3. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

- Ρευστά σε κίνηση
  Είδη ροής - Ρευματικές γραμμές και εξίσωση συνέχειας
- Διατήρηση ενέργειας, εξίσωση Bernoulli
- Πραγματικά ρευστά
  Εσωτερική τριβή –ιξώδες, Νόμος Poiseuille

§3.1 Ρευστά σε κίνηση

✓ Ιδανικό ρευστό , ονομάζεται ένα ρευστό που είναι **ασυμπίεστο*** το οποίο ρέει χωρίς να έχει εσωτερική τριβή **(ιξώδες)** ούτε και **συνάφεια** με τα τοιχώματα του δοχείου

✓ Η διαδρομή (τροχιά) που ακολουθεί ένα σωμάτιο ενός κινούμενο ρευστού ονομάζεται **γραμμή ροής** .

✓ Αν η συνολική εικόνα της ροής δεν αλλάζει με το χρόνο ,η ροή ονομάζεται **μόνιμη** ή **στρωτή** .

✓ Αν όμως οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων του ρευστού (**ιξώδες**) αλλά και μεταξύ των μορίων του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα δημιουργεί κατά τη ροή του **δίνες** η ροή ονομάζεται **τυρβώδης** ή στροβιλώδης.

✓ **Ρευματική γραμμή** είναι η γραμμή (καμπύλη) , σε σημείο της οποίας το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού είναι εφαπτόμενο στο σημείο αυτό.

Γενικά οι ρευματικές γραμμές δεν συμπίπτουν με τις γραμμές ροής . Συμπίπτουν μόνο όταν η ροή είναι μόνιμη ή στρωτή και όχι όταν είναι τυρβώδης . Δηλαδή όταν η εικόνα ροής **αλλάζει** με **το χρόνο** δεν συμπίπτουν . Τότε σ' αυτή την περίπτωση (μόνιμη ροή) , η ρευματική γραμμή είναι και η τροχιά ενός μορίου του υγρού .

✓ Κάθε επιφάνεια Α , κάθετη στη διεύθυνση του σωλήνα στον οποίο ρέει ένα ρευστό , σχηματίζει με την βοήθεια των ρευματικών

γραμμών ένα νοητό σωλήνα που ονομάζεται ρευματικός σωλήνας ή φλέβα.
Στη μόνιμη ροή , το ρευστό δεν μπορεί να διασχίσει τα τοιχώματα ενός σωλήνα ροής.
Δηλαδή το ρευστό που κυλάει σε κάποια φλέβα δεν αναμιγνύεται με το περιεχόμενο άλλης φλέβας του ίδιου σωλήνα .
Έτσι τα γειτονικά στρώματα π.χ νερού γλιστρούν απαλά μεταξύ τους.

- ✓ Στην τυρβώδη ροή όμως που δεν υπάρχει εικόνα μόνιμης κατάστασης η ροή γίνεται ακανόνιστη και χαοτική και μόρια του ρευστού διαπερνούν τις συνοριακές επιφάνειες των σωλήνων ροής .

- ✓ **Ασυμπίεστο** είναι ένα ρευστό όταν έχει σταθερό όγκο , ανεξάρτητο από την πίεση . Επειδή όμως και η μάζα του ρευστού είναι σταθερή , τότε $\rho = \frac{m}{v} =$ σταθ. Δηλαδή αυτό σημαίνει πως σ' ένα ασυμπίεστο ρευστό η πυκνότητα του είναι η ίδια σ' όλη την έκταση του.

- ✓ **Παροχή** ενός σωλήνα ροής ονομάζεται το πηλίκο $\pi = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ (m^3 / s) όπου ΔV είναι ο όγκος του υγρού που διέρχεται από μια διατομή A του σωλήνα ροής σε χρόνο Δt . Τότε όμως αν στο χρονικό διάστημα Δt , το υγρό έχει μετατοπιστεί κατά Δx ισχύει
$\Delta V = A \,.\, \Delta X$ οπότε έχουμε $\Pi = \frac{A.\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{\Pi = A \cdot \upsilon}$.
Δηλαδή η παροχή σωλήνα (φλέβας) , σε κάποια θέση του σωλήνα εμβαδού διατομής A , είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της διατομής επί την ταχύτητα του ρευστού στη θέση αυτή .
Για στρωτή (μόνιμη) ροή ισχύει $\mathbf{\Delta m_1 = \Delta m_2}$, πάντα είτε το ρευστό είναι ασυμπίεστο είτε συμπιεστό.

- ✓ **Διατήρηση μάζας (εξίσωση συνέχειας)**

α) Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο τότε η πυκνότητα του παραμένει σταθερή ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) και έχουμε
$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow \rho_1 \Delta V_1 = \rho_2 \Delta V_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \,.\, \Delta x_1 = \rho_2 A_2 \,.\, \Delta x_2 \Rightarrow \rho_1 A_1 \upsilon_1 \Delta t = \rho_2 A_2 \upsilon_2 \Delta t \Rightarrow \rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2 \Rightarrow A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$ (1), η εξίσωση αυτή ονομάζεται **εξίσωση συνέχειας** και είναι άμεση συνέχεια της αρχής διατηρήσεις της μάζας (ύλης) επειδή $\Pi = A\,\upsilon^{(1)} \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_2$ ή

Π = σταθερή. Δηλαδή στη στρωτή ασυμπίεστου ρευστού ροή η παροχή διατηρείται σταθερή.

β) Αν το ρευστό δεν είναι ασυμπίεστο τότε $\rho_1 \neq \rho_2$ οπότε η εξίσωση συνέχειας είναι βέβαια (ρ_1 και ρ_2 είναι οι πυκνότητες στις διατομές A_1 και A_2)

$\rho_1 A_1 \upsilon_1 = \rho_2 A_2 \upsilon_2$ ή $\rho_1 \Pi_1 = \rho_2 \Pi_2$ δηλαδή $\Pi_1 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\Pi_2$ ή $\Pi_1 \neq \Pi_2$.

Παρατήρηση: Με βάση την εξίσωση της συνέχειας σε μεγάλες διατομές του σωλήνα ροής έχουμε μικρές ταχύτητες και το αντίστροφο. Έτσι:

α) Η διατήρηση της μάζας (σταθερή παροχή) κατά τη ροή ενός ποταμού σημαίνει ότι το νερό τρέχει γρηγορότερα στα ρηχά (μικρό Α) από ότι στα βαθιά (μεγάλο Α).

β) Σε μια βρύση καθώς το νερό επιταχύνεται καθώς πέφτει άρα αυξάνεται η ταχύτητα του , λεπταίνει η φλέβα δηλαδή ελαττώνεται η διάμετρος της άρα το εμβαδόν της Α .

γ) Η παροχή παραμένει σταθερή ($\Pi_1 = \Pi_2$) μόνο όταν το υγρό είναι ασυμπίεστο αν το ρευστό είναι συμπιεστό τότε $\Pi_1 = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\Pi_1$ ή $\Pi_1 \neq \Pi_2$.

Παράδειγμα

8) Ένας κυλινδρικός σωλήνας συνδέεται με μία βρύση παροχής $\Pi = 10^{-3}\ m^3 / s$, έχει διάμετρο $\delta = \dfrac{10}{\sqrt{\pi}}$ cm . Τότε η ταχύτητα ροής του νερού στο σωλήνα είναι:

α) 1,4 m/s

β) 0,4 m/s

γ) 0,4 π m/s

δ) $\sqrt{0{,}4}$ m/s

Απάντηση:

$\Pi = A \cdot \upsilon$ όμως $A = \pi \cdot \dfrac{\delta^2}{4} = \dfrac{\pi.10^{-2}}{\pi.4} = \dfrac{10^{-2}}{4} m^2$.

Τότε $\upsilon = \dfrac{\Pi}{A} = \dfrac{4.10^{-3}}{10^{-2}} \Rightarrow \upsilon = 0{,}4$ m/s.

9) Η ταχύτητα εκροής του νερού από το στόμιο ενός σωλήνα βρύσης είναι $υ_1$ = 1,4 m/s . Αν μειώσουμε με το δάχτυλο μας τη διατομή του σωλήνα στο μισό , τότε η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται το νερό είναι :

α) 0,7 m/s
β) 1,4 m/s
γ) 2,8 m/s
δ) 5,6 m/s

Απάντηση:

$$Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_1\,υ_1 = A_2\,υ_2 \Rightarrow A_1\,υ_1 = \frac{A_1}{2}υ_2 \Rightarrow υ_2 = 2\,υ_1 \Rightarrow υ_2 = 2{,}8 \text{ m/s}$$

10) Η ταχύτητα με την οποία ρέουν τα νερά ενός ποταμού σταθερού πλάτους ℓ, σε βάθος h_1 = 0,5 m είναι $υ_1$ = 4 m/s . Πόση είναι ταχύτητα σ' ένα άλλο σημείο με μέσο βάθος h_2 = 2 m;

α) 4 m/s
β)8 m/s
γ) 2 m/s
δ) 1m/s

Απάντηση:

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε $Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_1\,υ_1 = A_2\,υ_2 \Rightarrow \ell\,h_1\,υ_1 = \ell\,h_2\,υ_2 \Rightarrow υ_2 = \frac{h_1υ_1}{h_2} \Rightarrow υ_2 = \frac{0{,}5.4}{2} \Rightarrow υ_2 = 1$ m/s.

§3.2 Διατήρηση της ενέργειας εξίσωση Bernoulli (Μπερνούλλι)

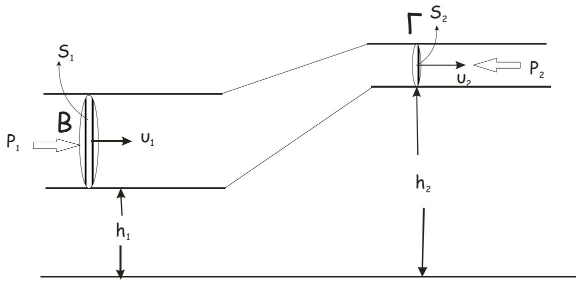
✓ Έστω ένας σωλήνας ροής (φλέβα) μεταβλητής διατομής που δεν είναι οριζόντιος όπως φαίνεται στο σχήμα . Τότε σε σημεία με υψομετρική διαφορά θα έχουμε διαφορετική πίεση. π.χ Το νερό του 3^ου ορόφου έχει μικρότερη πίεση από το νερό στις βρύσες του ισογείου .

✓ Ακόμη από την εξίσωση συνέχειας στις μικρές διατομές θα έχουμε μεγαλύτερη ταχύτητα .

Η εξίσωση του Bernoulli συνδέει την πίεση του ρευστού στα διάφορα σημεία , με την ταχύτητα και με το ύψος .

✓ **Πως αποδεικνύεται από το Θ.Μ.Κ.Ε ο νόμος του Bernoulli;**

Θα εξετάσουμε την πίεση στα δυο σημεία Β και Γ . Το σύστημα μας θεωρούμε ότι είναι το ρευστό μεταξύ των σημείων Β και Γ . Τότε το



υπόλοιπο ρευστό στο σωλήνα πριν το Β θα εξασκεί στο Β μια δύναμη $F_1 = P_1 A_1$ με φορά προς τα δεξιά , ενώ το ρευστό που υπάρχει μετά το Γ , εξασκεί στο σύστημα μας (ΒΓ) , μια δύναμη με φορά προς τα αριστερά $F_2 = P_2 A_2$.

Έτσι δεδομένου ότι το ρευστό , ρέει προς τα δεξιά το W_{F1} θα είναι θετικό $W_{F1} > 0$, ενώ επειδή η F_2 είναι αντίθετη της μετατόπισης το W_{F2} θα είναι αρνητικό , $W_{F2} < 0$.

Όπου $W_{F1} = F_1 \cdot \Delta S_1 = P_1 A_1 \Delta S_1 = P_1 \Delta V_1$ και όμοια $W_{F2} = - P_2 \Delta V_2$

Τότε Θ.Μ.Κ.Ε $\Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_{F1} + W_{F2} \Rightarrow$

$B \rightarrow \Gamma$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \Delta m\, υ_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m\, υ_1^2 = - \Delta m\, g\, (h_2 - h_1) + P_1 \Delta V_1 - P_2 \Delta V_2$. Όμως το ρευστό είναι ασυμπίεστο οπότε $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$, οπότε έχουμε

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} υ_2^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} υ_1^2 = - \frac{\Delta m}{\Delta V}\, g\, (h_2 - h_1) + P_1 - P_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho\, υ_2^2 - \frac{1}{2} \rho\, υ_1^2 = - \rho\, g\,(h_2 - h_1) + P_1 - P_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho\, υ_1^2 + \rho\, g\, h_1 + P_1 =$
$= \frac{1}{2} \rho\, υ_2^2 + \rho\, g\, h_2 + P_2$ άρα:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot υ^2 + \rho \cdot g \cdot h + P = \text{σταθ.}$$

Εξίσωση του Bernoulli για ιδανικό ρευστό .

Η εξίσωση του Bernoulli αποτελεί έκφραση της **Α.Δ.Ε** στη ροή των ρευστών . Όπου ο όρος $\frac{1}{2} \rho\, υ^2$ είναι η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου και $\rho\, g\, h$ είναι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου .

Για οριζόντιο σωλήνα , όπου δεν παρατηρείται υψομετρική διαφορά ($h = 0$) η εξίσωση του Bernoulli γίνεται $\frac{1}{2} \rho\, υ^2 + P =$ σταθ. (Περίπτωση οριζόντιας φλέβας) . Δηλαδή σε περιοχή μεγάλης ταχύτητας (μεγάλη πυκνότητα ρευματικών γραμμών) δημιουργούνται μικρές πιέσεις και το αντίστροφο .

Παράδειγμα

11) Σ' ένα σημείο οριζοντίου σωλήνα κυκλικής διατομής παροχής νερού , πυκνότητας $\rho = 10^3$ kg /m^3 , η στατική πίεση είναι $P_1 = 5 \,.\, 10^4$ Pa και η ταχύτητα ροής του νερού είναι $υ_1 = 4$ m/s . Σ' ένα δεύτερο σημείο , αν η διάμετρος του σωλήνα είναι διπλάσια από τη διάμετρο στο πρώτο σημείο, η στατική πίεση P_2 στο δεύτερο σημείο είναι ίση προς

α) $6 \,.\, 10^5$ Pa
β) $8 \,.\, 10^4$ Pa
γ) $5{,}75 \,.\, 10^4$ Pa
δ) $1{,}08 \,.\, 10^6$ Pa

Απάντηση:

Από την εξίσωση συνέχειας έχουμε $Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_1 υ_1 = A_2 υ_2 \Rightarrow \pi \frac{\delta^2}{4} υ_1 = \pi \frac{4\delta_1^2}{4} υ_2 \Rightarrow υ_2 = \frac{υ_1}{4} \Rightarrow υ_2 = 1$ m/s
Bernoulli περίπτωση οριζόντιας φλέβας.

$\frac{1}{2}\rho\, u_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho\, u_2^2 + P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\rho\,(u_1^2 - u_2^2) + P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\,.\,10^3\,.$ $15 + 5\,.\,10^4 \Rightarrow P_2 = 0{,}75\,.\,10^4 + 5\,.\,10^4 \Rightarrow P_2 = 5{,}75\,.\,10^4$ Pa.

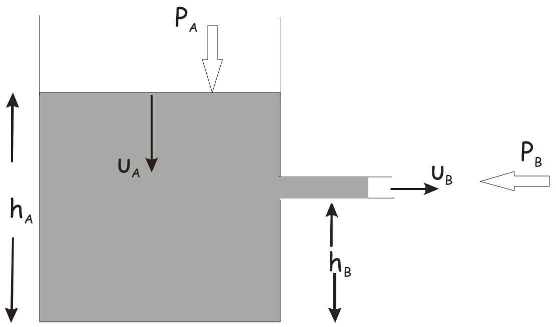
12) Πως αποδεικνύεται ότι μια οριζόντια φλέβα ,ασυμπίεστου ρευστού η πίεση γίνεται , τόσο μικρότερη όσο στενότερος είναι ο σωλήνας;

Απάντηση:

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:
$A\cdot u$ = σταθ , στις μικρές λοιπόν διατομές έχουμε μεγάλες ταχύτητες όμως από την εξίσωση του Bernoulli $\frac{1}{2}\rho\, u^2 + P$ = σταθ. όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα , τόσο μικρότερη είναι η πίεση .

13) Να υπολογίσετε την ταχύτητα εκροής ρευστού (Θεώρημα του Torricelli) από το δοχείο του παρακάτω σχήματος , με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli :

Απάντηση:



Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli για την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και το σημείο εκροής (στόμιο) :

$\frac{1}{2}\rho\, u_A^2 + \rho\, g\, h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho\, u_B^2 + \rho\, g\, h_B + P_B$ (1)

Όμως η εξωτερική πίεση τόσο στην ελεύθερη επιφάνεια (P_A) , τόσο και στο σημείο εξόδου (P_B) είναι η ατμοσφαιρική , άρα $P_A = P_B = P_{atm}$ (2)

Ακόμη η ταχύτητα (u_A) , με την οποία κατεβαίνει η στάθμη του υγρού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα , συγκρινόμενη με την ταχύτητα εκροής του ρευστού . Άρα $u_A = 0$. (3) $u_A\ A_A = u_B\ A_B \Rightarrow u_A = \frac{A_B}{A_A}u_B$ όμως $A_B >> A_A$ άρα $u_A \approx 0$.

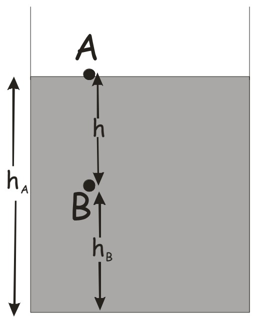
Τότε (1) $\Rightarrow \rho\ g\ h_A = \frac{1}{2}\ \rho\ \upsilon_B^2 + \rho\ g\ h_B \Rightarrow \upsilon_B^2 = 2\ g\ (h_A - h_B) \Rightarrow \upsilon_B = \sqrt{2g(h_A - h_B)} \Rightarrow \upsilon_B = \sqrt{2gh}$ όπου h είναι το βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού . Η παραπάνω σχέση αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του θεωρήματος του Torricelli .

Παρατηρούμε ότι:

Η ταχύτητα εκροής του υγρού από το στόμιο που βρίσκεται σε βάθος h , από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού , είναι ίση με την ταχύτητα που έχει σώμα που κάνει ελεύθερη πτώση από ύψος h .

14) Αποδείξτε το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής πίεσης $\rho_{υδρ} = \rho\ .\ g\ .\ h$ με την εξίσωση του Bernoulli .

Απάντηση:



Για τα σημεία Α και Β θα έχουμε $P_A + \frac{1}{2}\ \rho\ \upsilon_A^2 + \rho\ g\ h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho\ \upsilon_B^2 + \rho\ g\ h_B \Rightarrow P_B - P_A = \rho\ g\ (h_A - h_B)$. Όμως $h_A - h_B = h$ και $P_A = P_{ατμ}$ και $P_B = P_{ατμ} + P_{υδρ}$ Άρα $P_B - P_A = P_{υδρ}$ τελικά $P_{υδρ} = \rho\ .\ g\ .\ h$, όπου h το βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού .

15) Από το πλευρικό άνοιγμα μιας ανοιχτής δεξαμενής βγαίνει νερό με ταχύτητα υ = 2 m/s . Το βάθος στο οποίο βρίσκεται το άνοιγμα είναι :

α) h = 0,2 m
β) h = 2 m
γ) h = 12 m
δ) h = 0,4 m

Απάντηση:

Ισχύει Torricelli : $\upsilon = \sqrt{2gh}$ για την ταχύτητα εκροής.

Τότε $h = \frac{υ^2}{2g} = \frac{4}{20} \Rightarrow h = 0{,}2$ m ή 20 cm.

16) Κατά την διάρκεια μιας καταιγίδας , ο αέρας που κινείται πάνω από τη στέγη ενός σπιτιού έχει ταχύτητα υ = 20 m/s . Αν η στέγη θεωρηθεί επίπεδη εμβαδού $A = 100m^2$ και η πυκνότητα του αέρα είναι σταθερή και ίση με $ρ = 1{,}2$ kg /m^3 . Τότε η ανυψωτική δύναμη που δέχεται η στέγη είναι

α) $F = 4 \,.\, 10^4$ N

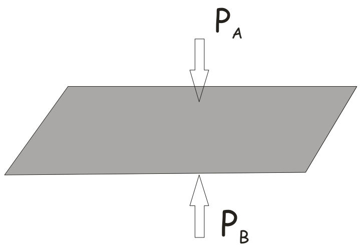
β) $F = 1{,}2 \,.\, 10^3$ N

γ) $F = 24 \,.\, 10^3$ N

δ) $F = 48 \,.\, 10^3$ N

Απάντηση:

Πρόκειται για περίπτωση οριζόντιας φλέβας οπότε Bernoulli :



$$ρ_A + \frac{1}{2}\, ρ\, υ_A^2 = ρ_B + \frac{1}{2}\, ρ\, υ_B^2$$

Όμως $υ_B = 0$ αφού ο αέρας μέσα στο σπίτι και κάτω από τη στέγη είναι πρακτικά ακίνητος . Τότε $ρ_B - ρ_A = \frac{1}{2}\, ρ\, υ^2 \Rightarrow Δρ = \frac{1}{2} \,.\, 1{,}2 \,.\, 400 \Rightarrow Δρ = 240$ Pa (N/m^2) και $F = Δρ \,.\, A \Rightarrow F = 240 \,.\, 100 \Rightarrow F = 24 \,.\, 10^3$ N .

17) Μια ανοικτή δεξαμενή που περιέχει νερό έχει στο πλευρικό τοίχωμά της και σε βάθος h = 0 ,8 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού , μια βρύση διατομής $A = 0{,}25cm^2$. Τότε για να γεμίσει με νερό ένα μπουκάλι όγκου 1ℓ απαιτείται χρόνος :

α) t = 10 s

β) t = 5 s

γ) t = 20 s

δ) t = 2,5 s.

Απάντηση:

Ισχύει Toriccelli :

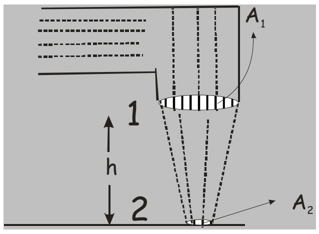
$υ = \sqrt{2gh} = \sqrt{2.10.0,8} \Rightarrow υ = 4\ m/s$

Όμως $π = \frac{V}{t} = A\ .\ υ \Rightarrow t = \frac{V}{A.υ} \Rightarrow t = \frac{10^{-3}}{25.10^{-6}.4} = \frac{10^{-3}}{10^{-4}} \Rightarrow t = 10\ sec.$

18) Από τη βρύση του σχήματος εμβαδού διατομής $A_1 = \sqrt{2}\ cm^2$ πέφτει νερό . Αν σε απόσταση h = 30cm από το στόμιο της βρύσης η φλέβα νερού λεπταίνει και γίνεται $A_2 = \frac{A_1}{2}$ τότε η παροχή της βρύσης είναι

α) $Π = \sqrt{2}\ .\ 10^{-14}\ m^3/s$
β) $Π = 10^{-4}\ m^3/\ s$
γ) $Π = 3\ .\ 10^{-3}\ m^3/s$
δ) $Π = 2.10^{-4}\ m^3/s$

Απάντηση:



Ισχύει για τα σημεία 1 και 2 Bernoulli :

$\frac{1}{2}\ ρ\ υ_1^2 + ρ\ g\ h_1 + P_1 = ρ\ g\ h_2 + P_2 + \frac{1}{2}\ ρ\ υ_2^2$

Όμως $P_1 = P_2 = P_{ατμ}$, $h_1 = h$ και $h_2 = 0$ Άρα $\frac{1}{2}\ ρ\ υ_1^2 + ρ\ g\ h = \frac{1}{2}\ ρ\ υ_2^2 \Rightarrow υ_1^2 = υ_2^2 - 2\ g\ h.$

Όμως εξίσωση συνέχειας : $Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_1\ υ_1 = A_2\ υ_2 \Rightarrow A_1\ υ_1 = \frac{A_1}{2} υ_2 \Rightarrow υ_1 = 2\ υ_1$. Τελικά έχουμε $υ_1^2 = 4\ υ_1^2 - 2\ g\ h \Rightarrow 3\ υ_1^2 = 2\ g\ h \Rightarrow υ_1^2 = \frac{2}{3}\ g\ h \Rightarrow υ_1^2 = \frac{2}{3}\ .\ 10\ .\ 0,3 \Rightarrow υ_1 = \sqrt{2}\ m/s.$ Τότε $Π = A_1\ .\ υ_1 = \sqrt{2}\ .\ 10^{-4}\ .\ \sqrt{2} = 2\ .\ 10^{-4}\ m^3/\ s.$

19) Σ' ένα σημείο οριζόντιου σωλήνα κυκλικής διατομής $A_1 = 10^{-2}\ m^2$ η παροχή του νερού είναι $Π_1 = 4\ .\ 10^{-2}\ m^3/s$. Σ' ένα δεύτερο σημείο η διάμετρος του σωλήνα είναι διπλάσια από τη διάμετρο στο πρώτο σημείο . Τότε αν η πυκνότητα του νερού είναι $ρ = 10^3\ kg\ /\ m^3$ η διαφορά των στατικών πιέσεων (Δp) στα δυο σημεία είναι:

α) $7,5{\cdot}10^3$ Pa
β) $6{\cdot}10^3$ Pa

γ) $15 \cdot 10^3$ Pa
δ) $12 \cdot 10^3$ Pa

Απάντηση:

Ισχύει $\delta_2 = 2\delta_1 \Rightarrow r_2 = 2r_1$ Άρα $A_1 = \pi r_1^2$ και $A_2 = \pi r_2^2 = 4\pi r_1^2 \Rightarrow A_2 = 4A_1$. Όμως $\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \Rightarrow A_1 \upsilon_1 = 4 A_1 \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{\upsilon_1}{4}$. Όμως $\pi_1 = A_1 \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\Pi_1}{A_1} = \frac{4.10^{-2}}{10^{-2}} \Rightarrow \upsilon_1 = 4$ m/s και
$\upsilon_2 = 1$ m/s

Bernoulli : $\frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 + P_2 \Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2) \Rightarrow$
$\Delta P = \frac{1}{2} . 10^3 . 15 \Rightarrow \Delta P = 7{,}5 . 10^3$ Pa.

20) Νερό που κινείται μέσα σε οριζόντιο σωλήνα εμβαδού διατομής $A_1 = 10\text{cm}^2$ με ταχύτητα $\upsilon_1 = 5$ m/s βγαίνει από το άκρο του σωλήνα που έχει εμβαδό διατομής $A_2 = 5$ cm^2.
i)Αν η πυκνότητα του νερού είναι $\rho = 10^3$ kg / m^3 τότε ο όγκος του νερού που δίνει ο σωλήνας σε μια ώρα είναι
α) 50 m^3
β) 18 m^3
γ) 36 m^3
δ) $5 \cdot 10^{-3}$ m^3

Απάντηση:

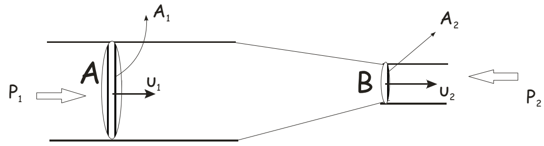
Ισχύει $\Pi_1 = \Pi_2$ ή $A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 = 5 . 10^{-3}$ m^3 / s = Π.
Όμως $\Pi = \frac{V}{t} \Rightarrow V = \Pi . t = 5 . 10^{-3} . 3600 \Rightarrow V = 18$ m^3.

ii)Η πίεση του νερού μέσα στο σωλήνα ροής αν $P_{\alpha\tau\mu} = 10^5$ Pa είναι:
α) $137{,}5 \cdot 10^3$ Pa
β) $2 \cdot 10^5$ Pa
γ) $0{,}5 \cdot 10^5$ Pa
δ) 62,5 kPa.

Απάντηση:

Για τα σημεία A και B στο ίδιο ύψος ισχύει από την εξίσωση του Bernoulli :

$\frac{1}{2}$ ρ $υ_1^2$ + P_1 = $\frac{1}{2}$ ρ $υ_2^2$ + P_2 (1)



Όμως εξίσωση συνέχειας $Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_1 υ_1 = A_2 υ_2 \Rightarrow υ_2 = \frac{A_1}{A_2} υ_1 = 2 \cdot 5 \Rightarrow υ_2 = 10$ m / s .

Επίσης $P_2 = P_{ατμ} = 10^5$ Pa τότε (1) $\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} ρ (υ_2^2 - υ_1^2) + P_{ατμ} \Rightarrow P_1 = \frac{1}{2} \cdot 10^3 (100 - 25) + 10^5 \Rightarrow P_1 = 0{,}5 \cdot 10^3 \cdot 75 + 10^5 \Rightarrow P_1 = 137{,}5 \cdot 10^3$ Pa $= 1{,}375 \cdot 10^5$ Pa .

21) Μια ανοικτή δεξαμενή νερού βρίσκεται σε ύψος h = 20 m από το έδαφος . Η ταχύτητα ροής του νερού σε οριζόντιο σωλήνα της παροχής , στο έδαφος σε σημείο A είναι υ = 10m/s . Τότε η πίεση του νερού στο σημείο A αν $ρ_{H_2O} = 10^3$ kg/m^3 , g = 10 m/s^2 , $P_{ατμ} = 10^5$ Pa είναι :

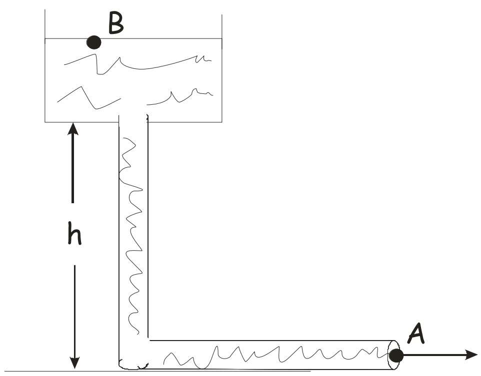
α) 10^5 Pa

β) $2{,}5 \cdot 10^5$ Pa

γ) 1 kPa

δ) 2,5 kPa.

Απάντηση:



$P_B + \frac{1}{2} ρ υ_B^2 + ρ\, g\, h = P_A + \frac{1}{2} ρ υ_A^2 + ρ\, g\, h' \Rightarrow P_{ατμ} + ρ\, g\, h = P_A + \frac{1}{2} ρ υ_A^2 \Rightarrow 10^5 + 10^3 \cdot 10 \cdot 20 = P_A + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 100 \Rightarrow 3 \cdot 10^5 = P_A + 0{,}5 \cdot 10^5 \Rightarrow P_A = 2{,}5 \cdot 10^5$ a+m

Πρόσεξε !!!! Ότι αν το ρευστό βρισκόταν σε ισορροπία τότε $P_A = P_B + \rho\, g\, h \Rightarrow P_A = P_{\alpha\tau\mu} + \rho\, g\, h$ $\quad(\rho\, g\, h = P_{\upsilon\delta\rho})$

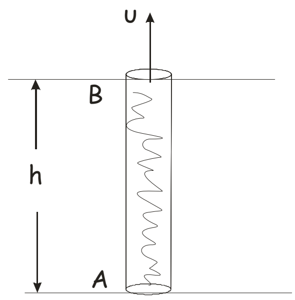
Όμως τώρα έχουμε $P_A = P_{\alpha\tau\mu} + \rho\, g\, h - \frac{1}{2}\rho\, \upsilon_A^2$

22) Μια αντλία χρησιμοποιείται για την άντληση νερού από πηγάδι βάθους h = 8 m. Αν η αντλία έχει διάμετρο $A = 10^{-3}\ m^2$ και το νερό εξέρχεται από αυτή με ταχύτητα υ = 20 m/s τότε η ισχύς της αντλίας είναι : ($\rho = 10^3\ kg/m^3$)

α) 1,6 kW
β) 5,6 W
γ) 1,6 W
δ) 5,6 kW

Απάντηση:

Bernoulli:



$$P_A + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\rho\, \upsilon_\alpha^2} + \cancelto{0}{\rho\, g\, h'} = P_B + \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \rho\, g\, h \Rightarrow$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho\, \upsilon^2 + \rho\, g\, h \Rightarrow \Delta P = \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 400 + 10^3 \cdot 10 \cdot 8 = 2 \cdot 10^5 + 0{,}8 \cdot 10^5 = 2{,}8 \cdot 10^5\ Pa$$

$F = \Delta P \cdot A = 2{,}8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 280\ N$ και $P_{\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma} = F \cdot \upsilon = 280 \cdot 20 \Rightarrow$

$P_{\iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varsigma} = 5{,}6\ KW$.

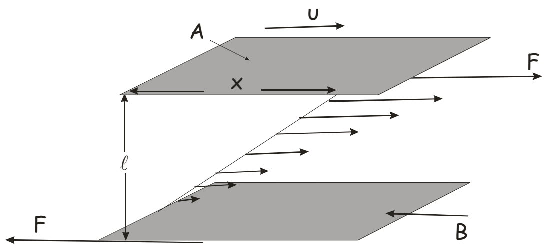
§3.3 Πραγματικά ρευστά Εσωτερική τριβή –ιξώδες, Νόμος Poiseuille

✓ Στα πραγματικά ρευστά αναπτύσσονται και δυνάμεις τριβής στο εσωτερικό τους και δυνάμεις λόγω του στροβιλισμού τους .

✓ Η εσωτερική τριβή μέσα σ' ένα ρευστό ονομάζεται ιξώδες .

✓ Αν η ταχύτητα ενός κινούμενου ρευστού υπερβεί μια ορισμένη τιμή , τότε η ροή δεν παραμένει στρωτή αλλά γίνεται ακανόνιστη και χαοτική (τυρβώδης ή στροβιλώδης ροή) , ενώ αυξάνονται και οι εσωτερικές τριβές.

✓ Αν μεταξύ των πλακών Α και Β βάλουμε ένα ρευστό π.χ μέλι διαπιστώνουμε πως αν η κάτω πλάκα είναι ακίνητη , για να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα απαιτείται να ασκηθεί κάποια δύναμη F ενώ τότε ασκείται και μια αντίθετη δύναμη στην κάτω πλάκα .



Ένα ρευστό με εσωτερική τριβή έχει την τάση να προσκολλάται στην επιφάνεια του στερεού με το οποίο βρίσκεται σε επαφή . Δηλαδή υπάρχει ένα **οριακό στρώμα** ρευστού κοντά στην επιφάνεια , όπου το ρευστό σχεδόν ηρεμεί ως προς την επιφάνεια . Έτσι διαπιστώνουμε , ότι το πάνω στρώμα του ρευστού έχει προσκολληθεί στην πάνω πλάκα Α και κινείται με ταχύτητα υ , ενώ το κάτω στρώμα έχει προσκολληθεί στην κάτω πλάκα και παραμένει ακίνητο . Όλα τα ενδιάμεσα στρώματα , έχουν ταχύτητες διαφορετικές μεταξύ τους , που αυξάνουν σταδιακά από Ο έως υ, καθώς πηγαίνουμε από την κάτω πλάκα προς την πάνω .

Τότε λέμε ότι το ρευστό βρίσκεται σε μια κατάσταση διαρκώς αυξανόμενης διατμητικής παραμόρφωσης .

Το μέτρο της διάτμησης ή στρέψης ορίζεται όπως έχουμε πει ως

$$S = \frac{\text{Διατμητική Τάση}}{\text{παραμόρφωση}} = \frac{F/A}{x/\ell}$$

Το ιξώδες ενώς ρευστού ορίζεται ως $n = \dfrac{\text{Διατμητική Τάση}}{\text{ρυθμός παραμόρφωσης}}$

όπου ρυθμός παραμόρφωσης $= \dfrac{\upsilon}{\ell}$ άρα $n = \dfrac{F/A}{\upsilon/\ell} \Rightarrow n = \dfrac{F.\ell}{A.\upsilon} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = n\,A\,\frac{\upsilon}{\ell}.$$

✓ Ο συντελεστής ιξώδους (εσωτερικής τριβής) είναι χαρακτηριστικός για κάθε ρευστό .

S . I: $1\ \dfrac{N.s}{m^2}$

Στην πράξη χρησιμοποιείται το 1 poise (πουάζ) προς τιμή του γάλλου Poiseuille (Πουαζέϊγ)

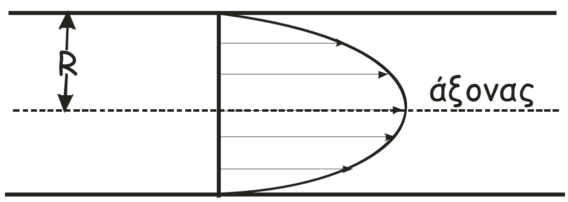
Ισχύει 1 poise $= 10^{-1}\ \dfrac{N.s}{m^2} = 1\ \dfrac{dyn.s}{cm^2}$ (1 dyn = 10^{-5} N).

Με βάση την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι:

- Εάν αντικαταστήσουμε το μέλι μ' ένα άλλο ρευστό που ρέει ευκολότερα (μικρότερος συντελεστής ιξώδους , n) π.χ λάδι , διαπιστώνουμε ότι η δύναμη που πρέπει να ασκούμε στην πάνω πλάκα για να διατηρείται η υ σταθερή, είναι μικρότερη.
- Επίσης η δύναμη είναι μικρότερη εάν για το ίδιο ρευστό , αυξήσουμε το πάχος του ℓ (απόσταση των πλακών) .
- Αντίθετα η δύναμη γίνεται μεγαλύτερη αν οι επιφάνειες των πλακών είναι μεγαλύτερες ή αν επιχειρήσουμε να μετακινήσουμε την πάνω πλάκα με μεγαλύτερη ταχύτητα .
- Στην $F = n\ A\ \frac{\upsilon}{\ell}$ μπορούμε να θεωρήσουμε πως αν υ = σταθ. Ότι η F είναι η συνισταμένη των εσωτερικών τριβών υ .
- Τα ρευστά που υπακούν στην παραπάνω σχέση ονομάζονται **νευτώνεια ρευστά .** Δεν είναι όλα τα ρευστά νευτώνεια όπως π.χ το αίμα που δεν είναι νευτώνειο ρευστό αλλά για μεγάλες ταχύτητες ροής τα σωματίδια που αιωρούνται σ' αυτό παραμορφώνονται ώστε να ελαττώνεται ο συντελεστής ιξώδους και να διευκολύνεται η ροή .
- Ο συντελεστής ιξώδους στα ρευστά εξαρτάται από την θερμοκρασία . Έτσι στα υγρά καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία , ελαττώνεται ο συντελεστής ιξώδους , ενώ αντίθετα στα αέρια με την αύξηση της θερμοκρασίας , αυξάνεται και ο συντελεστής ιξώδους.

23) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα ταχυτήτων για ένα ιξώδες ρευστό που ρέει μέσα σ' έναν κυλινδρικό σωλήνα .

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του ιξώδους ρευστού είναι μέγιστη κατά μήκος του άξονά του ενώ μηδενίζεται στα τοιχώματα του σωλήνα .

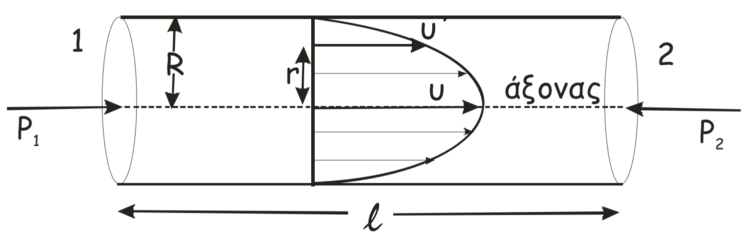


Η εξίσωση που περιγράφει το διάγραμμα ταχυτήτων του ρευστού είναι

$$\upsilon = \frac{P_1 - P_2}{4nL}(R^2 - r^2).$$

Όπου υ είναι η ταχύτητα ροής σε απόσταση r, από τον άξονα του σωλήνα που έχει ακτίνα R P_1 και P_2 είναι η πίεση στα δυο άκρα 1 και 2 του σωλήνα ℓ είναι το μήκος του και (n) είναι ο συντελεστής ιξώδους του ρευστού .

Ολοκληρώνοντας την



παραπάνω σχέση προκύπτει

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8}(\frac{R^4}{n})\ (\frac{P_1 - P_2}{L})$ Νόμος του Poiseuille.

Η σχέση δείχνει ότι η παροχή όγκου $\frac{dV}{dt}$ είναι αντιστρόφως ανάλογη του (n) , είναι ανάλογη προς τη βαθμίδα πίεσης $\frac{P_1 - P_2}{\ell} = \frac{dP}{dX}$ και επίσης είναι ανάλογη με την R^4 . Όπου R είναι η ακτίνα του σωλήνα . Έτσι αν διαπλάσουμε την ακτίνα του σωλήνα η παροχή αυξάνεται κατά $2^4 = 16$ φορές.

* Παρατήρηση:

Το $P_1 - P_2$ είναι η πτώση πίεσης στα άκρα του σωλήνα μήκους ℓ , λόγω του ιξώδους .

$P_1 > P_2 \Rightarrow P_2 - P_1 < 0 \Rightarrow \Delta P < 0$. Άρα η φορά της ροής (υ) , είναι αντίθετη από το ΔP .

Παράδειγμα

24) Νερό θερμοκρασίας 20° C ρέει σε κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R = 10 cm . Ο συντελεστής ιξώδους του νερού στους 20° C είναι $n = 10^{-3}\ \frac{Ns}{m^2}$. Αν η ταχύτητα του νερού κατά μήκος του άξονα του σωλήνα είναι υ = 2 m/s τότε

i) η ταχύτητα του σε απόσταση r = 5 cm από τον άξονα του σωλήνα είναι

α) 2 m/s

β) 1,5 m/s

γ) 1 m/s

δ) 0,25 m/s

Απάντηση:

Από τη σχέση $υ = \frac{P_1 - P_2}{4n\ell}(R^2 - r^2)$ για r = 0 (άξονα του σωλήνα) έχουμε $υ = \frac{P_1 - P_2}{4n\ell}R^2 \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{4n\ell} = \frac{υ}{R^2}$

Τότε για r = 5cm έχουμε :

$$υ' = \frac{υ}{R^2}(R^2 - r^2) \Rightarrow υ' = \frac{2}{100}(100 - 25) = \frac{150}{100} = 1{,}5\ m/s.$$

$$\left(υ' = \frac{3}{4}υ\right)$$

ii) η ταχύτητα του στα τοιχώματα του σωλήνα είναι:

α) 0 m/s

β) 1,5 m/s

γ) 0,75 m/s

δ) 2 m/s

Απάντηση:

Για r = R έχουμε $υ = \frac{P_1 - P_2}{4n\ell}(R^2 - R^2) = 0$.