

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^2+ax+\beta$ με a,β πραγματικούς αριθμούς. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2,-1)$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση το 3, τότε

(α) να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a,β .

(β) να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}-2}$

(γ) να υπολογίσετε το ακρότατο της συνάρτησης.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$2xf(x)+(x^2-1)f(-x)=x^2+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(α) να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης $f(0)$.

(β) να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

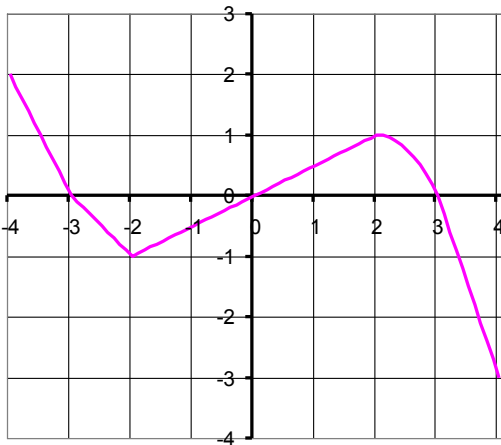
3. θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \alpha \nu \cdot x \leq 0 \\ x^2 - 1, & \alpha \nu \cdot 0 < x \leq 1 \text{ και} \\ \frac{2}{x}, & \alpha \nu \cdot x > 1 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} x, & \alpha \nu \cdot x \geq 1 \\ 1, & \alpha \nu \cdot x = 0 \\ \frac{1}{x-1}, & \alpha \nu \cdot 0 \neq x < 1 \end{cases}$$

(α) να υπολογίσετε τις συναρτήσεις fg και $\frac{g}{f}$.

(β) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε :



(α) τα ακρότατα της f .

(β) τα ακρότατα της συνάρτησης $|f|$

(γ) τις τιμές του πραγματικού αριθμού a , ώστε η ευθεία $\psi=a$ να τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία σημεία.

(δ) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)+1=0$

(ε) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|f(x)|=1$

(στ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(ζ) τα διαστήματα στα οποία οι τιμές της συνάρτησης f είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

(η) τα διαστήματα στα οποία η παράγωγος της f είναι θετική.

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{\sqrt{x}-1}, & \alpha \nu \cdot 1 \neq x > 0 \\ 0, & \alpha \nu \cdot x = 1 \end{cases}$$

(α) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(β) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

(α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - x + \sqrt{x-3} + 1}{x-4}$ (β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{2x-1} - x}{\sqrt{x}-1}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 8x + 7}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (ε) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - |2x - 3|}{x - 1}$ (στ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 3| + |x^2 - 4| - 5}{|2 - x| - 1}$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 3x - 1}{x^2 - 1}, & \alpha\nu \cdot |x| \neq 1 \\ 4a + 2a^2, & \alpha\nu \cdot x = 1 \end{cases}$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό

αριθμό a ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

8. (α) Έστω οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις f, g . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Έστω οι γνησίως φθίνουσες και παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει : $|f(x)| = -f(x)$ και $g(x) < 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα.

9. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$x(f(x) - x) = 12 + 2(f(x) - 4x)$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης f για $x=2$.

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

10. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{x} - \sqrt{x}}, & \alpha\nu \cdot 1 \neq x > 0 \\ 2, & \alpha\nu \cdot x = 1 \end{cases}$

για $x_0=1$.

11. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu x, & \alpha\nu \cdot x < 0 \\ (1-x)^{2001}, & \alpha\nu \cdot x \geq 0 \end{cases}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $3f'(-\pi) + f'(2)$.

12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-2)(x+1)(4x-1)$.

Να αποδείξετε ότι: (α) $f'(3) + 12f'(1) = 11$.

(β) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi = 3 - 7x$.

13. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ στα σημεία x_0 , όπου x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x-1}$ με $a \in \mathfrak{R}$.

- (α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(2, f(2))$.
 (β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a , ώστε η παραπάνω εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi+x=8$.
 (γ) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να συγκρίνετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

15. Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax^2$ στα σημεία $A(1/4, f(1/4))$ και $B(-1/4, f(-1/4))$ αντίστοιχα, τότε:
 (α) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a ώστε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.
 (β) για τη παραπάνω τιμή του a , να αποδείξετε ότι οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi' \psi$.
16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x} - bx + 2$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $A(1,1)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\psi+2x=4$, τότε :
 (α) να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, b .
 (β) να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία
 (γ) να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης f .
17. Έστω ένας κύκλος με ακτίνα $\rho(t) = 2t + 1$ cm.
 (α) να βρείτε την ακτίνα του κύκλου όταν $t=0$.
 (β) να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου ως προς την ακτίνα του, όταν $\rho=2$ cm.
 (γ) να εκφράσετε το εμβαδόν του κύκλου συναρτήσει του χρόνου t .
 (δ) να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του κύκλου ως προς το χρόνο, όταν $t=2$.
 (ε) να δείξετε ότι το εμβαδόν του κύκλου αυξάνει με ρυθμό ανάλογο της ακτίνας ρ ως προς το χρόνο t .
18. Έστω τα σημεία $A(1,1)$ και $B(x,0)$. Να υπολογίσετε :
 (α) την απόσταση των σημείων A, B ως συνάρτηση του x .
 (β) το ρυθμό μεταβολής της απόστασης AB ως προς x , όταν $x_0=2$.
 (γ) το σημείο B , ώστε η απόσταση AB να είναι ελάχιστη.
19. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_\lambda: y = \frac{\lambda+1}{\lambda^2+3}x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
 (α) να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης των ευθειών ε_λ ως προς την παράμετρο λ .
 (β) να βρείτε για ποιες τιμές του λ ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης αυξάνει.
20. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 100cm^2 .
 Να υπολογίσετε:
 (α) το ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου ως προς το μήκος του x , όταν $x=5$.
 (β) να βρείτε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μικρότερη διαγώνιο.

21. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{ax+1}$ με $f'(1) = \frac{3}{4}$ και $a > 0$. Να υπολογίσετε:

- (α) τον πραγματικό αριθμό a .
- (β) την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(5, f(5))$.
- (γ) να εξετάσετε αν η f έχει ακρότατα.

22. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu^2 x$ με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- (α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- (β) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι: όταν η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε $\epsilon\phi x_0 = 2 x_0$.

23. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-ax} - e^{-\beta x}$ με $a > \beta > 0$.

- (α) Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
- (β) να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση f .

24. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-ax}$ με $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a .
- (β) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

25. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x(3x+10)^9$.

- (α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .
- (β) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$.

(γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x_0 , ώστε η παραπάνω εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

(δ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

26. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = x e^{-2x}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f για $x_0 = 1$.

(β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x .

(γ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq \frac{2e+1}{2e}$.

27. Με ένα σύρμα μήκους 11dm κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που το μήκος του είναι διπλάσιο του πλάτους του. Να βρείτε το μήκος κάθε κομματιού του σύρματος ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

28. Ένας κολυμβητής απέχει 40m από την ακτή και $20\sqrt{29}$ m από μια καντίνα που βρίσκεται στην παραλία. Η ταχύτητα του, όταν κολυμπάει είναι 3m/min και όταν

τρέχει στην παραλία 5m/min. Να βρείτε σε ποιο σημείο της ακτής πρέπει να βγει ώστε να φτάσει στην καντίνα γρηγορότερα.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x)=ax^3+\beta x^2+6x-1$, που παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $A(2, f(2))$ και $B(3, f(3))$.

(α) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

(β) να βρείτε το είδος των τοπικών ακρότατων.

(γ) να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $\Gamma(0, f(0))$.

30. (α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{e^4}{4}$ και $\frac{e^5}{5}$.

31. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda+3)x+2\lambda^2=0$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $x_1^2+x_2^2$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .