ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8 Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ.

α) Να εξετάσετε σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. ΑΒ=8, ΑΓ=12, $\hat{A}=35°$, ΔΕ=20, ΔΖ=30, $\hat{\Delta}=35°$.

ii. $\hat{A}=47°$, $\hat{B}=38°$, $\hat{E}=47°$, $\hat{\Delta}=95°$.

iii. ΑΒ=ΑΓ, $\hat{A}=\hat{\Delta}$, ΔΕ=ΔΖ.

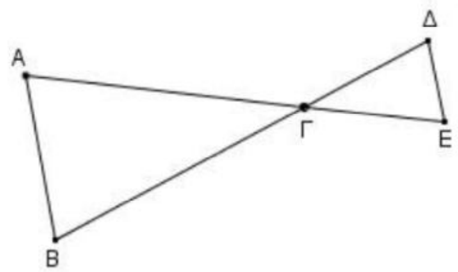
(Μονάδες 15)

β) Στις περιπτώσεις που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΔΕΖ, να γράψετε τους ίσους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ.



Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ΑΒ//ΔΕ

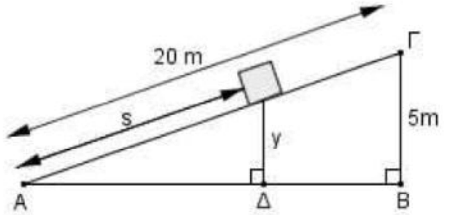
(Μονάδες 12)

β) ΒΓ=2ΔΓ και $ΕΓ=\frac{1}{2}ΑΓ$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί προς τα πάνω στη ράμπα του παρακάτω σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι για το ύψος y, που απέχει το κουτί από το έδαφος κάθε χρονική στιγμή, ισχύει ότι $y=\frac{s}{4}$, όπου s το μήκος που έχει διανύσει το κουτί πάνω στη ράμπα.

(Μονάδες 15)

β) Όταν το κουτί απέχει από το έδαφος 2 m, να βρείτε:

i. Το μήκος s που έχει διανύσει το κουτί στη ράμπα.

(Μονάδες 3)

ii. Την απόσταση του σημείου Δ από την άκρη της ράμπας Α.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

α) Να εξετάσετε αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. ΑΓ=4, ΒΓ=16, ΒΑ=18, ΔΖ=10, ΕΖ=40, ΔΕ=48.

ii. $\hat{A}=63^\circ$, $\hat{\Gamma}=83^\circ$, $\hat{\Delta}=63^\circ$, $\hat{E}=34^\circ$.

(Μονάδες 15)

β) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΑΓ=7 και ΒΓ=8. Ποιο θα είναι το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου ΔΕΖ το οποίο είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ, με λόγο ομοιότητας 3;

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 5ο

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.

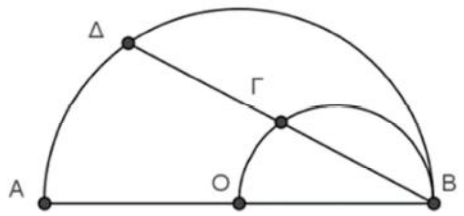
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 12)

β) (ΑΔΒ)= 4 (ΟΓΒ)

(Μονάδες 13)



ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ώστε

$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{3}$. Από το σημείο Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ζ.

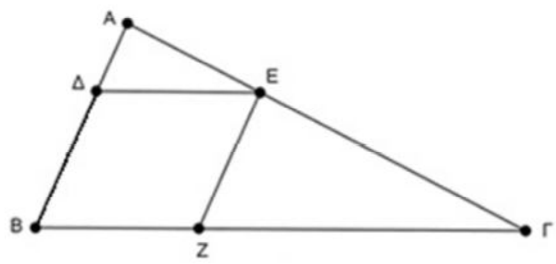
Να αποδείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) 3ΒΖ = ΒΓ.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}=\frac{ΓΘ}{ΓΔ}=\frac{1}{3}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΕΖ//ΘΗ//ΔΒ.

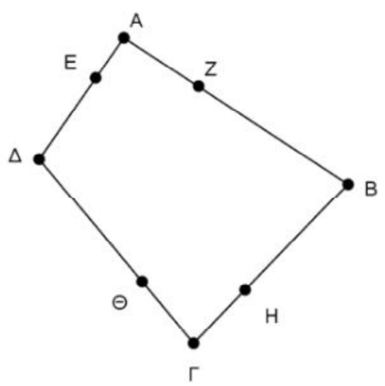
(Μονάδες 10)

β) $ΕΖ = ΘΗ = \frac{1}{3}ΔΒ$.

(Μονάδες 10)

γ) ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 8ο

Από ένα σημείο Σ που βρίσκεται έξω από έναν δοσμένο κύκλο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΒ και μία τέμνουσα ΣΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α)

i. Τα τρίγωνα ΣΒΓ και ΣΔΒ είναι όμοια.

ii. Τα τρίγωνα ΣΑΓ και ΣΔΑ είναι όμοια.

(Μονάδες 16)

β) $ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΔ \cdot ΒΓ$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 9ο

Στη διχοτόμο Οδ της γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε τα σημεία Α, Β τέτοια ώστε ΟΒ = 2ΟΑ.

Η κάθετος στην Οδ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά Οx στο σημείο Ε και

έστω Δ η προβολή του Β στην Οy.

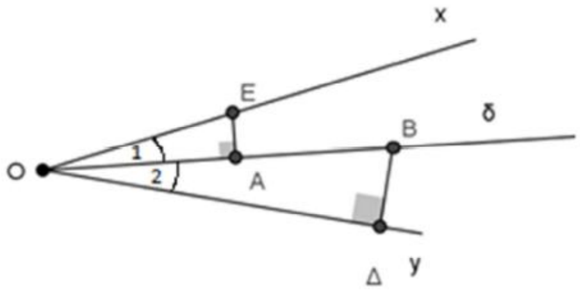
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΔΒ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) $2ΟΑ^2 = ΟΔ \cdot ΟΕ$.

(Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 10ο

Να χρησιμοποιήσετε τις πληροφορίες που σας δίνονται για το κάθε ζεύγος τριγώνων των παρακάτω σχημάτων, προκειμένου να απαντήσετε στα ακόλουθα:

α) Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια και ποιο δεν είναι; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 14)

β) Για το ζεύγος των όμοιων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος,

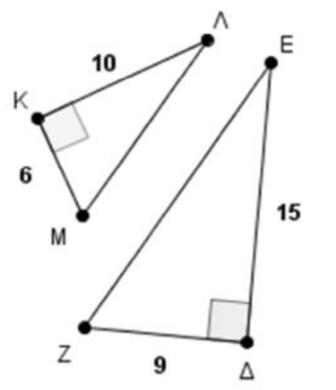
i. να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών.

(Μονάδες 6)

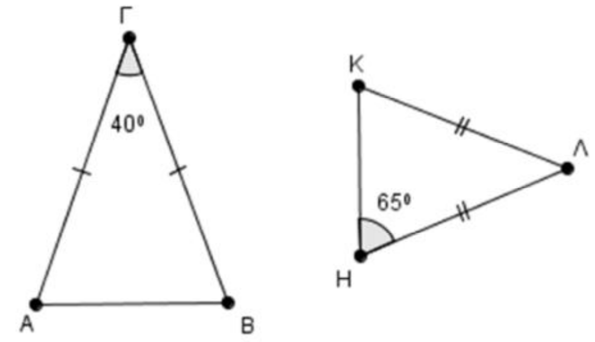
ii. να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 5)

1^{ο}ζεύγος: τρίγωνα ΚΛΜ και ΖΔΕ

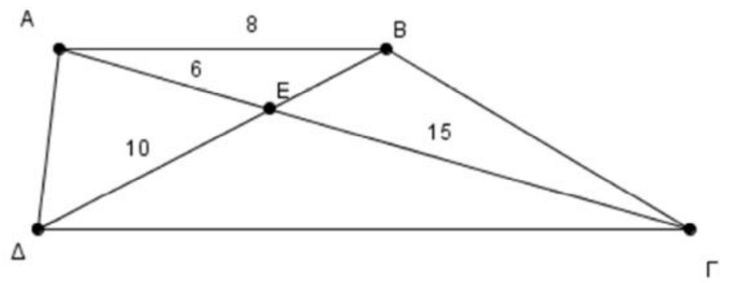


2^{ο} ζεύγος: τρίγωνα ΑΒΓ και ΗΚΛ



ΘΕΜΑ 11^{ο}

Στο σχήμα που ακολουθεί ισχύουν ΑΒ//ΔΓ, ΑΕ=6, ΑΒ=8, ΓΕ=15 και ΔΕ=10.



α) Να βρείτε δυο ζεύγη ίσων γωνιών των τριγώνων ΑΕΒ και ΔΕΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια και να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών τους.

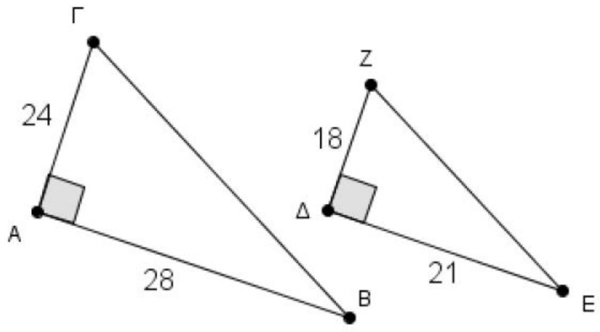
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΕ και ΔΓ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 12ο

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια με ορθές τις γωνίες Α και Δ αντίστοιχα. Επιπλέον, για τις πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ αντίστοιχα ισχύουν ΑΒ=28, ΑΓ=24 και ΔΕ=21, ΔΖ=18.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά:

$$\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\dots}$$

(Μονάδες 9)

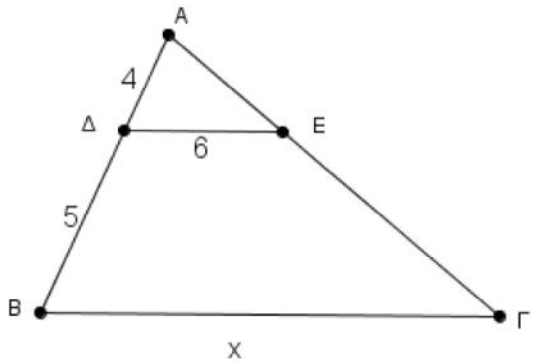
γ) Από τις παρακάτω ισότητες να επιλέξετε τη σωστή.

i. $ZE = \frac{18}{21}\Gamma B$ **ii.** $ZE = \frac{24}{28}\Gamma B$ **iii.** $ZE = \frac{3}{4}\Gamma B$ **iv.** $ZE = \frac{4}{3}\Gamma B$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 13ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ και επιπλέον ισχύουν ΑΔ=4, ΔΒ=5 και ΔΕ=6.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να συμπληρώσετε τα κενά στην ισότητα:

$$\frac{AB}{\ldots}=\frac{\ldots}{\Delta E}=\frac{A\Gamma}{\ldots}$$

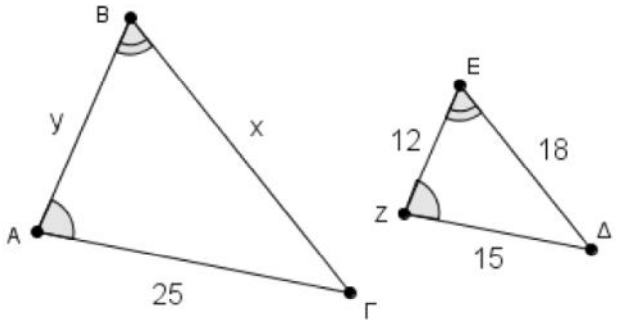
(Μονάδες 9)

γ) Ένας μαθητής χρησιμοποιεί την αναλογία $\frac{4}{6}=\frac{5}{x}$ για να υπολογίσει το x. Να εξηγήσετε γιατί αυτή η αναλογία είναι λάθος, να γράψετε τη σωστή και να υπολογίσετε την τιμή τουx.

(Μονάδες 7)

<u>**ΘΕΜΑ 14^o**</u>

Τα παρακάτω τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A}=\hat{Z}$, $\hat{B}=\hat{E}$ και ΑΓ=25, ΕΖ=12, ΕΔ=18 και ΖΔ=15.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

β) Να συμπληρώσετε την ισότητα των λόγων με τις κατάλληλες πλευρές του τριγώνου *ΔΕΖ* :

$$\frac{BA}{\ldots\ldots}=\frac{A\Gamma}{\ldots\ldots}=\frac{\Gamma B}{\ldots\ldots}$$

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τα *x* και *y*.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15ο

Στο παρακάτω σχήμα, τα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ και ΚΛΜΝΡ είναι όμοια και έχουν $\hat{\Delta} = \hat{N}$ και $\hat{B} = \hat{\Lambda}$.

α) Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

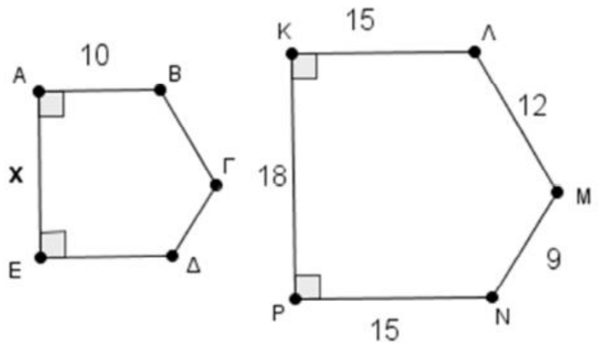
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος x της πλευράς ΑΕ.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

(Μονάδες 9)



ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8 Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 4

ΘΕΜΑ 1ο

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και σκαληνό, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

ii. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ δεν μπορεί να είναι όμοια.

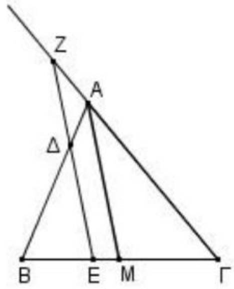
(Μονάδες 10)

β) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές με κορυφή το Γ, τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΑ είναι όμοια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{AB}$

ii. $\frac{EZ}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma M} = \frac{\dots}{\dots}$

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ, $\hat{A} = 36^{\circ}$ και η διχοτόμος του ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια.

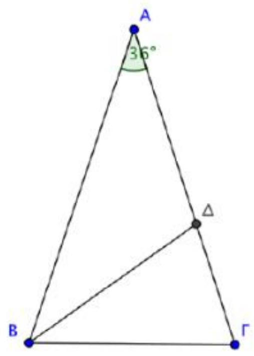
(Μονάδες 6)

ii) $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Gamma$

(Μονάδες 9)

β) Αν θεωρήσουμε το ΑΓ ως μοναδιαίο τμήμα (ΑΓ = 1), να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΔ και το λόγο $\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

(Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και σημείο Μ της πλευράς του ΑΔ ώστε $\frac{AM}{A\Delta}=\frac{1}{3}$.

Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, η οποία τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα σημεία Κ και Ν αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{AK}{A\Gamma}=\frac{1}{3}$

(Μονάδες 6)

β) $\frac{KN}{AB}=\frac{2}{3}$

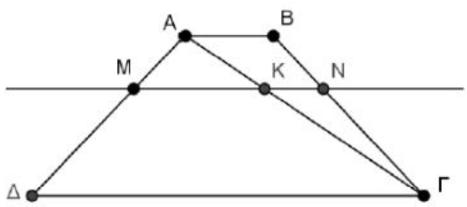
(Μονάδες 6)

γ) $MN = \frac{1}{3}\Gamma\Delta + \frac{2}{3}AB$

(Μονάδες 6)

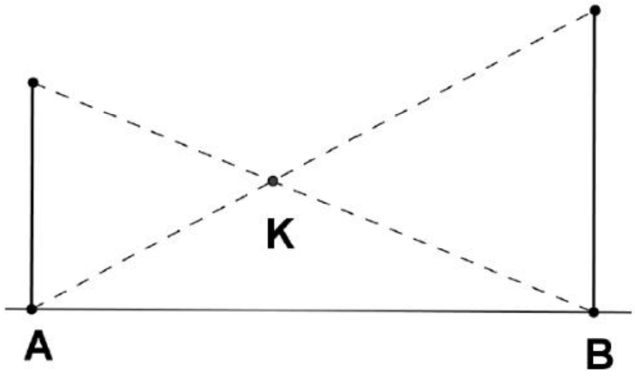
δ) Ο ισχυρισμός «τα τραπέζια ΑΒΝΜ και ΑΒΓΔ είναι όμοια» είναι αληθής ή ψευδής; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 5ο

Σε δυο σημεία ενός ευθύγραμμου δρόμου ΑΒ βρίσκονται δυο κατακόρυφοι στύλοι ύψους 2 και 3 μέτρων αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε δυο σύρματα για να ενώσουμε την κορυφή του καθενός με τη βάση του άλλου, ώστε τα δυο σύρματα να διασταυρώνονται σε ένα σημείο Κ (σχήμα).



α) Να βρείτε τα ζεύγη των όμοιων τριγώνων που σχηματίζονται. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Προκειμένου να μετρήσουμε πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο Κ στο οποίο διασταυρώνονται τα σύρματα, μετρήσαμε την απόσταση του Κ από τον μικρότερο στύλο και την βρήκαμε 4 μέτρα. Αν η απόσταση ΑΒ των στύλων ήταν 10 μέτρα, πόσο απείχε το σημείο Κ από το έδαφος;

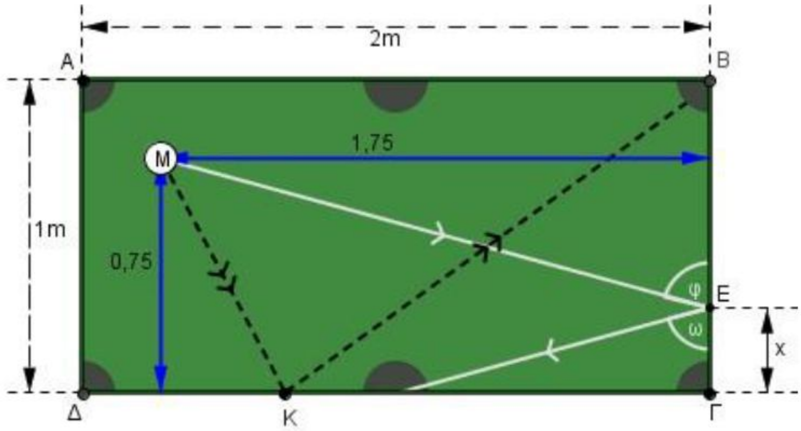
(Μονάδες 9)

γ) Δείξτε ότι όποια και αν είναι η απόσταση ΑΒ που απέχουν οι δυο στύλοι μεταξύ τους, η απόσταση του σημείου Κ, όπου διασταυρώνονται τα δυο σύρματα από το έδαφος,θα είναι η ίδια.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 6ο

Δύο παίκτες Π1 και Π2 παίζουν σε ένα τραπέζι του μπιλιάρδου με διαστάσεις 1x2 μέτρα. Μία άσπρη μπάλα τοποθετείται έτσι ώστε, να απέχει 1,75 μέτρα από την πλευρά ΒΓ και 0,75 μέτρα από την πλευρά ΔΓ, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο παίκτης Π1 παίζει πρώτος και χτυπάει την μπάλα Μ έτσι ώστε, να προσκρούσει στο απέναντι μέρος του τραπεζιού στο σημείο Ε και κατόπιν να μπει στην τρύπα που βρίσκεται στο μέσον της πλευράς ΓΔ.

Ο παίκτης Π2 τοποθετεί την μπάλα Μ πάλι στο ίδιο σημείο εκκίνησης και προτίθεται να χτυπήσει έτσι τη μπάλα ώστε, να προσκρούσει στην πλευρά ΓΔ σε σημείο της Κ και κατόπιν να μπει στην τρύπα στην κορυφήΒ (η διαδρομή ΜΚΒ όπως φαίνεται στο σχήμα). Ο συμπαίκτης του ισχυρίζεται ότι αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί και θα χάσει.

(**Σημείωση**: Η γωνία με την οποία χτυπάει η μπάλα σε μία πλευρά ισούται με τη γωνία με την οποία απομακρύνεται)

α) Να βρείτε πόσο απέχει το σημείο Ε από την κορυφή Γ του μπιλιάρδου.

(Μονάδες 12)

β) Γιατί ο παίκτης Π1 ισχυρίζεται ότι θα χάσει ο συμπαίκτης του; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 7ο

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε δύο χορδές του ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε ένα σημείο Μ.

α) Αν το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

i. Όταν η χορδή ΑΒ είναι κάθετη στο χορδή ΓΔ, τότε $AM \cdot AB = A\Gamma^2$

(Μονάδες 8)

ii. Όταν η χορδή ΑΒ δεν είναι κάθετη στη χορδή ΓΔ, ισχύει η σχέση $AM \cdot AB = A\Gamma^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν για τις χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται σε σημείο Μ ισχύει ότι $AM \cdot AB = A\Gamma^2$, να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου ΓΔ.

(Μονάδες 8)