Εξίσωση γραμμής

1. **Εξίσωση μιας γραμμής που σχεδιάζετε στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι μια εξίσωση της μορφής φ(x, y)=0 η οποία περιγράφειαλγεβρικά τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται η τεταγμένηy με την τετμημένη x ενός οποιουδήποτε σημείο M(x, y) που ανήκει στην γραμμήκαι κατά συνέπεια επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν σ' αυτήν την γραμμή.**

   Με βάση τον ορισμό η εξίσωση μιας γραμμής επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες των σημείων που ανήκουν στη γραμμή.

   Η εξίσωση μιας γραμμής προκύπτει συνήθως από μία ιδιότητα που έχουν τα σημεία της γραμμής και μόνο αυτά και η οποία ιδιότητα εκφραζόμενη αλγεβρικά μας οδηγεί στην εξίσωση.

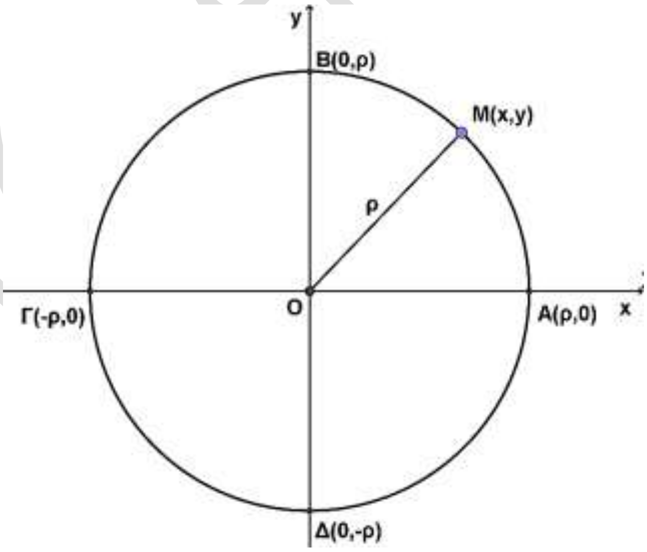
ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Βρείτε την εξίσωση κύκλου που σχεδιάζετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με ρ.

Λύση

Η διαδικασία που ακολουθούμε είναι η εξής:

Θα βρούμε μία ιδιότητα που έχουν τα σημεία του κύκλου και στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να την εκφράσουμε αυτήν την ιδιότητα αλγεβρικά.



Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία του κύκλου είναι ότι όλα απέχουν από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ.

Έστω λοιπόν ένα σημείο M(x, y) που ανήκει στον κύκλο C(O, ρ), όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Τότε θα ισχύει ότι

(OM)=ρ

Όμως η απόσταση του M(x, y) από το O ισούται με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, δηλαδή (OM)=$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$, οπότε θα έχουμε ότι

(OM)=ρ⇔$\sqrt{x^2+y^2}$ =ρ η οποία ισοδύναμα υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο γράφεται καλύτερα ως εξής: $\mathbf{x^2+y^2=\rho^2}$

Άρα η ιδιότητα που έχει ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y)που ανήκει στο συγκεκριμένο κύκλο και που είναι να απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με ρ αλγεβρικά εκφράζεται από την εξίσωση με δύο αγνώστους xκαι yπου είναι η $x^2+y^2=\rho^2$, η οποία λέμε ότι είναι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με ρ.

1ηΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση κύκλου ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με 3 μ.

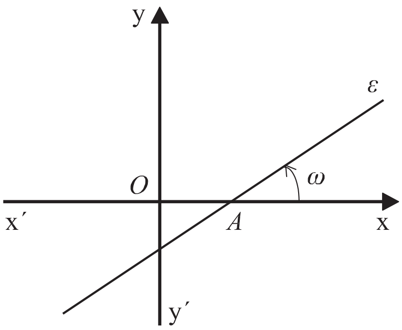
2η ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι η εξίσωση κύκλου ο οποίος έχει κέντρο το σημείο K(2, 3) και ακτίνα ίση με 1 μ. είναι η $x^2+y^2-4x-6y+12=0$

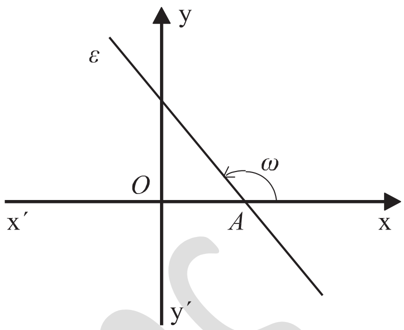
3η ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι η εξίσωση γραμμής όπου η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της γραμμής από το σημείο E(2,0) είναι ίση με τη απόσταση του ίδιου σημείου από την κατακόρυφη ευθεία x=-2, είναι η $y^2=8x$, με $x\geq 0$.

4η ΑΣΚΗΣΗ: Δείξτε ότι η εξίσωση της γραμμής όπου το άθροισμα των αποστάσεων ενός οποιουδήποτε σημείου της γραμμής από τα σημεία E'(-2,0) και E(2,0) είναι ίσο με 5, είναι η $36x^2+100y^2=225$με $-\frac{5}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}$και $-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$.

Πριν προχωρήσουμε στη δεύτερη περίπτωση εύρεσης εξίσωσης γραμμής επειδή θα αναφερθούμε στην εξίσωση ευθείαςθα δώσουμε κάποιους ορισμούς και θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις ευθείες.

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

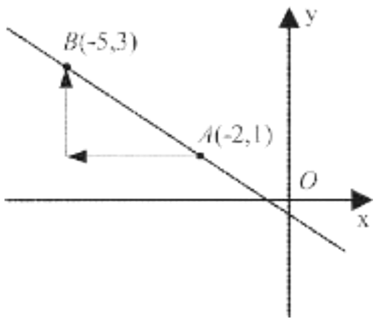




- **Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας x′x όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τηθετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε γωνία που σχηματίζειη ε με τον άξονα x′x.**
- **Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα x′x, τότελέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία ω= 0 .**
- **Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $0^o \leq ω < 180^o$ ή σε ακτίνια $0 \leq ω < π$.**
- **Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ωςκλίση μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x′x.**
- **Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι θετικός, αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα x′x είναι οξεία και αρνητικός,αν είναι αμβλεία.**
- **Αν η ευθεία σχηματίζει με τον x′x μηδενική γωνία, δηλαδήείναι παράλληλη στον άξονα x′x, ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.**
- **Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα x′x είναι 90^o , δηλαδή ηευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x′x, δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης γιατην ευθεία αυτή.**

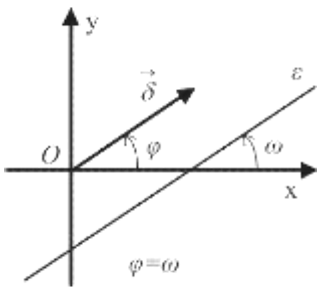
Κατασκευή ευθείας όταν γνωρίζουμε ένα σημείο της και το συντελεστή διεύθυνσης.

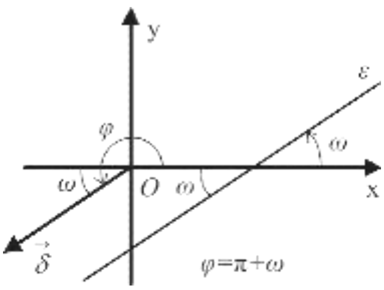
Όταν είναι γνωστά ένα σημείο μιας ευθείας και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας, τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε την ευθεία. Για παράδειγμα, για να σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-2,1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ=-\frac{2}{3}$, αρκεί από το A να κινηθούμε 3 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια 2 μονάδες προς τα πάνω. Προσδιορίζουμε έτσι το σημείο $B(-5,3)$, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η AB.



Διάνυσμα παράλληλο σε ευθεία.

- **Ένα διάνυσμα $\vec{δ}$ είναι παράλληλο μιας ευθείας ε αν και μόνο αν ο φορέας του διανύσματος είναι παράλληλος της ευθείας ε.**
- Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα x’x αντίστοιχα το διάνυσμα $\vec{δ}$ και η ευθεία ε, τότε θα ισχύει ότι ο φ=ω ή φ=π+ω όπως φαίνεται στα δύο σχήματα.
- Στην περίπτωση που με $φ,ω \neq 90^o$ επειδή ίσες ή παραπληρωματικές γωνίες έχουν την ίδια εφαπτομένη, θα ισχύει ότι εφφ=εφω οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος δ θα είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε. Δηλαδή αν η ευθεία ε και το διάνυσμα $\vec{δ}$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης $λ_1$ και $λ_2$ τότε $ε_1 // \vec{δ} \Leftrightarrow λ_1 = λ_2$.



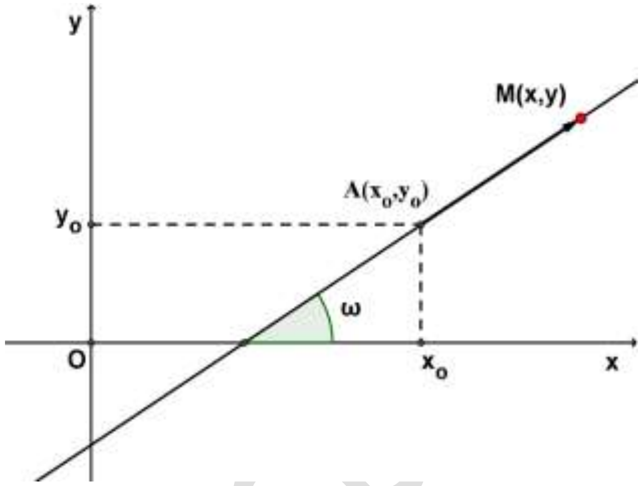


Επομένως «**Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα και ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσής τους τότε αυτοί θα είναι ίσοι**»

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'xγωνία $\omega \neq 90^o$ και $\omega \neq 0^o$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$.

Λύση

Για να δούμε ποια ιδιότητα έχουν τα σημεία αυτής της ευθείας ε και πως αυτή μπορεί να εκφραστεί αλγεβρικά έτσι ώστε να περιγράψει μονοσήμαντα τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι συντεταγμένες αυτών και μόνο αυτών των σημείων.



Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία μιας ευθείας που σχηματίζει με τον άξονα x'xγωνία $\omega \neq 90^o$ και $\omega \neq 0^o$, και μόνο αυτά τα σημεία, είναι να σχηματίζουν ανά δύο διανύσματα που όλα έχουν συντελεστή διεύθυνσης κοινό και ίσο με λ=εφω.

Επομένως η ιδιότητα που έχουν μόνο τα σημεία της ευθείας ε είναι να σχηματίζουν με το σημείο Α διανύσματα που όλα έχουν συντελεστή διεύθυνσης ίσο με λ=εφω. Έστω λοιπόν ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y)της ευθείας. Τότε θα σχηματίζει με το σημείο Α το διάνυσμα$\overrightarrow{AM}=(x-x_o,\ y-y_o)$ το οποίο θα έχει συντελεστήδιεύθυνσης λ=εφω, δηλαδή ουσιαστικά, οπότε θα ισχύει $\lambda=\frac{y-y_o}{x-x_o} \Leftrightarrow y-y_o=\lambda(x-x_o)$.

Άρα η ιδιότητα που έχουν τα σημείαM(x, y) της ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega \neq 90^o$ και $\omega \neq 0^o$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και μόνο αυτά είναι οι συντεταγμένες τους xκαι yνα επαληθεύουν την εξίσωση $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ με λ=εφω, που είναι και η εξίσωση της ευθείας ε. Άρα

Η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega \neq 90^o$ και $\omega \neq 0^o$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ όπου λ=εφω.

Για παράδειγμα η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=135^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(1, 2) είναι η y-2=-1(x-1) αφούλ=εφ135^o, η οποία ισοδύναμα γίνεται

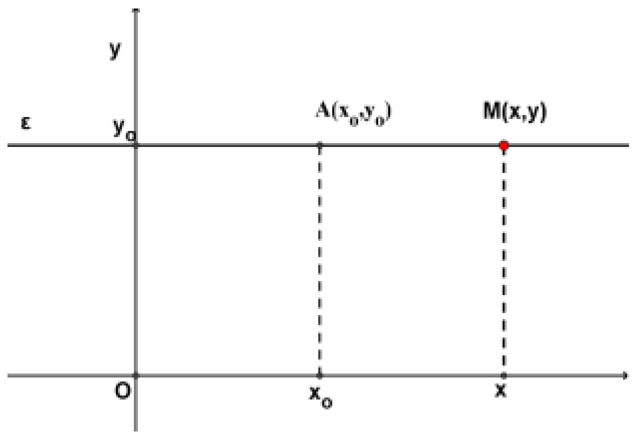
$y-2=-x+1 \Leftrightarrow y=-x+1+2 \Leftrightarrow$ **y=-x+3**.

5η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωσηευθείας ε η οποία

i. σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=45^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(3, 1)
ii. σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=60^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(-2, 0)
iii. σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=150^o$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'xγωνία $\omega=0^o$(δηλαδή παράλληλη στον x'xή διαφορετικά κάθετη στο y'y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$.

Λύση



Η ιδιότητα που έχουν όλα τα σημεία μιας ευθείας παράλληλης στον x'xείναι να έχουν την ίδια τεταγμένη. Επομένως τα σημεία της ευθείας ε έχουν την ίδια τεταγμένη με το σημείο Α.

Έστω λοιπόν ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y) της ευθείας.Επειδή όλα τα σημεία μιας ευθείας παράλληλης στον x'x έχουν την ίδια τεταγμένη και η ευθεία ε που είναι οριζόντια αφού $\omega=0^o$ διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$, η τεταγμένη του σημείου Μ, δηλαδή το y θα είναι ίσο με y_o. που αλγεβρικά εκφράζεται από την ισότητα **$y=y_o$**, που είναι και η εξίσωση της ευθείας ε.

Άρα η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=0^o$(δηλαδή παράλληλη στον x’x ή διαφορετικά κάθετη στο y’y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $y=y_o$.

Για παράδειγμα η εξίσωση ευθείας εη οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=0^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(4,5) είναι η y=5.Η εξίσωση ευθείας παράλληλης στον x’xπου διέρχεται από το σημείο Β(-6, -10), είναι η y=-10. Η εξίσωση ευθείας κάθετης στον y’y, που διέρχεται από το σημείο Γ(0,7)είναι η y=7. Η εξίσωση της οριζόντιας ευθείας που τέμνει τον y’yστο σημείο του με τεταγμένη 6 είναι η y=6.

6η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία

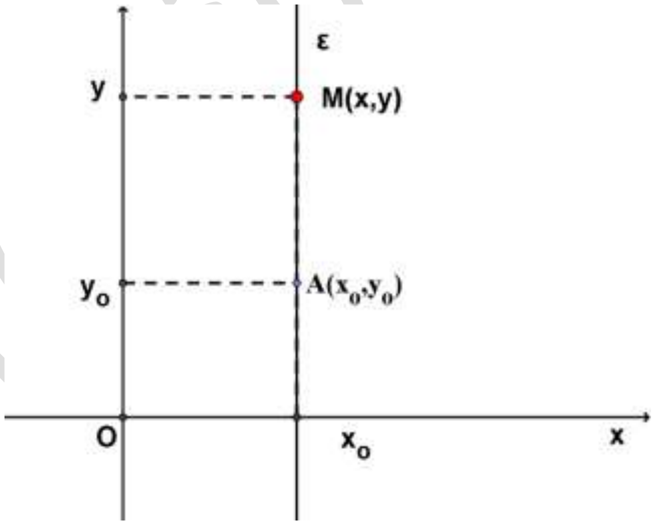
- **iv.** σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=0^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(2, 4)
- **v.** είναι παράλληλη στον x’x και διέρχεται από το σημείο Β(1, -2)
- **vi.** είναι κάθετη στον y’y και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- **vii.** Είναι οριζόντια και τέμνει τον y’yστο σημείο του με τεταγμένη ίση με -2.

4η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x’xγωνία $\omega=90^o$(δηλαδή κάθετη στον x’x ή διαφορετικά παράλληλη στο y’y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$.

Λύση

Η ιδιότητα που έχουν όλα τα σημεία μιας ευθείας κάθετης στον x’xκαι μόνο αυτά, είναι να έχουν την ίδια τετμημένη. Επομένως τα σημεία της ευθείας ε έχουν την ίδια τετμημένη με το σημείο Α.

Έστω λοιπόν ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x, y) της ευθείας. Επειδή όλα τα σημεία μιας ευθείας παράλληλης στον x’x έχουν την ίδια τετμημένη και η ευθεία ε που είναι κατακόρυφη αφού $\omega=90^o$ διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$, η τετμημένη του σημείου Μ, δηλαδή το x θα είναι ίσο με x_o. που αλγεβρικά εκφράζεται από την ισότητα $x=x_o$, που είναι και η εξίσωση της ευθείας ε.

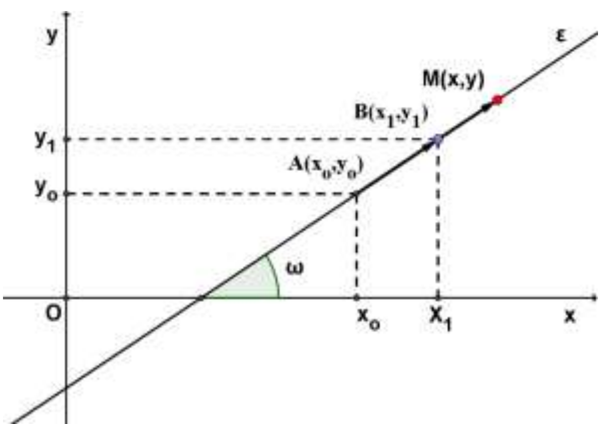


Άρα η εξίσωσηευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=90^o$(δηλαδή κάθετη στον x’x ή διαφορετικά παράλληλη στο y’y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $x=x_o$.

Για παράδειγμα η εξίσωση ευθείας εη οποία σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=90^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(4,5) είναι η x=4.Η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Β(-1,1) είναι η x=-1. Η εξίσωση της κάθετης στον x’xευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Γ(0, -10) είναι η x=0, δηλαδή ο y’y.

7η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία

- i. σχηματίζει με τον άξονα x’x γωνία $\omega=90^o$ και διέρχεται από το σημείο Α(-3, 1)
- ii. είναι κάθετη στον x’x και διέρχεται από το σημείο Β(5, 6)
- iii. είναι παράλληλη στον y’y και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iv. είναι κατακόρυφη και τέμνει τον x’xστο σημείο του με τετμημένη ίση με 7.



5η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_o, y_o)$ και $B(x_1, y_1)$ με $x_o \neq x_1$.

Λύση

Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία Μ μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία Α και Β που έχουν διαφορετικές τετμημένες

και μόνο αυτά,είναι να σχηματίζουν με το Α διάνυσμα που έχει τον ίδιο συντελεστή με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

Επομένως η ιδιότητα που έχουν μόνο τα σημεία της ευθείας ε είναι να σχηματίζουν με το σημείο Α διανύσματα που όλα έχουν συντελεστή διεύθυνσης ίσο με λ=εφω.

Έστω λοιπόν ένα οποιοδήποτε σημείο M(x, y)της ευθείας. Τότε θα σχηματίζει με το σημείο Α το διάνυσμα

$\overrightarrow{AM}=(x-x_o, y-y_o)$ το οποίο θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $λ=\frac{y-y_o}{x-x_o}$ ο οποίος θα είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_o, y_1-y_o)$ που είναι ο $\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$.Επομένως θα ισχύει η ισότητα $\frac{y-y_o}{x-x_o}=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$ η οποία επαληθεύεται μόνο από τις συντεταγμένες x και y ενός οποιουδήποτε σημείου M(x, y) της ευθείας και η οποία ισότητα ισοδύναμα γράφεται $y-y_o=λ(x-x_o)$ όπου $λ=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$.

Άρα η ιδιότητα που έχουν τα σημείαM(x, y) της ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_o, y_o)$ και $B(x_1, y_1)$ με $x_o\neq x_1$και μόνο αυτά τα σημεία, είναι οι συντεταγμένες τους xκαι yνα επαληθεύουν την εξίσωση $y-y_o=λ(x-x_o)$ με $λ=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$, που είναι και η εξίσωση της ευθείας ε. Άρα

Η εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_o, y_o)$ και $B(x_1, y_1)$ με $x_o\neq x_1$ είναι η $y-y_o=λ(x-x_o)$ όπου $λ=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$.

Για παράδειγμα η εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2) και Β(4, 6)είναι η y-2=4(x-3) αφού$λ=\frac{y_1-y_o}{x_1-x_o}=\frac{6-2}{4-3}=\frac{4}{1}=4$, η οποία ισοδύναμα γίνεται y-2=4x-12⇔y=4x-12+2⇔**y=4x-10**.

Επίσης η εξίσωση ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x)=x^2+1$ και τα οποία έχουν τετμημένες αντίστοιχα ίσες με 1 και 2 βρίσκεται ως εξής:

$f(1)=1^2+1=1+1=2$, οπότε Α(1, 2), $f(2)=2^2+1=4+1=5$, οπότε Β(2, 5)

Επειδή ο συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ΑΒ είναι ίσος με $λ=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-2}{2-1}=\frac{3}{1}=3$ η εξίσωση της ευθείας ΑΒ θα είναι η y-2=3(x-1) η οποία ισοδύναμα γίνεται y-2=3x-3⇔y=3x-3+2⇔**y=3x-1**.Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι η y=3x-1.

8η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία

i. Α(1, 2) και Β(4, 5)
ii. Κ(0, 2) και Λ(-3, 8)

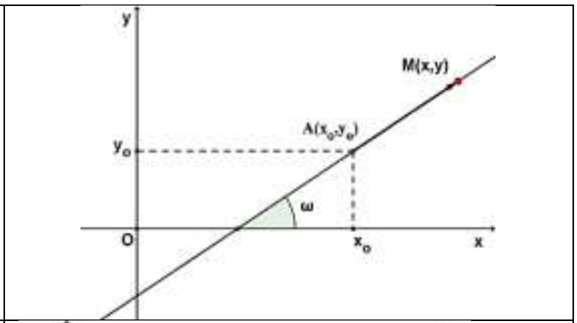
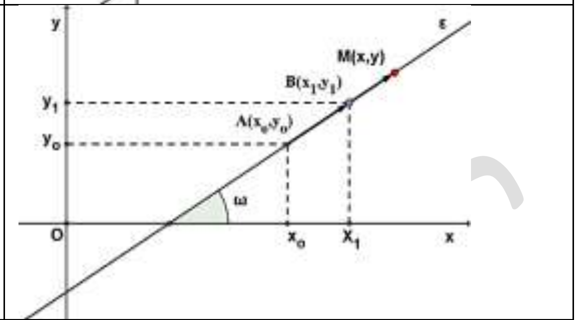
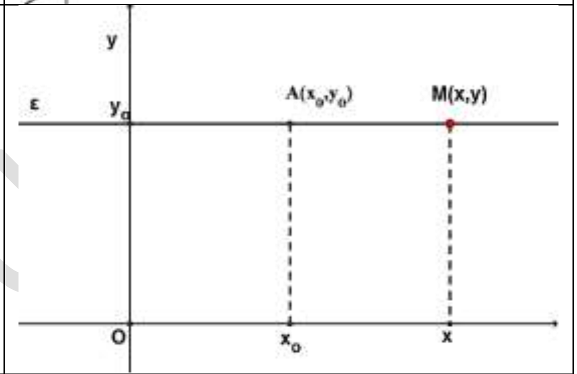
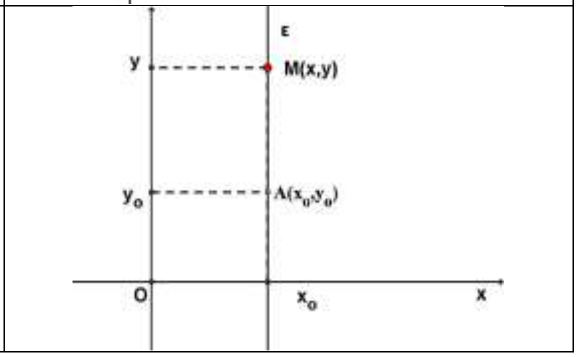
9η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(3, 6)

10η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$, τα οποία έχουν τετμημένες αντίστοιχα ίσες με 1 και 2.

11η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$, τα οποία έχουν τετμημένες αντίστοιχα ίσες με -1 και 3.

12η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}+1$, τα οποία έχουν τετμημένες αντίστοιχα ίσες με 1 και 4.

Άρα για τις εξισώσεις των ευθειών έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega \neq 90^o$ και $\omega \neq 0^o$ και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ όπου λ=εφω.	
Η εξίσωση ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(x_o, y_o)$ και $B(x_1, y_1)$ με $x_o \neq x_1$ είναι η $y-y_o=\lambda(x-x_o)$ όπου $\lambda=\dfrac{y_1-y_o}{x_1-x_o}$	
Η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=0^o$(δηλαδή παράλληλη στον x'x ή διαφορετικά κάθετη στο y'y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $y=y_o$.	
Η εξίσωση ευθείας ε η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=90^o$(δηλαδή κάθετη στον x'x ή διαφορετικά παράλληλη στο y'y,) και διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ είναι η $x=x_o$.	

6η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:Η εξίσωση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f είναι η y=f(x).
Δηλαδή, η εξίσωση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x+5$, είναι η $y=x+5$, που παριστάνει στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1, η οποία τέμνει τον y'y στο σημείο του με τεταγμένη ίση με 5

13η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε την εξίσωση της γραφικής παράστασης της fόταν:
Α.$f(x)=5$ **Β.** $f(x)=x+1$ **Γ.**$f(x)=6-2x$ **Δ.**$f(x)=x^2-3x$

7η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:Ένα σημείο ανήκει σε μία γραμμή αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της γραμμής.
Για παράδειγμα το σημείο Μ(1, 2) ανήκει στη γραμμή c με εξίσωση την $y^2=4x$ αφού για x=1 και y=2 η εξίσωση γίνεται $2^2=4\cdot1 \Leftrightarrow 4=4$ που ισχύει.

14η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε αν το σημείο Μ ανήκει στη γραμμή Cόταν:
Α. Μ(0, 1) και η γραμμή Cέχει εξίσωση την $y^2+2x-1=0$ **Β.** Μ(-1, 2) και η γραμμή Cέχει εξίσωση την $3x^2+2y^2+2x+3y=15$

15η ΑΣΚΗΣΗ: Βρείτε το $\alpha \in R$ώστε το σημείο Μ(α-1, 2α+1) ανήκει στη γραμμή Cμε εξίσωση την $x^2+y^2-2xy=16$.

Εξίσωση ευθείας

Τι πρέπει να γνωρίζουμε

1. Η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(x_0, y_0) και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι η $y- y_0=\lambda(x- x_0)$ όπου x_o και y_o είναι η τετμημένη και η τεταγμένη αντίστοιχα του σημείου Μ.
Για παράδειγμα η εξίσωση ευθείας η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 και διέρχεται από το σημείο Μ(3, 4) είναι η $y-4=-2(x-3)$ η οποία ισοδύναμα γίνεται
$y-4=-2x+6 \Leftrightarrow y=-2x+6+4 \Leftrightarrow y=-2x+10$

2. Για να ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας θα πρέπει η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'xνα είναι διάφορη των 90^o, δηλαδή θα πρέπει η ευθεία να μην είναι κάθετη στον άξονα x'x(παράλληλη στον άξονα y'y).Διαφορετικά για να ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας θα πρέπει αυτή να διέρχεται από σημεία που έχουν διαφορετική τετμημένη.

3. Ισχύει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας ε, όταν αυτός ορίζεται, ταυτίζεται με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x.
Δηλαδή λ=εφω όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x.

ω	0 ή 0^o	$\frac{\pi}{6}$ή 30^o	$\frac{\pi}{4}$ή 45^o	$\frac{\pi}{3}$ή 60^o	$\frac{\pi}{2}$ή 90^o	$\frac{2\pi}{3}$ή 120^o	$\frac{3\pi}{4}$ή 135^o	$\frac{5\pi}{6}$ή 150^o
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. Αν μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία Α(x_1, y_1) και Β(x_2, y_2), με $x_1 \neq x_2$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δίνεται από τον τύπο$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
Για παράδειγμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(3, 2) και Β(6, 11) είναι ο λ με $\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{11-2}{6-3}=\frac{9}{3}=3$.

5. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(x_1, y_1) με $x_1 \neq 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\frac{y_1}{x_1}$.
Για παράδειγμα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(2, 10) είναι ο $\lambda=\frac{10}{2}=5$.

6. Αν μια ευθεία εδιέρχεται από τα σημεία Α(x_o, y_1) και Β(x_o, y_2), τότε αυτή είναι κάθετη στον άξονα των x και η εξίσωσή της είναι η $x= x_o$.
Για παράδειγμα η ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(-2, 5) και Β(-2, -1) είναι η κατακόρυφη ευθεία ε με εξίσωση $x=-2$.

7. Ευθεία κάθετη στον x'x σημαίνει ότι δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης και ότι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x είναι 90^o. Επίσης η εξίσωση της ευθείας έχει τη μορφή $x= x_0$ όπου x_0 είναι η τετμημένη οποιουδήποτε σημείου της ευθείας.
Για παράδειγμα η εξίσωση μιας ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα x'xκαι διέρχεται από το σημείο Α(3,5) είναι η $x=3$.

8. Αν η εξίσωση μιας ευθείας έχει τη μορφή$x= x_0$ τότε αυτή σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=90^o$ δηλαδή είναι κάθετη στον άξονα x'x(παράλληλη στον άξονα y'y), διέρχεται από το σημείο (x_0, 0) και όλα της τα σημεία έχουν τετμημένη ίση με x_0.
Για παράδειγμα η ευθεία $x=1$ είναι κάθετη στον άξονα x'xκαι σχηματίζει με τον άξονα x'xγωνία $\omega=90^o$. Επίσης αυτή η ευθεία τέμνει τον x'xστο σημείο του (1, 0) και σ' αυτήν την ευθεία ανήκουν μόνο τα σημεία που η τετμημένη τους είναι ίση με 1, δηλαδή όλα τα σημεία που έχουν τη μορφή (1, y)με $y \in R$

9. Ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x$\Leftrightarrow \lambda=0 \Leftrightarrow$εφω=0$\Leftrightarrow \omega=0(\omega=0^o) \Leftrightarrow$εξίσωση ευθείας $y=y_o$ όπου y_o είναι η κοινή τεταγμένη των σημείων που ανήκουν στην ευθεία.
Για παράδειγμα η ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x'xκαι διέρχεται από το σημείο Α(3,5)έχει εξίσωση την $y=5$. Αυτή η ευθεία σχηματίζει με τον x'xγωνία 0^o , έχει συντελεστή διεύθυνσης λ=0 και τέμνει τον y'yστο σημείο του Γ(0, 5).

10. Αν η εξίσωση μιας ευθείας έχει τη μορφή$y= y_0$ τότε αυτή σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega=0^o$ δηλαδή είναι παράλληλη στον άξονα x'x(κάθετη στον άξονα y'y), διέρχεται από το σημείο (0,y_0) και όλα της τα σημεία έχουν τεταγμένη ίση με y_0.

11. Οι ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο $A(x_o, y_o)$ διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τις ευθείες των οποίων ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης λ και έχουν τη μορφή $y-y_o=\lambda(x-x_o)$και την κατακόρυφη ευθεία $x=x_o$.
Για παράδειγμα οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο Α(1, 4) ή θα έχουν τη μορφή $y-4=\lambda(x-1)$ ή θα είναι η κατακόρυφη ευθεία $x=1$.

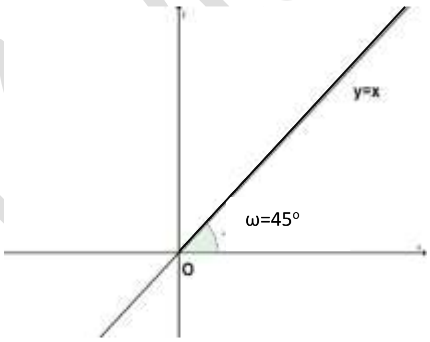
12. Η τελική μορφή που θα έχει η εξίσωση μιας ευθείας θα είναι η $y=\lambda x+\beta$ ή η $x= x_0$. Προσοχή η εξίσωση της μορφής $y=y_o$ περιλαμβάνεται στη μορφή $y=\lambda x+\beta$ αφού γράφεται και με τη μορφή $y=0\cdot x+y_o$.

13. Η $y=\lambda x+\beta$ είναι η εξίσωση ευθείας ε όταν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής της ευθείας και η $x= x_0$είναι η εξίσωση ευθείας ε όταν η ευθεία αυτή είναι κατακόρυφη($\varepsilon\perp x'x$)και της οποίας δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης αφού η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x είναι 90^o.

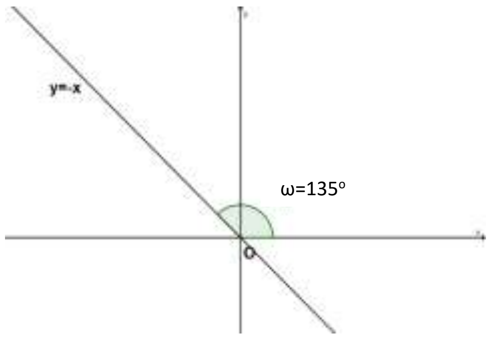
14. Αν η εξίσωση μιας ευθείας είναι η $y=\lambda x+\beta$ τότε αυτή η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και τέμνει τον άξονα y'y στο (0, β).
Για παράδειγμα η $y=3x-1$ είναι εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης 3, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, -1).

15. Μια ευθεία που ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσής της διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν έχει την εξίσωση$y=\lambda x$.
Για παράδειγμα η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 3 είναι η $y=3x$.
Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και απότο σημείο
Α(-2, 8) είναι η $y=-4x$ αφού ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας είναι ο
$\lambda=\frac{y_A}{x_A}=\frac{8}{-2}=-4$.

16. Η ευθεία που διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και του τρίτου τεταρτημορίουέχει εξίσωση την$y=x$ γιατί διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45^o και επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi 45^o=1$.



17. Η ευθεία που διχοτομεί τη γωνία του δεύτερου και του τέταρτου τεταρτημορίουέχει εξίσωση την$y=-x$ γιατί διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135^oκαι επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\varepsilon\varphi 135^o=-1$.



18. Ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο μιας ευθείας ε αν και μόνο αν ο φορέας του διανύσματος είναι παράλληλος της ευθείας ε.

19. Αν ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι παράλληλο μιας ευθείας ε και ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος τότε ισχύει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος θα είναι ίσος με το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας. Δηλαδή αν μια ευθεία ε και ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ έχουν αντίστοιχα συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 τότε $\varepsilon_1 // \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_1= \lambda_2$.

Προσοχή για να βρω το συντελεστή διεύθυνσης ενός διανύσματος στην περίπτωση που αυτός ορίζεται διαιρώ την τεταγμένη του με την τετμημένη του. Δηλαδή αν $\vec{\delta}=(x, y)$με $x\neq 0$, τότε $\lambda_{\vec{\delta}}=\frac{y}{x}$.

Για παράδειγμα αν $\vec{\delta}=(2, -6)$ και ε μια ευθεία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$με συντελεστή διεύθυνσης λ τότε $\lambda=\lambda_{\vec{\delta}}=\frac{-6}{2}=-3$.

ΠΡΟΣΟΧΗ:Δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος που είναι κάθετο στον x'x, δηλαδ΄΄η όταν η τετμημένη του είναι ίση με 0.

20. Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα λ_1 και λ_2 τότε

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

Για παράδειγμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις αντίστοιχα τις y=4x+5και y=4x-10είναι παράλληλες αφού οι αντίστοιχοι συντελεστές τους λ_1 και λ_2 είναι ίσοι.
Επίσης οι ευθείες ε_3 και ε_4 με εξισώσεις αντίστοιχα τις y=5x+10και y=(2λ-3)x+7για να είναι παράλληλες θα πρέπει να ισχύει $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow 5=2\lambda-3 \Leftrightarrow 2\lambda-3=5 \Leftrightarrow 2\lambda=5+3 \Leftrightarrow 2\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{2} \Leftrightarrow \lambda=4$.

21. Αν μια ευθεία ε_1 και ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα λ_1 και λ_2 τότε

$\varepsilon_1 \perp \vec{\delta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

22. Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2έχουν συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα λ_1 και λ_2 τότε
$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Για παράδειγμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις αντίστοιχα τις y=2x-1και $y=-\frac{1}{2}x-3$είναι κάθετες αφού για τους αντίστοιχους συντελεστές τους $\lambda_1=2$και $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.
Επίσης οι ευθείες ε_3 και ε_4 με εξισώσεις αντίστοιχα τις y=3x-1και y=(λ-2)x-3 για να είναι κάθετες θα πρέπει να ισχύει $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow 3 \cdot (\lambda-2) = -1 \Leftrightarrow 3\lambda-6=-1 \Leftrightarrow 3\lambda=6-1 \Leftrightarrow 3\lambda=5 \Leftrightarrow \lambda=\frac{5}{3}$.

23. Αν ένα σημείοΜ(x_0, y_0) ανήκει σε μια ευθείαε(δηλαδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείοΜ(x_0, y_0)), τότε οι συντεταγμένες x_0 και y_0του σημείου Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

- Μ(x_0, y_0) ανήκει στην ευθεία ε:y=λx+β $\Leftrightarrow y_0=\lambda x_0+\beta$
- Η ευθεία ε:y=λx+β διέρχεται από το Μ(x_0, y_0)$\Leftrightarrow y_0=\lambda x_0+\beta$

Δηλαδή αν ισχύει για το σημείο Μ(x_0, y_0) και την ευθεία ε:y=λx+β ότι $y_0=\lambda x_0+\beta$ τότε το Μ θα ανήκει στην ε και αντίστροφα αν το σημείο Μ ανήκει στην ε:y=λx+β τότε θα ισχύει ότι $y_0=\lambda x_0+\beta$.

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το σημείο Μ(4,5) ανήκει στην ευθεία y=x+1 αφού για x=4 και y=5 η ισότητα y=x+1 γίνεται 5=4+1⇔5=5 που ισχύει.

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Βρείτε το κ∈R ώστετο σημείο Μ(κ-3,κ+7) να ανήκει στην ευθεία ε:y=-2x+5.

Λύση

Για να ανήκει το σημείο Μ στην ευθεία ε θα πρέπει να ισχύει με βάση την ισότητα y=-2x+5 για y=κ-3 και x=κ+7, $\kappa-3=-2(\kappa+7)+5 \Leftrightarrow \kappa-3=-2\kappa-14+5 \Leftrightarrow \kappa+2\kappa=-14+5+3 \Leftrightarrow 3\kappa=-14+8 \Leftrightarrow 3\kappa=-6 \Leftrightarrow \kappa=-\frac{6}{3} \Leftrightarrow \kappa=-2$.

24. Για να βρω τα σημεία τομής μιας ευθείας ε:y=λx+β με λ≠0, με τον άξονα x'x μηδενίζω στην εξίσωση της ευθείας το y και λύνω την εξίσωση ως προς x.
Για παράδειγμα για να βρούμε τα σημεία τομής της ευθείας ε:y=2x-8 με τον άξονα x'x, λύνουμε την εξίσωση $y=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$. Άρα η ευθεία ε τέμνει τον άξονα x'xστο σημείο του (4, 0).

25. Για να βρω τα σημεία τομής μιας ευθείας ε:y=λx+β με λ≠0 με τον άξονα y'y μηδενίζω στην εξίσωση της ευθείας το x και λύνω την εξίσωση ως προς y.
Για παράδειγμα για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας ε:y=2x-6 με τον άξονα y'yμηδενίζουμε στην εξίσωση της ευθείας το x, οπότε έχουμε $y=2\cdot 0-6 \Leftrightarrow y=0-6 \Leftrightarrow y=-6$. Άρα η ευθεία ε τέμνει τον άξονα y'yστο σημείο του Μ(0, -6)

26. Η ευθεία $y=y_o$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο (0, y_o).

27. Η ευθεία $x=x_o$ τέμνει τον άξονα των x στο σημείο (x_o, 0) και δεν τέμνει τον άξονα y'y.

28. Η ευθεία y=0 είναι ο άξονας x'x.

29. Η ευθεία x=0 είναι ο άξονας y'y,

30. Για να βρω το σημείο τομής δύο ευθειών λύνω το γραμμικό σύστημα που σχηματίζουν οι εξισώσεις τους.
Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1:y=2x-3 και ε_2: y=-3x+7.
Για να βρούμε το σημείο τομής λύνουμε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x - 3 = -3x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + 3x = 3 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = \frac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Άρα οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο $(1, 2)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:Αν το σύστημα είναι αδύνατο οι ευθείες είναι παράλληλες, και αν το σύστημα είναι αόριστο, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις τότε οι δύο ευθείες ταυτίζονται.

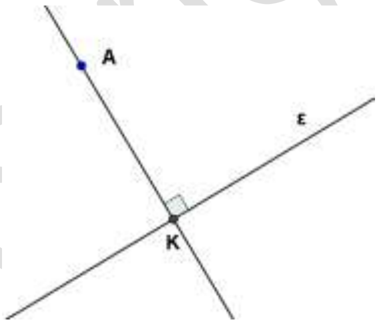
ΑΣΚΗΣΗ 30.1:Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 όταν:

Α. ε_1:y=x+5και ε_2: y=-3x-3 **Β.** ε_1:y=6x-5και ε_2: y=4x-3

31. Σημείο τομής των ευθειών $y=y_o$ και $x=x_o$ είναι το $A(x_o, y_o)$.
Δηλαδή το σημείο τομής των ευθειών y=5 και x=4 είναι το σημείο Α(4, 5).

32. Για να δείξω ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αρκεί να δείξω ότι έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης στην περίπτωση που αυτοί ορίζονται ή το σύστημα που σχηματίζουν οι εξισώσεις τους είναι αδύνατο.

33. Έστω μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός της ευθείας.



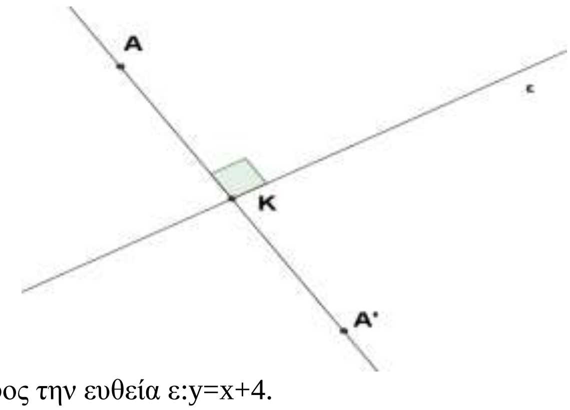
Η προβολή(ίχνος της καθέτου)του σημείου Α πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο τομής Κ, της κάθετης από το σημείο Α προς την ευθεία ε, με την ευθεία ε.

Για παράδειγμα στο παρακάτω σχήμα η προβολή(ίχνος της καθέτου) του Α πάνω στην ευθεία ε είναι το σημείο Κ.

Για να βρούμε την προβολή του $A(x_A, y_A)$ πάνω στην ε,στην περίπτωση που ξέρουμε την εξίσωση της ευθείας ε ακολουθούμετην εξής διαδικασία:

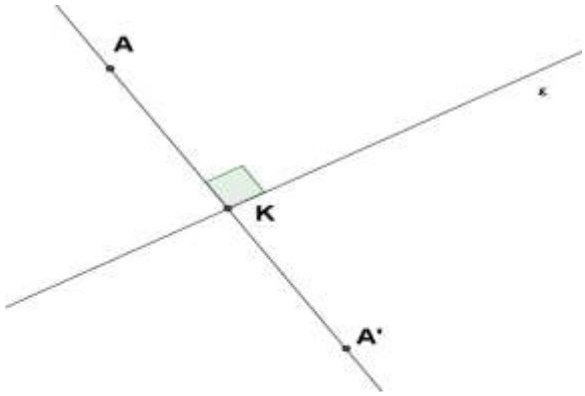
- Αν η εξίσωση ε έχει εξίσωση την $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda \neq 0$ βρίσκουμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ_2 της ΑΚ από τον τύπο $\lambda \cdot \lambda_2=-1$. Στην συνέχεια βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας ΑΚ η οποία είναι η $y- y_A= \lambda_2 \cdot(x- x_A)$ και για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Κ λύνουμε το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων που σχηματίζουν οι εξισώσεις των ευθειών ε και ΑΚ.
- Αν τώρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι της μορφής $y=y_o$ (ευθεία παράλληλη στον άξονα των x, δηλαδή κάθετη στον άξονα των y)η ορθή προβολή του $A(x_A, y_A)$ πάνω στην ε είναι το σημείο $K(x_A, y_o)$.
- Αν τώρα η εξίσωση της ευθείας ε είναι της μορφής $x=x_o$(ευθεία κάθετη στον άξονα των x, δηλαδή παράλληλη στον άξονα των y)η ορθή προβολή του $A(x_A, y_A)$ πάνω στην ε είναι το σημείο $K(x_o, y_A)$.

34. Για να βρούμε το συμμετρικό $A'(x_{A'}, y_{A'})$ ενός σημείου $A(x_A, y_A)$ ως προς μια ευθεία ε βρίσκουμε την προβολή $K(x_\kappa, y_\kappa)$ του Α πάνω στην ε και στην συνέχειαεπειδή το Κ είναι το μέσο του τμήματος ΑΑ' με τη βοήθεια των τύπων $x_\kappa=\frac{x_A+x_{A'}}{2}$και $y_\kappa=\frac{y_A+y_{A'}}{2}$βρίσκουμε τις συντεταγμένες$x_{A'}$, $y_{A'}$ του σημείου Α'.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:Βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(2, 4) ως προς την ευθεία ε:y=x+4.

Λύση



Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι ίσος με 1 τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΚ που είναι κάθετη στην ε είναι ίσος με -1.

Άρα η εξίσωση της ευθείας ΑΚ είναι η

$y-4=-1(x-2) \Leftrightarrow y=-x+2+4 \Leftrightarrow y=-x+6$

Στη συνέχεια βρίσκουμε την προβολή του Α πάνω στην ε, δηλαδή το Κ λύνοντας το σύστημα

$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x + 4 = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x + x = -4 + 6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x = \frac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 4 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$

Άρα το Κ που είναι το μέσο του τμήματος ΑΑ’ έχει συντεταγμένες τις (1, 5), οπότε θα έχουμε ότι

$x_κ=\frac{x_{A}+x_{A'}}{2}$ και $y_κ=\frac{y_{A}+y_{A'}}{2}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_κ=\frac{x_{A}+x_{A'}}{2} \\ y_κ=\frac{y_{A}+y_{A'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 1=\frac{2+x_{A'}}{2} \\ 5=\frac{4+y_{A'}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2=2+x_{A'} \\ 10=4+y_{A'}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_{A'}=2-2 \\ y_{A'}=10-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_{A'}=0 \\ y_{A'}=6\end{cases}$$

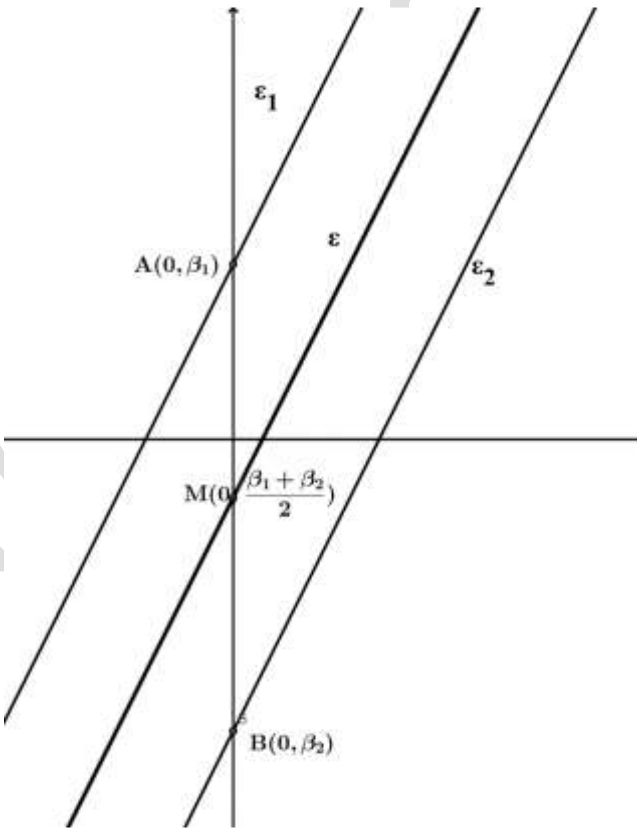
Άρα το συμμετρικό του Α ως προς την ε είναι το σημείο Α’(0, 6)

ΑΣΚΗΣΗ 34.1: Δίνεται το σημείο Α(-2, 1) και η ευθεία ε:y=2x-3 **i.**Βρείτε την προβολή του Α πάνω στην ευθεία ε.**ii.** Βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

35. Για να βρούμε τη μεσοπαράλληλη ε δύο παράλληλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις αντίστοιχα τις $y=λx+β_1$ και $y=λx+β_1$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε ένα σημείο Α της $ε_1$ όποιο θέλουμε εμείς θέτοντας στην εξίσωση της $ε_1$όπου xέναν αριθμό που θέλουμε εμείς και βρίσκοντας το αντίστοιχο y. Μας συμφέρει συνήθως να θέσουμε όπου xτο 0, οπότε έχουμε $y=β_1$ και το σημείο Α είναι το $Α(0,β_1)$. Ανάλογα ενεργούμε στην περίπτωση της ευθείας $ε_2$ όπου παίρνουμε το σημείο της $Β(0, β_2)$.

Η ευθεία ε θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με λ που είναι ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$. Επίσης η ε θα διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΒ που είναι το σημείο $Μ(0, \frac{β_1+β_2}{2})$. Άρα η εξίσωση της ε θα είναι η $y=λx+\frac{β_1+β_2}{2}$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Βρείτε την εξίσωση τηςμεσοπαράλληλης ε δύο παράλληλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις αντίστοιχα τις y=3x+1 και y=3x-5.

Λύση

Η μεσοπαράλληλη των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ είναι η ε με εξίσωση την $y=λx+\frac{β_1+β_2}{2}$όπου λ=3 και$\frac{β_1+β_2}{2}=\frac{1+(-5)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$.

Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε είναι η y=3x-2.

ΑΣΚΗΣΗ 35.1: Βρείτε την εξίσωση τηςμεσοπαράλληλης ε δύο παράλληλων ευθειών $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις αντίστοιχα τις

Α.y=x+4 και y=x+10.**Β.**y=2xκαιy=2x+6 **Γ.**y=-5x+1 και y=-5x+2.

36. Έστω τα σημεία$Α(x_1, y_1)$, $Β(x_2, y_2)$ και $Γ(x_3, y_3)$ με $x_1\neq x_2$ και $x_2\neq x_3$.Τότε

Α, Β και Γ είναι συνευθειακά$\Leftrightarrow λ_{ΑΒ}= λ_{ΒΓ}\Leftrightarrow\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:Εξετάστε αν τα σημεία Α(3, 1), Β(-1, -3) και Γ(2, 0) είναι συνευθειακά.

Λύση

Για να είναι τα Α, Β και Γ είναι συνευθειακά θα πρέπει να ισχύει $λ_{ΑΒ}= λ_{ΒΓ}\Leftrightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_Γ-y_B}{x_Γ-x_B}\Leftrightarrow$

$\frac{-3-1}{-1-3}=\frac{0-(-3)}{2-(-1)}\Leftrightarrow\frac{-4}{-4}=\frac{3}{2+1}\Leftrightarrow 1=\frac{3}{3}\Leftrightarrow$1=1που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 36.1:Εξετάστε αν τα σημεία Α(0, 2), Β(4, -2) και Γ(-3, 6) είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 36.2:Βρείτε το κ∈Rώστε τα σημεία Α(2, κ+1), Β(-1, 4) και Γ(0, 2κ+5) να είναι συνευθειακά.

ΑΣΚΗΣΗ 36.3:Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$ και τα σημεία Α και Β της C_fμε τετμημένες αντίστοιχα ίσες με 2 και -2. Δείξτε ότι υπάρχει και τρίτο σημείο Μ της C_fώστε τα σημεία Α, Β και Μ να είναι συνευθειακά.

37. Για να βρω τη μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ όπου γνωρίζω τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β. ακολουθώ έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1ος ΤΡΟΠΟΣ:Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο Μ(x, y) της μεσοκαθέτου. Γνωρίζω ότι αφού το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ θα ισαπέχει από τα σημεία Α και Β οπότε θα ισχύει

(ΜΑ)=(ΜΒ) που αυτή η ισότητα με αντικατάσταση γίνεται

$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}\Leftrightarrow$

$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2$ από όπου με πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση της μεσοκαθέτου.

Για παράδειγμα για να βρούμε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ όπου Α(1, 2) και Β(-2, 3) με βάση τον παραπάνω τρόπο ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Θεωρώ ένα τυχαίο σημείο Μ(x, y) της μεσοκαθέτου. Γνωρίζω ότι αφού το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ θα ισαπέχει από τα σημεία Α και Β οπότε θα ισχύει

(ΜΑ)=(ΜΒ) που αυτή η ισότητα με αντικατάσταση γίνεται

$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}\Leftrightarrow(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2\Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y-2)^2=(x-(-2))^2+(y-3)^2\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4=(x+2)^2+y^2-6y+9\Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=x^2+4x+4+y^2-6y+9\Leftrightarrow-2x-4y+5=4x-6y+13\Leftrightarrow6y-4y=4x+2x+13-5$

$\Leftrightarrow2y=6x+8\Leftrightarrow y=\frac{6x+8}{2}\Leftrightarrow y=\frac{6x}{2}+\frac{8}{2}\Leftrightarrow y=3x+4$

ΑΣΚΗΣΗ 37.1:Βρείτε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ όπου Α(0, -) και Β(2, -4).

2ος ΤΡΟΠΟΣ:Βρίσκουμε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ όπου $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ και $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$

Στην συνέχεια αν $x_A=x_B$, δηλαδή η ευθεία ΑΒ είναι κατακόρυφη τότε η μεσοκάθετος του ΑΒ είναι η ευθεία $y=\frac{y_A+y_B}{2}$. Αν $x_A\neq x_B$ τότε η ευθεία ΑΒ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης τον $\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$, οπότε η μεσοκάθετος που είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με $-\frac{x_B-x_A}{y_B-y_A}$και η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα είναι η $y-y_M=\lambda_1(x-x_M)\Leftrightarrow y-\frac{y_A+y_B}{2}=-\frac{x_B-x_A}{y_B-y_A}(x-\frac{x_A+x_B}{2})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ε όταν:**
   i. αυτή σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135^o
   ii. αυτή διέρχεται από τα σημεία Α(-5, 1) και Β(-1, -3)
   iii. αυτή διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{x+5}{x-1}$με τετμημένες αντίστοιχα τις 2 και 3.
   iv. είναι παράλληλη στην ευθεία $ε_1$ με εξίσωση την y=4-5x.
   v. είναι κάθετη στην ευθεία $ε_2$ με εξίσωση την $y=-\frac{3}{4}x$.
2. **Δείξτε με τη βοήθεια του συντελεστή διεύθυνσης ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της γραφικής παράστασης $f(x)=x^2$ που να ανήκουν στην ίδια ευθεία.**
3. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και τα σημεία της $Α(x_o, f(x_o))$και $Β(x, f(x))$με $x\neq x_0$.**
   i. Δείξτε ότι ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης λ για την ευθεία ΑΒ τον οποίο και να δείξετε ότι $\lambda=x+x_o$.
   ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, τότε με τι ισούται ο λ;
4. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$και τα σημεία της $Α(x_o, f(x_o))$και $Β(x, f(x))$με $x\neq x_0$.**
   i. Δείξτε ότι ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης λ για την ευθεία ΑΒ τον οποίο και να δείξετε ότι $\lambda=x^2+x\cdot x_o+x_o^2$.
   ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, τότε με τι ισούται ο λ;
5. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^ν$ με ν θετικό ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο του 1και τα σημεία της $Α(x_o, f(x_o))$και $Β(x, f(x))$με $x\neq x_0$.**
   i. Δείξτε ότι για το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ΑΒ ισχύειότι $\lambda=x^{ν-1}+x^{ν-2}x_o+x^{ν-3}x_o^2+\ldots+xx_o^{ν-2}+x_o^{ν-1}$.
   ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, δείξτε ότι $\lambda=ν\cdot x_o^{ν-1}$.
6. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+1$και τα σημεία της $Α(x_o, f(x_o))$και $Β(x, f(x))$με $x\neq x_0$.**
   i. Δείξτε ότι για το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ΑΒ ισχύει $\lambda=x+x_o-2$.
   ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, δείξτε ότι $\lambda=2\cdot x_o-2$.
   iii. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $Α(x_o, f(x_o))$, ορίζεται από τον τύπο $y-f(x_o)=\lambda(x-x_o)$, όπου λ είναι η κλίση της ευθείας ΑΒ όταν το x τείνει στο x_o, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι η $\mathbf{y=(2x_o-2)x-x_o^2+1}$.

iv. Με βάση τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης ευθείας ε που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(1, f(1)).

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και τα σημεία της $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x, f(x))$ με $x\neq x_0$ και $x, x_o>0$.

i. Δείξτε ότι για το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ΑΒ ισχύει $\lambda=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}$.

ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, δείξτε ότι $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}$.

iii. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$, ορίζεται από τον τύπο $y- f(x_o)=\lambda(x-x_o)$, όπου λ είναι η κλίση της ευθείας ΑΒ όταν το x τείνει στο x_o, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι η $\boldsymbol{y=\frac{1}{2\sqrt{x_o}}x+\frac{\sqrt{x_o}}{2}}$.

iv. Με βάση τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης ευθείας ε που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(4, f(4)).

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ και τα σημεία της $A(x_o, f(x_o))$ και $B(x, f(x))$ με $x\neq x_0$ και $x, x_o>0$.

i. Δείξτε ότι για το συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας ΑΒ ισχύει $\lambda=-\frac{1}{x\cdot x_o}$.

ii. Αν ο x τείνει να γίνει ίσο με το x_o, δείξτε ότι $\lambda=-\frac{1}{x_o^2}$.

iii. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_o, f(x_o))$, ορίζεται από τον τύπο $y- f(x_o)=\lambda(x-x_o)$, όπου λ είναι η κλίση της ευθείας ΑΒ όταν το x τείνει στο x_o, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ε είναι η $\boldsymbol{y=-\frac{1}{x_o^2}x+\frac{2}{x_o}}$.

iv. Με βάση τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης ευθείας ε που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(1, f(1)).

9. Βρείτε την εξίσωση ευθείας ε όταν:

i. διέρχεται από το σημείο Α(3, 4) και έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 2

ii. διέρχεται από το σημείο Α(-2, 1) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 45^o

iii. διέρχεται από το σημείο $A(-\sqrt{3}, 1)$ και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{2\pi}{3}$

iv. Είναι παράλληλη στον άξονα των x και διέρχεται από το σημείο Α(6, 1).

v. διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

vi. διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 120^o.

vii. διέρχεται από τα σημεία Α(2,-1) και Β(6,3)

viii. διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(-3, 9)

ix. διέρχεται από τα σημεία Α(2,5) και Β(2,-7).

x. Διέρχεται από τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2-3x+2$ που έχουν τετμημένες αντίστοιχα ίσες με 1 και 2.

xi. Είναι κάθετη στον άξονα των x και διέρχεται από το σημείο Α(3, -4).

xii. διέρχεται από το σημείο Α(2, 4) και είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3x+1$

xiii. διέρχεται από το σημείο Α(-3, -1) και είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{4}{5}x-2$

xiv. διέρχεται από το σημείο Α(2, 4) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-2, 2)$

xv. διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(-6, -12)$

xvi. διέρχεται από το σημείο Α(6, 0) και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(3, 1)$

xvii. διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών ε_1: $y=2x+1$ και ε_2: $y=-3x+6$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ε: $y=x-6$

xviii. διέρχεται από το μέσο του τμήματος ΑΒ όπου Α(3, -2) και Β(5, 6) και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1: $4y=x-8$.

xix. διέρχεται από το σημείο τομής της ευθείας ε_1: $-2y=5x+6$ με τον άξονα y'y και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(5, -10)$

xx. διέρχεται από το σημείο τομής της ευθείας ε_1:$x+3y-9=0$ με τον άξονα x'x και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(4, -2)$.

10. Βρείτε ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στην ευθεία ε: $y=2x-1$

α. Μ(4, 7)

β. Ν(-1, -3)
γ. Κ(0, -1)
δ. Τ(-2, 4)
ε.Γ(α+1, 2α+1) όπου α∈R.

11. Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(-1, 2) και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία 135^o
Α. βρείτε την εξίσωση της ευθείας
Β.βρείτε αν το σημείο Μ(2, 2) ανήκει στην ευθεία ε
Γ.βρείτε το σημείο τομής της με την ευθεία $ε_1$: y=-2x+5
Δ. βρείτε τα σημεία τομής της ε με τους άξονες
Ε. υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες

12. Βρείτε το λ∈R ώστε οι ευθείες $ε_1$:$y=(λ^2-3λ)x+1$ και $ε_1$:y=-2x να είναι παράλληλες

13. Βρείτε το α∈R ώστε οι ευθείες $ε_1$:$y=(α^4-α^2)x+1$ και $ε_1$:$y=(2α^2+4)x$ να είναι παράλληλες

14. Βρείτε το λ∈R ώστε οι ευθείες $ε_1$:$y=(λ^2-2λ)x$ και $ε_1$:y=x+4 να είναι κάθετες

15. Βρείτε το α∈R ώστε το σημείο $Μ(α^2, α+5)$ να ανήκει στην ευθεία y=x-1

16. Βρείτε το α∈R ώστε το σημείο Μ(|α-1|+2, |α+2|) να ανήκει στην ευθεία y=-x+7.

17. Δίνεται ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(3,4) και Β(-2, -1).
i. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.
ii. Βρείτε το κ∈R, ώστε η ευθεία $ε_1$ με εξίσωση την y=(2κ-1)x+5, να είναι παράλληλη στην ευθεία ε.
iii. Βρείτε για κ=1 το σημείο τομής της ευθείας $ε_1$του Β ερωτήματος με την ευθεία ε.
iv. Βρείτε το κ∈R, ώστε η ευθεία $ε_2$ με εξίσωση την y=(κ-5)x+5, να είναι κάθετη στην ευθεία ε.

18. Δείξτε ότι τα σημεία Μ(α+2, 2α-3) με α∈R ανήκουν σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

19. Δίνονται τα σημεία Α(-2, 3) και Β(-1, 0). Δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=12$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

20. Δίνονται τα σημεία Α(2, 4), Β(-3, 2) και Γ(3, 1)
Α. Δείξτε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο
Β. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους ΑΔ και την εξίσωση της ευθείας της διαμέσου ΑΜ
Γ. Βρείτε το βαρύκεντρο του τριγώνου
Δ. Βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου
Ε. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την κορυφή Α παράλληλα προς την ΒΓ.

21. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Β(2, 1) και το ύψος και η διάμεσος από την κορυφή Α έχουν αντίστοιχα εξισώσεις y=2x+3 και y=x+2 να βρείτε τις κορυφές Α και Γ του τριγώνου.

22. Δίνονται τα σημεία Α(1, 0) , Β(2, 3) και Γ(5, 7) καθώς και σημείο Δ έτσι ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
Α. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.
Β.Βρείτε την εξίσωση της πλευράς του ΑΔ.
Γ. Βρείτε την εξίσωση της ΒΔ.

23. Βρείτε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(2, 1) και
Α.σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο
Β. σχηματίζει τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με 1 τμ.

24. Βρείτε το σημείο της ευθείας y=x-1 που απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη απόσταση και στη συνέχεια υπολογίστε αυτήν την απόσταση.

25. Βρείτε το σημείο της ευθείας ε:y=x-4 που απέχει από το σημείο Α(1, -2) την ελάχιστη απόσταση και στη συνέχεια υπολογίστε αυτήν την απόσταση.

26. Δίνεται το σημείο Α(2, 3) και η ευθεία ε:y=x-1
Α. Βρείτε την προβολή του Α πάνω στην ευθεία ε.
Β. Βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

19. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$.**
Δείξτε ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ή έχει ένα ή τρία κοινά σημεία με τη γραφική παράστασης της συνάρτησης f.Στην περίπτωση των τριών κοινών σημείων ποια είναι η μεταξύ τους σχέση;

20. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.**
Α. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων τέμνουν τη γραφική παράσταση της f.
Β.Ποιες από τις παραπάνω ευθείες έχουν δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f;