  $x^2 = 36$

(Μονάδες 1)

2)  $x(x + 4) = 0$

(Μονάδες 1)

β. Έστω η εξίσωση  $x^2 - 6x = -5$ .

1) Να βρείτε τις ρίζες τις.

(Μονάδες 4)

2) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 - 6x + 5$ .

(Μονάδες 0,7)

## Άσκηση 2

Δίνεται το σύστημα (Σ)  $\begin{cases} 3(x - y) + 2(x + y) = 2 \\ 2(x - y) + 5(x + y) = 16 \end{cases}$ .

α. Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι (Σ)  $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 7x + 3y = 16 \end{cases}$ .

(Μονάδες 2,7)

β. Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 4)

## Άσκηση 3

Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB, AG ισοσκελούς τριγώνου ABΓ θεωρούμε σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ και σημείο Ζ το σημείο τομής των ΒΕ, ΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

α.  $\hat{\Delta} = \hat{\text{E}}$

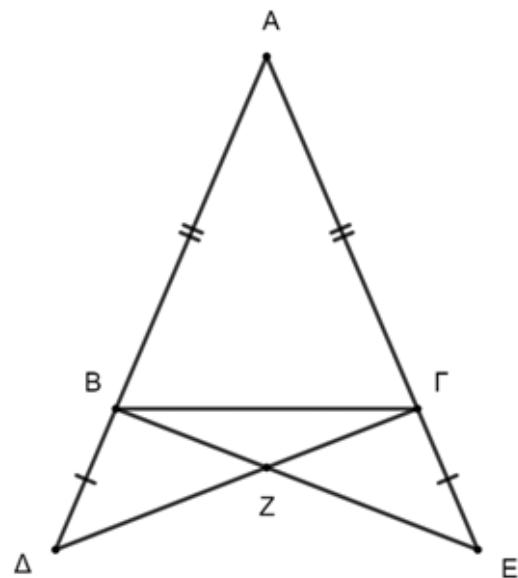
(Μονάδες 2)

β. Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα.

(Μονάδες 2)

γ. Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 2,7)



## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Να επιλέξετε μία από τις δύο θεωρίες και δύο από τις τρεις ασκήσεις.

## Διαγώνισμα 7

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Να αποδειχθούν οι ταυτότητες: i)  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

ii)  $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

iii) Να συμπληρώσετε την ταυτότητα  $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 6,7)

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

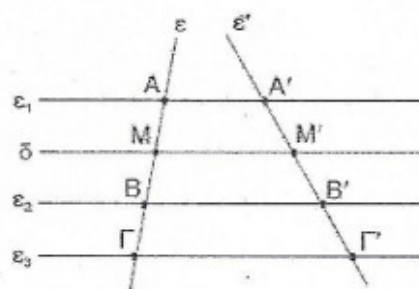
A. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.

B. Αν  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$  (βλέπε σχήμα), να συμπληρώσετε

τις ισότητες:  $\frac{AB}{BG} = \frac{AG}{\dots}$ ,

Γ. Αν  $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$  (βλέπε σχήμα), να συμπληρώσετε

τις ισότητες:  $\frac{AB}{BG} = \dots$  και  $\frac{AB}{AG} = \dots$



(Μονάδες 6,7)

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = (2x-1)^2 - (1-x)(2x-1)$ .

i) Να δείξετε ότι  $P(x) = 6x^2 - 7x + 2$ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

iii) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο  $P(x)$ .

(Μονάδες 6,7)

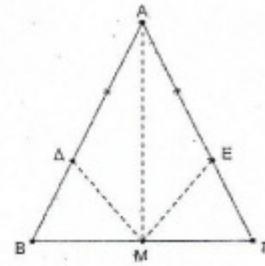
### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και το μέσον  $M$  της βάσης  $B\Gamma$ . Αν  $\Delta$  σημείο της  $AB$  και  $E$  σημείο της  $AG$  τέτοια ώστε  $A\Delta=AE$  να δείξετε ότι: i) τα τρίγωνα  $ABM$  και  $AGM$  είναι ίσα

ii) τρίγωνα  $A\Delta M$  και  $AEM$  είναι ίσα

iii) τα ευθύγραμμα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 6,7)



### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

i) Να λύσετε το σύστημα με όποια μέθοδο θέλετε: 
$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ x + 2y = 20 \end{cases} \quad \text{και}$$

ii) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $K$  είναι ίση με 2023 ( $K=2023$ ), όπου  $K = (x - 3y)^2 + 1923$  και  $x, y$  οι λύσεις του παραπάνω συστήματος.  
(Μονάδες 6,7)

**Προσοχή!** Να γράψετε μόνο 1 θεωρία και μόνο 2 ασκήσεις στην κόλλα σας και όχι στη φωτοτυπία.



## Διαγώνισμα 8

Από τα δύο (2) θέματα θεωρίας να απαντήσετε στο ένα (1)

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

**B.** Να συμπληρώσετε τις επόμενες ταυτότητες:

1.  $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

2.  $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$

**Γ.** Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της στήλης Α με ένα μόνο αριθμό της στήλης Β, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις. Τις αντιστοιχίσεις να τις γράψετε στο δεύτερο πίνακα (ένα στοιχείο της στήλης Β περισσεύει).

	ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
α.	$(\beta - \alpha) \cdot (\alpha + \beta)$	1.	$(\alpha + \beta)^2$
β.	$(\beta - \alpha)^2$	2.	$\beta^2 - \alpha^2$
γ.	$(-\alpha - \beta)^2$	3.	$-(\alpha + \beta)^2$
		4.	$(\alpha - \beta)^2$

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**A.** Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την ..... γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις ..... στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
3. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις ..... μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.
4. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο ..... πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
5. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία ..... και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες τότε είναι ίσα.

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λ αν είναι λανθασμένη.

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
2. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ίσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Από τις (3) ασκήσεις να λύσετε τις δύο (2)**

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 3x - 4 = 0$

**B.** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 - 3x - 4$

**Γ.** Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$$

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**A.** Να λύσετε το σύστημα

$$(\Sigma_1): \begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x+3y}{3} = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

**B.** Αν η λύση του συστήματος  $\Sigma_1$  στο ερώτημα (A) είναι  $(x, y) = (6, -2)$

να εξετάσετε αν η λύση αυτή είναι και λύση του συστήματος  $\Sigma_2$ .

$$(\Sigma_2): \begin{cases} 2x - y = 14 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Στο παρακάτω σχήμα είναι  $AB \parallel ZH \parallel \Gamma\Delta$ ,  $EH = EG = 4\text{cm}$ ,  $AB = 6\text{cm}$  και  $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$ .

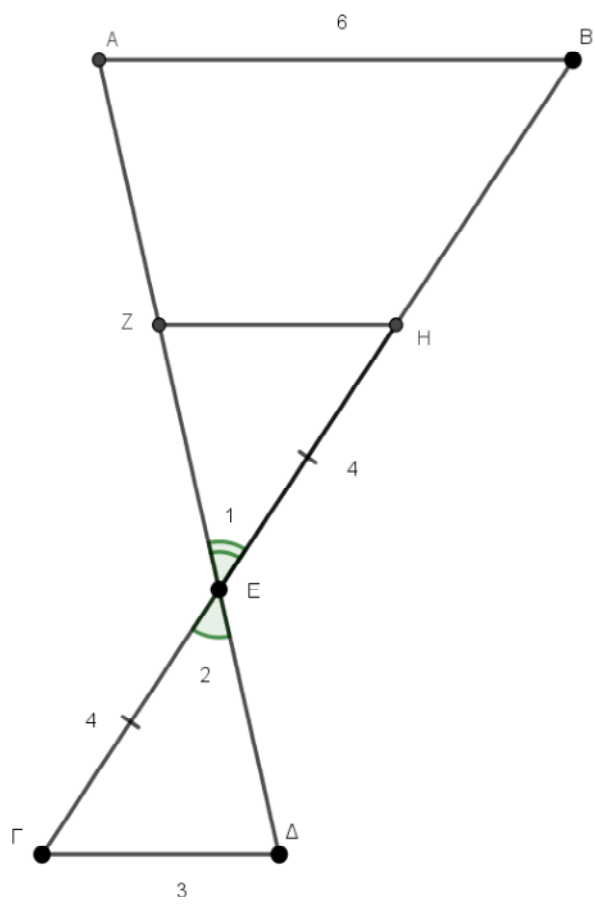
**A.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $EZH$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι ίσα και να συμπληρώσετε τις ισότητες  $ZE = \dots$  και  $ZH = \dots$

**B.** Να δείξετε τα τρίγωνα  $ABE$  και  $ZEH$  είναι όμοια και να συμπληρώσετε τους παρακάτω λόγους

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{AE}{\dots} = \frac{EB}{\dots}$$

**Γ.** Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων  $ABE$  και  $ZEH$ ;

**Δ.** Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $EB$ .



## Διαγώνισμα 9

Να απαντήσετε σε ΕΝΑ ΜΟΝΟ θέμα θεωρίας

### Θεωρία 1

A) Να συμπληρώσετε τις ισότητες ώστε να προκύψουν αξιοσημείωτες ταυτότητες. (3x0,8 μονάδες)

$$\alpha) (a - b)^3 = \quad \beta) (a - b)^2 = \quad \gamma) (a + b)(a - b) =$$

B) Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . (2,4 μονάδες)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες. (5x0,4 μονάδες)

α) Η παράσταση  $2 + x^3y$  είναι μονώνυμο.

β) Το πηλίκο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.

γ) Ο βαθμός του πολυωνύμου  $3x^2y^5 + 2xy^4 - 5xy^3$  ως προς x και y είναι 7.

δ) Το γινόμενο των μονωνύμων  $x^3$  και  $5x^3$  είναι μονώνυμο 9<sup>ου</sup> βαθμού.

ε) Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

### Θεωρία 2

A) Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή.

(2,4 μονάδες)

B) Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

(2,4 μονάδες)

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες.

(5x0,4 μονάδες)

α) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μια προς μια.

β) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

δ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και δύο γωνίες ίσες μια προς μια τότε είναι ίσα.

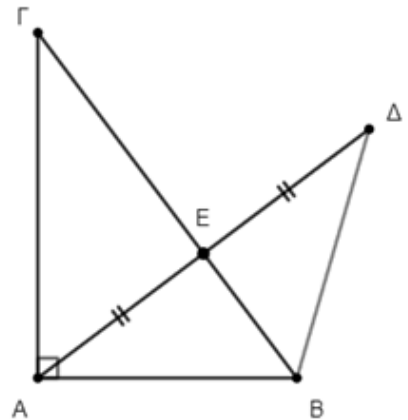
Να απαντήσετε σε ΔΥΟ ΜΟΝΟ ασκήσεις

### Άσκηση 1

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε το ύψος  $AE$  και το προεκτείνουμε κατά τμήμα  $E\Delta = AE$ .

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta BE$  είναι ίσα. Τι τρίγωνο είναι το  $AB\Delta$  ως προς τις πλευρές του; (μονάδες 3,6)

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους των αντίστοιχων πλευρών τους. (μονάδες 3)



### Άσκηση 2

α) Να λύσετε το σύστημα 
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{x}{6} + 1 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$
 (μονάδες 2,8)

β) Ένα ξενοδοχείο έχει 47 δωμάτια από τα οποία κάποια είναι δίκλινα και κάποια είναι τρίκλινα, ενώ έχει συνολικά 109 κρεβάτια. Πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα τα τρίκλινα δωμάτια;

(μονάδες 2,8)

γ) Το ζευγάρι λύσεων του (β) ερωτήματος είναι λύση και του συστήματος στο (α) ερώτημα;

(μονάδα 1)

### Άσκηση 3

α) Να αποδείξετε ότι

(μονάδες 1,6)

$$(x+3)^2 - (x-2)^3 + x^2(x-1) - 5(x^2+1) - 2x = x^2 - 8x + 12$$

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

(μονάδες 1,6)

γ) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$$x^2 - 8x + 12 \quad \text{και} \quad x^2 - 4.$$

(μονάδες 1,7)

δ) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x^2 - 8x + 12}$$

(μονάδες 1,7)

## Διαγώνισμα 10

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΩΡΙΑ 1<sup>η</sup>

A) Τι λέγεται μονώνυμο; Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια;

(1,5 μονάδα)

B) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες, ώστε να είναι αληθείς:

(2 μονάδες)

α)  $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) = \dots\dots\dots$

β)  $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

γ)  $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

δ)  $(-\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

Γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα β) του ερωτήματος B.

(1 μονάδα)

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(2,1 μονάδες)

α) Το μηδενικό μονώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

β) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί είναι μονώνυμα.

γ) Ο αριθμός -10 είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

#### ΘΕΩΡΙΑ 2<sup>η</sup>

A) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή (να κάνετε και το αντίστοιχο σχήμα).

(3,1 μονάδες)

B) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(3,5 μονάδες)

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

β) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

γ) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια.

ε) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ίσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Δίνεται η παράσταση  $A = (3 - 2x)^2 + (3 - x)(3 + x) - 2x(x - 1) + 6$

- A)** Να δείξετε ότι:  $A = x^2 - 10x + 24$  (2 μονάδες)  
**B)** Να λυθεί η εξίσωση  $A = 0$  (2 μονάδες)  
**Γ)** Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο  $A = x^2 - 10x + 24$  (1 μονάδα)  
**Δ)** Να απλοποιηθεί η παράσταση  $B = \frac{A}{x^3 - 4x^2 + 6x - 24}$  (1,7 μονάδες)

### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} 3x(3x + 1) + 3y = (3x + 1)^2 - x - 8 \\ \frac{2x+2y}{3} - \frac{x-2y+5}{2} = 0 \end{cases}$  (Σ).

- A)** Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 10y = 15 \end{cases}$  (2,5 μονάδες)  
**B)** Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 10y = 15 \end{cases}$  (2,5 μονάδες)

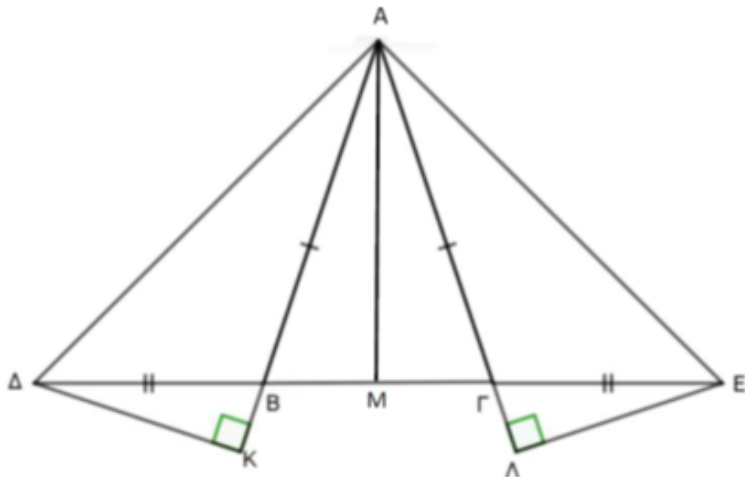
**Γ)** Αν η λύση του συστήματος του προηγούμενου ερωτήματος είναι  $(x, y) = (5, 1)$ , τότε να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:

$$\Gamma = \frac{\alpha x}{\alpha - \beta} + \frac{5\beta y}{\beta - \alpha} + 2018y, \text{ με } \alpha \neq \beta. \quad (1,7 \text{ μονάδες})$$

### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ έτσι, ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ .

- A)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (2 μονάδες)  
**B)** Αν  $\Delta K \perp AB$  και  $E\Lambda \perp A\Gamma$  να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΔ και ΕΛΓ είναι ίσα. (2 μονάδες)  
**Γ)** Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, τότε να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΕΛΓ και ΑΜΓ είναι όμοια. Έπειτα να γράψετε τους λόγους ομοιότητας. (2,7 μονάδες)



# Διαγώνισμα 11

## ΘΕΩΡΙΑ

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

A. Να συμπληρώσετε τις ισότητες ώστε να προκύψουν αξιοσημείωτες ταυτότητες

- i.  $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$
- ii.  $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots$
- iii.  $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$  (Μονάδες 3)

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα :  $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$  (Μονάδες 1,66)

Γ. Σημειώστε (Σ) δίπλα σε κάθε σωστή πρόταση και (Λ) δίπλα σε κάθε λανθασμένη :

- i.  $(-\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$
- ii.  $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + \lambda^2$  (Μονάδες 2)

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

A. Να διατυπώσετε δύο (2) από τα τρία (3) κριτήρια ισότητας τριγώνων. (Μονάδες 1,66)

- B. Συμπληρώστε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- i. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος από την κορυφή προς την βάση του, είναι και ..... και .....
  - ii. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ..... από τα άκρα του.
  - iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν 2 γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ..... (Μονάδες 3)

Γ. Σημειώστε (Σ) δίπλα σε κάθε σωστή πρόταση και (Λ) δίπλα σε κάθε λανθασμένη :

- i. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο (2) γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο (2) πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες τους πλευρές ίσες. (Μονάδες 2)



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Δίνεται η εξίσωση :  $x^2 + 6 \cdot x - 16 = 0$

A. Να λύσετε την εξίσωση :  $x^2 + 6 \cdot x - 16 = 0$  (Μονάδες 2,22)

B. Να λύσετε την ανίσωση  $x - 2 \leq \frac{x-1}{2}$  και να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης που βρήκατε στο ερώτημα (A), είναι και λύσεις της ανίσωσης. (Μονάδες 2,22)

Γ. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 + 6 \cdot x - 16$  και να απλοποιήσετε το κλάσμα  $K = \frac{2 \cdot x^2 - 8}{x^2 + 6 \cdot x - 16}$ . (Μονάδες 2,22)

### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Δίνεται το σύστημα :  $(\Sigma) \begin{cases} (1-x) \cdot (1+x) - 3 \cdot (y-x) + (x-1)^2 = 4 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y+x}{3} \end{cases}$

A. Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι το σύστημα  $(\Sigma)$ , παίρνει τη μορφή :

$$(\Sigma 1) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad (\text{Μονάδες } 2,5)$$

B. Να λύσετε το σύστημα  $(\Sigma 1)$  :  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$  (Μονάδες 2,5)

Γ. Να εξετάσετε αν η ευθεία  $\varepsilon_3 : 3 \cdot x - 2 \cdot y = -29$ , διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών :  $\varepsilon_1 : x - 3 \cdot y = 2$  και  $\varepsilon_2 : x - 2 \cdot y = -3$ . (Μονάδες 1,66)

### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

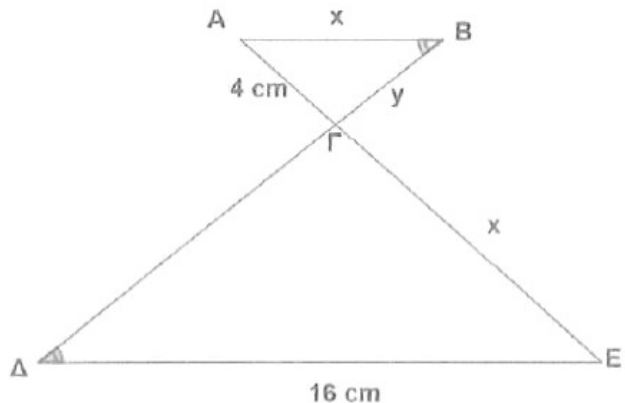
Στο διπλανό σχήμα είναι  $\hat{B} = \hat{D}$ ,  $A\Gamma = 4 \text{ cm}$ ,  $\Delta E = 16 \text{ cm}$ ,  $AB = \Gamma E = x \text{ cm}$ .

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta E$  είναι όμοια και να συμπληρώσετε τους λόγους :

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{A\Gamma}{\dots} = \frac{B\Gamma}{\dots} \quad (\text{Μονάδες } 2,22)$$

B. Να υπολογίσετε το μήκος  $x$ . (Μονάδες 2,22)

Γ. Αν  $B\Delta = 15 \text{ cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος  $y$ . (Μονάδες 2,22)



**ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΕΝΑ (1) ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΕ ΔΥΟ (2) ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

# Διαγώνισμα 12

## ΘΕΩΡΙΑ

Να απαντήσετε στην κόλλα σας σε ένα μόνο από τα δύο θέματα θεωρίας που ακολουθούν.

### ΘΕΜΑ 1

α. Τι ονομάζουμε ταυτότητα;

Μονάδες: 2

β. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Μονάδες: 2

γ. Να συμπληρώσετε τα αναπτύγματα των παρακάτω ταυτοτήτων:

$$(\alpha - \beta)^2 =$$

$$(\alpha + \beta)^3 =$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) =$$

Μονάδες: 3

### ΘΕΜΑ 2

α. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Μονάδες: 2

β. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις και συμπληρώσετε τα κενά που υπάρχουν σε αυτές:

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την \_\_\_\_\_ γωνία τους ίση, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις \_\_\_\_\_ στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Μονάδες: 2

γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
3. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες

Μονάδες: 3

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να δώσετε στην κόλλα σας τη λύση για δύο (2) μόνο από τις τρεις (3) ασκήσεις που ακολουθούν.

### ΑΣΚΗΣΗ 1

α. Να κάνετε τις πράξεις ώστε να φέρετε την εξίσωση  $(2x - 1)^2 - 3(x - 1) = 1$  στη μορφή  $4x^2 - 7x + 3 = 0$  και στη συνέχεια να τη λύσετε.

Μονάδες: 3,5

β. Αφού παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$4x^2 - 7x + 3$$

$$16x^2 - 9$$

$$x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - x$$

να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε την παράσταση:  $K = \frac{16x^2 - 9}{4x^2 - 7x + 3} : \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$

Μονάδες: 3

### ΑΣΚΗΣΗ 2

α. Να κάνετε τις πράξεις ώστε να φέρετε το σύστημα 
$$\begin{cases} x - \frac{x-y}{3} = 5 - 2y \\ 1 - \frac{2x-3y}{5} = \frac{x+6}{10} - y \end{cases}$$

στη μορφή 
$$\begin{cases} 2x + 7y = 15 \\ -5x + 16y = -4 \end{cases}$$

Μονάδες: 2,5

β. Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x + 7y = 15 \\ -5x + 16y = -4 \end{cases}$$

Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη σχετική θέση των ευθειών  $\epsilon_1: 2x + 7y = 15$  και  $\epsilon_2: -5x + 16y = -4$

Μονάδες: 4

### ΑΣΚΗΣΗ 3

α. Δίνεται το σημείο  $M(-8, 6)$ . Να σχεδιάσετε τη γωνία  $\omega = \widehat{xOM}$  σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$  και  $\epsilon\phi\omega$ .

Μονάδες: 3

β. Αν για τη γωνία  $\omega$  του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει:  $\sigma\omega = -\frac{4}{5}$  και  $\epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4}$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{8\eta\mu 30^\circ - 2\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + 3\epsilon\phi^2 30^\circ + 7\sigma\upsilon\nu 90^\circ}{4\epsilon\phi\omega - 2\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \epsilon\phi 45^\circ - 5\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Μονάδες: 3,5

## Διαγώνισμα 13

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Β. Να αντιγράψετε στο φύλλο απαντήσεων τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α.  $(\alpha \dots \beta)^2 = \dots - 2\alpha\beta + \dots$

β.  $(\alpha - \beta)^3 = \dots$

γ.  $\dots = \alpha^2 - \beta^2$

Γ. Δίνεται το μονώνυμο  $x^3y$

α) Ο βαθμός του μονωνύμου  $x^3y$  ως προς  $x$  είναι .....

β) Ο συντελεστής του μονωνύμου  $x^3y$  είναι .....

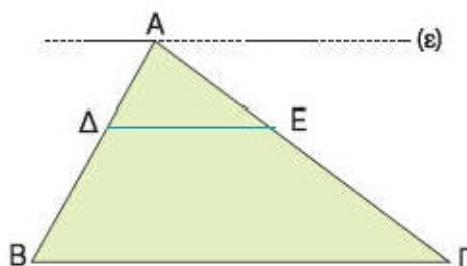
γ) Το αντίθετο μονώνυμο του μονωνύμου  $x^3y$  είναι .....

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Α. Να διατυπώσετε την πρόταση που είναι γνωστή ως θεώρημα του Θαλή.

Β. Στο διπλανό σχήμα ισχύει  $\varepsilon // \Delta E // B\Gamma$ .

Να εφαρμοστεί το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο αυτό.



Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

β) Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων τριγώνων, είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

γ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται εξίσωση  $(x + 3)^2 - 6x - 1 = (2 - x)^2 - (x - 1) \cdot (x + 1)$

**A.** Να κάνετε τις πράξεις και να αποδείξετε ότι η εξίσωση γίνεται  $x^2 + 4x + 3 = 0$

**B.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 + 4x + 3 = 0$

**Γ.** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση  $x^2 + 4x + 3$

### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{x + 1}{3} + y = 1 \\ 5 \cdot (x + 2y) - (3x + 13y) = 13 \end{cases}$$

**A.** Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή:  $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

**B.** Να λύσετε το σύστημα:  $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases}$

### ΘΕΜΑ 3°

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν:

$AB = BE$ ,  $\hat{Z} = 90^\circ$ ,  $\widehat{BAG} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Delta} = 90^\circ$

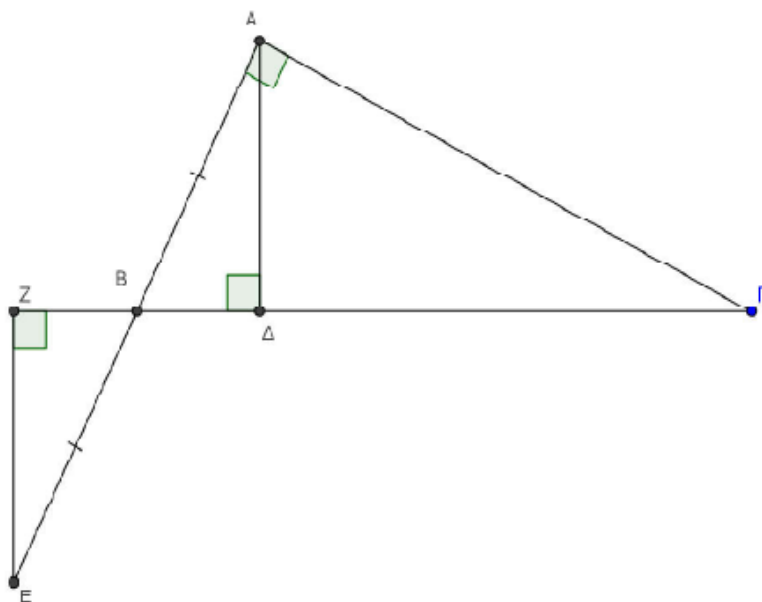
**A.** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $BZE$

και να δείξετε ότι  $ZB = B\Delta$

**B.** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα

$AB\Gamma$  και  $ZBE$  είναι όμοια.

**Γ.** Αν  $AB = 4$ ,  $B\Gamma = 8$  και  $BE = 4$  να υπολογίσετε τη  $BZ$ . (Χρησιμοποιείστε το (β) ερώτημα).



### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

- Από τα δύο θέματα θεωρίας να απαντήσετε μόνο στο ένα
- Από τα τρία θέματα ασκήσεων να απαντήσετε μόνο στα δύο
- Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.

## Διαγώνισμα 14

Να απαντήσετε 1 θέμα θεωρίας και 2 ασκήσεις.

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1

- A. Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:  $(a+\beta)^2 = \dots\dots\dots$  και  $(a+\beta)(a-\beta) = \dots\dots\dots$
- B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$
- Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της στήλης A με έναν αριθμό της στήλης B, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

Στήλη A	Στήλη B
A. $(-a-\beta)(-a+\beta)$	1. $-a^2 + \beta^2$
B. $(a-\beta)^3$	2. $(a-\beta)^2$
Γ. $(-a+\beta)(-a+\beta)$	3. $a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$
Δ. $\beta^2 + 2a\beta + a^2$	4. $a^2 - \beta^2$
	5. $a^3 - \beta^3$
	6. $(a+\beta)^2$

#### ΘΕΜΑ 2

- A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
- Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
  - Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε θα είναι ίσα.
  - Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
  - Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
  - Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη πλευρά τους ίση.
  - Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

- i) Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 + x - 6 = 0$ .
- ii) Να κάνετε τις πράξεις και στη συνέχεια να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} : \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$$

- iii) Να λύσετε την εξίσωση  $(2x - 1)^2 - (x - 3)^2 = (x + 1)(2x - 1) - 1$

### ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται τα συστήματα:

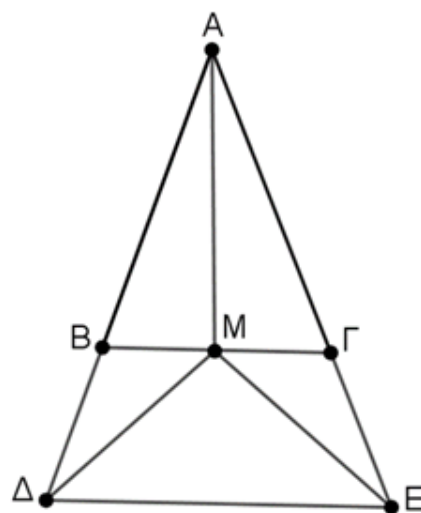
$$(\Sigma 1) \begin{cases} 2\alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 6 \end{cases}$$

$$(\Sigma 2) \begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = 5 \\ \frac{2x+5}{3} - \frac{y+1}{4} = 3 \end{cases}$$

Να λύσετε τα συστήματα και αν  $(\alpha, \beta)$  είναι η λύση του  $(\Sigma 1)$  και  $(x, y)$  είναι η λύση του  $(\Sigma 2)$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = (\alpha + \beta)x - (\alpha - \beta)y$

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με βάση  $B\Gamma$ . Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές του  $AB$  και  $A\Gamma$  κατά ίσα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $AM E$  είναι ίσα και στη συνέχεια να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta M E$  είναι ισοσκελές.



## Διαγώνισμα 15

### ΘΕΩΡΙΑ 1<sup>η</sup>

A. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

B. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

i)  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$  Σ    Λ

ii)  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$  Σ    Λ

iii)  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$  Σ    Λ

### ΘΕΩΡΙΑ 2<sup>η</sup>

A. Να διατυπώσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

B. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως **Σωστή (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**

i) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σ    Λ

ii) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα ίσα. Σ    Λ

iii) Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία. Σ    Λ

iv) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες Σ    Λ



### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Έστω το πολυώνυμο  $A(x) = (x+1)^2 + (x+3) \cdot (x-3) + (2x-1)^2 - 5(x^2-2) - 2x$

A. Να αποδείξετε ότι  $A(x) = x^2 - 4x + 3$

B. Να λυθεί η εξίσωση  $A(x) = 0$

Γ. Να απλοποιηθεί το κλάσμα  $\frac{A(x)-3}{x^2-16}$

### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$$

A. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα ισοδύναμα γίνεται:

$$\begin{cases} -x + 5y = -3 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

B. Επιλέξτε όποια μέθοδο επιθυμείτε και λύστε το σύστημα του ερωτήματος A.

### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ , να υπολογίσετε:

A. Το  $\sigma\upsilon\nu\omega$  και την  $\epsilon\phi\omega$ .

B. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της παραπληρωματικής της  $\omega$ .

#### **ΟΔΗΓΙΕΣ**

- i.) Να απαντήσετε στην κόλλα σας **μόνο σε ένα θέμα θεωρίας** από τα δύο και **σε δύο ασκήσεις** από τις τρεις.
- ii.) Όλες οι απαντήσεις θα δοθούν πάνω στην κόλλα αναφοράς.
- iii.) Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας και τον αριθμό καταλόγου στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμία άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε πάνω στην φωτοτυπία.

## Διαγώνισμα 16

Θεωρία

Θέμα 1

A1. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

A2Να σημειώσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες ταυτότητες.

A2α.  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

A2β.  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

A3β.  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Θέμα 2

B1 Να διατυπώσετε δυο κριτήρια ισότητας τριγώνων.

B 2Να σημειώσετε με Σ τις σωστές και με Λ τις λανθασμένες προτάσεις.

B2α Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

B2βΑν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.

B2γΑν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μία τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση .

Θέμα 1

Δίνεται η εξίσωση

$$(x-1)^2 - (1-2x)(1+2x) = 1 - (1-3)x$$

A. Να εκτελέσετε τις πράξεις έτσι ώστε να καταλήξετε στην εξίσωση

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

B. Να λύσετε την εξίσωση

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

Θέμα 2

Να λύσετε το σύστημα με όποια μέθοδο επιθυμείτε

$$x - 2y = -3$$

$$2x + y = 4$$

Θέμα 3

Αν για την αμβλεία γωνία ισχύει  $\sin \omega = -\frac{12}{13}$  τότε να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ , ημ $\omega$ , εφ $\omega$

Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε το ένα και από τα τρία θέματα των ασκήσεων να επιλέξετε τα δύο . θέματα ισοδύναμα

## Διαγώνισμα 17

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

**A)** Τι ονομάζουμε **μονώνυμο**; Ποια μονώνυμα λέγονται **όμοια**; **Μονάδες 2**

**B) i)** Να αποδείξετε ότι:  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$  **Μονάδα 1**

**ii)** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες : **Μονάδες 1.6**

$$(\alpha + \beta)^3 =$$

$$(-\alpha - \beta)^2 =$$

$$(-\alpha + \beta)(-\alpha - \beta) =$$

**Γ)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, στην κόλλα σας:

1. Τα μονώνυμα  $x^5y^3\omega^4$  και  $-x^5\omega^4y^3$  είναι αντίθετα.
2. Αν το **A(X)** είναι πολυώνυμο 4<sup>ου</sup> βαθμού και το **B(X)** είναι πολυώνυμο 5<sup>ου</sup> βαθμού, τότε το **A(X)·B(X)** είναι 20<sup>ου</sup> βαθμού.
3. Η αλγεβρική παράσταση:  $2\alpha^2\beta^3 + \sqrt{3}\alpha^3\beta^2$  είναι πολύωνυμο.
4. Όλα τα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.
5. Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν. **Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

**A)** Να διατυπώσετε το **θεώρημα Θαλή** και να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα.

**Μονάδες 2.6**

**B)** Πότε δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια**;

**Μονάδες 2**

**Γ)** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, στην κόλλα σας:

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
2. Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.
3. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
4. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου.
5. Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια. **Μονάδες 2**

### ΑΣΚΗΣΗ 1<sup>η</sup>

Α) Να λύσετε την εξίσωση :  $\chi^2 - 3\chi + 2 = 6$  .

Μονάδες 3

Β) Να λύσετε το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2\alpha + \chi_1\beta = -9 \\ \alpha - 2\chi_2\beta = \chi_1 + \chi_2 \end{cases}$$

με οποιαδήποτε μέθοδο, όπου:  $\chi_1 = -1$  και  $\chi_2 = 4$  .  
οι λύσεις της εξίσωσης του Α ερωτήματος.

Μονάδες 3,7

### ΑΣΚΗΣΗ 2<sup>η</sup>

Α) Δίνονται οι παραστάσεις:

Μονάδες 3,7

$$M = \chi(\chi + 2) - (\chi + 1)(\chi - 1) - 2(\chi - 2)$$

$$N = (\chi - 2)^3 + \chi^2(5 - \chi) + 9 - 12\chi$$

Να αποδείξετε ότι:  $M=5$  και  $N=-\chi^2 + 1$  και να λυθεί η εξίσωση:  $M - 2 = -N$

Β) Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω πολυώνυμα:

Μονάδες 3

$$K = \chi^3 + \chi^2 - 4\chi - 4 \quad , \quad A = \chi^2 - 9 \quad , \quad \Phi = 3\chi^2 - 6\chi + 3$$

### ΑΣΚΗΣΗ 3<sup>η</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ  
( $AB=AG$ ) όπως φαίνεται στο διπλανό  
σχήμα.

Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημεία Δ  
και Ε έτσι ώστε  $BD=GE$ .

Α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABD$  και  
 $AGE$  είναι **ίσα** και να γράψετε τα  
αντίστοιχα στοιχεία τους.

Μονάδες 3

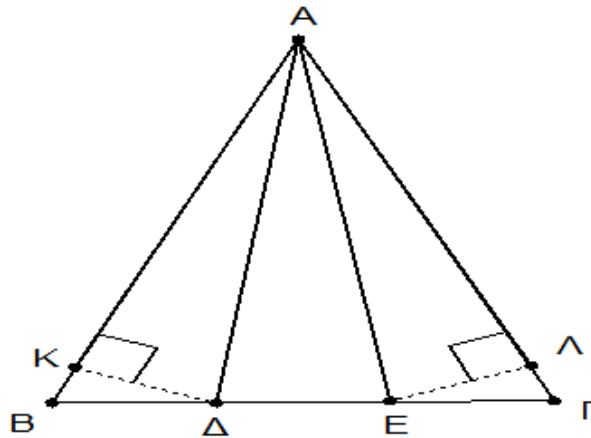
Β) Να φέρετε  $DK \perp AB$  και  $EL \perp AG$ .  
Να δείξετε ότι  $DK=LE$ .

Μονάδες 2

Γ) Αν η γωνία  $\widehat{KDA} = 60^\circ = \widehat{\omega}$

να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης: Μονάδες 1,7



$$A = \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) - \eta\mu(180^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu 90^\circ + \frac{1}{2\sqrt{3}}\epsilon\phi 60^\circ$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Να απαντήσετε σε ένα θέμα θεωρίας και σε δύο θέματα ασκήσεων!!  
Τα θέματα είναι ισοδύναμα!

## Διαγώνισμα 18

### ΘΕΩΡΙΑ

(να επιλέξετε το **A** ή το **B**)

**A)** Να συμπληρώσετε και να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^2 =$$

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας τα στοιχεία της στήλης A με εκείνα της στήλης B.

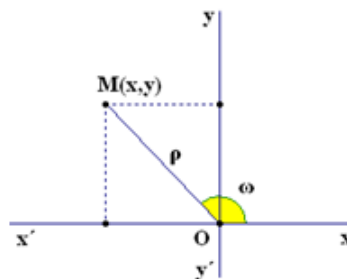
A		B	
α	$(\alpha + \beta)^2$	1	$\alpha^2 - \beta^2$
β	$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$	2	$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
γ	$(\alpha - \beta)^2$	3	$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
δ	$(\alpha + \beta)^3$	4	$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
ε	$(\alpha - \beta)^3$	5	$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

α	β	γ	δ	ε

**B)** α. Με βάση το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \frac{\square}{\square} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\square}{\square}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\square}{\square} \quad \rho =$$



β. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

## **ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

(να επιλέξετε **δύο** από τις τρεις ασκήσεις)

- 1) Δίνεται η παράσταση:  $A(x) = (x + 3)^2 + (x - 1)(x + 1) - (x - 2)^2 - 5x$   
**α.** Να αποδείξετε ότι  $A(x) = x^2 + 5x + 4$ .  
**β.** Να λυθεί η εξίσωση  $A(x) = 0$ .

- 2) Δίνεται το σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{x+\psi}{2} - \frac{x+3\psi}{5} = \frac{-7}{10} \\ 2(2x - \psi) - 5 = 3(x - \psi - 2) \end{cases}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα μπορεί να πάρει τη μορφή:

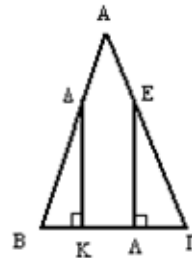
$$\begin{cases} 3x - \psi = -7 \\ x + \psi = -1 \end{cases}$$

**β.** Να λύσετε το σύστημα του ερωτήματος **α**.

- 3) Στις ίσες πλευρές,  $AB, AG$  ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τα σημεία  $\Delta, E$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $A\Delta = AE$ .

**α.** Να δείξετε ότι ισαπέχουν από τη  $B\Gamma$ . (δηλαδή να δείξετε ότι  $\Delta K = E\Lambda$ )

**β.** Να αποδείξετε ότι  $AK = AL$  (Να φέρετε τα  $AK, AL$ )



**Βαθμολογία θεμάτων:** Κάθε θέμα θεωρίας βαθμολογείται με **6,66** μονάδες και κάθε άσκηση με **6,67** μονάδες.

**Να απαντήσετε σε ΕΝΑ από τα θέματα της θεωρίας και σε ΔΥΟ από τις τρεις ασκήσεις**

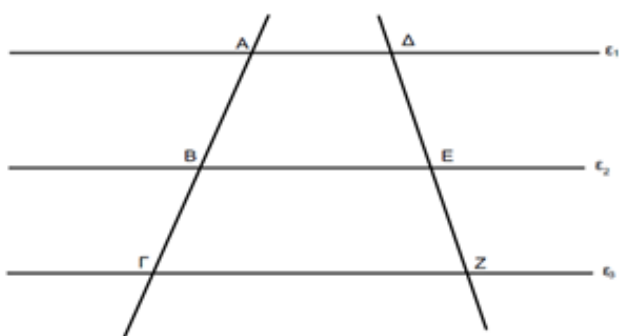
## Διαγώνισμα 19

### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- a) Να αποδείξετε την ισότητα  $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- b) Να συμπληρώσετε τα κενά που ακολουθούν ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
- $(\alpha-\beta)^2 = \dots - \dots + \dots$
  - $(x+y)(x-y) = \dots - \dots$
  - $(x+y)^3 = \dots + \dots + 3xy^2 + \dots$
  - $(2x+3y)(3y-2x) = \dots - \dots$
  - $(-\alpha+\beta)^2 = \dots - \dots + \dots$
  - $(-\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 \dots 2\alpha\beta \dots \beta^2$

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

- a) Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;
- b) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει  $\epsilon_1 // \epsilon_2 // \epsilon_3$ .



Σύμφωνα με το Θεώρημα του Θαλή, να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

$$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{BZ} = \frac{A\Gamma}{\square}$$

- c) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Δύο οποιαδήποτε ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.
  - Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν την μία προσκείμενη στην βάση γωνία  $50^\circ$ , είναι όμοια.
  - Σε δύο όμοια τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται το πολυώνυμο  $A(x) = (1-2x)^2 - 2(x-1)(x+1) - 4x + 5$ .

- Να γίνουν οι πράξεις και να αποδειχθεί ότι  $A(x) = 2x^2 - 8x + 8$ .
- Να λυθεί η εξίσωση  $A(x) = 0$ .
- Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση  $A(x)$ .

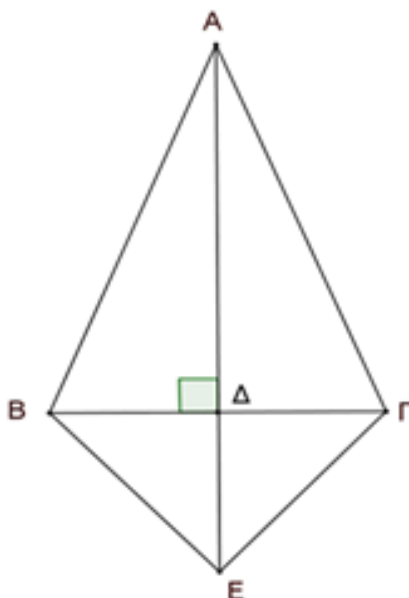
### ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y+2x+2}{4} = \frac{2-x}{5} \\ \frac{x-1}{3} = \frac{3x+2y}{5} - \frac{11+x}{15} \end{cases}$$

- Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα 
$$\begin{cases} 4x - 5y = 8 \\ -3x - 6y = -6 \end{cases}$$
- Να λύσετε το σύστημα.

### ΘΕΜΑ 3°

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ( $AB=AG$ ). Από την κορυφή  $A$  φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στην πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  ( $A\Delta \perp B\Gamma$ ) και στην προέκταση της  $A\Delta$  παίρνουμε τυχαίο σημείο  $E$ .



Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι ίσα.
- Οι γωνίες  $BA\Delta$  και  $GA\Delta$  είναι ίσες.
- Τα τρίγωνα  $ABE$  και  $AGE$  είναι ίσα.



## Διαγώνισμα 20

### ΘΕΩΡΙΑ

#### ΘΕΜΑ 1<sup>0</sup>

α) Τι λέγεται ταυτότητα;

β) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \dots\dots (\alpha - \beta)^3 = \dots\dots$$

γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

#### ΘΕΜΑ 2<sup>0</sup>

α) Να διατυπώσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- i. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες είναι ίσα.
- ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.
- iii. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μια προς μια είναι ίσα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1<sup>0</sup>

Δίνεται η εξίσωση:  $(2x-1)^2 = (x+1) \cdot (2 \cdot x - 5) + 12$

α) Αφού φέρετε την παραπάνω εξίσωση στην μορφή  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  να βρείτε τους συντελεστές της  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και την διακρίνουσα της  $\Delta$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $2 \cdot x^2 - x - 6 = 0$

### ΘΕΜΑ 2<sup>0</sup>

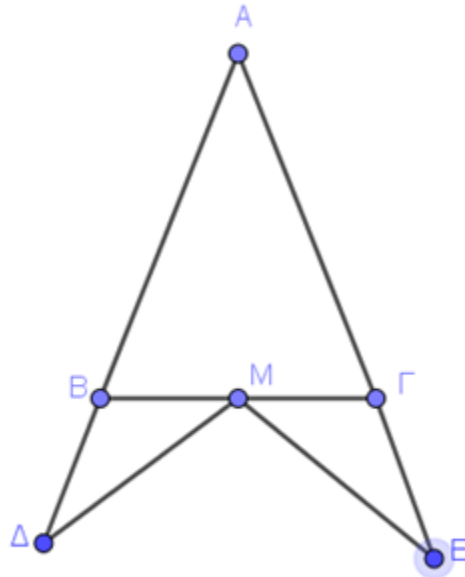
α) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2 \cdot x - 3 \cdot y = 11 \\ -x + \frac{2}{3} \cdot y = -3 \end{cases}$$

β) Αν  $(x, y)$  είναι η λύση του συστήματος του ερωτήματος α) να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:  $A = 4 \cdot (x - 8 \cdot y)^2 - 477$

**ΘΕΜΑ 3<sup>0</sup>**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών  $AB$  και  $AG$  παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  έτσι ώστε  $B\Delta=\Gamma E$ . Αν  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$  να αποδείξετε ότι  $\Delta M = ME$ .



**ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 1 ΘΕΜΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΕ 2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ.**

## Διαγώνισμα 21

### ΘΕΩΡΙΑ

Να απαντήσετε σε 1 από τα 2 θέματα θεωρίας

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

- A)** 1) Τι ονομάζεται μονώνυμο ;  
2) Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια και ποια αντίθετα ;  
3) Τι λέγεται μηδενικό πολυώνυμο;

**B)** Να συμπληρωθούν οι ταυτότητες:

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = \dots\dots\dots$$

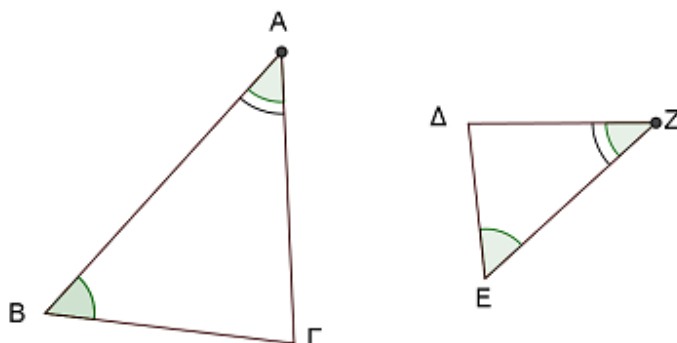
$$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

**Γ)** Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 .$$

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

- B1.** Να γράψετε το κριτήριο ομοιότητας δύο τριγώνων.  
**B2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**):  
i. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντα όμοια.  
ii. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.  
iii. Δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντα ίσα.  
iv. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας.  
**B3.** Στο παρακάτω σχήμα, τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι όμοια. Αν γνωρίζετε ότι  $\hat{A} = \hat{Z}$  και  $\hat{B} = \hat{E}$ , να συμπληρώσετε τους ίσους λόγους  $\frac{B\Gamma}{\dots} = \frac{\dots}{\Delta Z} = \frac{\dots}{\dots}$



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να απαντήσετε σε 2 από τις 3 ασκήσεις .

### ΑΣΚΗΣΗ 1:

Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = x(x+2) - (x+1)(x-1) - 2(x-2)$

$$B = (2x-3)^2 - 2x(x-3) - 2(x^2 - 3x + 5)$$

α) Να αποδείξετε ότι  $A=5$  και  $B=-1$

### ΑΣΚΗΣΗ 2:

Δίνεται το πολυώνυμο :

$$A(x) = (2x+3)^2 - (x+2)(x-2) - 17x - 11$$

A) Να αποδείξετε ότι  $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$

B) Να λύσετε την εξίσωση  $A(x) = 0$

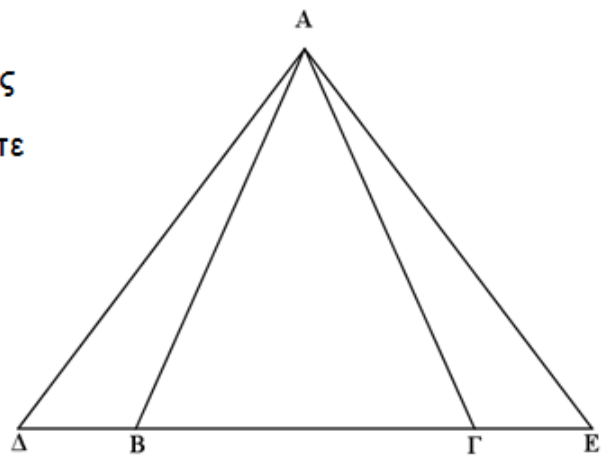
Γ) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις  $3x^2 - 3$  ,  $9\beta^2 - 4$

### ΑΣΚΗΣΗ 3:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB=AG$ . Στις προεκτάσεις της βάσης  $B\Gamma$  παίρνουμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  ώστε  $\Delta B = \Gamma E$  όπως φαίνεται στο σχήμα.

A) Να αποδείξετε ότι  $AB\Delta = A\Gamma E$

B) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta E$  ισοσκελές.



## Διαγώνισμα 22

### ΘΕΜΑ Α

A1. Ποιες ισότητες ονομάζονται ταυτότητες;

(2,3 μονάδες)

A2. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

(2,4 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με Σ, αν είναι σωστές ή με Λ, αν είναι λανθασμένες:

(2 μονάδες)

- 1) Ισχύει ότι  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha\beta + \beta^3$
- 2) Αν  $\alpha < \beta$  τότε για  $\gamma < 0$  ισχύει ότι  $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
- 3) Ισχύει ότι  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$
- 4) Η ισότητα  $3x = 0$  είναι ταυτότητα
- 5) Αν  $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases}$  και τότε ισχύει ότι  $\alpha + \gamma < \beta + \delta$

### ΘΕΜΑ Β

B1. Να γράψετε πώς ονομάζεται ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των:

- 1) γωνιών του
- 2) πλευρών του

(2,4 μονάδες)

B2. Τι ονομάζεται διάμεσος ενός τριγώνου;

(2,3 μονάδες)

B3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με Σ, αν είναι σωστές ή με Λ, αν είναι λανθασμένες:

(2 μονάδες)

- 1) Δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες μία προς μία είναι ίσα.
- 2) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος AB ισαπέχει από τα άκρα του.
- 3) Δύο τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία αντίστοιχη γωνία τους ίση, είναι ίσα.
- 4) Σε κάθε τρίγωνο η διάμεσος, το ύψος και η διχοτόμος συμπίπτουν.
- 5) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Από τις 3 ασκήσεις να απαντήσετε ΜΟΝΟ τις 2.**

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1)  $-3x^2 + 48 = 0$

2)  $x^2 + 2x - 8 = 0$

(2,2 μονάδες)

A2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

1)  $-3x^2 + 48$

2)  $x^2 + 2x - 8$

(2,2 μονάδες)

A3. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $A = \frac{x^2+2x-8}{-3x^2+48}$

(2,2 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (x - 4)^2 + 2x(x - 2) - (x - 2)(x + 2)$$

και οι αριθμοί:

$$\alpha = (\sqrt{40} + \sqrt{90} - \sqrt{160}) \cdot (\sqrt{250} - 2\sqrt{40}) \quad \text{και} \quad x = \frac{(-2)^3 \cdot (-2)^5}{(-2)^4 \cdot 2^3}$$

B1. Να αποδείξετε ότι  $P(x) = 2x^2 - 12x + 20$

(2,2 μονάδες)

B2. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 10$  και  $x = 2$

(2,2 μονάδες)

B3. Για  $P(x) = 2x^2 - 12x + 20$ :

1) Να υπολογίσετε την τιμή του πολυωνύμου  $P(x)$  για  $x = 2$

2) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 10$

(2,2 μονάδες)

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο  $OAB$  με  $OA = OB$  και  $\Gamma$  ένα σημείο της πλευράς  $OA$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $OB$  κατά τμήμα  $BD = AG$ . Το τμήμα  $\Gamma\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $M$ . Προεκτείνουμε και την  $BA$  κατά τμήμα  $AE = BM$ .

Γ1) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Gamma AE$  και  $MB\Delta$

(2,2 μονάδες)

Γ2) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma ME$  είναι ισοσκελές

(2,2 μονάδες)

Γ3) Να αποδείξετε ότι  $M\Gamma = M\Delta$

(2,2 μονάδες)

