**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 1**

Η παροχή του καταρράκτη του Νιαγάρα είναι 8000 m³ / s και η χωρητικότητα της τεχνητής λίμνης του Μαραθώνα 44·106m³ .

Υπολογίστε το χρόνο που απαιτείται ώστε τα νερά του Νιαγάρα να γεμίσουν την λίμνη του Μαραθώνα .

**Λύση**

Η παροχή του καταρράκτη του Νιαγάρα ΠΝ ορίζεται :

ΠΝ = ΔV / Δt .

Ο όγκος της λίμνης του Μαραθώνα είναι  VM , άρα η μεταβολή του όγκου :

ΔV = VM – 0 .

Δηλαδή :

ΠΝ = ΔV / Δt ⇒Δt = ΔV / ΠΝ ⇒Δt = (VM – 0) / ΠΝ ⇒Δt = VM / ΠΝ ⇒

Δt = 44·106/ (8·103) ⇒Δt = 5,5·103s ≅ 1,528 h .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 2**

Στον πυθμένα βαρελιού είναι ανοιγμένη μια οπή από την οποία ρέει κρασί με ταχύτητα 6,0 m / s .

Αν η ελεύθερη επιφάνεια του κρασιού κατέρχεται με σχεδόν μηδενική ταχύτητα ποιο είναι το ύψος του βαρελιού ;

Δίνεται g = 10 m / s² .

**Λύση**

****

Από το θεώρημα του Torricelli :

υεξ = √(2·g·h) ⇒υεξ² = 2·g·h ⇒h = υεξ² / (2·g) ⇒h = 6² / (2·10) ⇒h = 36 / 20 ⇒h = 18 / 10 ⇒

h = 1,8 m .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 3**

****

Στο σωλήνα του σχήματος ρέει πετρέλαιο . Αν ο λόγος των διατομών είναι Α1 / Α2 = 5 και το ύψος h = 15 cm , να βρεθεί η ταχύτητα του υγρού στη διατομή Α1.

Η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s² .

**Λύση**

Ισχύει η εξίσωση της συνέχειας :

Α1·υ1 = Α2·υ2 ⇒υ2 = (Α1/ Α2)·υ1 ⇒υ2 = 5·υ1 … (Ι) .

Ισχύει :

Ρ1 = Ρat + ρ·g·h1 ,

Ρ2 = Ρat + ρ·g·h2 ,

από το σχήμα :

h = h1 – h2 .

Εξίσωση του Bernoulli :

Ρ1 + ½·ρ·υ1² = Ρ2 + ½·ρ·υ2² ⇒

με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων ,

Ρat + ρ·g·h1 + ½·ρ·υ1² = Ρat + ρ·g·h2 + ½·ρ·υ2² ⇒

ρ·g·h1 + ½·ρ·υ1² = ρ·g·h2 + ½·ρ·υ2² ⇒

ρ·g·h1 – ρ·g·h2 = ½·ρ·υ2² – ½·ρ·υ1² ⇒

ρ·g·(h1 – h2) = ½·ρ·(υ2² – υ1²) ⇒

από το σχήμα  h = h1 – h2 ,

g·h = ½·(υ2² – υ1²) ⇒

από τη σχέση (Ι) ,

g·h = ½·[(5·υ1)² – υ1²] ⇒g·h = ½·24·υ1² ⇒υ1 = √(g·h / 12) ⇒υ1 = √2 / 4 m / s ⇒υ1 = 0,35 m / s .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 4**

Οριζόντιος σωλήνας διαρρέεται από νερό . Σε δύο περιοχές του σωλήνα οι διατομές είναι 0,20 m² και 0,050 m² αντίστοιχα .

Αν η ταχύτητα στην πρώτη διατομή είναι 5 m / s και η πίεση στη δεύτερη 2,0·105Ν / m² , να βρείτε :

**α.** Την πίεση του υγρού στη δεύτερη διατομή ,

**β.** Την πίεση στην πρώτη διατομή .

Η πυκνότητα του νερού είναι 1,0·103kg / m³ .

**Λύση**

Δίνονται :

Α1 = 0,2 m² , Α2 = 0,05 m²  άρα ,Α1 / Α2 = 4 .

**α.**

****

Η εξίσωση της συνέχειας :

Α1·υ1= Α2·υ2⇒υ2= (Α1 / Α2)·υ1⇒υ2= 4·υ1⇒υ2= 4·5 ⇒υ2= 20 m / s .

**β.**

****

Εξίσωση του Bernoulli :

Ρ1+ ½·ρ·υ1² = Ρ2+ ½·ρ·υ2² ⇒Ρ1= Ρ2+ ½·ρ·(υ2² – υ1²) ⇒

ισχύει υ2= 4·υ1,

Ρ1= Ρ2+ ½·ρ·[(4·υ1)² – υ1²] ⇒Ρ1= Ρ2+ ½·ρ·15·υ1² ⇒Ρ1= 2·105+ ½·1·103·15·5² ⇒

Ρ1= 3,875·105Ν / m² ⇒Ρ1≅ 3,9·105Ν / m² .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 5**

Η οπή εκτόξευσης του νερού ενός νεροπίστολου είναι 1,0 mm² και το εμβαδόν του εμβόλου που πιέζει το νερό 75 mm² .

H εταιρεία κατασκευής απαιτεί γι’ αυτό το νερό που εκτοξεύεται , όταν ένα παιδί χειρίζεται το παιχνίδι , και εκτοξεύεται οριζόντια κατά 3,5 m , ενώ η κατακόρυφη απόκλιση του να είναι μικρότερη από 1,0 m .

Αν ένα παιδί μπορεί να ασκήσει δύναμη περίπου 10 Ν , έχει τις προδιαγραφές της εταιρείας το νεροπίστολο ;

Η πυκνότητα του νερού είναι 1,0·10³ kg·m³ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g = 9,8 m / s² .

**Λύση**

**1ος τρόπος λύσης**

Προδιαγραφές : xmax = 3,5 m με y = 1 m .

Γενικά :

y = ½·g·t²  ,

x = υ·t ⇒ t = x / υ , άρα :

y = [g /(2·υ²)]·x² ⇒

υ² = [g / (2·y)]·x² , επομένως :

****

υεκ = xmax·√[g / (2·y)] ≅ 7,75 m / s .

****

Θεωρούμε ότι το έμβολο υπό την επίδραση της F μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα υ1για Δt . Επομένως η F παράγει έργο :

WF= F·υ1·Δt … (I) .

Τότε η μάζα του ρευστού Δm = ρ·Α1·υ1·Δt … (II) , μεταβάλλει την κινητική της ενέργεια κατά :

ΔΚ = ½·Δm·(υ2² – υ1²) ,

από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ,

ΔΚ = WF , άρα ,

½·Δm·(υ2² – υ1²) = WF ⇒

από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ) ,

½·ρ·Α1·υ1·Δt·(υ2² – υ1²) = F·υ1·Δt ⇒ρ·Α1·(υ2² – υ1²) = 2·F ⇒ρ·Α1·υ2²·[1 – (υ1 / υ2)²] = 2·F .

εξίσωση συνέχειας : Α1·υ1= Α2·υ2⇒ υ1/ υ2= Α2/ Α1.

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις :

ρ·Α1·υ2²·[1 – (Α2/ Α1)²] = 2·F ⇒υ2= √{2·F / [ρ·Α1·(1 – (Α2/ Α1)²)]} ⇒

υ2≅ 16,33 m / s > υεκτάρα ικανοποιούνται οι προδιαγραφές .

**2ος τρόπος λύσης**

****

Θα μπορούσαμε να δεχτούμε ότι υπό την επίδραση της F το έμβολο με διατομή Α1έχει αποκτήσει ταχύτητα υ1άρα και το ρευστό . Τότε στην διατομή Α2το ρευστό θα έχει ταχύτητα υ2. Επομένως , από την εξίσωση συνέχειας :

Α1·υ1= Α2·υ2⇒ υ1/ υ2= Α2/ Α1.

Το έργο της σταθερής δύναμης F θα είναι  W = F·Δx  το οποίο μεταβάλλει την κινητική ενέργεια της μάζας  Δm = ρ·Α1·Δx  κατά  ΔΚ = ½·Δm·(υ2² – υ1²)  ,

άρα  F·Δx = ½·ρ·Α1·Δx·(υ2² – υ1²) ⇒υ2² – υ1² = 2·F / (ρ·Α1) ⇒

υ2²·[1 – (υ1 / υ2)²] = 2·F / (ρ·Α1) ⇒

υ2 = √{2·F / [ρ·Α1·(1 – (Α2/ Α1)²)]} , καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .

**3ος τρόπος λύσης**

****

Εξίσωση του Bernoulli :

Ρ1 + ½·ρ·υ1² = Ρ2 + ½·ρ·υ2² ⇒Ρat + (F / A1) + ½·ρ·υ1² = Ρat + ½·ρ·υ2² ⇒

F / A1 = (l / 2)·(υ2² – υ1²) ⇒2·F / (ρ·Α1) = υ2²·[1 – (υ1 / υ2)²] ⇒

εξίσωση της συνέχειας : Α1·υ1= Α2·υ2⇒ υ1/ υ2= Α2/ Α1,

υ2 = √{2·F / [ρ·Α1·(1 – (Α2/ Α1)²)]} , καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 6**

Δοχείο είναι γεμάτο νερό μέχρι ύψους Η και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι .

Βρείτε σε ποιο ύψος από το τραπέζι , πρέπει να ανοίξουμε μικρή τρύπα στο δοχείο , ώστε το νερό που θα εκτοξευθεί να πέσει στην μέγιστη δυνατή απόσταση πάνω στο τραπέζι .

Πόση είναι αυτή η μέγιστη απόσταση ;

**Λύση**

****

Ισχύει :

x = υεκ·Δt ,

h = ½·g·t² ⇒ Δt = √(2·h / g) ,

θεώρημα Torricelli : υεκ= √2·g·(H – h) ,

από τις παραπάνω σχέσεις :

x² = 2·g·(H – h)·(2·h / g) ⇒x² = 4·H·h – 4·h² ⇒4·h² – 4·H·h + x² = 0 .

Πρέπει η διακρίνουσα Δ΄ ≥ 0 ⇒4·h² – 4·x² ≥ 0 ⇒x ≤ H ⇒xmax = H .

Τότε :Δ΄ = 0 καιh = 4·H / 8 ⇒h = H / 2 .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 7**

Ένα δοχείο είναι κυλινδρικό και έχει εμβαδόν διατομής 0,010 m² .

Ενώ στο δοχείο εισέρχεται νερό με ρυθμό 2,0·10-4m³ / s , στο πυθμένα του έχει ανοιχθεί μια τρύπα διατομής 1,0 cm² .

Να αποδείξετε ότι η στάθμη του νερού στο δοχείο θα αυξάνεται μέχρι ενός ύψους στο οποίο πλέον θα διατηρηθεί .

Επίσης να υπολογίσετε το ύψος αυτό .

Είναι g = 10 m / s² .

**Λύση**

Δίνονται Α1 = 100·10-4m² , Πεισ = 2·10-4m³ / s  και Α2 = 10-4m² .

Έστω ότι το δοχείο είναι αρχικά άδειο οπότε υεκρ = υ2 = 0 .

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του νερού στο δοχείο , είναι :

dV / dt = Πεισ – Α2·υ2 ,

εφόσον η υ2 είναι αρχικά μηδέν , το δοχείο αρχίζει να γεμίζει [dV / dt = Α1·(dH / dt) > 0] .

H αύξηση της στάθμης του νερού , του Η , προκαλεί και αύξηση της υ2 μέχρι Πεισ – Α2·υ2 = 0 , οπότε dH / dt = 0 τότε η υ2 δεν μπορεί να αυξηθεί άλλο και το Η = σταθερό .

Τελικά :

Πεισ = Α2·υ2 ⇒

από το θεώρημα του Torricelli : υ2 = √(2·g·H) ,

Πεισ = Α2·√(2·g·H) ⇒Πεισ² = Α2²·2·g·H ⇒H = [1 / (2·g)]·(Πεισ² / Α2²) ⇒H = 20 cm .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 8**

Ένα βεντουρίμετρο έχει διάμετρο σωλήνα 30 cm και διάμετρο λαιμού 15 cm .

Aν οι πιέσεις στο σωλήνα και στη στένωση είναι αντίστοιχα 4,0·104Ρα και 3,0·104Ρα , να υπολογιστεί η παροχή του νερού στο σωλήνα .

Η πυκνότητα του νερού είναι 1,0·103kg / m³ και π ≅ 3,14 .

**Λύση**

Δίνονται Ρ1 = 4·104Ν / m² , Ρ2 = 3·104Ν / m² και ρ = ρν = 103kg / m³ .

Ακόμα Δ1 = 30 cm , Δ2 = 15 cm , άρα :

Δ1 / Δ2 = 30·10-2/ (15·10-2) ⇒ Δ1 / Δ2 = 2 .

Άρα  Α1 / Α2 = Δ1² / Δ2² ⇒ Α1 / Α2 = 4 .

****

Εξίσωση συνέχειας :

A1·υ1 = A2·υ2 ⇒ Α1 / Α2 = υ2 / υ1 ⇒

υ2 / υ1 = 4 … (Ι) .

Εξίσωση Bernoulli :

Ρ1 + ½·ρ·υ1² = Ρ2 + ½·ρ·υ2² ⇒Ρ1 – Ρ2 = ½·ρ·(υ2² – υ1²) ⇒Ρ1 – Ρ2 = ½·ρ·υ1²·[(υ2² / υ1²) – 1] … (ΙΙ) .

Η εξίσωση (ΙΙ) με την βοήθεια της εξίσωσης (Ι) :

Ρ1 – Ρ2 = ½·ρ·υ1²·(4² – 1) ⇒Ρ1 – Ρ2 = ½·ρ·υ1²·15 ⇒υ1= √[(Ρ1 – Ρ2) / (7,5·ρ)] ⇒

υ1= 2·√3 / 3 m / s .

Άρα

Π = A1·υ1 = (π·Δ1² / 4)·υ1 = (π·9·10-2/ 4)·(2·√3 / 3) m³ / s ⇒

Π = 1,5·√3·π·10-2m³ / s ≅ 0,081 m³ / s .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 9**

Η ένδειξη του μανομέτρου του σχήματος είναι 1,75·105Ρa . Αν οι διατομές των σωλήνων  A και A΄ έχουν σχέση Α = 6·Α΄ , υπολογίστε τις ταχύτητες υ και υ΄ , ώστε η πίεση στη διατομή Α΄ να είναι μηδέν .

(Το φαινόμενο στην Α΄ είναι γνωστό ως σπηλαίωση και παρατηρείται εξάτμιση του νερού και δημιουργία φυσαλίδων σε εκείνη τη θέση , που αγνοούμε κατά την ανάλυση μας) .

Η πυκνότητα του νερού είναι 103kg / m³ .

**Λύση**

Δίνονται : Α = 6·Α΄ , Ρ = 1,75·105Ρa , Ρ΄ = 0 και ρ = 105kg / m³ .

****

Η εξίσωση της συνέχειας :

Α·υ = Α΄·υ΄ ⇒6·Α΄·υ = Α΄·υ΄ ⇒υ΄ = 6·υ … (Ι) .

Η εξίσωση του Bernoulli :

Ρ + ½·ρ·υ² = Ρ΄ + ½·ρ·υ΄² ⇒

δίνεται Ρ΄ = 0 , από την σχέση (Ι) ,

Ρ + ½·ρ·υ² = ½·ρ·(6·υ)² ⇒Ρ = ½·ρ·36·υ² – ½·ρ·υ² ⇒Ρ = (35 / 2)·ρ·υ² ⇒

υ² = 2·Ρ / (35·ρ) ⇒υ = √[2·Ρ / (35·ρ)] ⇒υ = √10 m / s ≅ 3,16 m / s .

Από την σχέση (Ι) :

υ΄ = 6·υ ⇒υ΄ = 6·√10 m / s ⇒υ΄ = 19 m / s .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 10**

Ένας σωλήνας Pitot στερεώνεται σε φτερό αεροπλάνου . Το υγρό που χρησιμοποιείται είναι αλκοόλη και η ένδειξη είναι 26,5 cm .

Να υπολογιστεί η ταχύτητα του αεροπλάνου είναι km / h .

Η πυκνότητα της αλκοόλης είναι 0,8·103kg / m³ και του αέρα 1,30 kg / m³ . Δίνεται επίσης g = 9,80 m / s² .

**Λύση**

Δίνονται h = 26,5·10-2m , ρ΄ = 0,8·103kg / m³ , ρ = 1,3kg / m³ και g = 9,8 m / s² .

****

Εξίσωση του Bernoulli στα α , β :

Ρα + ½·ρ·υ² = Ρβ + 0 … (Ι) .

Στο μανόμετρο , ισχύει :

Ρ1 = Ρ2 ⇒ Ρβ = Ρα + ρ΄·g·h … (II) .

Από τις σχέσεις (Ι) και (ΙΙ) :

Ρα + ½·ρ·υ² = Ρα + ρ΄·g·h ⇒½·ρ·υ² = ρ΄·g·h ⇒υ² = (2·ρ΄·g·h / ρ) ⇒υ = √(2·ρ΄·g·h / ρ) ⇒

υ ≅ 56,54 m / s ⇒υ ≅ 203,54 km / h .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 11**

Υδατόπτωση δημιουργείται από τεχνητή λίμνη .

****

Αν h = 100 m και η παροχή της υδατόπτωσης είναι 200 m³ / s , να υπολογισθεί η ισχύς της υδατόπτωσης .

Να θεωρήσετε την επιτάχυνση της βαρύτητας g = 10 m / s² και την πυκνότητα του νερού 10³ kg / m³ .

**Λύση**

Δίνεται h = 100 m , η παροχή της υδατόπτωσης Π = 200 m³ / s , ρ = 10³ kg / m³ και g = 10 m / s² .

H ισχύς ορίζεται :

Ρ = ΔW / Δt ⇒

Ρ = Δm·g·h / Δt ⇒

Ρ = ρ·(ΔV / Δt)·g·h ⇒

Ρ = ρ·Π·g·h ⇒

Ρ = 2·108Watt (ή J / s) .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 12**

Σε ένα οριζόντιο αγωγό πετρελαίου η πίεση μειώνεται κατά 5,0·10³ Ν / m² κάθε χιλιόμετρο αγωγού .

****

Υπολογίστε τις απώλειες ενέργειας για κάθε m³ πετρελαίου , καθώς προχωράει απόσταση 1,0 m .

**Λύση**

Για L = 1 km , η Ρ1 – Ρ2 = 5·10³ Ν / m² ,

για l = 1 m , η ΔΡ = – 5 Ν / m² .

Εξίσωση του Bernoulli :

Ρ + ½·ρ·υ² + ρ·g·h = σταθερό .

Ο σωλήνας είναι οριζόντιος με σταθερή διατομή άρα h = σταθερό και υ = σταθερή , οπότε αν δεν είχαμε απώλειες θα έπρεπε η Ρ = σταθερή κατά μήκος του .

Η μείωση της πίεσης οφείλεται στις απώλειες ενέργειας λόγω του ιξώδους του πετρελαίου και εκφράζει την απώλεια ενέργειας ανά μονάδα όγκου .

****

Έστω όγκος ΔV που πέρασε από μια διατομή και σε χρόνο Δt προχώρησε :

l = υ·Δt = 1 m (από την εκφώνηση) .

Τότε ΔΡ = – 5 Ν / m² .

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας :

ΣW = ΔΚ = 0 ⇒Wπροσ – |Wαπωλ| = 0 ⇒(F1 – F2)·l = |Wαπωλ| ⇒|ΔΡ|·Α·l = |Wαπωλ| ⇒

|Wαπωλ| = |ΔΡ|·ΔV ⇒|Wαπωλ| = 5·1 J ⇒|Wαπωλ| = 5 J .

**Σχολικό Βιβλίο του Δρη άσκηση 13**

Τα φτερά ενός αεροπλάνου έχουν συνολικό εμβαδόν 20 m² (από τη μία πλευρά) .

Σε μια πτήση του αεροπλάνου , η ταχύτητα του αέρα στην κάτω μεριά των φτερών μετρήθηκε και βρέθηκε 40 m / s , ενώ στην πάνω 50 m / s .

Να υπολογιστεί το βάρος του αεροπλάνου .

Η πυκνότητα του αέρα είναι 1,3 kg / m³ .

**Λύση**

****

Για ταχύτητα υ1 = 40 m / s , η πίεση είναι Ρ1 .

Για ταχύτητα υ2 = 50 m / s , η πίεση είναι Ρ2 , όπου  Ρ2 < Ρ1 .

Άρα ΔΡ = Ρ1 – Ρ2 , οπότε :

Fαν = ΔΡ·Α , όπου Α = 20 m² .

Η εξίσωση του Bernoulli , για Δy = 0 :

Ρ1 + ½·ρ·υ1² = Ρ2 + ½·ρ·υ2² ⇒Ρ1 – Ρ2 = ½·ρ·(υ2² – υ1²) .

Λόγω της ισορροπίας :

ΣF = 0 ⇒Fαν – wαερ = 0 ⇒wαερ = Fαν ⇒wαερ = ½·ρ·Α·(υ2² – υ1²) ⇒wαερ = 11.700 Ν .