ΕΠΩΝΥΜΟ:____

ΟΝΟΜΑ:______________________________ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:17/10/2016

1. Θεωρούμε την 1-1 συνάρτηση f , που παρουσιάζει ελάχιστη τιμή -3 για x=0 και μέγιστη τιμή 8 για x=5. Τι μπορείτε να πείτε για το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης της f;
2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g με $f(x)=x^2+2x$ με $g(x)=e^x$.
   (α) να εξετάσετε αν η f είναι 1-1
   (β) να υπολογίσετε την σύνθεση της g με την f
   (γ) να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f*o*g
   (δ) να υπολογίσετε την αντίστροφη της fog.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

① Ισχύει: $-3=f(0)\le f(x)\le f(x)=5$, οπότε $f(\Delta_f)\subseteq[-3,5]$.
Άρα $\Delta_{f^{-1}}\subseteq[-3,5]$

② α) Έστω $x_1,x_2\in\Delta_f=\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^2+2x_1=x_2^2+2x_2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1^2-x_2^2+2x_1-2x_2=0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)+2(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow$
$(x_1-x_2)(x_1+x_2+2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1+x_2+2=0$

Αλλά $\left.\begin{array}{l} x_1=0\Rightarrow f(x_1)=f(0)=0\\ x_2=-2-x_1=-2\Rightarrow f(x_2)=f(-2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=f(-2)$

άρα η f δεν είναι 1-1

(β) $\Delta_{fog}=\{x\in\Delta_g\ /\ g(x)\in\Delta_f\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ και
$(fog)(x)=f(g(x))=f(e^x)=(e^x)^2+2\cdot(e^x)=e^{2x}+2e^x$

(γ) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε $2x_1<2x_2\Rightarrow e^{2x_1}<e^{2x_2}$ και $e^{x_1}<e^{x_2}$, αφού η e^x είναι ↗. Οπότε $e^{2x_1}+2e^{x_1}<e^{2x_2}+2e^{x_2}\Leftrightarrow(fog)(x_1)<(fog)(x_2)$

άρα fog ↗

(δ) Αφού fog ↗, η fog είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται

Έστω $y=(fog)(x)\Leftrightarrow y=e^{2x}+2e^x\Leftrightarrow e^{2x}+2e^x-y=0\Leftrightarrow(e^x)^2+2e^x-y=0$ ①

Η ① έχει λύση στο $\mathbb{R}$, οπότε $\Delta\ge0\Leftrightarrow 2^2-4\cdot1\cdot(-\psi)\ge0\Leftrightarrow4+4\psi\ge0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\psi\ge-1$. Τότε $e^{x_{1,2}}=\dfrac{-2\pm\sqrt{1+4\psi}}{2}\Leftrightarrow e^x=-1\pm\sqrt{1+\psi}\Leftrightarrow$
$e^x=-1-\sqrt{1+\psi}$ ή $e^x=-1+\sqrt{1+\psi}$
απορρ. αφού $e^x>0$

Όμως $e^x>0\Leftrightarrow-1+\sqrt{1+\psi}>0\Leftrightarrow\sqrt{1+\psi}>1\Leftrightarrow1+\psi>1\Leftrightarrow\psi>0$

άρα για $y>0$ έχουμε $e^x=\sqrt{1+\psi}-1\Leftrightarrow x=\ln(\sqrt{1+\psi}-1)$

οπότε $f^{-1}(x)=\ln(\sqrt{1+x}-1)$ με $x>0$