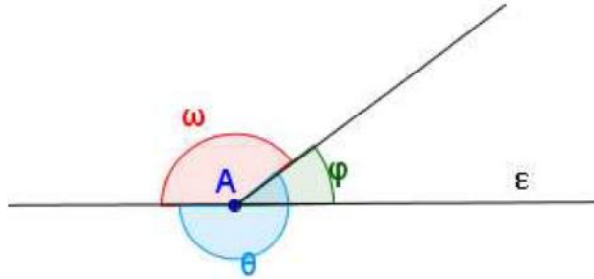


ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο Α της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών ϑ και ω του σχήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2°

Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sigma\upsilon\nu x + 1) \cdot (5\sigma\upsilon\nu x - 4) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι γωνίες ω, ϑ για τις οποίες ισχύει:

$$\omega + \vartheta = 135^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\varphi(\omega + \vartheta) = -1$ (Μονάδες 10)

β) $\epsilon\varphi\omega + \epsilon\varphi\vartheta + 1 = \epsilon\varphi\omega \cdot \epsilon\varphi\vartheta$ (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4^ο

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$$\text{συν}\frac{\pi}{6}, \text{συν}\frac{\pi}{4}, \text{συν}\frac{17\pi}{10} .$$

(Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu 3x$. (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \text{συν} 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ;
(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.
(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 7^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;
(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 9^ο

α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sigma\upsilon\nu 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$ με την ευθεία $y = -1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 10^ο

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$, όπου $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 11^ο

Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση:

$$(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$, με $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 13^ο

α) Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει: $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14^ο

Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1^ο

Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu\omega + 21 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}$. (Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$. (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sigma\upsilon\nu^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\phi 2\omega \cdot \sigma\phi 2\omega + 25[\eta\mu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 2\omega]}. \quad (\text{Μονάδες 7})$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$.

(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$									
$g(x)$									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x \quad (1)$$

στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |a+1| \eta\mu(\beta\pi x)$ με $a \in \mathfrak{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $a=2$ ή $a=-4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $a=2$ και $\beta = \frac{1}{2}$,

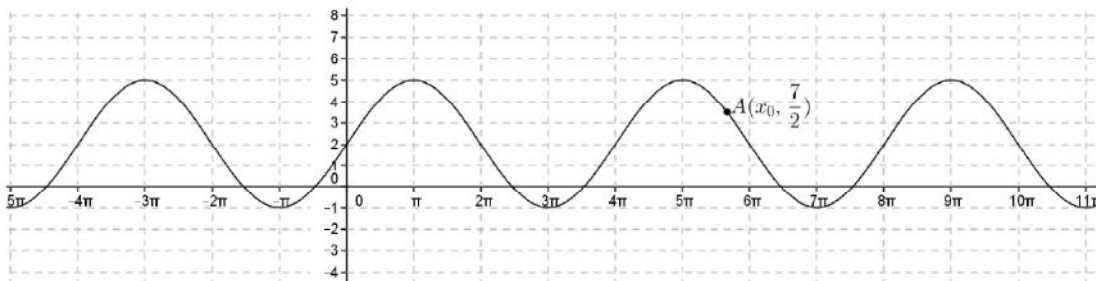
i. να λυθεί η εξίσωση $f(x)=3$. (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε **αλγεβρικά** την τετμημένη x_0

του σημείου A της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5^ο

Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \alpha \cdot \sin(\omega t) + \beta, \quad \text{όπου } \alpha, \omega, \beta \text{ πραγματικές σταθερές.}$$

Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι $20cm$ και το μέγιστο $100cm$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

- α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$. (Μονάδες 5)
- β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα $14sec$ μετά την έναρξη της ταλάντωσης. (Μονάδες 8)
- δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 6^ο

Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = 12\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13, \quad \text{όπου } t \text{ ο χρόνος σε ώρες.}$$

- α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή; (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 7^ο

Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right), \quad 0 \leq t \leq 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$. (Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$. (Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
$h(t)$							

