

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 :

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x + x^2$ και $x_0 = 0$ (β) $f(x) = |x| + |x-1|$ και $x_0 = -1$

(β) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3x+2}, \alpha\nu & x \geq 0 \\ \sqrt{4-x}, \alpha\nu & x < 0 \end{cases}$ και $x_0 = 0$

2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, \alpha\nu & x \neq 0 \\ 1, \alpha\nu & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει : $2x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(α) να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης για $x = 1$.

(β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ένα.

(γ) να υπολογίσετε την παράγωγο της f στο $x_0 = 1$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν, τότε η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 3 \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1, \alpha\nu & x < 2 \\ a^2x - a - 2(x+1), \alpha\nu & x \geq 2 \end{cases}$.

(α) Όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο δύο, τότε ο πραγματικός αριθμός a ισούται με

3 -9 3 ή -1,5 -9 ή 0 δεν υπάρχει αριθμός

(β) Όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο δύο, τότε ο πραγματικός αριθμός a ισούται με

3 -9 3 ή -1,5 -9 ή 0 δεν υπάρχει αριθμός

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax, \alpha\nu & x > 1 \\ \beta x^3 - ax^2 + 3, \alpha\nu & x \leq 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β

ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο ένα.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (\beta - \alpha)x^2 + x - 1 + 2\beta, \alpha\nu & x < 0 \\ \gamma, \alpha\nu & x = 0 \\ \beta + a\sqrt{x+1}, \alpha\nu & x > 0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς

αριθμούς a, β, γ ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \beta x^2 + \alpha, \alpha\nu & x \leq 1 \\ 4\sqrt{x} + 2ax - 3, \alpha\nu & x > 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β

ώστε η παράγωγος της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ να ισούται με έξι.

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν και $f(0) = f'(0) = 1$, τότε να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\nu\nu h - 1}{f(h) - 1}.$$

10. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = a$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό x , τότε να αποδείξετε

ότι : (α) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x}{f(a)} - \frac{a}{f(x)}}{x - a} = \frac{1}{f(a)} \left[1 + a \frac{f'(a)}{f(a)} \right]$

(β) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\eta\mu\alpha \cdot f(x) - f(a) \cdot \eta\mu x}{x - a} = f'(a) \cdot \eta\mu\alpha - f(a) \cdot \sigma\nu\nu\alpha$

11. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sigma\nu x - \ln x$ (β) $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\nu x)e^x$ (γ) $f(x) = x \cdot \eta\mu x \cdot \ln x$

12. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (β) $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\nu x}{x \cdot \ln x}$ (γ) $f(x) = \frac{e \cdot x^2}{e^x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{7}}$ (δ) $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{\ln x}{x^2}$

13. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x + e^x)(3 - x^2 \cdot \eta\mu x) + 2 \ln 2$ στο $x_0 = 0$.

14. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^{-x}$ (β) $f(x) = \eta\mu x^2 - \sigma\nu^2 x$ (γ) $f(x) = (3x - 2)^{2008} - \sqrt{x + 3}$

15. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^x$.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$. Τότε ισχύει: $f'(x) = (\sqrt[3]{x^4})' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Είναι σωστή η παραπάνω διαδικασία;

17. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu x - 9x^2 & , \alpha\nu \ x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} - \frac{x}{2} - 1 & , \alpha\nu \ x > 0 \end{cases}$

18. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x \cdot |x - 4| + 3$.

19. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $g(x) = \frac{f(x) - 1}{\eta\mu x + 2}$ (β) $g(x) = f(f(x)) - f(x^2)$

20. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 και ϕ_4 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{vmatrix}$

είναι παραγωγίσιμη.

21. Να υπολογίσετε την δεύτερη παράγωγο των: (α) $f(x) = 3x - 4$ (β) $f(x) = x \cdot \ln x$.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - a)(x - \beta)(x - \gamma)$ με $\alpha < \beta < \gamma$.

(α) να αποδείξετε ότι; $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}$ για κάθε $x \in \mathfrak{R} - \{a, \beta, \gamma\}$.

(β) να αποδείξετε ότι: $g'(x) = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, όταν $g(x) = \ln[f(x)]$

23. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\omega x)$ με ω πραγματικό αριθμό διάφορο του μηδενός.

(α) να αποδείξετε ότι: $f''(x) = -\omega^2 f(x)$.

(β) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = [f'(x)]^2 + \frac{1}{\omega^2} [f''(x)]^2$ είναι σταθερή για κάθε πραγματικό αριθμό x.

24. Να βρείτε τη δεύτερου βαθμού πολυωνυμική συνάρτηση f, όταν ισχύει: $f(1) = f'(1) = 1$ και $f(2) = 5$.

25. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = (3x - 1)e^x$ και $x(t) = t^2 + 1$. Να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{df(t)}{dt}$ για $t=1$.

26. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 2x$ στο σημείο $A(1, f(1))$ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $K(2, 0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

27. Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 5x - x^2 - 2 & , \text{αν } x > 1 \\ \frac{x+1}{2-x} & , \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{που να σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } 135^\circ.$$

28. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ που διέρχεται από το σημείο $M(0,5)$.

29. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $\psi + x = 3$.

30. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 2e^{x-1}$ που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ στο σημείο $A(-1,2)$.

31. Να υπολογίσετε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2 \ln x$ και $g(x) = x^2 - 1$ στο κοινό τους σημείο.

32. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + \alpha x + \beta}$ στο σημείο $A(1,3)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $6\psi - 5x = 1$.

33. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η ευθεία $\psi = 2x$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$ και το σημείο $M(1,3)$ να ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

34. Η πλευρά a ενός τετραγώνου μεγαλώνει με ρυθμό 3 cm/s , να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου ως προς τον χρόνο όταν η πλευρά του είναι 2 cm .

35. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου είναι 150 κυβικά εκατοστά ανά δευτερόλεπτο βρείτε:

(α) το ρυθμό μεταβολής της ακμής ως προς τον χρόνο, όταν η ακμή ισούται με 5 cm .

(β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του κύβου ως προς την ακμή του a , όταν $a=5$.

(γ) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του κύβου ως προς τον χρόνο, την χρονική στιγμή που η ακμή είναι ίση με 5 cm .

36. Ο πληθυσμός μιας κλειστής κοινωνίας μετά από t χρόνια δίνεται από την συνάρτηση $p(t) = p_0 + (a - p_0)e^{-at}$, όπου p_0 ο πληθυσμός της κοινωνίας την αρχική στιγμή και a θετική σταθερά.

Να υπολογίσετε:

(α) το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού ως προς τον χρόνο μετά από 10 χρόνια.

(β) την χρονική στιγμή t_0 που ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού θα είναι ο μισός του ρυθμού μεταβολής του πληθυσμού την αρχική στιγμή.

37. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $x_0 \cdot f'(x_0) = -f(x_0)$, όταν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και $f(1)=0$.

38. Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $[a, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας πραγματικός αριθμός $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε : $f'(x_0) \cdot [g(\beta) - g(a)] = g'(x_0) \cdot [f(\beta) - f(a)]$.

39. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x-2) \cdot \ln x + 1$ έχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

40. Να αποδείξετε ότι : (α) για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς α, β με $\alpha > \beta$ ισχύει $\frac{1}{\alpha} < \frac{\ln \alpha - \ln \beta}{\alpha - \beta} < \frac{1}{\beta}$

$$(\beta) \ln 2 > \frac{4-e}{2}.$$

41. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathcal{R} συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

- $f(-1) = 0$
- $|f'(x)| \leq 2$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Να αποδείξετε ότι : $|f(1)| \leq 4$

42. Να εξετάσετε αν υπάρχει παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f με $f(1)=3$, $f(3)=4$ και $f'(x) \geq 1$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x .

43. Θεωρούμε δύο παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x
- $f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$ είναι σταθερή.

44. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(0)=1$ και

$$|f(x) - f(\psi)| \leq \eta \mu^2(x - \psi) \text{ για οποιουσδήποτε πραγματικούς } x, \psi$$

Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

45. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x \cdot f'(x) = (x-1) \cdot f(x)$ για κάθε θετικό αριθμό x και $f(1) = 1$. Να υπολογίσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

46. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(α) f(x) = 5 \cdot \ln x - x + \frac{6}{x} \quad (β) f(x) = x^2 \cdot e^x \quad (γ) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^4 - 12x + 9}{8}, & \text{αν } x < -1 \\ x^2 - x - 2, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases} \quad (δ) f(x) = \ln x + |\ln x| + x$$

47. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta \mu x + x - 1$, με $x \in [0, 2\pi]$.

48. Να αποδείξετε ότι : $\ln x + x^2 < 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

49. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

- $f(0)=1$
- $f'(x) > 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\psi = x + 1$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

50. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f(0)=0$
- $f'(x) < 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x

Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός ξ ώστε $f(\xi) < \xi$.

51. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4ax^3 + 3\beta x^2 + 2ax - \beta = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 1)$.

52. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln \frac{1}{x} = x^2$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

53. (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x^2 + x = 3$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[-2, 2]$.

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 1 = \frac{4}{x+1}$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[-2, 2]$.

54. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

$$f'(x) \neq 2x \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την παραβολή $\psi = x^2$.

55. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x}{\eta \mu x - 1} = \frac{3}{5}$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα στο $(-\pi, \pi)$.

56. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

$f(x) + xf'(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό .

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

57. Να βρείτε τον αριθμό των πραγματικών ριζών των παρακάτω εξισώσεων: (α) $e^x = x + 2$ (β) $x^4 - 4x + 4 = 0$
58. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a$ να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία σημεία.
59. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2(\beta + a)x^3 + 3(a^2 + \beta^2)x^2 + ax - \beta = 0$ με $a > \beta$, έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
60. Να βρείτε το πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :
- (α) $f(x) = 4x^3 - 3x^2$ (β) $f(x) = e^x + x$ (γ) $f(x) = e^x - x, \alpha \forall x \in (0,2]$
61. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:
- (α) $f(x) = \frac{9x^2 - 18x + 4}{x - 2}$ (β) $f(x) = x - \ln(x - 2)$ (γ) $f(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$ (δ) $f(x) = x + |x^2 + 2x - 3|$
62. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:
- (α) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x$ με $x \in [0,1]$ (β) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x + 1, & \alpha \forall x \geq 1 \\ \frac{2}{x - 2}, & \alpha \forall x < 1 \end{cases}$
63. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + 24x + 1$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα για $x = -1, x = 1$ και $x = 2$ και να βρείτε το είδος τους.
64. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 1$ δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
65. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι:
- $$3f^3(x) + 2f^2(x) = x^3 + x + 1$$
- για κάθε πραγματικό αριθμό x . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα
66. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x , ισχύει: $e^x + 1 > x$.
67. Αν για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in [0,2]$ ισχύει: $\alpha x^3 + 4x^2 + x + 2 \leq \alpha + 3$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .
68. (α) Να αποδείξετε ότι: $x \cdot \ln x \geq x - 1$ για κάθε θετικό αριθμό x .
(β) Να αποδείξετε ότι: $2x^2 \cdot \ln x \geq 3x^2 - 4x + 1$ για κάθε $x > 1$.
69. Ένα εργαστήριο μπορεί να κατασκευάσει έως 100 μονάδες ενός προϊόντος. Αν το κόστος κατασκευής x μονάδων του προϊόντος είναι $\frac{x^3}{3} - 20x^2 + 900x + 10$, ενώ οι εισπράξεις από την πώληση x μονάδων είναι $20x + 200$ ανά μονάδα. Να υπολογίσετε πόσα τεμάχια πρέπει να κατασκευαστούν ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.
70. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ που είναι πιο κοντά στο σημείο $A(1,0)$.
71. Η απορρόφηση μιας ουσίας από ένα οργανισμό t sec μετά τη λήψη της δίνεται από την παράσταση $110t - t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που έχουμε ελάχιστο ρυθμό απορρόφησης.
72. Να βρείτε τα διαστήματα που οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλες ή κυρτές και τα σημεία καμπής τους:
- (α) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 18x^2 + 2x - 1$ (β) $f(x) = (x^2 - 4x - 4)e^x$
73. Να υπολογίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης
- $$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1, & \alpha \forall x \leq 1 \\ x(\ln x - 1), & \alpha \forall x > 1 \end{cases}$$
- και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κοίλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΜΠΕΔΩΣΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

74. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει τρία συνευθειακά σημεία καμπής.
75. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = x^4 + 4ax^3 + 6(a^2 + 2)x^2 + 30x + a$ δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.
76. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 3x + 2$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=1$ και σημείο καμπής στο $x=2$.
77. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- (α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-x}}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^3}$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(\pi x) + x^3 - 8}{4 - x^2}$ (ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{x^2}}$
78. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:
- (α) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln^2 x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 \cdot e^x)$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x} + \ln x)$ (δ) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - \frac{1}{x})^{x^2}$
79. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{ax} & , \alpha\nu \ x \leq 0 \\ \frac{x}{\ln x} + \beta & , \alpha\nu \ 0 < x < 1 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη.
80. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln(x^2 - x)}{x}$.
81. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = x^3 + 1$ (β) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} + 1$ (γ) $f(x) = \frac{x \cdot |x+1|}{2x^2 + 1}$ (δ) $f(x) = x + \eta\mu x$
82. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$ (β) $f(x) = \ln x + 5x$
83. Να βρείτε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων: (α) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{3x + 2}$ (β) $f(x) = \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x}$ (γ) $f(x) = \ln(1-x)$ (δ) $f(x) = \frac{x + \sigma\upsilon\nu x}{x + 2}$
84. Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε η ευθεία $\psi = -3x$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x) = ax + \frac{\beta x - 1}{2x + 3}$.
85. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi = 5x - 6$.
- (α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x]$
- (β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu[f(x) + 1]}{xf(x) - 5x^2} = 2$.
86. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\psi = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x + x^2}{x}$ στο $+\infty$
87. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:
- (α) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 9$ (β) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$ (γ) $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ (δ) $f(x) = (x+1)e^{1-x}$ (ε) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$