2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α;

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in A$.

2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της , όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$.

3. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_o \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to \alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R \text{ και } \lim_{x\to \beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$$

4. Τι ονομάζουμε πρώτη παράγωγο ή πιο απλά παράγωγος μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A_1 υποσύνολο του Α, όπου A_1 είναι το σύνολο όλων των σημείων του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη;

Απάντηση

Ονομάζουμε τη συνάρτηση f' η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 \subseteq A$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη και η οποία σε κάθε $x \in A_1$ αντιστοιχίζει το $f'(x)$.
Δηλαδή, f' παράγωγος της f στο $A_1 \subseteq A \Longrightarrow f': A_1 \to R$ και $x \to f'(x)$

5. Πως συμβολίζεται η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης f;

Απάντηση

Για πρακτικούς λόγους την παράγωγο συνάρτηση $y = f'(x)$ θα τη συμβολίζουμε και με $y = (f(x))'$.

6. Πως αλλιώς συμβολίζεται η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f;

Απάντηση

Η πρώτη παράγωγος της f συμβολίζεται και με $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται "ντε εφ προς ντε χι".

7. Τι ονομάζουμε δεύτερη παράγωγο η νιοστή παράγωγο της συνάρτησης f και πως αυτή συμβολίζεται;

Απάντηση

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $A_1 \subseteq A$ και το $A_1 \subseteq A$ είναι ένα διάστημα ή μια ένωση διαστημάτων τότε, δεύτερη παράγωγο της f ονομάζουμε την παράγωγο της f' στην περίπτωση που η f' είναι παραγωγίσιμη.

Η δεύτερη παράγωγος της f στην περίπτωση που αυτή υπάρχει συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της f**, με $\nu \geq 3$, και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{(\nu)}}$. Δηλαδή $\mathbf{f^{(\nu)} = [f^{(\nu-1)}]', \nu \geq 3}$

8. Με τι ισούται η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης;

Απάντηση

Αν f(x)=c, c∈R είναι μια σταθερή συνάρτηση τότε $f'(x)=0$ για κάθε x∈R.Δηλαδή $(c)'=0$

9. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)=c, c∈R είναι η f ′(x)=0 για κάθε x∈R;

Απάντηση

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{c-c}{x-x_o}=\frac{0}{x-x_o}=0 \text{ Επομένως, } \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}0=0,$$

δηλαδή $(c)'=0$.

10. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=x;

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x)=x είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το R και ισχύει $f'(x)=1$ για κάθε x∈R. Δηλαδή $(x)'=1$

11. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της f(x)=x είναι η f ′(x)=1 για κάθε x∈R;

Απάντηση

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{x-x_o}{x-x_o}=1 \text{ Επομένως, } \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}1=1,$$

δηλαδή $(x)'=1$.

12. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^\nu$ με $\nu \in \mathbf{N}-\{0, 1\}$;

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$ με $\nu \in \mathbf{N}-\{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το R και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$ για κάθε x∈R. Δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$

13. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της $f(x)= x^{\nu}$ είναι η $f'(x)= \nu x^{\nu-1}$ για κάθε $x\in R$;

Απάντηση

Αν x_0 είναι ένα σημείο του **R**, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{x^{\nu}-x_o^{\nu}}{x-x_o}=\frac{\cancel{(x-x_o)}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+x^{\nu-3}x_o^2...+xx_o^{\nu-2}+x_o^{\nu-1}\right)}{\cancel{x-x_o}}=$$

$$x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+x^{\nu-3}x_o^2...+xx_o^{\nu-2}+x_o^{\nu-1}$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_o+x^{\nu-3}x_o^2...+xx_o^{\nu-2}+x_o^{\nu-1}\right)=$$

$$x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-2}x_o+x_o^{\nu-3}x_o^2...+x_ox_o^{\nu-2}+x_o^{\nu-1}=\underbrace{x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-1}+.....x_o^{\nu-1}+x_o^{\nu-1}}_{\nu\ \text{όροι}}=\nu x_o^{\nu-1}$$

,δηλαδή $(x^{\nu})'= \nu x^{\nu-1}$.

14. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$;

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.Δηλαδή $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

15. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της $f(x)=\sqrt{x}$ είναι η $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$;

Απάντηση

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}{(x-x_o)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_o}\right)^2}{(x-x_o)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=$$

$$\frac{\cancelto{1}{x-x_o}}{\cancel{(x-x_o)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_o}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}=\frac{1}{\sqrt{x_o}+\sqrt{x_o}}=\frac{1}{2\sqrt{x_o}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancelto{1}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

16. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=ημx;

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x)=ημx είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f ′(x)=συνx για κάθε x∈R.Δηλαδή (ημx) ′=συνx.

17. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της f(x)= ημx είναι η f ′(x)=συνx για κάθε x∈R;

Απάντηση

Για κάθε x∈R, ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$=\frac{\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu h-1)+\eta\mu h\sigma\upsilon\nu x}{h}=\eta\mu x\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu x$$

Επίσης $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$. Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\frac{\eta\mu h}{h}\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu x\cdot 0+1\cdot\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x,$$

Δηλαδή (ημx) ′=συνx.

18. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=συνx;

Απάντηση

Η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f ′(x)=-ημx για κάθε x∈R.Δηλαδή (συνx) ′=-ημx.

19. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της f(x)= συνx είναι η f ′(x)=-ημx για κάθε x∈R;

Απάντηση

Για κάθε x∈R, ισχύει :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu h-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\eta\mu h}{h}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu h-1)-\eta\mu x\eta\mu h}{h}=\sigma\upsilon\nu x\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}-\frac{\eta\mu h}{h}\eta\mu x$$

Επίσης $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$. Άρα

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}-\frac{\eta\mu h}{h}\eta\mu x\right)=\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-1\cdot\eta\mu x=-\eta\mu x,$$

Δηλαδή (συνx) ′=-ημx.

20. Πως σχετίζονται τα όρια $\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημh}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h}=0$ με τις παραγώγους;

Απάντηση

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{ημh}{h}=1$ είναι η παράγωγος της f(x)=ημx στο 0 γιατί

$$\lim_{h\to 0}\frac{ημh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ημh-0}{h-0}=\lim_{h\to 0}\frac{ημh-ημ0}{h-0}=f'(0)$$

Το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h}=0$ είναι η παράγωγος της g(x)=συνx στο 0 γιατί

$$\lim_{h\to 0}\frac{συνh-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{συνh-συν0}{h-0}=g'(0)$$

21. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$;

Απάντηση

Η $f(x)=e^x$ είναι παραγωγίσιμη σ’ όλο το R και ισχύει $f'(x)=e^x$ για κάθε x∈R. Δηλαδή $(e^x)'=e^x$.

22. Τι πρέπει να ξέρουμε για την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης f(x)=lnx;

Απάντηση

Η f(x)=lnx είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε x∈(0, +∞). Δηλαδή $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

2.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Παράγωγος αθροίσματος

1. **Τι ισχύει για την παράγωγο αθροίσματος δύο συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 στο οποίο υπάρχουν οι παράγωγοί τους;**

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f + g)'(x_0) = f\,'(x_0) + g'(x_0)$

2. **Πως αποδεικνύεται ότι αν δύο συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε ισχύει : $(f + g)'(x_0) = f\,'(x_0) + g'(x_0)$;**

Απάντηση

Για $x \neq x_0$ έχουμε ότι

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)+g(x)-\left(f(x_o)+g(x_o)\right)}{x-x_o}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_o)-g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_o)+g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}$$

Επειδή οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{x\to x_o}\left[\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_o)}{x-x_o}\right]=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\right]=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=f'(x_o)+g'(x_o)$$

δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f\,'(x_0) + g'(x_0)$

2. **Αν δύο συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ τι ισχύει σ' αυτό το διάστημα για την παράγωγο του αθροίσματός τους;**

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση f + g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει : $(f + g)'(x) = f\,'(x) + g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

3. **Τι ισχύει για την παράγωγο του αθροίσματος περισσοτέρων από δύο συναρτήσεων σε ένα διάστημα Δ αν όλες τους είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ;**

Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, τότε και η συνάρτηση $f_1+f_2+\ldots+f_k$ θα είναι παραγωγίσιμη στο Δ και θα ισχύει:

$(f_1+f_2+\ldots+f_k)'(x) = f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_k'(x)$

Για παράδειγμα,

$(\eta\mu x+x^3+e^x-5)'= (\eta\mu x)' +(x^3)' +(e^x)' -(5)'=\sigma\upsilon\nu x+3x^2+e^x-0= \sigma\upsilon\nu x+3x^2+e^x$

Παράγωγος γινομένου

4. Τι ισχύει για την παράγωγο γινομένου δύο συναρτήσεων σε ένα σημείο x_0 στο οποίο υπάρχουν οι παράγωγοί τους;

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

5. Πως αποδεικνύεται ότι αν δύο συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε ισχύει : $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$;

Απάντηση

Για $x\neq x_0$ έχουμε ότι

$$\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x)+f(x_o)\cdot g(x)-f(x_o)\cdot g(x_o)}{x-x_o}=$$

$$\frac{g(x)\cdot[f(x)-f(x_o)]+f(x_o)[g(x)-g(x_o)]}{x-x_o}=g(x)\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}+f(x_o)\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}g(x)+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}f(x_o)$$

Επειδή οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε

$$\lim_{x\to x_o}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\left[\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}g(x)+\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}f(x_o)\right]=$$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\lim_{x\to x_o}g(x)+\lim_{x\to x_o}\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o}\lim_{x\to x_o}f(x_o)=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_o)$$

δηλαδή $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

6. Αν δύο συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ τι ισχύει σ' αυτό το διάστημα για την παράγωγο του γινομένου τους;

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει : $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις x και lnx είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ οπότε και το γινόμενό τους θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ και θα ισχύει $(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$

7. Τι ισχύει για την παράγωγο του γινομένου περισσοτέρων από δύο συναρτήσεων σε ένα διάστημα Δ αν όλες τους είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ;

Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, τότε και η συνάρτηση $f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k$ θα είναι παραγωγίσιμη στο Δ και θα ισχύει:

$$(f_1\cdot f_2\cdot\ldots\cdot f_k)'(x)=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\ldots\cdot f_k(x)+\ldots+f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_\kappa'(x)$$

Ειδικότερα αν έχουμε τρεις συναρτήσεις, ας υποθέσουμε τις f,g και h οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ τότε θα ισχύει για κάθε $x\in\Delta$.

$(f\cdot g\cdot h)'(x)=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$.

Για παράδειγμα,

$(e^x x^3 ημx)'=(e^x)'x^3ημx+e^x(x^3)'ημx+e^x x^3(ημx)'=e^x x^3ημx+e^x 3x^2ημx+e^x x^3συνx=e^x x^2(xημx+3ημx+xσυνx)$

8. Τι ισχύει για την παράγωγο γινομένου αριθμού με συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ στο οποίο η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη;

Απάντηση

Αν η συνάρτηση f, είναι παραγωγίσιμη στο Δ, τότε και η συνάρτηση cf είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει : $(cf)'(x)=cf\,'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Για παράδειγμα $(-3ημx)'=-3(ημx)'=-3συνx$

9. Πως αποδεικνύεται ότι αν f είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ τότε ισχύει $(cf)'(x)=cf'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$;

Απάντηση

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=c$ η οποία παραγωγίζεται στο R άρα και στο διάστημα Δ στο οποίο παραγωγίζεται η f. Οπότε και η συνάρτηση $g\cdot f$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$(g\cdot f)'(x)= g'(x)f(x)+g(x)f'(x)=(c)'f(x) +cf\,'(x)=0\,'f(x) +cf\,'(x)= cf\,'(x)$

Παράγωγος πηλίκου

10. Τι ισχύει για την παράγωγο του πηλίκου $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f και g σε ένα σημείο x_o στο οποίο υπάρχουν οι παράγωγοί τους και επιπλέον ισχύει $g(x_o)\neq0$;

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, και $g(x_o)\neq0$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_o)}{g^2(x_o)}$$

11. Τι ισχύει για την παράγωγο του πηλίκου $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f και g σε ένα διάστημα Δ στο οποίο αυτές είναι παραγωγίσιμες και επιπλέον ισχύει $g(x)\neq0$ για κάθε $x\in\Delta$;

Απάντηση

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ, και $g(x)\neq0$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και ισχύει για κάθε $x\in\Delta$ ότι:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Για παράδειγμα

$$\left(\frac{x-1}{x^2+2}\right)'=\frac{(x-1)'(x^2+2)-(x-1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=\frac{1(x^2+2)-(x-1)2x}{(x^2+2)^2}=$$

$$\frac{x^2+2-2x^2+2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}$$

12. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^{-\nu}$ με $\nu\in N^*$;

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$ για κάθε $x\in R^*$
Για παράδειγμα $(x^{-5})'=-5\,x^{-5-1}=-5\,x^{-6}$

13. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^{-\nu}$ με $\nu\in N^*$ στο R* είναι η $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$;

Απάντηση

Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $x^{-\nu}=\frac{1}{x^\nu}$. Άρα

$$\left(x^{-\nu}\right)'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1\left(x^\nu\right)'}{\left(x^\nu\right)^2}=\frac{0\cdot x^\nu-1\cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=\frac{-1\cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=$$

$$\frac{-x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-x^{\nu-1-2\nu}=-x^{-\nu-1}$$

14. Τι ισχύει για την παράγωγο της x^κ με $\kappa\in Z-\{0,1\}$;

Απάντηση

$(x^\kappa)'=\kappa x^{\kappa-1}$

15. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=εφx με $x\in R_1=R-\{x|\text{συν}x=0\}$;

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x|\text{συν}x=0\}$ και ισχύει

$f'(x)=(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$

16. Πως αποδεικνύεται ότι $(\text{εφ}x)'=\frac{1}{\text{συν}^2x}$ για κάθε $x\in R_1=R-\{x|\text{συν}x=0\}$;

Απάντηση

$$(\text{εφ}x)'=\left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)'=\frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x-\text{ημ}x(\text{συν}x)'}{(\text{συν}x)^2}=\frac{\text{συν}x\text{συν}x-\text{ημ}x(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2x}=$$

$$\frac{\text{συν}^2x+\text{ημ}^2x}{\text{συν}^2x}=\frac{1}{\text{συν}^2x}$$

17. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης f(x)=σφx με $x\in R_1=R-\{x|\text{ημ}x=0\}$;

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1=R-\{x|\text{ημ}x=0\}$ και ισχύει

$f'(x)=(\text{σφ}x)'=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$

18. Πως αποδεικνύεται ότι $(\text{σφ}x)'=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$ για κάθε $x\in R_1=R-\{x|\text{ημ}x=0\}$;

Απάντηση

$$(\text{σφ}x)'=\left(\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}\right)'=\frac{(\text{συν}x)'\text{ημ}x-\text{συν}x(\text{ημ}x)'}{(\text{ημ}x)^2}=\frac{(-\text{ημ}x)\text{ημ}x-\text{συν}x\text{συν}x}{\text{ημ}^2x}=$$

$$\frac{-\text{ημ}^2x-\text{συν}^2x}{\text{ημ}^2x}=-\frac{\text{ημ}^2x+\text{συν}^2x}{\text{ημ}^2x}=-\frac{1}{\text{ημ}^2x}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

19. Τι ισχύει για την παράγωγο της σύνθεσης της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f αν η g παραγωγίζεται στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$;

Απάντηση

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

20. Τι ισχύει για την παράγωγο της σύνθεσης της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f αν η g παραγωγίζεται στο διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ);

Απάντηση

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο g(Δ), τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)\cdot u'$

21. Με τη βοήθεια του συμβολισμού Leibnitz ποιος είναι ο τύπος που μας δίνει την παράγωγο της σύνθεσης δύο συναρτήσεων και με ποια ονομασία είναι γνωστός αυτός ο τύπος;

Απάντηση

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ που είναι γνωστός και σαν κανόνας της αλυσίδας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, πράγμα που διευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα.

22. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=x^\alpha$ με $\alpha\in R-Z$;

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=x^\alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Δηλαδή ισχύει $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

Για παράδειγμα $(x^{-5})'=-5\,x^{-5-1}=-5\,x^{-6}$

23. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^\alpha$ με $\alpha\in R-Z$ είναι η $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$;

Απάντηση

Έχουμε ότι $y = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ και αν θέσουμε $u = \alpha\ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u u'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)' = e^{\alpha\ln x}\alpha(\ln x)'=x^\alpha\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

24. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>0$;

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$ για κάθε x∈R. Δηλαδή ισχύει $(\alpha^x)'=\alpha^x\ln\alpha$

Για παράδειγμα $(3^x)'=3^x\ln3$.

25. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\alpha^x$ με $\alpha>0$ είναι η $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$;

Απάντηση

Έχουμε ότι $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και αν θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u u'=e^{x\ln\alpha}(x\ln\alpha)'=e^{x\ln\alpha}\ln\alpha(x)'=\alpha^x\ln\alpha\cdot1=\alpha^x\ln\alpha$$

26. Τι ισχύει για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\ln|x|$;

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το R* και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε x∈R*. Δηλαδή ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ για κάθε x∈R*.

27. Πως αποδεικνύεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\ln|x|$ είναι η $f'(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε x∈R*;

Απάντηση

αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ενώ

αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}(-x)'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

Παράγωγοι Συναρτήσεων και Κανόνες Παραγώγισης		
Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων	Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων $(f(g(x)))'= f'(g(x)) \cdot f'(x)$	Κανόνες παραγώγισης
$(c)'=0$		$(f(x)+g(x))'= f'(x)+g'(x)$
$(x)'=1$		$(f(x)-g(x))'= f'(x)-g'(x)$
$(x^{\alpha})'=\alpha\, x^{\alpha-1}$	$(f^{\alpha}(x))'=\alpha\, f(x)^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$(cf(x))'= cf'(x)$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$	$(f(x)\cdot g(x))'= f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$
$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{f(x)})'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu f(x))'=\sigma\upsilon\nu\, f(x)\cdot f'(x)$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$
$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu f(x))'=-\eta\mu f(x)\cdot f'(x)$	
$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(\varepsilon\varphi f(x))'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}\cdot f'(x)$	
$(\sigma\varphi x)'=-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$(\sigma\varphi f(x))'=-\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)}\cdot f'(x)$	
$(e^x)'= e^x$	$(e^{f(x)})'= e^{f(x)} \cdot f'(x)$	
$(\alpha^x)'= \alpha^x \ln\alpha$	$(\alpha^{f(x)})'= \alpha^{f(x)}\ln\alpha\cdot f'(x)$	
$(\ln x)'= \frac{1}{x}$	$(\ln f(x))'=\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	
$(\ln\|x\|)'= \frac{1}{x}$	$(\ln\|f(x)\|)'=\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$	

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

28. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x , y συνδέονται με τη σχέση y = f(x) , τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 όταν η f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0;

Απάντηση

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x , y συνδέονται με τη σχέση y = f(x) , όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0** την παράγωγο $f'(x_0)$.

29. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_0;

Απάντηση

Η στιγμιαία ταχύτητα ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης S του κινητού ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 .

Δηλαδή $\upsilon(t_0)=\lim_{t\to t_o}\frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o}=S'(t_0)$

30. Πως ορίζεται ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0;

Απάντηση

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\upsilon'(t_0)$, της ταχύτητας υ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 .

31. Πως ορίζεται η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και πως συμβολίζεται αυτή;

Απάντηση

Η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή η παράγωγος της ταχύτητας στο t_0 ή διαφορετικά η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης στο t_0. Η επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_0 συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$ και ισχύει $\alpha(t_0)= \upsilon'(t_0)= S''(t_0)$

32. Τι ονομάζουμε οριακό κόστος στο x_0;

Απάντηση

Οριακό κόστος στο x_0 ονομάζουμε το ρυθμό μεταβολής του κόστους ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος όταν αυτή γίνει ίση με x_0, δηλαδή την παράγωγο της συνάρτησης «κόστος» στο x_0.

Έτσι αν με Κ συμβολίσουμε το κόστος και αυτό εκφράζεται ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος, τότε το οριακό κόστος είναι το $K'(x_0)$, όπου $K'(x_0)$ είναι η παράγωγος(ρυθμός μεταβολής) του κόστους για παραγόμενη ποσότητα x_0

33. Τι ονομάζουμε οριακή είσπραξη(έσοδο) στο x_0;

Απάντηση

Οριακή είσπραξη(οριακό έσοδο) στο x_0 ονομάζουμε το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος όταν αυτή γίνει ίση με x_0, δηλαδή την παράγωγο της συνάρτησης «είσπραξη» στο x_0.

Έτσι αν με Ε συμβολίσουμε την είσπραξη και αυτή εκφράζεται ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος, τότε η οριακή είσπραξη είναι το $E'(x_0)$, όπου $E'(x_0)$ είναι η παράγωγος(ρυθμός μεταβολής) της είσπραξης για παραγόμενη ποσότητα x_0.

34. Τι ονομάζουμε οριακή κέρδος στο x_0;

Απάντηση

Οριακό κέρδος στο x_0 ονομάζουμε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος όταν αυτή γίνει ίση με x_0, δηλαδή την παράγωγο της συνάρτησης «κέρδος» στο x_0.

Έτσι αν με Ρ συμβολίσουμε το κέρδος και αυτό εκφράζεται ως προς την ποσότητα x του παραγόμενου προϊόντος, τότε το οριακό κέρδος είναι το $P'(x_0)$, όπου $P'(x_0)$ είναι η παράγωγος(ρυθμός μεταβολής) του κέρδους για παραγόμενη ποσότητα x_0.