

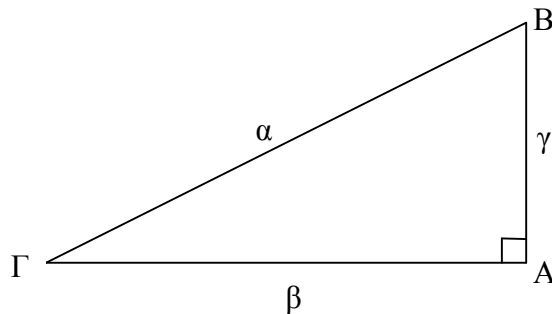
**ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ – ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ**

**Υπεύθυνος καθηγητής :** Στέφανος Γιαννούλης.

**ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΦΟΡΑ ΣΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΑΣ**

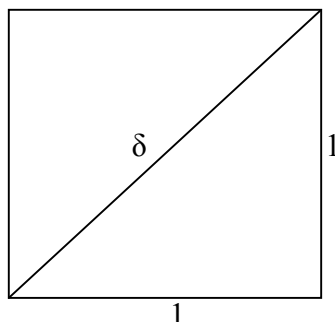
Οι «ρίζες» της τετραγωνικής ρίζας βρίσκονται στο περίφημο Πυθαγόρειο θεώρημα. Το Θεώρημα ανακαλύφθηκε και αποδείχτηκε στο τέλος περίπου του 6 αι. π.Χ., στο περίφημο πανεπιστήμιο που είχε ιδρύσει ο Πυθαγόρας (580-500 π.Χ.) στον Κρότωνα. Πιστεύεται δε ότι είναι έργο του ίδιου του Πυθαγόρα. Λέω πιστεύεται γιατί οι έρευνες του Πανεπιστημίου, για λόγους μυστικιστικούς, δεν δημοσιεύονταν, με αποτέλεσμα οι πληροφορίες μας να προέρχονται από μεταγενέστερες πηγές.



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Ενώ όμως η επινοήση του Θεωρήματος ήταν κατάκτηση για την Γεωμετρία και τον πολιτισμό, για τους Πυθαγόρειους εμπνευστές του ήταν αφορμή για αμηχανία και εκνευρισμό. Και αυτό γιατί κατά την εφαρμογή του, για τον υπολογισμό διαγωνίων ορθογώνιων παραλληλογράμμων, υψών ισοπλεύρων τριγώνων και άλλων μηκών, διαπίστωσαν ότι δεν υπάρχουν αριθμοί που να μπορέσουν να εκφράσουν αυτά τα μήκη.

Στο τετράγωνο, παραδείγματος χάριν, με μήκος πλευράς  $a=1$  διαπίστωσαν ότι οι μέχρι τότε γνωστοί αριθμοί δεν μπορούσαν να εκφράσουν το μήκος της διαγωνίου του  $\delta$  και αυτό γιατί το θεώρημα έδινε τη σχέση  $\delta^2 = a^2 + a^2$  ή την  $\delta^2 = 2$ .



Όμως τι αριθμός ήταν αυτός ο  $\delta$  που το τετράγωνό του ήταν ίσο με 2 ; Τέτοιος αριθμός δεν υπήρχε ούτε ακέραιος ούτε κλασματικός. Το σοκ ήταν ισχυρό γιατί οι Πυθαγόρειοι, που πίστευαν ότι η ουσία και η έκφραση των πάντων είναι οι αριθμοί, διαπίστωσαν ότι υπήρχαν τμήματα, όπως η διαγώνιος, που ενώ ήταν πλήρως αντιληπτά σαν μεγέθη, δεν μπορούσαν να εκφραστούν με τους τότε γνωστούς αριθμούς. Το αδιέξοδο αυτό, έθιγε ένα από τα βασικά δόγματα του Πυθαγορείου συλλόγου, πρέπει να προκάλεσε πλήθος συζητήσεων και μεγάλη αμηχανία. Οι συζητήσεις αυτές έγιναν αφορμή να μπει στη Γεωμετρία η έννοια των ασυμμέτρων μεγεθών, δηλαδή μεγεθών που δεν έχουν κοινό μέτρο, και αργότερα να επινοηθεί μέθοδος για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών.

Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι πιθανόν ο πρώτος αριθμός που ανακαλύφθηκε χωρίς να είναι ρητός. Η ανακάλυψη έγινε πιθανότατα από τον Πυθαγόρειο φιλόσοφο Ίππασο, ο οποίος μάλλον δολοφονήθηκε με πνιγμό για αυτήν την ανακάλυψη. Σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους κάθε αριθμός μπορεί να γραφτεί σε μορφή κλάσματος, η ανακάλυψη του Ίππασου αποδείκνυε ότι αυτό δεν ισχύει. Η επινόηση μεθόδου για τον υπολογισμό τετραγωνικών ριζών κατορθώθηκε 150 χρόνια περίπου μετά την ανακάλυψη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, από τον Αρχύτα τον Ταραντίνο (428-365 π.Χ.) τον τελευταίο των Πυθαγορείων. Ο Αρχύτας λοιπόν βρήκε τρόπο να περιγράψει άρρητους αριθμούς αναδρομικά, ώστε να μοιάζουν με κλάσματα. Για παράδειγμα η τετραγωνική ρίζα του 2 μπορεί να γραφτεί στην εξής αναδρομική κλασματική μορφή:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Οι Πυθαγόρειοι πιθανόν να χρησιμοποίησαν γεωμετρικό συλλογισμό για να αποδείξουν ότι η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος. Σήμερα γνωρίζουμε πολλές μη γεωμετρικές αποδείξεις της αρρητότητας του 2, όλες με την «εις άτοπον απαγωγή». Οι μαθηματικοί κατά την Αλεξανδρινή εποχή ασχολήθηκαν με τις τετραγωνικές ρίζες, αλλά σύντομα συμπεριέλαβαν στη μελέτη τους και τις κυβικές. Ο σύγχρονος συμβολισμός της τετραγωνικής ρίζας άρχισε να χρησιμοποιείται το 1525 από τον Christoff Rudolf. Από τότε, ο συμβολισμός έχει επεκταθεί και για τις υπόλοιπες νιοστές ρίζες, με τη διαφορά ότι πάνω αριστερά αναγράφεται το  $n$  ( $\sqrt[n]{a}$ ).

### Τετραγωνική ρίζα

Τετραγωνική ρίζα του  $a$  είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός  $x$ , αν  $x^2 = a$ . Η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι ο πρώτος αριθμός που ανακαλύφθηκε ότι δεν είναι ρητός. Επιπλέον, η ιδέα της τετραγωνικής ρίζας έχει επεκταθεί σε όλους τους αριθμούς, αν και ο αυστηρός ορισμός της την περιορίζει στους θετικούς αριθμούς και το 0.

Η τετραγωνική ρίζα του αριθμού  $a$  συμβολίζεται με  $\sqrt{a}$ .

Το όνομα *τετραγωνική ρίζα* ήταν το πρώτο όνομα της και καθιερώθηκε, γιατί αποτελεί *ρίζα του τετραγώνου*, δηλαδή λύση της εξίσωσης  $x^2 = a$  (το  $x^2$  ονομάζεται δεύτερη δύναμη του  $x$ , ή *τετράγωνο του  $x$* , γιατί παραπέμπει στον τύπο εμβαδού του τετραγώνου).

**Άρρητος αριθμός** ονομάζεται κάθε αριθμός ο οποίος δεν είναι δυνατό να εκφραστεί ως κλάσμα της μορφής  $\frac{\mu}{\nu}$ , όπου  $\mu$  και  $\nu$  είναι ακέραιοι αριθμοί, με  $\nu$  διάφορο του μηδενός, σε αντίθεση με τους **ρητούς** αριθμούς, οι οποίοι μπορούν να εκφραστούν ως κλάσμα ακεραίων.

Παραδείγματα άρρητων αριθμών είναι το  $\pi$  ή το  $e$  και η τετραγωνική ρίζα του 2 ( $\sqrt{2}$ ).

Οι άρρητοι αριθμοί είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Ως εκ τούτου και ελλείπει μοναδικού συμβολισμού για το σύνολο των άρρητων, χρησιμοποιείται ο έμμεσος συμβολισμός  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , όπου  $\mathbb{R}$  το σύνολο των πραγματικών αριθμών και  $\mathbb{Q}$  το σύνολο των ρητών. Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρο αριθμό, μη επαναλαμβανόμενων περιοδικά, δεκαδικών ψηφίων.

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα των άρρητων αριθμών είναι ότι το άθροισμα δύο άρρητων δίνουν ως αποτέλεσμα έναν ρητό αριθμό. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} &0,101001000100001000001\dots+ \\ &1,010110111011110111110\dots= \\ &1,1111111111111111111\dots= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

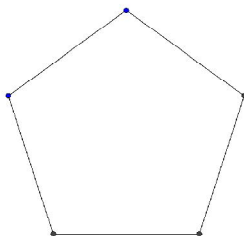
Η πρώτη καταγραφή για τη γνώση των άρρητων αριθμών ξεκινά με τον Ίπασο, έναν **Πυθαγόρειο** που είτε αποκάλυψε πως η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά ακέραιο δεν είναι ακέραιος ή ανακάλυψε τους άρρητους στην προσπάθεια να αναγνωρίσει τις πλευρές του **πενταγράμμου**. Οι Πυθαγόρειοι δίδασκαν ότι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δυο άλλων φυσικών αριθμών και διέδιδαν πως με τη χρήση των αριθμών μπορούσαν να επιλύσουν όλα τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Η πρώτη ενδεχομένως κρίση στα Μαθηματικά εμφανίστηκε συνοδευόμενη από πολιτική κρίση όταν, σύμφωνα με την παράδοση, ο Ίπασος ο Μεταπόντιος (450 π.Χ.) αποκάλυψε τον άρρητο, γεγονός που φύλαγαν μυστικό οι Πυθαγόρειοι, και προκάλεσε την εξέγερση των λαών που τελούσαν υπό την εξουσία των Πυθαγορείων.

Ο **Ίππασος** ήταν αρχαίος Έλληνας Πυθαγόρειος Φιλόσοφος, μαθηματικός και φυσικός. Κατά τον **Ιάμβλιχο** ήταν **Κροτωνιάτης**, αλλά ο Αριστοτέλης αναφέρει ότι ήταν **Μεταπόντιος**. Γενικά επονομαζόταν «Μεταπόντιος» ή «Μεταποντίνος». Η ακμή του τοποθετείται στα πρώτα 40 χρόνια του 5ου αιώνα π.χ. και θεωρείται από τους αρχαιότερους μαθητές του Πυθαγόρα. Ήταν ο ιδρυτής του «μαθηματικού τμήματος» της Πυθαγόρειας Σχολής.

Η διδασκαλία του διέφερε των άλλων Πυθαγορείων ως προς τούτο: ότι παραδεχόταν ως αρχή του κόσμου την ύλη (πυρ) και όχι την άυλη μορφή (αριθμοί) όπως εκείνοι. Είναι πιθανό εξ αυτού να πήγασε η διάδοση ότι ο Ίππασος κοινοποίησε μυστικά της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας και ότι εξ αυτού καταδιώχθηκε και τελικά φονεύθηκε.

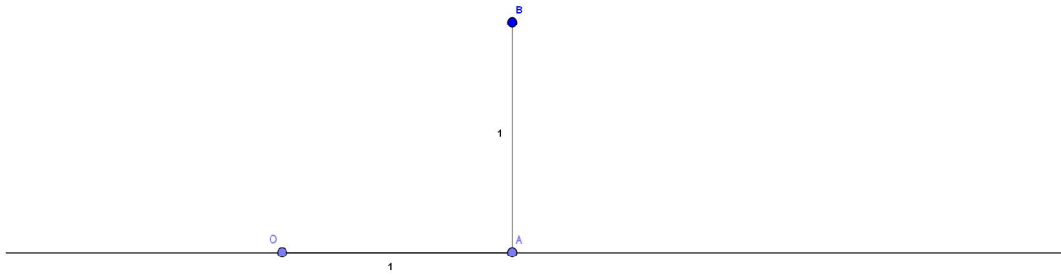
Υπάρχουν κάποιες εκδοχές για τον θάνατο του που εμπλέκονται με τις δραστηριότητες του, σύμφωνα με τις αναφορές του Ιάμβλιχου. Όπως μάλιστα αναφέρει, και ο θεός ακόμα εξοργίστηκε μαζί του που αποκάλυψε τα μυστικά των Πυθαγορείων και εξ αυτού χάθηκε στη θάλασσα. Η μία εκδοχή όπως λέει ο Ιάμβλιχος είναι η αποκάλυψη της σύστασης του εικοσάγωνου, δηλ. του δωδεκάεδρου, ότι αποτελεί το πέμπτο κανονικό στερεό που μπορεί να εγγραφεί στη σφαίρα, και η άλλη ότι αποκάλυψε την μυστική διδασκαλία των αρρήτων αριθμών. Ο Ίππασος φέρεται να έχει ανακαλύψει το ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο, ή καλύτερα η διαγώνιος ενός **τετραγώνου** με πλευρά 1, είναι άρρητος αριθμός.

Ο **Διογένης** ο Λαέρτιος αναφέρει ότι ο Ίππασος έγραψε τον «*Μυστικόν λόγον*», με σκοπό να διαβάλλει τον Πυθαγόρα. Νεότερες ακόμη παραδόσεις του απέδιδαν τη εφεύρεση - κατασκευή δοχείων γεμάτων νερού που μαζί με μεταλλικές πλάκες διαφορετικού πάχους ηχούσαν όλα μαζί αρμονικά, κάνοντας έτσι πειράματα ακουστικής. Επίσης το πείραμα που έκανε με τους «χαλκούς δίσκους» απέδωσε εκ των υστέρων την επαλήθευση των αριθμών αναλογίας στη **συνήχηση**. Ο Ιάμβλιχος συμπληρώνει επίσης ότι ο Ίππασος είχε δημιουργήσει ιδιαίτερη ομάδα «*ακουσματικών επιστημόνων*» που ασχολούνταν με διάφορες εφαρμογές στην έρευνα της ακουστικής. Τέλος η ανακάλυψη της σχέσης εκάστης πλευράς προς τη διαγώνιο κανονικού πενταγώνου, που είναι ασύμμετρος αριθμός αποδίδεται στον Ίππασο. Υπόψη ότι το κανονικό πεντάγωνο αποτελούσε το αναγνωριστικό «σήμα» των Πυθαγορείων.



**A) Τοποθέτηση της τετραγωνικής ρίζας του 2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών.**

Στον παρακάτω άξονα των πραγματικών αριθμών να τοποθετήσετε τον αριθμό  $\sqrt{2}$ , με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή και να γράψετε τα βήματα της κατασκευής σας.



**B) Ιστορική – γλωσσολογική αναφορά στην ονομασία «άρρητος αριθμός».**

Να δώσετε την ερμηνεία της λέξης «άρρητος» και να δώσετε τη δική σας ερμηνεία γιατί επιλέχθηκε η συγκεκριμένη λέξη για την ονομασία αυτών των αριθμών.