

Άσκηση 1

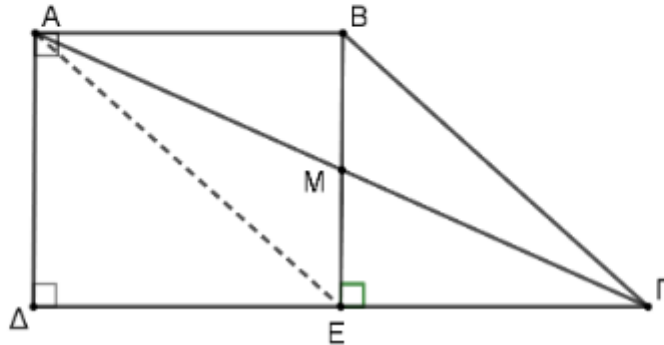
Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Delta\Gamma$, $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = 2AB$ και $\widehat{B\Gamma\Delta} = 45^\circ$. Έστω BE κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β)

i. Το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

ii. Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)



Άσκηση 2

Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα.

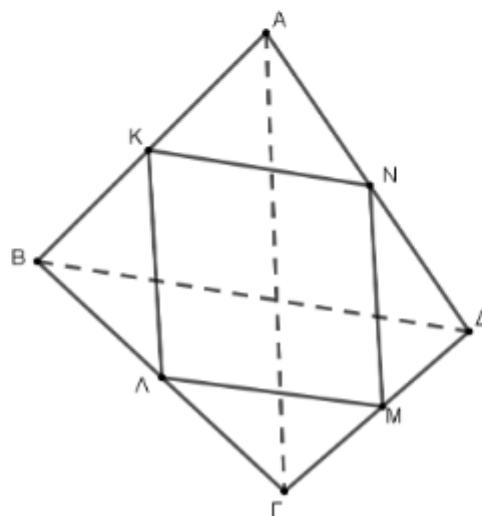
α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος Π του τετραπλεύρου $K\Lambda M N$ είναι $\Pi = A\Gamma + B\Delta$

(Μονάδες 8)

β)

i. Αν το $K\Lambda M N$ είναι ορθογώνιο να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)

ii. Ποια επιπλέον ιδιότητα πρέπει να έχουν οι διαγώνιοι του $AB\Gamma\Delta$ ώστε το $K\Lambda M N$ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 9)



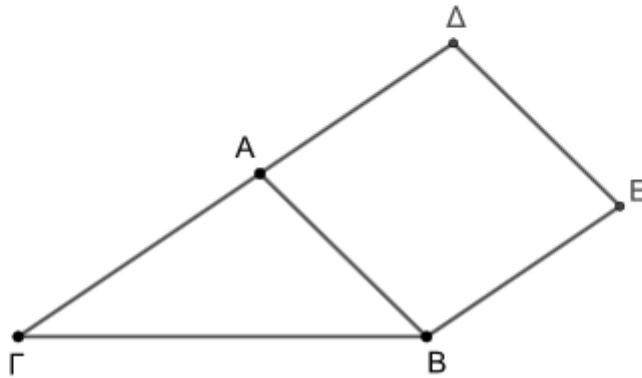
Άσκηση 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΓA κατά τμήμα $A\Delta = AB$. Από τα B και Δ φέρνουμε παράλληλες, αντίστοιχα προς τις $A\Delta$ και AB , οι οποίες τέμνονται στο E .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

β) Έστω ότι $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 7$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Gamma = \alpha$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο ρόμβος $ABE\Delta$ έχουν ίσες περιμέτρους. Να αποδείξετε ότι $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{3}$. (Μονάδες 5)



Άσκηση 4

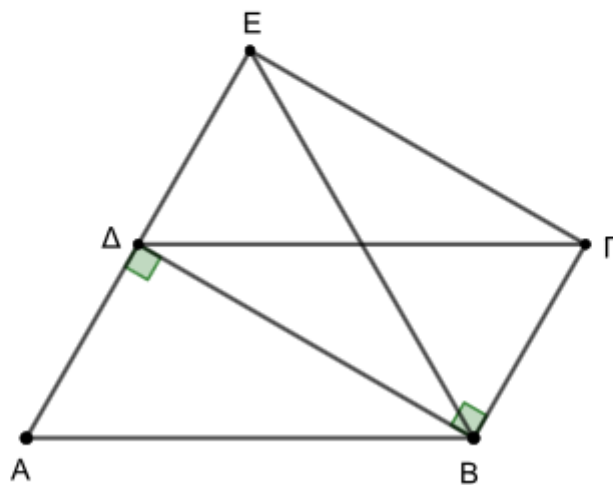
Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος οι ΔA και $B\Gamma$ είναι κάθετες στην ΔB και επίσης είναι $A\Delta = B\Gamma = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

β) Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = 3$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

ii. Το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



Άσκηση 5

Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος ισχύουν $AB = \Gamma\Delta$ και $AB \parallel \Gamma\Delta$.

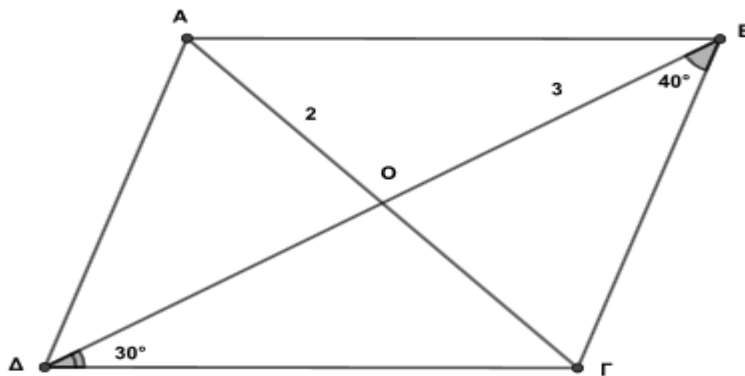
Παίρνοντας υπόψιν και τα υπόλοιπα δεδομένα όπως αυτά φαίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε:

α) Τα μήκη των τμημάτων $ΟΓ$, $Ο\Delta$, όπου $Ο$ είναι το σημείο τομής των $ΑΓ$, $Β\Delta$.

(Μονάδες 13)

β) Τα μέτρα των γωνιών A , B , Γ , Δ του τετραπλεύρου.

(Μονάδες 12)



Άσκηση 6

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB είναι διπλάσια της πλευράς του $B\Gamma$. Αν E , Z τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα $AEZ\Delta$ και $BEZ\Gamma$ είναι ρόμβοι.

(Μονάδες 12)

ii. Το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 07)

β) Πόσων μοιρών πρέπει να είναι η γωνία $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, ώστε το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ρόμβος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 06)

Άσκηση 7

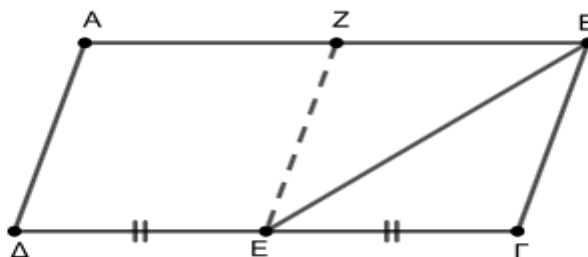
Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB=2B\Gamma$ και E είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι το τμήμα BE διχοτομεί τη γωνία $\hat{B}$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 12)

β) Αν το σημείο Z είναι το μέσο της πλευράς AB , τι είδους τετράπλευρο είναι το $ZB\Gamma E$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)



Άσκηση 8

Σε παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ η πλευρά AB είναι διπλάσια της πλευράς του $ΒΓ$. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $ΓΔ$ αντίστοιχα,

α) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα $AEZΔ$ και $BEZΓ$ είναι ρόμβοι. (Μονάδες 16)

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ΑΕΓΖ$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Άσκηση 9

Τα τρίγωνα ABK και $ΓΔΛ$ του σχήματος είναι ίσα και ισοσκελή με $AB = AK$ και $ΓΛ = ΓΔ$ αντίστοιχα. Τα σημεία $Λ$ και K είναι τα μέσα των BK και $ΔΛ$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $AK = ΓΛ$.

(Μονάδες 8)

ii. $AK = ΓΚ$.

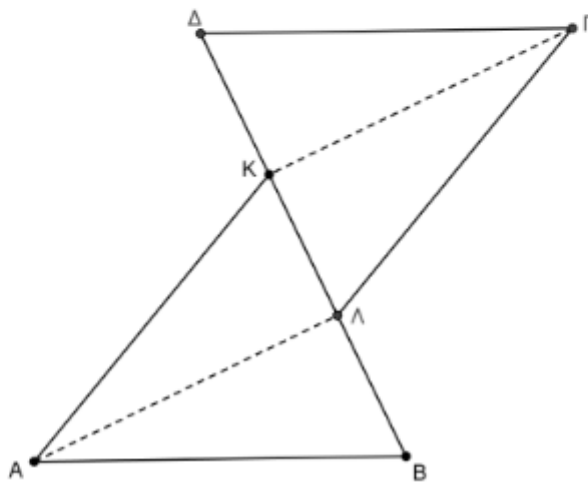
(Μονάδες 4)

iii. Το τετράπλευρο $AKΓΛ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

β) Θα μπορούσε το παραλληλόγραμμο $AKΓΛ$ να είναι ρόμβος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



Άσκηση 10

Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Gamma$, το σημείο O είναι το κέντρο του, και $A\Delta = \Delta\Gamma = 5$. Να απαντήσετε στα ερωτήματα που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) Να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και να υπολογίσετε την περίμετρό του.

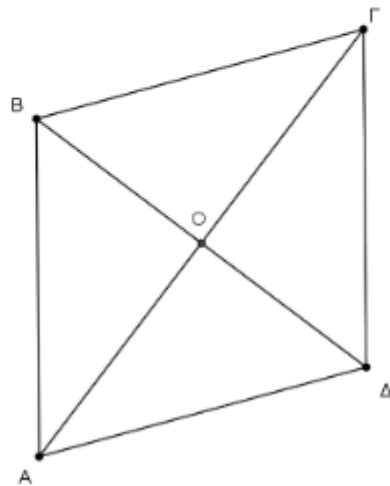
(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{O}\Delta}$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν είναι $OD = 3$ και $A\Gamma = 8$, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΔB και $O\Gamma$.

(Μονάδες 10)



Άσκηση 11

Το τετράπλευρο του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με παράλληλες πλευρές τις AB , $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$, $B\Gamma$ και διαγωνίους $A\Gamma$ και ΔB , οι οποίες τέμνονται σε σημείο O . Αν επιπλέον είναι $A\Gamma = 5$, $OD = 2,1$ και $AB = 4,2$, να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

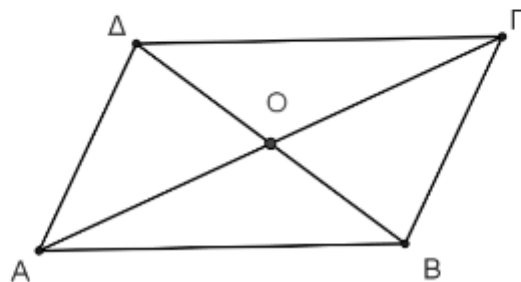
α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς $\Delta\Gamma$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε

- i. το μήκος της διαγωνίου ΔB ,
- ii. το μήκος του τμήματος $O\Gamma$.

(Μονάδες 20)

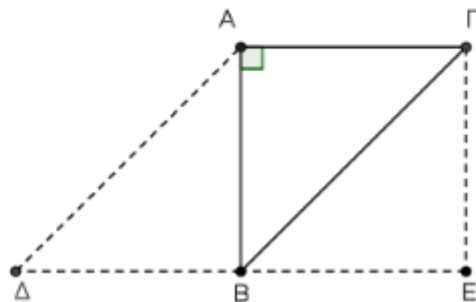


Άσκηση 12

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$ και $AB = A\Gamma = 12$. Έστω ότι η παράλληλη από το σημείο Γ στην AB και η παράλληλη από το σημείο B στην $A\Gamma$ τέμνονται στο σημείο E .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $A\Gamma EB$ είναι τετράγωνο και να υπολογίσετε την περίμετρό του. (Μονάδες 16)

β) Αν η παράλληλη από το A στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την ευθεία BE (προς το μέρος του B) σε σημείο Δ , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



Άσκηση 13

Στο σχήμα που ακολουθεί, το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο με $B\Gamma = 5$ και $AB = 8$. Στην προέκταση της GE προς το E θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $AE = E\Delta$ και $\hat{A\hat{E}\Delta} = 60^\circ$.

α) Να δείξετε ότι:

i. $AE = 5$ και $E\Gamma = 8$.

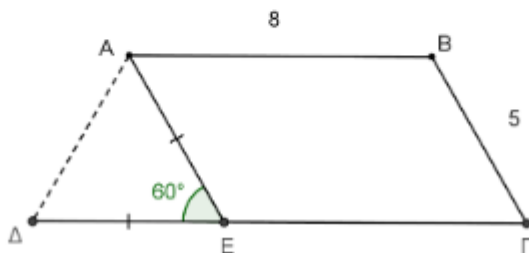
(Μονάδες 8)

ii. $\Delta E = A\Delta = 5$.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο Π του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 8)

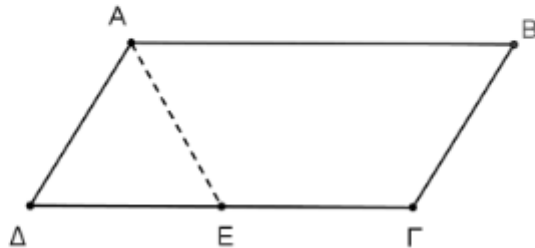


Άσκηση 14

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο με $AD < AB$. Η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ σε σημείο E .

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{BAE}$ και $\widehat{AED}$ είναι ίσες και στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 15)

β) Αν είναι $AB = 2AD$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = 2DE$. (Μονάδες 10)



Άσκηση 15

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AD < AB$, τη διχοτόμο της γωνίας του $\hat{A}$ η οποία τέμνει την πλευρά του $\Delta\Gamma$ σε σημείο E και τους ισχυρισμούς:

Ισχυρισμός 1: «Το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, Δ και E είναι ισοσκελές».

Ισχυρισμός 2: «Το τμήμα DE είναι ίσο με την πλευρά $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν από τους παραπάνω ισχυρισμούς ως αληθή ή ψευδή, αιτιολογώντας την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 16)

β) Ποιο θα είναι το μέτρο των γωνιών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ώστε το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, Δ και E να είναι ισόπλευρο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Άσκηση 16

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E, Z των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, ώστε $BE = \Delta Z$ και $\widehat{AED} = 50^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $BZ\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B\hat{E}\Delta}$ και $\widehat{B\hat{Z}\Delta}$. (Μονάδες 12)

