

**ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ 2**

**ΘΕΜΑ 1°**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $\Delta$  και  $E$  του επιπέδου τέτοια, ώστε  $\overline{A\Delta} = 2\overline{AB} + 5\overline{A\Gamma}$  και  $\overline{AE} = 5\overline{AB} + 2\overline{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα  $\overline{\Delta E}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Gamma}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα  $\overline{\Delta E}$  και  $\overline{B\Gamma}$  είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 2°**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $E, Z$  σημεία τέτοια ώστε:  $\overline{AE} = \frac{2}{5}\overline{A\Delta}$ ,  $\overline{AZ} = \frac{2}{7}\overline{A\Gamma}$ .

α) Να γράψετε τα διανύσματα  $\overline{EZ}$  και  $\overline{ZB}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\overline{AB}$  και  $\overline{A\Delta}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $B, Z$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 3°**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι:  $\overline{AB} = (-4, -6)$ ,  $\overline{A\Gamma} = (2, -8)$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overline{AM}$ , όπου  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A}$  είναι οξεία.

(Μονάδες 10)

γ) Αν στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  επιπλέον ισχύει  $A(3,1)$ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του  $B$  και  $\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{AB} = (\kappa^2 - 6\kappa + 9, \kappa - 3)$  και  $\overline{AG} = (1, 6)$ , όπου  $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\kappa$ , ώστε τα διανύσματα  $\overline{AB}$  και  $\overline{AG}$  να είναι κάθετα.

(Μονάδες 9)

γ) Για  $\kappa = 1$  να βρείτε το διάνυσμα  $\overline{BG}$ .

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\overline{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$  και  $\overline{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$ , όπου  $\vec{i}$  και  $\vec{j}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των  $\overline{AB}$  και  $\overline{BG}$ .

(Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $G$  μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  με  $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$  και  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ .

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν τα διανύσματα  $2\vec{a} + \vec{\beta}$  και  $\kappa\vec{a} + \vec{\beta}$  είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του  $\kappa$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $2\vec{a} + \vec{\beta}$ .

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 7<sup>ο</sup>**

Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  για τα οποία :  $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$

α) Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

(Μονάδες 15)

**ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΘΕΜΑ 4**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες:  $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$  και  $|\vec{u} + \vec{v}| = \left| |\vec{u}| - |\vec{v}| \right|$

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$ .

i) Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  και  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

ii) Να αποδείξετε ότι:  $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{OA} = (4, -2)$  και  $\vec{OB} = (1, 2)$ , όπου  $O$  είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν  $\Gamma(\alpha, \beta)$  είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $B$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\vec{AB} = (-3, 4)$  και  $\vec{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι:  $4\alpha + 3\beta = 10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα  $\vec{OG}$  και  $\vec{AB}$  είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$ , τότε:

i) να αποδείξετε ότι:  $\kappa = -2$

(Μονάδες 6)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$  και  $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$ ,  $\overline{A\Gamma} = (3\lambda, \lambda - 1)$ , όπου  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq -2$ , και  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι  $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία το διάνυσμα  $\overline{AM}$  είναι κάθετο στο διά-

νυσμα  $\vec{a} = \left( \frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)