

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο  $[0, +\infty)$ .

**Δ.1.** Αν ισχύει ότι  $0 < f(x) \leq 1$ , για κάθε  $x \in [0, 1]$  και επίσης ισχύει ότι

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx, \text{ τότε να δείξετε ότι η } f \text{ είναι σταθερή στο } [0, 1] \text{ και έχει τύπο } f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

**Μονάδες 4**

**Δ.2.** Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(1, +\infty)$  και ισχύει ότι

$$\int_1^3 f(x) dx = f(x) - x \ln x - 1 + \frac{9}{2} \ln 3 \text{ για κάθε } x \in [1, +\infty), \text{ τότε να δείξετε ότι } f(x) = x \ln x + 1 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

**Μονάδες 4**

**Δ.3.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο  $[1, +\infty)$ .

**Μονάδες 4**

**Δ.4. α)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = e$

**Μονάδες 2**

**β)** Να δείξετε ότι ισχύει η ανισότητα  $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$  για κάθε  $x \in [1, +\infty)$

**Μονάδες 3**

**γ)** Δίνεται συνάρτηση  $g$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  με  $g(x) > 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να

$$\text{δείξετε ότι } \int_1^{1009} \left[ \ln(g(x)) + \frac{e}{g(x)} \right] dx \geq 2016$$

**Μονάδες 4**

**Δ.5.** Να βρεθεί το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την ευθεία  $x = 1$ , τη γραφική παράσταση της  $f$  και την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = e$ .

**Μονάδες 4**