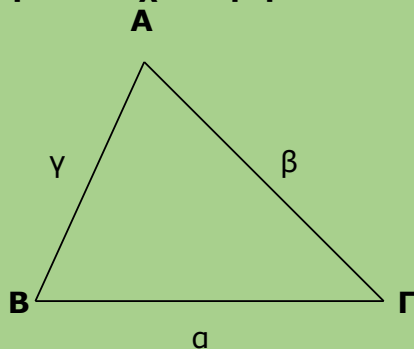
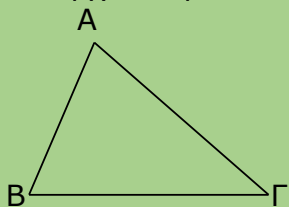


A. Κύρια στοιχεία τριγώνου

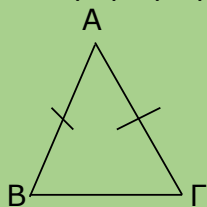


Οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, $B\Gamma$, $A\Gamma$, AB συμβολίζονται και με a , β , γ , δηλαδή με το μικρό γράμμα της απέναντι κορυφής. Οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι οι A , B , Γ .

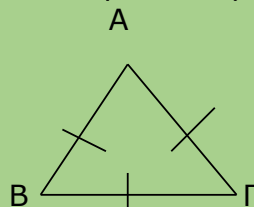
> Υπάρχουν τρία είδη τριγώνων ως προς την ισότητα των πλευρών τους:



Το **σκαληνό** που έχει όλες τις πλευρές του άνισες.

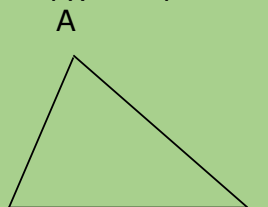


Το **ισοσκελές** που έχει δύο πλευρές ίσες. Η τρίτη πλευρά του λέγεται βάση. (εδώ η $B\Gamma$)

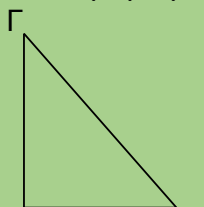


Το **ισόπλευρο** που έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

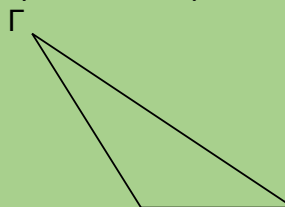
> Υπάρχουν τρία είδη τριγώνων ως προς το είδος των γωνιών τους:



Το **οξυγώνιο** που έχει **όλες** τις γωνίες του οξείες.

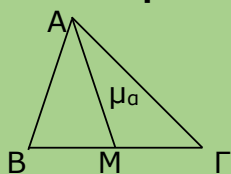


Το **ορθογώνιο** που έχει **μία** γωνία ορθή.

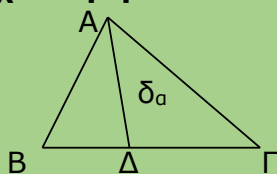


Το **αμβλυγώνιο** που έχει **μία** γωνία αμβλεία.

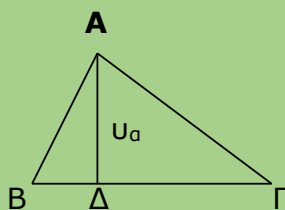
B. Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου



Διάμεσος είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το **μέσο** της απέναντι πλευράς. Το τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους: μ_a , μ_β , μ_γ



Διχοτόμος είναι το ευθύγραμμο τμήμα από τη κορυφή προς την απέναντι πλευρά που **διχοτομεί** την γωνία του τριγώνου. Το τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους: δ_a , δ_β , δ_γ



Ύψος είναι το **κάθετο** ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από την κορυφή προς την απέναντι πλευρά. Το τρίγωνο έχει τρία ύψη: u_a , u_β , u_γ

Γ. Ισότητα τριγώνων

1° Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ): Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

2° Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ): Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

3° Κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΠΠ): Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Σύγκριση Ορθογωνίων τριγώνων.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
(Δηλαδή υποτείνουσα με υποτείνουσα, κάθετη πλευρά με κάθετη πλευρά)
- Μία αντίστοιχη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα ίσα τρίγωνα απέναντι από τις ίσες πλευρές βρίσκονται οι ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Δ. Χρήσιμα πορίσματα-θεωρήματα

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, η διχοτόμος και το ύψος προς τη βάση συμπίπτουν.
3. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.
4. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Ε. Μεθοδολογία για να λύνουμε ασκήσεις

Να αποδειχτεί ότι δύο
τμήματα ή δύο γωνίες
είναι ίσα



Βρίσκουμε δύο τρίγωνα που
έχουν πλευρές ή γωνίες τις
παραπάνω.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα είτε με τα
κριτήρια ΠΓΠ, ΓΠΓ, ΠΠΠ είτε με τα
κριτήρια ορθογωνίων τριγώνων.



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και
στα ίσα τρίγωνα απέναντι από
τις ίσες πλευρές βρίσκονται οι
ίσες γωνίες και αντίστροφα.



Επομένως και τα τμήματα ή οι
γωνίες που μας ζητούσαν, είναι ίσες
Τέλος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Ισοσκελές είναι κάθε τρίγωνο που έχει τις πλευρές του ίσες
2. Ισόπλευρο είναι κάθε τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες
3. Σκαληνό είναι κάθε τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες
4. Διάμεσος τριγώνου είναι το τμήμα που ενώνει κάθε κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς
5. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα
6. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες, μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα
7. Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτές γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
8. Αν δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
9. Αν δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
10. Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
11. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
12. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και ύψος και διχοτόμος
13. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές ίσες.
14. Δύο ορθογώνια που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες, είναι ίσα
15. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία
16. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

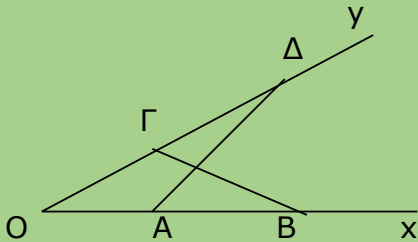
1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- α) Το κριτήριο ΠΓΠ λέει ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσες μία προς και τις σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- γ) Το κριτήριο ΓΠΓ λέει ότι αν δύο τρίγωνα έχουν πλευρά ίση και τις σε αυτή ίσες προς μία, τότε είναι ίσα.
- δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και την σε αυτή γωνία ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- ε) Σε κάθε τρίγωνο οι προσκείμενες στη γωνίες είναι
- στ) Κάθε σημείο της ενός ευθυγράμμου τμήματος από τα άκρα του.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ).

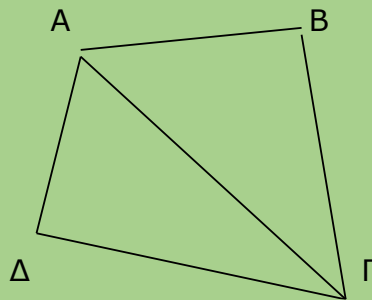
- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐
- γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα. ☐
- δ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐
- ε) Στα ίσα τρίγωνα απέναντι από τις ίσες πλευρές βρίσκονται οι ίσες γωνίες και αντίστροφα. ☐

3.

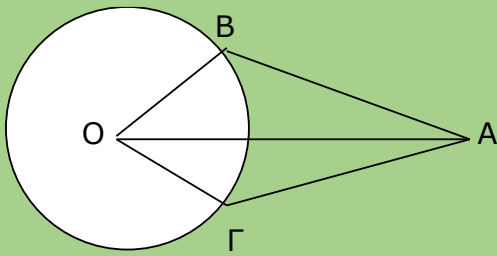


Στο διπλανό σχήμα είναι $OA=OG$ και $OB=OD$.
Να αποδείξετε ότι $BΓ=AD$

4. Στο διπλανό τετράπλευρο η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες του Α και Γ. Να αποδείξετε ότι $AB=AD$ και $BΓ=ΓΔ$.

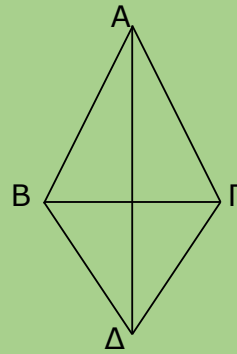


5.

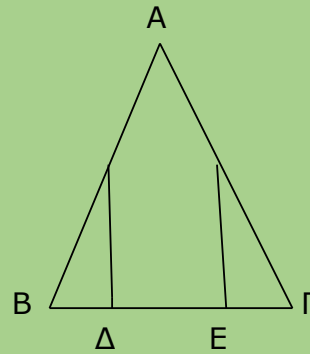


Στο διπλανό σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ του κύκλου με κέντρο το σημείο O. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και OAG είναι ίσα.

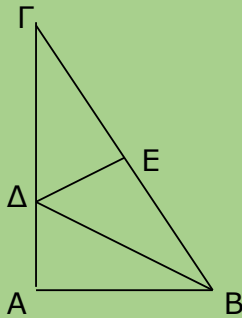
6. Στο διπλανό σχήμα τα ισοσκελή τρίγωνα ABΓ ΔBΓ έχουν κοινή βάση τη BΓ. Να αποδείξετε η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες A και Δ.



7. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ, M και N είναι τα μέσα των ίσων πλευρών AB και AG. Φέρουμε $MD \perp B\Gamma$ και $NE \perp B\Gamma$. Να δείξετε ότι $MD=NE$.



8.



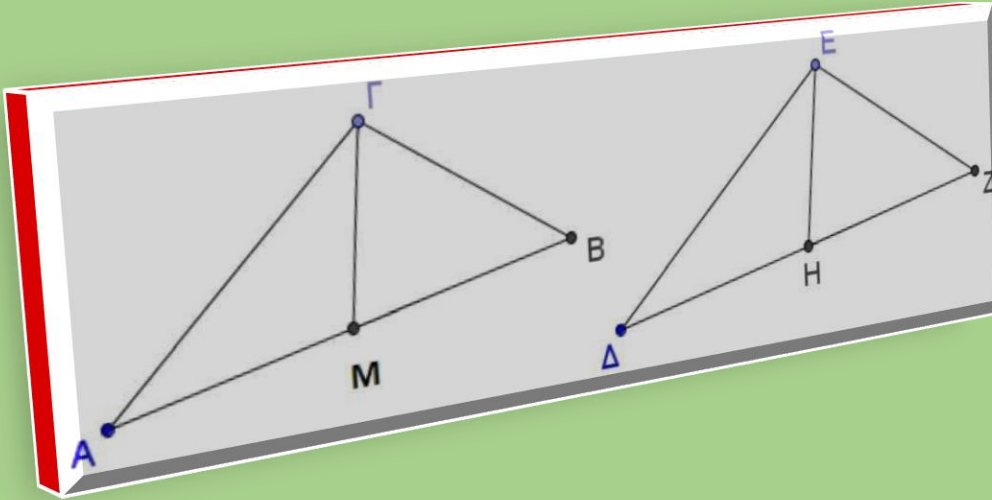
Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η BΔ είναι διχοτόμος. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$, ναδειχτεί ότι $AB=BE$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Άσκηση 1

Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $AB = \Delta Z$ cm, $B = Z$ και $A = \Delta$. Επίσης το M είναι μέσο της AB και το H είναι μέσο της ΔZ .

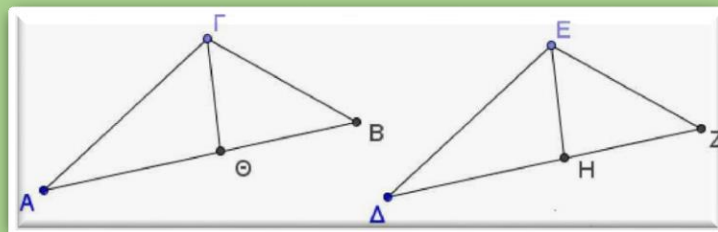
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma M$ και ΔEH είναι ίσα.
- γ) Να αποδείξετε ότι $\Gamma M = EH$.



Άσκηση 2

Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $AB = \Delta Z$, $A\Gamma = \Delta E$ και $B\Gamma = ZE$. Επίσης η $\Gamma\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ και η EH είναι διχοτόμος της γωνίας E .

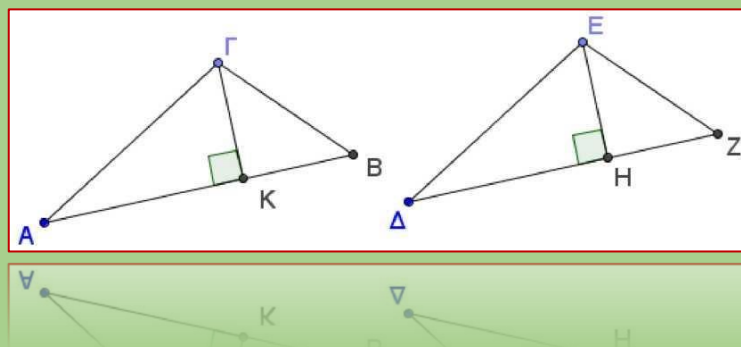
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.
- β) Να αποδείξετε ότι $\Gamma = E$.
- γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Theta$ και ΔEH είναι ίσα.



Άσκηση 3

Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $A\Gamma = \Delta E$, $AB = \Delta Z$ και $A = \Delta$. Επίσης το ΓK είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το EH είναι ύψος του τριγώνου ΔEZ .

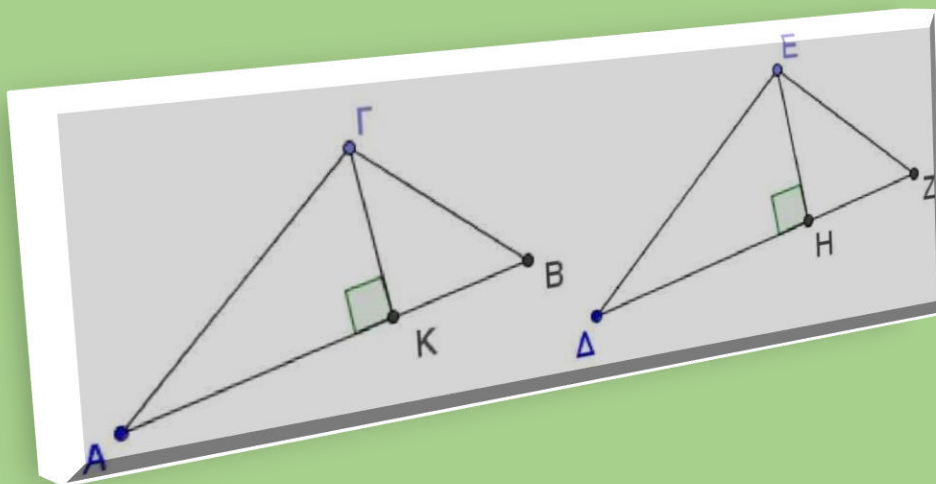
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma K$ και ΔHE είναι ίσα.
- γ) Να αποδείξετε ότι $\Gamma K = EH$.



Άσκηση 4

Για τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ ισχύει ότι $A = \Delta$ και $B = Z$. Επίσης το ΓK είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και το EH είναι ύψος του τριγώνου ΔEZ και $\Gamma K = EH$.

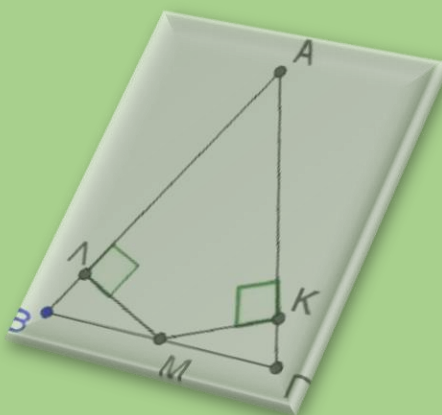
- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Gamma$ και ΔEH είναι ίσα.
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BK\Gamma$ και ZHE είναι ίσα.
- γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔZE είναι ίσα.



Άσκηση 5

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Επίσης το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και οι ML και MK κάθετες στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

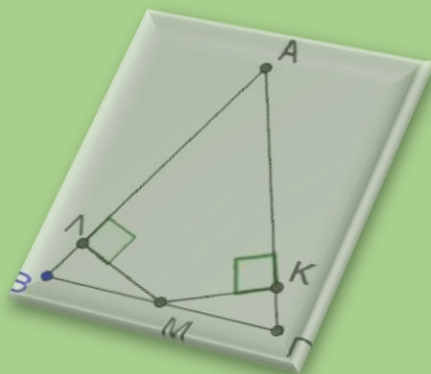
- α) Να αιτιολογήσετε γιατί $B = \Gamma$.
- β) Να σχεδιάσετε την AM και να αποδείξετε ότι είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ALM και AKM .



Άσκηση 6

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma = 10$ cm. Επίσης το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και οι ML και MK κάθετες στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι $B = \Gamma$.
- β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα BML και $ΓMK$.
- γ) Αν επιπλέον $BL = 3$ cm να αποδείξετε ότι $K\Gamma = 3$ cm και να βρείτε το μήκος της AK .



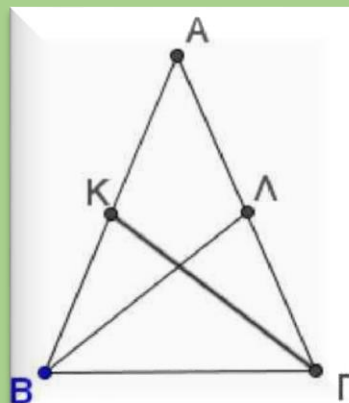
Άσκηση 7

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma=10\text{ cm}$. Επίσης το K είναι μέσο της AB και το Λ είναι μέσο της $A\Gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $KB=\Lambda\Gamma$.

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Lambda\Gamma$ και ΓKB και να αποδείξετε ότι είναι ίσα.

γ) Αν επιπλέον $B\Lambda=7,4\text{ cm}$ να αποδείξετε ότι $\Gamma K=7,4\text{ cm}$ και ότι $BK\Gamma = B\Lambda\Gamma$.



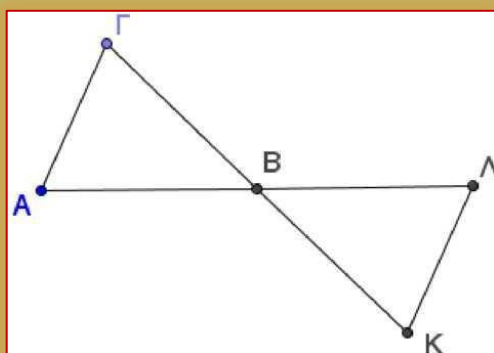
Άσκηση 8

Τα ευθύγραμμα τμήματα ΓK και $A\Lambda$ τέμνονται στο σημείο B . Επίσης η γωνία $KBA = 45^\circ$, $A = \Lambda = 60^\circ$ και $AB=B\Lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB\Gamma = 45^\circ$.

β) Να βρείτε τις γωνίες Γ και K .

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KBA είναι ίσα.



Άσκηση 9

Στο παρακάτω σχήμα η $A\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$. Επίσης $BA\Gamma = 30^\circ$ και $AB = A\Gamma$.

α) Να βρείτε τη γωνία $BA\Delta$.

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$.

γ) Αν $B\Delta = 2\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος της $\Delta\Gamma$.

