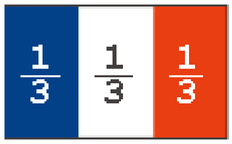
5ο Δημοτικό Σχολείο Αλεξάνδρειας
Αρβανιτίδης Θεόδωρος

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

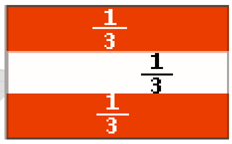
όροι του κλάσματος : $\dfrac{\textbf{αριθμητής}}{\textbf{παρονομαστής}}$

$$\dfrac{\textbf{πόσα \underline{ίσα} μέρη της ακέραιης μονάδας πήρα}}{\textbf{πόσα \underline{ίσα} μέρη χώρισα την ακέραιη μονάδα}}$$



Η κλασματική γραμμή είναι η πράξη της διαίρεσης.

Τα κόκκινα κομμάτια αποτελούν τα δύο τρίτα (2/3) της σημαίας.



Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως κλασματικός, έχοντας παρονομαστή τη μονάδα, χωρίς να αλλάξει η αξία του.

Φυσικός αριθμός	Δεκαδικός αριθμός	Κλασματικός αριθμός
5	**5,00**	$\frac{5}{1}$
45	**45,00**	$\frac{45}{1}$

Όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μικρότερο από την ακέραιη μονάδα. Όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από την ακέραιη μονάδα. Όταν ο αριθμητής είναι ίσος με τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι ίσο με την ακέραιη μονάδα.

π.χ. $\frac{2}{5} < \mathbf{1}$, $\frac{5}{3} > \mathbf{1}$, $\frac{5}{5} = \mathbf{1}$

Μεικτός αριθμός

Τα κλάσματα που περιέχουν ακέραιους αριθμούς και κλάσμα μαζί λέγονται μεικτοί αριθμοί. Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τότε το κλάσμα μπορεί να γραφεί και ως μεικτός αριθμός.

π.χ. $\frac{5}{3} = \mathbf{1} + \frac{2}{3} = \mathbf{1}\,\frac{2}{3}$

5 : 3 = 1 ολόκληρο και υπόλοιπο 2, αριθμητής του μεικτού αριθμού, ενώ παρονομαστής μένει ο ίδιος.

Για να μετατρέψω έναν μεικτό αριθμό σε κλάσμα πολλαπλασιάζω τον ακέραιο με τον παρονομαστή και προσθέτω τον αριθμητή. Ο αριθμός αυτός θα είναι ο αριθμητής του κλάσματος. Παρονομαστής μένει ο ίδιος.

π.χ. $\mathbf{2}\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

2 • 5 + 3 = 13, αριθμητής του κλάσματος , ο παρονομαστής μένει ο ίδιος .

Σύγκριση Κλασμάτων

Για να συγκρίνω δύο ή περισσότερα κλάσματα, πρέπει τα κλάσματα να έχουν ίσους αριθμητές ή ίσους παρονομαστές. Όταν έχουν ίσους αριθμητές, μεγαλύτερο κλάσμα είναι αυτό που έχει τον μικρότερο παρονομαστή. Όταν έχουν ίσους παρονομαστές, μεγαλύτερο κλάσμα είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμητή.

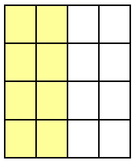
Όταν δεν έχουν κοινούς αριθμητές ή κοινούς παρονομαστές, για να το συγκρίνω πρέπει να τα κάνω ομώνυμα .

π.χ. $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$

$\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5} \rightarrow \frac{3}{5} > \frac{2}{5} > \frac{1}{5}$

Ισοδύναμα κλάσματα

Όταν τα κλάσματα εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους είναι ίσα και λέγονται ισοδύναμα.



Το κίτρινο τμήμα του πίνακα μπορεί να εκφραστεί ως $\frac{1}{2}$ **ή** $\frac{2}{4}$ **ή** $\frac{4}{8}$ **ή** $\frac{8}{16}$ **.** **Τα κλάσματα εκφράζουν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους, γι' αυτό και λέγονται ισοδύναμα.**

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$$

Ισοδύναμα κλάσματα μπορώ να δημιουργήσω αν πολλαπλασιάσω τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό, ή αν διαιρέσω τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό. Η διαίρεση των όρων του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό λέγεται και απλοποίηση .

π.χ. $\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = \frac{2}{4}$ **ή** $\frac{2}{4} = \frac{2\cdot 4}{4\cdot 4} = \frac{8}{16}$ **ή** $\frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$ **ή** $\frac{8}{16} = \frac{8:4}{16:4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Το κλάσμα που δεν μπορεί να απλοποιηθεί άλλο λέγεται ανάγωγο κλάσμα.

Ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα

Τα κλάσματα που έχουν τον ίδιο παρονομαστή λέγονται ομώνυμα. Τα κλάσματα που έχουν διαφορετικό παρονομαστή λέγονται ετερώνυμα.

π.χ. ομώνυμα : $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}$, **ετερώνυμα :** $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

Πρόσθεση κλασμάτων

Για να προσθέσω δύο ή περισσότερα κλάσματα, πρέπει αυτά να είναι ομώνυμα. Για να κάνω τα κλάσματα ομώνυμα πρέπει να βρω το Ε. Κ. Π. (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο), των παρονομαστών.

π.χ. $\frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} =$

α΄ τρόπος
(παραδοσιακός τρόπος)

Βρίσκω τα πολλαπλάσια του 2 , 3 , 6.
2 : 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 , 26 , 28 , 30 ………………
3 : 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , 30 ……………. ………………………
6 : 6 , 12 , 18 , 24 , 30 ………………………………………………………….
Τα κοινά πολλαπλάσια του 2 , 3 , 6 είναι το 6 , 12 , 18 , 24 , 30 …………….
Το Ε. Κ. Π. (2 , 3 , 6) = 6

β΄ τρόπος
(εύκολος και γρήγορος)

Τοποθετώ στη σειρά τους παρονομαστές ξεκινώντας από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο, σε μία σειρά. Στα δεξιά των αριθμών κάνω μία κάθετη γραμμή και ξεκινώ διαιρώντας τους αριθμούς αυτούς με τους πρώτους αριθμούς. Πρώτοι ονομάζονται οι αριθμοί που διαιρούνται μόνο με τη μονάδα και τον εαυτό τους. Κάτω από κάθε αριθμό τοποθετώ τον αριθμό που δείχνει πόσες φορές διαιρείται αυτός ο αριθμός, με τον πρώτο αριθμό. Αν κάποιος αριθμός δε διαιρείται, τότε κατεβαίνει στην κάτω σειρά όπως είναι. Στο τέλος πολλαπλασιάζω τους πρώτους αριθμούς και το γινόμενο των αριθμών αυτών είναι το Ε.Κ.Π.. Σταματάω τις διαιρέσεις όταν στο κάτω μέρος των αριθμών, όλοι οι αριθμοί έχουν γίνει 1.

2	**3**	**6**	**2** (στο 2 μία φορά, στο 6 τρεις)
1	**3**	**3**	**3** (στο 3 μία φορά)
	1	**1**	

Ε.Κ.Π. (2, 3, 6) =2 • 3 = 6

Μετά πολλαπλασιάζω τους όρους του κλάσματος με τα πολλαπλάσιά τους, ώστε οι παρονομαστές που θα δημιουργηθούν να είναι ίδιοι, δημιουργώ τα ισοδύναμα κλάσματά τους, οι συγκεκριμένοι πρέπει να γίνουν 6 . Έτσι :

$$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1\cdot 1}{6\cdot 1} = \frac{1}{6}$$

Η αρχική πράξη γίνεται :

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$\frac{3}{6} + \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{14}{6} = 2\frac{2}{6} = 2\,\frac{1}{3}$$

Προσοχή : Οι πράξεις γίνονται μόνο στους αριθμητές. Οι παρονομαστές παραμένουν οι ίδιοι.

Πρόσθεση ακεραίου με κλάσμα

Όταν έχω να προσθέσω ακέραιο με κλάσμα, κάνω κανονικά την πρόσθεση δημιουργώντας έναν μεικτό αριθμό.

π.χ. $2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ **ή** $\frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$ **(αντιμεταθετική ιδιότητα)**

Πρόσθεση μεικτών αριθμών

Όταν έχω να προσθέσω μεικτούς αριθμούς, προσθέτω χωριστά τους ακέραιους και χωριστά τα κλάσματα :

π.χ. $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = (2 + 1) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 3 + 1 = 4$

Όταν τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα, για να κάνω την πρόσθεση πρέπει πρώτα να τα κάνω ομώνυμα .

Αφαίρεση κλασμάτων

Για να αφαιρέσω δύο κλάσματα μεταξύ τους, πρέπει τα κλάσματα αυτά να είναι ομώνυμα.. Αν δεν είναι ομώνυμα τα κάνω πρώτα ομώνυμα και μετά κάνω τις πράξεις .

π.χ. όταν είναι ομώνυμα : $\frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

όταν είναι ετερώνυμα : $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} =$

α΄ τρόπος

Βρίσκω πρώτα το Ε.Κ.Π. (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) των παρονομαστών, δηλαδή στην περίπτωσή μας του 2 και του 3 :

2 : 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 22 , 24 , 26 , 28 , 30 ………………

3 : 3 , 6 , 9 , 12 , 15 , 18 , 21 , 24 , 27 , 30 ……………. ………………………

Τα κοινά πολλαπλάσια του 2 , 3 είναι το 6 , 12 , 18 , 24 , 30 …………….

Το Ε. Κ. Π. (2 , 3) = 6

β΄ τρόπος

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

Ε.Κ.Π. (2 , 3) = 2 • 3 = 6

Μετά πολλαπλασιάζω τους όρους του κλάσματος με τα πολλαπλάσιά τους, ώστε οι παρονομαστές που θα δημιουργηθούν να είναι ίδιοι, δημιουργώ τα ισοδύναμα κλάσματά τους, οι συγκεκριμένοι πρέπει να γίνουν 6 . Έτσι :

$$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

Η αρχική πράξη γίνεται :

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{10}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7}{6} = \mathbf{1}\ \frac{1}{6}$$

Προσοχή : Οι πράξεις γίνονται μόνο στους αριθμητές. Οι παρονομαστές παραμένουν οι ίδιοι.

Αφαίρεση ακεραίου με κλάσμα

Για να κάνω την αφαίρεση, πρέπει πρώτα να μετατρέψω τον ακέραιο σε μεικτό αριθμό και μετά να κάνω την αφαίρεση :

$$\text{π.χ. } \mathbf{4} - \frac{1}{2} = \mathbf{3}\ \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \mathbf{3} + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{3}\ \frac{1}{2}$$

Δανείστηκα μία ακέραιη μονάδα την οποία μετέτρεψα σε κλάσμα, χωρίς να αλλάξει η αξία του ακέραιου αριθμού : $\mathbf{4} = \mathbf{3}\ \frac{2}{2}$

Αφαίρεση κλάσματος με ακέραιο

Για να αφαιρέσω ακέραιο από κλάσμα, πρέπει να μετατρέψω τον ακέραιο σε κλάσμα και μετά να κάνω την αφαίρεση .

$$\text{π.χ. } \frac{5}{3} - \mathbf{1} = \qquad \left(\frac{3}{3} = \mathbf{1}\right)$$

$$\frac{5}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$$

Αφαίρεση μεικτών αριθμών

Για να κάνω αφαίρεση μεικτών αριθμών, αφαιρώ χωριστά τους ακέραιους και χωριστά τα κλάσματα .

$$\text{π.χ. } 4\frac{2}{3} - 2\frac{1}{3} =$$

$$(4 - 2) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{3}$$

Όταν τα κλάσματα δεν είναι ομώνυμα, για να κάνω την αφαίρεση πρέπει πρώτα να τα κάνω ομώνυμα .

Προσοχή : Οι πράξεις γίνονται μόνο στους αριθμητές. Οι παρονομαστές παραμένουν οι ίδιοι.

Πολλαπλασιασμός ακεραίου με κλάσμα

Όταν έχουμε να πολλαπλασιάσουμε ακέραιο με κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστής μένει ο ίδιος.

$$\text{π.χ. } 2 \bullet \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

στον πολλαπλασιασμό ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα :

$$2 \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \bullet 2$$

Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

Για να πολλαπλασιάσω δύο κλάσματα, πολλαπλασιάζω τους αριθμητές και το γινόμενό τους είναι ο νέος αριθμητής και κατόπιν πολλαπλασιάζω τους παρονομαστές και το γινόμενό τους είναι ο νέος παρονομαστής.

$$\text{π.χ. } \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Στον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα :

$$\frac{2}{3} \bullet \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \bullet \frac{2}{3}$$

Διαίρεση κλασμάτων

Για να κάνω διαίρεση κλασμάτων, αντιστρέφω το δεύτερο κλάσμα και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό .

π.χ. $\frac{2}{3}$ **:** $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ **•** $\frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} = \mathbf{1}\ \frac{1}{3}$

Διαίρεση ακεραίου με κλάσμα

Για να διαιρέσω ακέραιο με κλάσμα, αντιστρέφω το κλάσμα και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό.

π.χ. $\mathbf{3} : \frac{2}{3} = \mathbf{3} \bullet \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = \mathbf{4}\ \frac{1}{2}$

Διαίρεση κλάσματος με ακέραιο

Για να διαιρέσω κλάσμα με ακέραιο, αντιστρέφω τον ακέραιο και αντί για διαίρεση κάνω πολλαπλασιασμό.

π.χ. $\frac{2}{3}\ \mathbf{: 3} = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$

Σύνθετα κλάσματα

Σύνθετα ονομάζουμε τα κλάσματα τα οποία μπορεί ο αριθμητής ή ο παρονομαστής ή και οι δύο μαζί να είναι κλάσματα . Το γινόμενο των ακριανών γίνεται ο αριθμητής του απλού κλάσματος, ενώ το γινόμενο των μέσων γίνεται ο νέος παρονομαστής.

π.χ. $$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{4}{1} = \mathbf{4}$$