ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

115

ΕΜΕ:ΧΡΥΣΟ ΜΕΤΑΛΛΙΟ 2018 ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ - ΜΑΡΤΙΟΣ 2020 ευρώ 3,5

Γυναίκες μαθηματικοί

Ευκλείδης 2020

Αρχιμήδης 2020

το π =3,14

Με την ευκαιρία της ανακήρυξης της 14ης Μαρτίου (14/3) ως παγκόσμιας μέρας των Μαθηματικών (παραπέμποντας στην γραφή 3,14 με την οποία αρχίζει ο υπολογισμός του π, του λόγου της περιφέρειας προς την διάμετρο κάθε κύκλου), η ΕΜΕ καλεί την ελληνική κοινωνία και την πολιτεία **να σχεδιάσουμε έναν αναστοχασμό για τη σημασία της Μαθηματική** ... **ι για τις** δυνατότητες ... σχεδιασμό έργων ειρήνη ... οργάνωση με όρους αλλ...

Τα Μ... μολογική προέλευση ... **ήνα του ανθρώπινου** ... **αντασίας,** καθώς με τον ... όρια των αισθήσεων ... **υν νέες πραγματικότ**...

Παρο... ανώσουν διεπιστημονικ... ξουν την μαθηματική σ... το σκέψης και έκφρασης ... η σημασία των μαθηματι... **παιδιών στην μαθηματική εκπαίδευση και την αναγκαιότητα της μαθηματικής καλλιέργειας για κάθε πολίτη στην ψηφιακή εποχή.**

INTERNATIONAL DAY OF MATHEMATICS
MARCH 14

Τα Μαθηματικά είναι παντού

Το Διοικητικό Συμβούλιο καλεί τα Παραρτήματα της ΕΜΕ σε όλη την Ελλάδα να πάρουν μέρος σε εκδηλώσεις με θέμα **"τα Μαθηματικά είναι παντού"**, που επέλεξε για την φετινή "μέρα Πί" στις 14 Μαρτίου 2020, η Διεθνής Ένωση Μαθηματικών (https://www.mathunion.org). "

14 / 3 / 2020

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 115 - Ιανουάριος - Φεβρουάριος - Μάρτιος 2020 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί φίλοι,
μαθητές και συνάδελφοι,

με επιμονή και καλή διάθεση
να αντιμετωπίσουμε
το απρόοπτο και
το δύσκολο που συμβαίνει
με κουράγιο
και πίστη
σταθεροί στο όνειρο, στο ταξίδι, ...
και όπως λέει και ο ποιητής ...

"Το ανοιχτό να ατενίσουμε
κάτι δικό μας να αναζητήσουμε,
όσο, κι αν είναι μακριά"

Friedrich Holderlin [1770-1843]
Γερμανός ποιητής

Η επιτροπή σύνταξης
του περιοδικού

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων
Είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Γ. Κατσούλης, Λ. Κουτσούρης, Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Χ. Τσίτος],
Β΄Λυκείου [Απ. Κακκαβάς, Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Μ. Σίσκου, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Ν. Αντωνόπουλος, Δ. Αργυράκης, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Το 2020 να έχει χαρά
και ελπίδα για το καλύτερο ...

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	9 Νοεμβρίου	2019
Ευκλείδης:	18 Ιανουαρίου	2020
Αρχιμήδης:	22 Φεβρουαρίου	2020

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στο "π" και στην επικαιρότητα των Μαθηματικών

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Παναγιώτης Δρούτσας

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται:
Με κατάθεση του αντιτίμου της συνδρομής στους παρακάτω λογαριασμούς

1. ΕΘΝΙΚΗ Τράπεζα λογαριασμός όψεως 080/48002300 IBAN GR 87 0110 0800 0000 0804 8002 300
2. ALPHA , 10 100 200 20 19 98 IBAN GR 86 0140 1010 1010 0200 2019 988
3. EUROBANK , 0026.0201.94.0201575138 IBAN GR 90 0260 2010 0009 4020 1575 138
4. Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ Γραφείο 54, Τ.Θ. 30044
5. Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Τα Μαθηματικά είναι Παντού

Σάββατο 14 Μάρτη 2020 ημέρα του π

Παγκόσμιο Έτος Μαθηματικών για την Unesco

του Παναγιώτη Π. Χριστόπουλου

Οι άνθρωποι στη ζωή τους και οι κοινωνίες μας έχουν θεσπίσει πολλές γιορτές. Γιορτάζουμε τα γενέθλιά μας, μια επέτειο της ζωής μας, μια επέτειο για τη χώρα μας, τα Χριστούγεννα, την ημέρα της μητέρας, κ.ά. Όμως γιορτή για αριθμό είναι κάτι το παράξενο. Οι μαθηματικοί εδώ και μερικά χρόνια έχουν ορίσει και μια άλλη παράξενη γιορτή για έναν αριθμό, τον αριθμό «π». **Την $14^{η}$ Μαρτίου κάθε χρόνου την ονόμασαν «ημέρα του π» , δηλαδή εορτή για τη μαθηματική σταθερά «π», γνωστή ως 3,14.**

> **… ή ακριβέστερα όταν γράψουμε έναν κύκλο και διαιρέσουμε το μήκος του με την διάμετρό του, για οποιονδήποτε κύκλο προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός.**

Ο αριθμός αυτός δεν είναι ακέραιος, δεν είναι κλάσμα, είναι ένας άρρητος αριθμός δηλαδή αριθμός με άπειρα δεκαδικά ψηφία που τελειωμό δεν έχουν αλλά ούτε καμιά περιοδικότητα. Έτσι αφού είναι άρρητος σημαίνει δεν λέγεται, άρα ήταν απαραίτητο να δίνεται με ένα σύμβολο. Ο Eüler το 1736 τον ονόμασε με το μικρό **γράμμα π**, από το αρχικό γράμμα της λέξης **περιφέρεια**. Το **π** είναι το $16^{ο}$ γράμμα της Ελληνικής Αλφαβήτου.

Ο Eüler έγραψε: **«για λόγους συντομίας θα γράφουμε τον αριθμό «π», δηλαδή ο π είναι ίσος με το μισό της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας 1»** (κάτι που κάνουμε στην Τριγωνομετρία, με τον τριγωνομετρικό κύκλο). Ο συμβολισμός αυτός γίνεται με το μικρό Ελληνικό γράμμα **π** έκτοτε καθιερώθηκε σε όλο τον κόσμο. Το κεφαλαίο γράμμα **Π, είναι σημαντικό να το ξεχωρίζουμε,** χρησιμοποιείται στο γινόμενο όρων ακολουθίας.

Έκτοτε οι μαθηματικοί για χιλιάδες χρόνια είχαν επιδοθεί σε έναν αγώνα για να βρουν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του π και να τον κατανοήσουν. Οι μαθηματικοί πάντα στα προβλήματά τους κάνουν χρήση του αριθμού με προσέγγιση, το ίδιο και οι άλλοι επιστήμονες. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν για το **π** το 22/7 = 3,14285 που έχει μικρή προσέγγιση. Οι παλαιότερες γραπτές προσεγγίσεις του **π** βρίσκονται στην **Αίγυπτο** και τη **Βαβυλώνα**. Στη Βαβυλώνα το 2000 π.Χ. χρησιμοποιούν τον **π** ως 25/8 = 3.125. Στην Αίγυπτο, ο Πάπυρος Rhind 1650 π.Χ., έχει ένα τύπο που αντιμετωπίζει το π ως (16/9)2 = 256/81 ≈3.1605.

Οι **Κινέζοι** χρησιμοποιούσαν το π=3,1547, οι Ινδοί στοShulba Sutras (σανσκριτικά κείμενα, 600 π.Χ.) έχουν το

π=(9785/5568)2≈3.088.

Eüler Leonhard (1707 1783)

Δύο στίχοι της Εβραϊκής Βίβλου 8ο αιώνα π.Χ. περιγράφει μια τελετουργική λεκάνη στο Ναό του Σολομώντα με διάμετρο δέκα πήχεις και η περίμετρός του τριάκοντα πήχεις. Οι στίχοι υποδηλώνουν ότι ο **π** είναι περίπου τρία αν η λεκάνη είναι κυκλική, ίσως η διαφορά να ήταν λόγω του πάχους.

Ο Αρχιμήδης τον $3^{ο}$ αιώνα π.Χ. χρησιμοποίησε γεωμετρικές τεχνικές με κανονικά πολύγωνα, για να υπολογίσει με ακρίβεια την τιμή του π. Χρησιμοποίησε πολύγωνο με 96 πλευρές και υπολογίζει το **π** 223/71<π<22/7. Το 1220 μ.Χ. Ο Leonardo **Fibonacci** βρίσκει π=3,141818

Το 1593 μ. Χ. Ο Francois **Viete** βρίσκει το άπειρο γινόμενο για να το περιγράψει. Το 1674 μ. Χ. Ο **Leibniz** χρησιμοποιεί τόξο εφαπτομένης για το **π**. Το 1855 ο Richter υπολογίζει 500 δεκαδικά ψηφία για το **π**. Από το 1947 οι υπολογισμοί του **π** γίνονται με τη βοήθεια των Η/Υ.

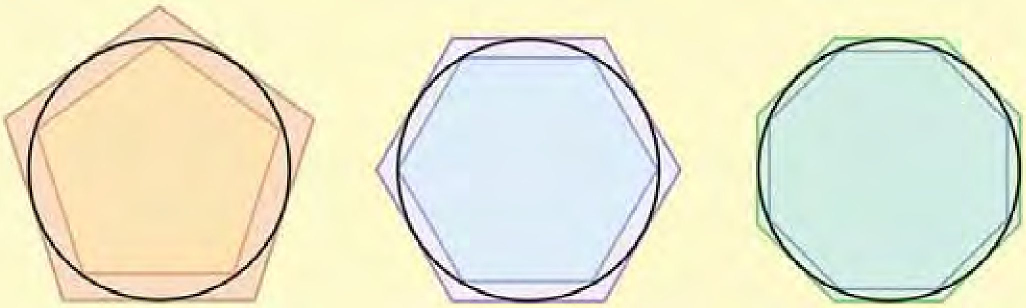
Ο Eüler καθιέρωσε μια σύνδεση μεταξύ του **π** και των πρώτων αριθμών που αυτό αργότερα βοήθησε στη μελέτη της συνάρτησης ζήτα του Riemann.

Ο Ελβετός επιστήμονας Lambert το 1761 απέδειξε ότι ο **π** είναι άρρητος.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Ο Γάλλος μαθηματικός **Legandre** απέδειξε το 1794 ότι ο **π** είναι επίσης άρρητος. Το 1882, ο Γερμανός μαθηματικός **Fer. von Lindemann** απέδειξε ότι ο **π** είναι υπερβατικός. Υπερβατικός αριθμός, σημαίνει ότι δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό κάνει αδύνατη τη λύση του αρχαίου προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Ο Ινδός **Srinivasa Ramanujan**, δημοσίευσε δεκάδες καινοτόμες μορφές εφαρμογών του π, που έχουν κομψότητα, μαθηματικό βάθος, ταχεία σύγκλιση και χρησιμοποιούνται στην πληροφορική για το **π**. Σήμερα χρησιμοποιούν και νέες άπειρες σειρές που είναι γρήγορες όσο οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι. Η σταθερά **π** είναι η σημαντικότερη σταθερά στα Μαθηματικά, μια σταθερά που έχει παρατηρηθεί πολλές φορές στον κόσμο γύρω μας, ακόμα και στο σύμπαν και γι' αυτό το λόγο μερικοί την αποκαλούν σταθερά του σύμπαντος. Στα δεκαδικά ψηφία του π μπορεί να βρει κανείς τον αριθμό της ταυτότητας, του διαβατηρίου, την ημερομηνία γέννησης, ή όποιο άλλο αριθμό θέλει. Για παράδειγμα η ημερομηνία 28 Οκτωβρίου 1940 γραμμένη ως 28101940 παρουσιάζεται στο 7.641.792 ψηφίο του **π**. Τα ψηφία του **π** εμφανίζονται με τυχαία σειρά και δεν έχει ανακαλυφθεί αν από κάποιο ψηφίο και μετά υπάρχει περιοδικότητα.

Τον 15ο αιώνα με αλγόριθμους απειροσειρών υπολόγισαν τον αριθμό **π** με μεγαλύτερη ακρίβεια. Όμως από τον 20^{o} αιώνα, οι μαθηματικοί με την χρήση υπολογιστών ανακαλύπτουν όλο και περισσότερα δεκαδικά ψηφία του αριθμού. Σήμερα γνωρίζουμε περισσότερα από **31 τρισεκατομμύρια ψηφία**. Όσοι υπολογίζουν ψηφία του **π**, επιδιώκουν ρεκόρ και δημοσιότητα.



Γιατί οι μαθηματικοί ψάχνουν για τόσα πολλά ψηφία; Είναι απαραίτητα τόσα πολλά ψηφία για τους υπολογισμούς στα προβλήματα της επιστήμης; **Όχι**. Οι μαθηματικοί σε ότι κάνουν δεν το κάνουν επειδή χρειάζεται και κανείς δεν γνωρίζει από πριν αν κάτι χρειαστεί ή όχι. Η αλήθεια είναι ότι οι μαθηματικοί-προγραμματιστές συνεχίζουν αφού η ακριβέστερη προσέγγιση του **π** γίνεται πλέον για χάρη της πληροφορικής. Ο **π** είναι ένα από τα **καλύτερα κριτήρια για να ελέγχουν την ισχύ ενός αλγορίθμου**. Οι επιστήμονες στους υπολογισμούς τους δεν χρειάζονται πολλά δεκαδικά ψηφία.
Ρώτησαν την NASA πόσα ψηφία χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς της, για την διαπλανητική πλοήγηση των διαστημοπλοίων και η απάντηση ήταν τα πρώτα 15 δεκαδικά ψηφία του π:

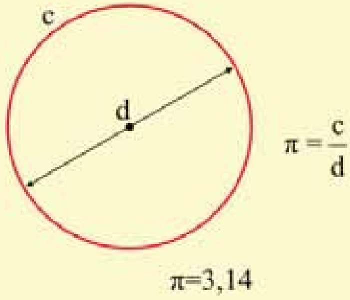
«3.141592653589793»

Ας δούμε πόσο ακριβείς είναι οι υπολογισμοί με αυτή την προσέγγιση. Αν ένα διαστημόπλοιο είναι **20 τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα μακριά από τη Γη** όπως **το Voyager 1** τότε έχουμε έναν κύκλο με διάμετρο 40 τρισεκατομμύρια χιλιόμετρα. Το μήκος αυτού του κύκλου είναι 40 τρις επί **3.141592653589793**. Η τιμή της διαμέτρου σε αυτόν τον κύκλο που υπολογίσαμε με τα 15 μόνο δεκαδικά ψηφία είναι **μόνο 4 εκατοστά λιγότερα της πραγματικής.**

Για τη Γη που έχει ακτίνα 12.750 χιλιόμετρα το σφάλμα είναι μικρότερο από χιλιοστό του χιλιοστού. Μάλιστα η **ΝΑΣΑ** εξέτασε και το ενδεχόμενο για ολόκληρο το Σύμπαν. Αν θεωρήσουμε ότι το Σύμπαν έχει ακτίνα 46 δισεκατομμύρια έτη φωτός, τότε με 40 δεκαδικά ψηφία του **π** το σφάλμα θα είναι όσο η διάμετρος του ατόμου του υδρογόνου. Τα 15 πρώτα δεκαδικά ψηφία του **π**, υπολόγισε πρώτος το 1593 ο Ολλανδός μαθηματικός **Adrianus Romanus** χρησιμοποιώντας τα εγγεγραμμένα πολύγωνα, το ίδιο και ο François Viète.

Ο εορτασμός του π

Από τα πρώτα ψηφία του **π**, (3.14159) όρισαν την 14 Μαρτίου (3.14) δηλαδή (14/3) ως ημέρα εορτασμού του «**π**». Ο εορτασμός της ημέρας του «π» καθιερώθηκε το 1988 από τον **Larry Shaw** στο Σαν Φρανσίσκο. Το 2009, το Κογκρέσο των ΗΠΑ κήρυξε την 14η Μαρτίου ως Ημέρα του **π** με ψηφοφορία 391 υπέρ και 10 κατά. Το Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης δημοσιεύει αποφάσεις του κάθε 14 Μαρτίου και ώρα 1:59΄.



Στον περσινό εορτασμό της ημέρας του π, 14 Μάρτη 2019, η Ιαπωνέζα **Ema Harouka Ivao** εργαζόμενη της Google ανακοίνωσε ότι με τη βοήθεια του δασκάλου της Daisuke Takahashi υπολόγισε 31,4 τρισεκατομμύρια ψηφία του **π**. Για τον υπολογισμό απαιτήθηκαν 121 ημέρες και χώρος 170 τεραμπάιτ. Η **Ivao** επομένως από το 2019 κατέχει το Ρεκόρ Γκίνες. Επίσης στις 14 Μάρτη το 1879, γεννήθηκε και ο φυσικός Άλμπερτ Αϊνστάιν.

Στα διάφορα μέρη του κόσμου μαθηματικοί και μαθηματικές σχολές Πανεπιστημίων γιορτάζουν με διάφορους τρόπους. Προσπαθούν ότι κάνουν, να παραπέμπει στο **π**. Κάνουν πάρτι τα οποία ξεκινάνε ακριβώς στη 1:59΄ και 26 δευτερόλεπτα μετά το μεσημέρι, καθώς τα 1, 5, 9, 2, 6 είναι οι πέντε αριθμοί που ακολουθούν τη σταθερά 3,14. Τρώνε στρογγυλές πίτες και καταναλώνουν προϊόντα που το όνομά τους αρχίζει από **π**.

Συνθέτουν τραγούδια, παίζουν στο πιάνο νότες που να αντιστοιχούν στα ψηφία του π, φροντίζουν σε ότι αναφέρονται να αφορά το π και γενικά διασκεδάζουν αφήνοντας τη φαντασία τους να πετάξει δημιουργικά. Ο αριθμός έχει μια μαγική έλξη στους μαθηματικούς και όχι μόνο. Κάποιος Βρετανός επιστήμονας διαπίστωσε ότι ο λόγος του συνολικού μήκους κάθε ποταμού με τη χιλιομετρική απόσταση σε ευθεία γραμμή ανάμεσα στις πηγές και στις εκβολές του είναι πάντα πολύ κοντά στο π.

Μια άλλη σημαντική δραστηριότητα που κάνουν κατά την ημέρα του **π** είναι να απομνημονεύουν όσο γίνεται περισσότερα ψηφία του. Όλο και πετυχαίνουν μεγαλύτερα ρεκόρ. Πως τα θυμούνται; Υπάρχουν οι αριθμομνήμονες και αυτοί που φτιάχνουν κείμενα-ποιήματα που τα γράμματα κάθε λέξεις είναι και ένα ψηφίο του **π**.

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$$

Ο Πλάτων έλεγε: Αεί Θεός γεωμετρεί και ο Πλούταρχος αναφέρει στο έργο του Ερωτήσεις "Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν. Από αυτή τη φράση προκύπτει ο μνημονικός κανόνας "Αεί ο Θεός ο μέγας γεωμετρεί" όπου ο αριθμός των γραμμάτων μας δίνει τα 5 δεκαδικά ψηφία (3,14159).

Αεί = 3, ο = 1, Θεός = 4, ο =1, μέγας = 5, γεωμετρεί = 9.

Αργότερα, αρχές του 20^{ου} αιώνα από τον **Νικόλαο Χατζηδάκη**, ιδρυτικό μέλος της ΕΜΕ, χρησιμοποιήθηκε μεγαλύτερη πρόταση για 23 ψηφία: *«Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν, φευ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι»*. Βέβαια ο καθένας μπορεί να δημιουργήσει το δικό του μνημονικό κανόνα, εγώ έγραψα το δικό μου μνημονικό κείμενο για τα 32 ψηφία του **π** το 33 είναι 0, κάνετε και σεις το ίδιο. **«***Εάν ο νους ο απλός πλησιάσει το σύμπαν πάντα στη μνήμη κρύβεται Πυθαγόρας Έλληνας Επιστήμων. Εάν με νέα δεκαδικά τώρα μπλέξω θα χαλάσω πολύ και όχι σκοτεινή ύλη σε άσκοπες μηδενικές αξίες = 3,14159265358979’323846264 33832795***».**

Οι Ιάπωνες διαπρέπουν στην απομνημόνευση, ίσως τους έχει συνηθίσει σε αυτό το εκπαιδευτικό τους σύστημα. Στο παρελθόν βέβαια οι Ιάπωνες μάθαιναν απ' έξω τον **Κομφούκιο**, οι Ινδοί δεκάδες χιλιάδες στίχους από τις **ιερές βέδες**, οι Κρητικοί ήξεραν απ' έξω τον **Ερωτόκριτο**, ακόμα και οι αοιδοί έσωσαν τα ομηρικά έπη τα οποία αποστήθιζαν και έτσι απαγγέλλοντάς τα περνούσαν από στόμα σε στόμα στις επόμενες γενιές. Η μνήμη είναι χρήσιμη για τη διάδοση της προφορικής παράδοσης στη θρησκεία, την ποίηση, τον πολιτισμό. Η απομνημόνευση των αριθμών του π είναι για ορισμένους **μια γυμναστική για το μυαλό** απαραίτητη μάλλον σε μια εποχή που κυριαρχούν οι ηλεκτρονικές μνήμες και η μνήμη μας ατροφεί.

Akira Haraguchi

Πριν 5 χρόνια ο 59 ετών Ιάπωνας **Akira Haragutsi** απομνημόνευσε και απήγγειλε επί δεκατρείς ώρες τα πρώτα 83.434 δεκαδικά ψηφία του **π**. Αυτό ίσως αποτελεί απόδειξη της ανθρώπινης ικανότητας - και της ανθρώπινης ματαιοδοξίας. Οι άνθρωποι γνωρίζουν τον αριθμό **π** εδώ και χιλιάδες χρόνια, ενώ εμφανίζεται ακόμη και στην Αγία Γραφή, αλλά και σε αρχαίους πολιτισμούς. Οι Βαβυλώνιοι, οι αρχαίοι Έλληνες, οι Κινέζοι, έκαναν προσπάθειες για τον υπολογισμό του **π**.

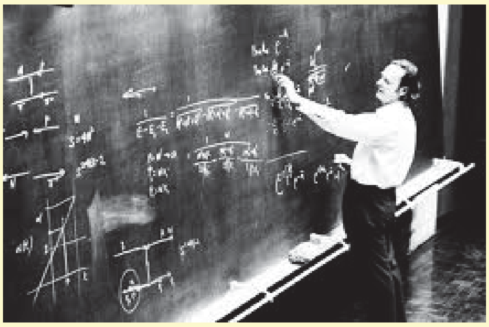
Τα πρώτα 50 δεκαδικά ψηφία του **π** είναι:

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971.

Αξίζει να δούμε τι είπε για τον **π** ένας σπουδαίος επιστήμονας ο **Richard Feynman**.

(...) Δεν μπορώ να το εξηγήσω καλά, διότι αφορά περισσότερο μια αίσθηση παρά κάτι περιγράψιμο. Ο λόγος του ενός μήκους προς το άλλο έχει κάποια θαυμαστή ιδιότητα. Είναι γεμάτος μυστήριο ο αριθμός **π**. Δεν μπορούσα να καταλάβω τι έκρυβε ο αριθμός αυτός. Αλλά μου φαινόταν ότι επρόκειτο για ένα πολύ σπουδαίο πράγμα, με αποτέλεσμα να ψάχνω παντού για τον **π**. Μια μέρα, λοιπόν, εκεί που ξεφύλλιζα τα βιβλία, βρίσκω τον τύπο $2\pi\sqrt{LC}$ ο οποίος έδινε τη συχνότητα συντονισμού ενός κυκλώματος, όπου L είναι η αυτεπαγωγή και C η χωρητικότητα του κυκλώματος. Νάτος πάλι ο **π**, μα ο κύκλος πουθενά. Τότε σκέφτηκα μήπως επειδή τα πηνία φτιάχνονται με κύκλους; Διαψεύστηκα γρήγορα όταν βρήκα ένα άλλο βιβλίο, το οποίο έδινε αυτεπαγωγή των κυκλικών και τετραγωνικών πηνίων με τύπους στους οποίους υπήρχε ο **π**. Άρχισα πάλι να σκέφτομαι, και κατέληξα ότι η ύπαρξη του π σε αυτούς τους τύπους δεν οφειλόταν στα κυκλικά πηνία. Σήμερα το καταλαβαίνω καλύτερα, **αλλά ακόμη δεν μπορώ** να νιώσω που είναι αυτός ο κύκλος, από πού προέρχεται το **π** (...)»[1]

Η ημέρα εορτασμού του **π** δεν είναι μια απλή γιορτή, αντιπροσωπεύει την πρόοδο που έχει πετύχει οι ανθρωπότητα μέσω των αριθμών. Ο άνθρωπος, με την **παγκόσμια γλώσσα των Μαθηματικών**, με την ενιαία γραφή των αριθμών, κατάφερε στον 21^{ο} αιώνα να έχει επιλύσει προβλήματα που για χιλιάδες χρόνια προβλημάτιζαν τον άνθρωπο. Κατάφερε να ερμηνεύσει τη δομή της ζωής και του Σύμπαντος. Η έννοια αριθμός έπαιξε σημαντικό ρόλο στη ζωή και την εξέλιξη του ανθρώπου. Το μεγαλύτερο κατόρθωμα του ανθρώπου είναι ότι απέκτησε την ικανότητα της μέτρησης και να εκφράζεται με αριθμούς. Κατά το παρελθόν κάθε λαός είχε τη δική του γραφή των αριθμών, άλλη γραφή οι Αιγύπτιοι, άλλη οι Φοίνικες, άλλη οι Ινδοί, άλλη οι Μάγια, άλλη οι Κινέζοι, άλλη οι Ρωμαίοι, άλλη οι Έλληνες. Χρειάστηκαν πολλά χρόνια για να γράψει ο άνθρωπος έναν αριθμό και ακόμα περισσότερα να φτάσει στην σημερινή Αραβική γραφή των αριθμών, με τις πράξεις και τα αριθμητικά συστήματα. Το πιο δύσκολο ήταν να συμπεριλάβει στα ψηφία και σύμβολο για το μηδέν.



Μεταξύ 9^{ου} και 11^{ου} αιώνα μ.Χ. οι Άραβες έμποροι μετέφεραν το μηδέν και το δεκαδικό σύστημα, από τους Ινδούς μέσω της Ισπανίας στην Ευρώπη. Στην αρχή οι Ευρωπαίοι εναντιώθηκαν στη χρήση της δεκαδικής γραφής, γιατί δεν έδινε εύκολο τρόπο γραφής των κλασμάτων. Όμως πολύ γρήγορα επικράτησε γιατί ήταν εύχρηστο στο εμπόριο. Τον 16ο αιώνα εμφανίζονται οι δεκαδικοί (δεκαδικά κλάσματα) και το 1717 εισάγεται η **υποδιαστολή** από τον **John Napier**.

Σήμερα όλοι σχεδόν οι άνθρωποι μετράμε με το δεκαδικό σύστημα, γιατί απλά έχουμε 10 δάκτυλα, δηλαδή η θέση ενός ψηφίου καθορίζει την αξία του και αυτό χωρίς τέλος. Βέβαια παράλληλα με το δεκαδικό σύστημα χρησιμοποιούμε και λίγα από τα παλιά συστήματα, αλλά και νέα. Αυτά είναι: το **60δικό** (π.χ. στα λεπτά της ώρας, στον κύκλο), το **12δικό** (π.χ. στις ώρες της ημέρας, τους μήνες), το αρχαιοελληνικό, το Ρωμαϊκό και με την χρήση των Η/Υ ... το 2αδικό , 8δικό, 16αδικό.

Το σημαντικότερο βήμα για την εξέλιξη των συστημάτων γραφής είναι **η γλώσσα**. Η γλώσσα που ήταν ιδέα των **Σουμερίων** και ολοκληρώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες με την εισαγωγή των φωνηέντων στην αλφαβητική γραφή.

[1] Απόσπασμα διάλεξης που έδωσε ο **Richard Feynman**, το 1966, «***Η Χαρά της ανακάλυψης***», εκδόσεις Κάτοπτρο.

80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α,β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2$, να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 1$, έχουμε: $\qquad \alpha^2+\beta^2=x\alpha\beta \qquad (1)$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη της (1) διαδοχικά επί α και β, και πρόσθεση στη συνέχεια κατά μέλη των δύο σχέσεων που προκύπτουν, έχουμε:

$$\alpha^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\beta^3=x\alpha^2\beta+x\alpha\beta^2\Rightarrow\alpha^3+\beta^3+\alpha\beta(\alpha+\beta)=x\alpha\beta(\alpha+\beta)\xRightarrow{\alpha+\beta=1}\alpha^3+\beta^3=(x-1)\alpha\beta. \qquad (2)$$

Επομένως, έχουμε;
$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{(x-1)\alpha\beta}{x\alpha\beta}=\frac{x-1}{x}$$
και ομοίως
$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{x\alpha\beta}{(x-1)\alpha\beta}=\frac{x}{x-1}.$$

Επομένως η δεδομένη ισότητα γίνεται εξίσωση με άγνωστο το x:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}=\frac{13}{6}\Leftrightarrow 6\left[(x-1)^2+x^2\right]=13x(x-1)\Leftrightarrow 12x^2-12x+6=13x^2-13x$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=-2 \text{ (απορρίπτεται, αφού } x\geq 2) \text{ ή } x=3.$$

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y,ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύει:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$
$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1$.

Λύση

Είναι γνωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha>0$ ισχύει:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \ \text{ (με την ισότητα να ισχύει για } \alpha=1).$$

Θέτοντας τώρα όπου α το $x-2y+\omega$ και $2x-y+\omega$ στην προηγούμενη σχέση, προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\geq 2 \qquad (3)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\geq 2 \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}=2 \qquad (5)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}=2, \qquad (6)$$

οπότε $x-2y+\omega=1$ και $2x-y+\omega=1$ από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $x+y=0$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\omega^2-2\omega\geq -1 \Leftrightarrow (\omega-1)^2\geq 0$ (που ισχύει).

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α,β,γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β,

(ii) Ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και

(iii) Ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Λύση

Για να ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες πρέπει να υπάρχουν θετικοί ακέραιοι κ,λ,μ τέτοιοι ώστε να ισχύουν: $2\alpha-1=\kappa\beta,\ 2\beta-1=\lambda\gamma,\ \gamma-1=\mu\alpha$.

Από τις παραπάνω εξισώσεις λύνοντας ως προς α βρίσκουμε ότι:

$$2\alpha=\kappa\beta+1=\kappa\left(\frac{\lambda\gamma+1}{2}\right)+1=\kappa\left(\frac{\lambda(\mu\alpha+1)+1}{2}\right)+1\Rightarrow 4\alpha=\kappa\lambda\mu\alpha+\kappa\lambda+\kappa+2\Rightarrow\alpha=\frac{\kappa\lambda+\kappa+2}{4-\kappa\lambda\mu}.$$

Επομένως, μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι: $4-\kappa\lambda\mu>0\Leftrightarrow\kappa\lambda\mu<4$.

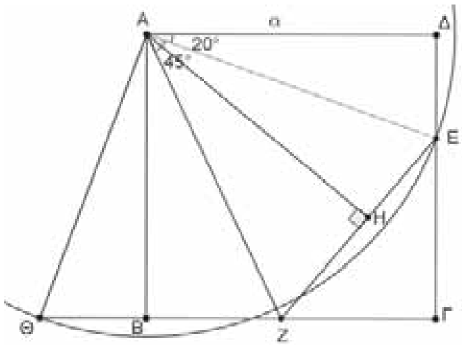
Οι κ,λ,μ είναι θετικοί ακέραιοι, αφού $2\alpha-1>0$, $2\beta-1>0$ και $\gamma-1>0$. Επιπλέον, οι κ,λ πρέπει να είναι περιττοί, όπως προκύπτει από τις δύο πρώτες εξισώσεις. Επομένως, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\kappa=\lambda=\mu=1$. Τότε $\alpha=\frac{4}{3}\notin\mathbb{Z}$, άτοπο.
- $\kappa=\lambda=1,\ \mu=2$. Τότε: $\alpha=2,\gamma-1=2\alpha=4,2\beta-1=\gamma\Rightarrow\alpha=2,\gamma=5,\beta=3\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(2,3,5)$
- Τότε: $\alpha=8,\gamma-1=\alpha,2\beta-1=\gamma\Rightarrow\alpha=8,\gamma=9,2\beta=10\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(8,5,9)$.
- $\kappa=1,\lambda=3,\mu=1$. Τότε: $\kappa=3,\lambda=\mu=1$.

  $\alpha=6,\gamma-1=\alpha,2\beta-1=3\gamma\Rightarrow\alpha=6,\gamma=7,2\beta=22\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(6,11,7)$.
- $\kappa=\lambda=1,\mu=3$. Τότε: $\alpha=4,\gamma-1=3\alpha,2\beta-1=\gamma\Rightarrow\alpha=6,\gamma=13,2\beta=14\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)=(4,7,13)$.

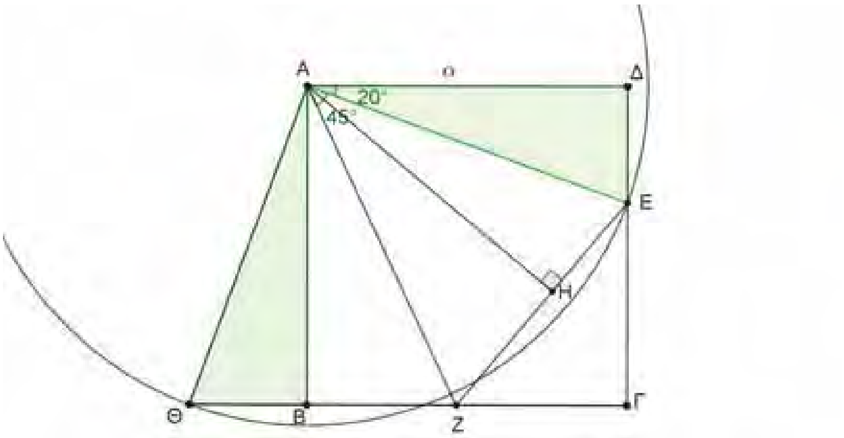
Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α.



Σημείωση: Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.

Λύση



Σχήμα 3

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΘ είναι ορθογώνια με $A\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Theta = 90^0$ και επιπλέον έχουν:

- $A\Delta = AB = \alpha$
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $B\hat{A}\Theta = \Delta\hat{A}E = 20^0$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $B\hat{A}Z = B\hat{A}\Delta - Z\hat{A}E - E\hat{A}\Delta = 90^0 - 45^0 - 20^0 = 25^0$, οπότε

$$\Theta\hat{A}Z = \Theta\hat{A}B + B\hat{A}Z = 20^0 + 25^0 = 45^0$$

Τα τρίγωνα ΑΘΖ και ΑΖΕ έχουν:

- $AZ = AZ$, κοινή πλευρά
- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου)
- $\Theta\hat{A}Z = 45^0 = Z\hat{A}E$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν: $Z\Theta = ZE$ και επιπλέον $A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z$.

Τέλος τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΗΕ είναι ορθογώνια με $A\hat{B}\Theta = A\hat{H}E = 90^0$ και έχουν:

- $AE = A\Theta$ (ακτίνες του κύκλου γ)
- $A\hat{\Theta}B = A\hat{\Theta}Z = A\hat{E}Z = A\hat{E}H$

Επομένως τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, οπότε θα έχουν και $AH = AB = \alpha$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1 - x_2| = 7$.

Λύση.

Έχουμε

$\frac{1}{\lambda(x+3)} + \frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)} = \frac{1}{x(3-x)} \Leftrightarrow x(3-x) + 6\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(x+3) \Leftrightarrow 3x - x^2 + 6\lambda^2 - \lambda x - 6\lambda = 0$, $x \neq 0, \pm3$

$$\Leftrightarrow x^2 + (\lambda - 3)x + 6\lambda - 6\lambda^2 = 0, \ x \neq 0, \pm3.$$

Η τελευταία έχει διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4(6\lambda - 6\lambda^2) = 25\lambda^2 - 30\lambda + 9 = (5\lambda - 3)^2 \geq 0$

και για $\lambda \neq \frac{3}{5}$, έχει δυο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους $x_1 = 2\lambda$, $x_2 = 3 - 3\lambda$.

Λόγω του περιορισμού: $x_1 \neq 0, \pm3$, οπότε $\lambda \neq 0$, $\pm\frac{3}{2}$ και $x_2 \neq 0, \pm3$, οπότε $\lambda \neq 0, 1, 2$.

Επομένως, για $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0, 1, 2, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right\}$, πρέπει να ισχύει: $|x_1 - x_2| = 7 \Leftrightarrow |5\lambda - 3| = 7 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (απορρίπτεται) ή $\lambda=-\frac{4}{5}$, οπότε η ζητούμενη τιμή είναι $\kappa=-\frac{4}{5}$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x,y)=x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7$, $x,y\in\mathbb{R}$.

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy=1$, $x,y>0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
P(x,y)&=x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7\\
&=x\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)+y\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)\\
&=\left(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\right)(x+y)=\left[x^4\left(x^2+y^2\right)+y^4\left(x^2+y^2\right)\right](x+y)\\
&=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)=\left(x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\\
&=\left[\left(x^2+y^2\right)^2-\left(\sqrt{2}xy\right)^2\right]\left(x^2+y^2\right)(x+y)=\left(x^2+y^2+\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2-\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y).
\end{aligned}$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση $P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)$.

Θεωρώντας $xy=1$, $x,y>0$, έχουμε τις ανισότητες: $x^4+y^4\geq 2x^2y^2=2$ (η ισότητα ισχύει όταν $x=y=1$),

$x^2+y^2\geq 2xy=2$ (η ισότητα ισχύει όταν $x=y=1$),

$x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$ (η ισότητα ισχύει όταν $x=y=1$),

από τις οποίες με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε $P(x,y)=\left(x^4+y^4\right)\left(x^2+y^2\right)(x+y)\geq 8$, όπου η ισότητα ισχύει για $x=y=1$.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- **Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.**
- **Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.**
- **Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.**

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 21 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 26 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{10\alpha+5\beta+5\gamma}{20}=30 \\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20 \\ \dfrac{5\gamma+5\delta+5\varepsilon}{15}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta+\gamma=120 & (1) \\ \beta+\gamma+\delta=60 & (2) \\ \gamma+\delta+\varepsilon=30 & (3) \end{cases}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma=10\alpha+5\beta+5\gamma+5\delta+5\varepsilon=5\cdot\left[(2\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+\varepsilon)-\gamma\right]=5(150-\gamma). \quad (4)$$

Από την (3) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{max}=30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=30,\ \delta+\varepsilon=0$, με μία πιθανή λύση $\alpha=45,\ \beta=30,\ \delta=\varepsilon=0$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $2\alpha+\beta=120,\ \beta+\delta=60,\ \delta+\varepsilon=30$ με μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=40,\ \delta=20,\ \varepsilon=10$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε: $\Sigma_{min}=5(150-\gamma_{max})=5(150-30)=600$,

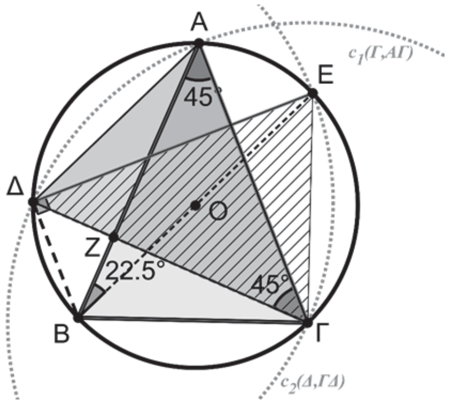
$$\Sigma_{max}=5(150-\gamma_{min})=5(150-0)=750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma=5(150-20)=650$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\widehat{A}=45°$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma,A\Gamma)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\Delta,\Gamma\Delta)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Ε. Αν η ΓΔ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι τα σημεία B,O,E είναι συνευθειακά και ότι η ΟΖ είναι παράλληλη στην ΔΕ.

Λύση



Σχήμα 4

Από την εκφώνηση του προβλήματος ισχύουν οι παρακάτω ισότητες ευθυγράμμων τμημάτων: ΑΒ = ΑΓ (ΑΒΓ ισοσκελές), ΓΔ = ΑΓ (ακτίνες του κύκλου c_1) και ΓΔ = ΔΕ (ακτίνες του κύκλου c_2)

Από τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $AB=A\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta E$ (1).

Ισχύουν επίσης οι ισότητες γωνιών: $A\hat{\Gamma}B=A\hat{B}\Gamma=\Gamma\hat{\Delta}A=\Delta\hat{A}\Gamma=\Delta\hat{E}\Gamma$ (2)

Επομένως τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ,. ΓΔΑ και ΔΓΕ είναι ίσα, οπότε θα είναι:

$$\Gamma\hat{\Delta}E=\Delta\hat{\Gamma}A=B\hat{A}\Gamma=45^0.$$

Επομένως, είναι $A\hat{B}E=A\hat{B}\Gamma-E\hat{B}\Gamma=67{,}5^0-45^0=22{,}5^0$ και επιπλέον ισχύει:

$$A\hat{B}O=\frac{180^0-A\hat{O}B}{2}=\frac{180^0-135^0}{2}=22{,}5^0$$

Από την ισότητα $A\widehat{B}E=A\widehat{B}O$, συμπεραίνουμε ότι τα σήμεια B,O,E είναι συνευθειακά.

Αφού τα σημεία B,O,E είναι συνευθειακά, η γωνία ΒΔΕ είναι ορθή, οπότε: $\Delta B\perp\Delta E$. Επίσης $B\hat{\Delta}Z=\Delta\hat{B}Z=45^0\Rightarrow$Ζ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΔ, οπότε $\Delta B\perp OZ$. Από τις καθετότητες $\Delta B\perp\Delta E$ και $\Delta B\perp OZ$, συμπεραίνουμε $\Delta E /\!/ OZ$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_n, n=1,2,3,\ldots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}$, $n=1,2,3,\ldots$ να ικανοποιεί την ισότητα $M_{n+1}=\dfrac{M_n+M_{n+2}}{2}$, για κάθε $n=1,2,3,\ldots$ Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n, n=1,2,3,\ldots$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε $M_{n+2}-M_{n+1}=M_{n+1}-M_n$, για κάθε $n=1,2,3,\ldots$, οπότε η ακολουθία

$$M_n=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n},\ n=1,2,3,\ldots \text{ είναι αριθμητική πρόοδος.}$$

Επομένως, υπάρχει $\omega\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε: $M_n=M_1+(n-1)\omega=\alpha_1+(n-1)\omega,\ \ n=1,2,3,\ldots$ (1)

Από τον ορισμό της ακολουθίας M_n έχουμε:

$$nM_n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+\alpha_n$$

$$(n-1)M_{n-1}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $\alpha_n=nM_n-(n-1)M_{n-1}$.

Από την τελευταία σχέση, λόγω της (1), λαμβάνουμε:

$$\alpha_n=nM_n-(n-1)M_{n-1}=n\left[\alpha_1+(n-1)\omega\right]-(n-1)\left[\alpha_1+(n-2)\omega\right]$$

$$\Rightarrow \alpha_n=\alpha_1+\left[n(n-1)-(n-1)(n-2)\right]\omega=\alpha_1+(2n-2)\omega=\alpha_1+(n-1)\cdot 2\omega.$$

Επομένως η ακολουθία $\alpha_n, n=1,2,3,\ldots$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά 2ω.

Πρόβλημα 2

Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- **Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.**
- **Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.**
- **Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.**

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.

(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Λύση

(α) Επειδή στα δεδομένα χρονικά διαστήματα υπάρχουν κοινές μέρες θεωρούμε τους μέσους όρους των σελίδων που διαβάστηκαν σε κατάλληλα υποδιαστήματα ως εξής:

- από τις 1 μέχρι και τις 5 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν α,
- από τις 6 μέχρι και τις 10 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν β,
- από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν γ,
- από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν δ,
- από τις 21 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν ε.

Τότε, σύμφωνα με τους δεδομένους μέσους όρους, θα έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{5\alpha+5\beta+5\gamma}{15}=10\\ \dfrac{5\beta+5\gamma+5\delta}{15}=20\\ \dfrac{5\gamma+5\delta+10\varepsilon}{20}=30\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=30\\ \beta+\gamma+\delta=60\\ \gamma+\delta+2\varepsilon=120\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Αν Σ είναι ο αριθμός των σελίδων του βιβλίου, τότε λόγω των (1) και (3), θα έχουμε:

$$\Sigma = 5\alpha + 5\beta + 5\gamma + 5\delta + 10\varepsilon = 5\cdot\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\gamma+\delta+2\varepsilon)-\gamma\right] = 5(150-\gamma). \quad (4)$$

Από την (1) προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{max} = 30$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=0,\ \beta+\delta=30,\ \delta+2\varepsilon=90$, και μία πιθανή λύση $\alpha=\beta=0,\ \ \delta=30,\ \varepsilon=45$.

Επιπλέον, η μικρότερη δυνατή τιμή του γ είναι $\gamma_{min}=0$, η οποία μπορεί να ληφθεί, αν πάρουμε $\alpha+\beta=30,\ \beta+\delta=60,\ \delta+2\varepsilon=120$ και μία πιθανή λύση $\alpha=10,\ \beta=20,\ \ \delta=40,\ \varepsilon=40$.

Επομένως, από τη σχέση (4) έχουμε: $\Sigma_{min} = 5(150-\gamma_{max}) = 5(150-30) = 600$,

$$\Sigma_{max} = 5(150-\gamma_{min}) = 5(150-0) = 750.$$

(β) Αν δίνεται ότι $\gamma=10$, τότε $\Sigma = 5(150-10) = 700$.

Πρόβλημα 3.

Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα $P(x^2) = (P(x))^2 - 2P(x) + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η δεδομένη σχέση γράφεται στη μορφή
$$P(x^2) - 1 = (P(x)-1)^2, \quad (1)$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε, αν θέσουμε $Q(x) = P(x) - 1$, έχουμε:
$$Q(x^2) = (Q(x))^2, \quad (2)$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

(α) Το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $Q(x) = c$. Τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $c = c^2 \Leftrightarrow c = 0$ ή $c = 1$, οπότε $P(x) = 1$ ή $P(x) = 2$.

(β) Το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό $n \geq 1$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:
$$Q(x) = \alpha_n x^n + R(x),\ \alpha \neq 0,\ \ \text{όπου } \deg R(x) = r \leq n-1 \text{ ή } R(x) = 0. \quad (3)$$

Αν $R(x) \neq 0$, από τη σχέση (2) έχουμε:
$$\alpha_n x^{2n} + R(x^2) = \alpha_n^2 x^{2n} + 2\alpha_n x^n R(x) + (R(x))^2 \Leftrightarrow \alpha_n = 1 \text{ και } R(x^2) = 2\alpha_n x^n R(x) + (R(x))^2.$$

Συγκρίνοντας τους βαθμούς των πολυωνύμων των δυο μελών της τελευταίας σχέσης, παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο του πρώτου μέλους της έχει βαθμό $2r$, ενώ το πολυώνυμο του δευτέρου μέλους της έχει βαθμό $n+r$, οπότε πρέπει $r=n$, άτοπο. Επομένως είναι $R(x)=0$ και $Q(x) = x^n \Rightarrow P(x) = x^n + 1, n \geq 1$.

Επομένως, τα πολυώνυμα που ζητάμε είναι: $P(x) = 1$ ή $P(x) = 2$ ή $P(x) = x^n + 1,\ n \geq 1$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του Δ βρίσκεται επάνω στην ΒΓ και περνά από τα σημεία Β,Ο. Ο κύκλος c_1 τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε και τον κύκλο c στο σημείο Ζ. Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΟΔΕ, $c_2(O,\Delta,E)$ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Δ,Z,O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΟΚ.

Λύση

Η ΟΔ είναι διάκεντρος των κύκλων c και c_1, άρα θα είναι μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής ΒΖ. Δηλαδή η ΟΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BOZ}$ του ισοσκελούς τριγώνου ΒΟΖ. Άρα: $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \hat{x}$.
Η γωνία $\widehat{A}_1$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο c με αντίστοιχη επίκεντρη την γωνία $\widehat{BOZ}$, οπότε:
$$\widehat{A}_1 = \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 = \hat{x}.$$

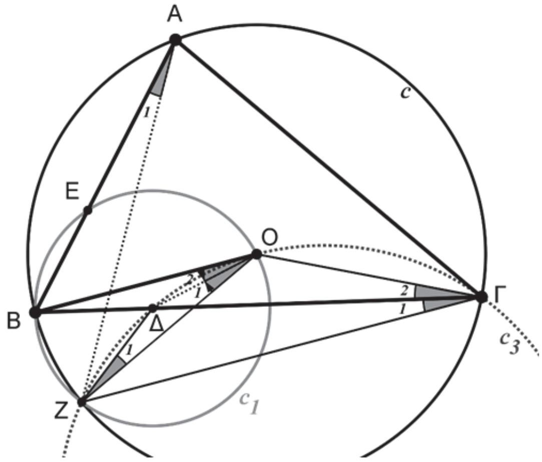
Οι γωνίες $\widehat{A}_1$ και $\widehat{\Gamma}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΖ, οπότε $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = \hat{x}$.

Από τις προηγούμενες ισότητες των γωνιών προκύπτει ότι $\widehat{O}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = \hat{x}$, οπότε τα σημεία Γ, Δ, Z, O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο (έστω c_3).

Επί πλέον ισχύουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

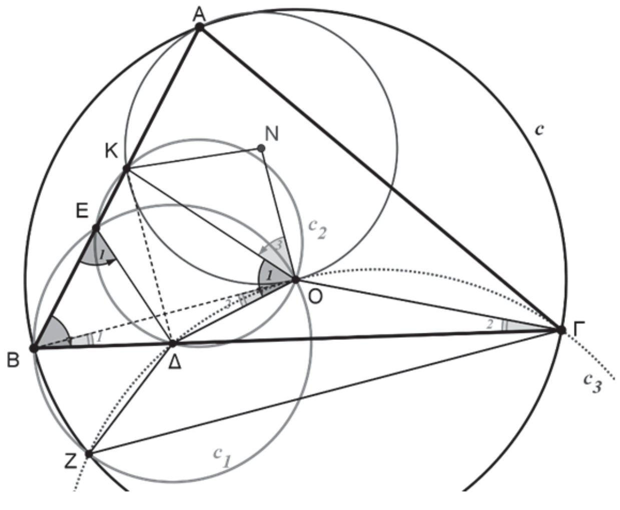
Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΟΖ έχουμε: $\widehat{O}_1 = \widehat{Z}_1 = \hat{x}$.
Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΓΟΔΖ έχουμε: $\widehat{Z}_1 = \widehat{\Gamma}_2 = 90° - \widehat{A} = \hat{x}$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΟΖ ισχύει $\widehat{\Gamma O Z} = \widehat{O\Gamma Z} = 2\hat{x}$, άρα ΟΒ ∥ ΓΖ.



Σχήμα 5

Εφόσον το τρίγωνο ΓΟΖ είναι ισοσκελές το κέντρο του κύκλου c_3 θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΓΖ. Αν τώρα συμβολίσουμε με Ν το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΟΚ, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΟΝ ⊥ ΓΖ ή ισοδύναμα ΟΝ ⊥ ΟΒ.



Σχήμα 6

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΝΟΚ έχουμε:

$$\widehat{O}_3 = 90° - \frac{\widehat{KNO}}{2} = 90° - \widehat{KAO} = 90° - \widehat{BAO} = 90° - (90° - \widehat{\Gamma}) = \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{O}_3 = \widehat{\Gamma}.$$

Ισχύει: $\widehat{O}_2 = \widehat{\Gamma}_2 = \hat{x} = 90° - \widehat{A} \Rightarrow \widehat{O}_2 = 90° - \widehat{A}$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΟΔΕΚ έχουμε: } \widehat{O}_1 = \widehat{E}_1 \\ \text{Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔΒΕ έχουμε: } \widehat{E}_1 = \widehat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{B}.$$

Άρα έχουμε: $\widehat{NOB} = \widehat{O}_3 + \widehat{O}_1 - \widehat{O}_2 = \widehat{\Gamma} + \widehat{B} - 90° + \widehat{A} = 90°$.

$37^{η}$ ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ
«Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»

ΣΑΒΒΑΤΟ 22 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2020

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλα τα μη σταθερά πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα: $P\left((Q(x))^3\right)=xP(x)(Q(x))^3$.

Λύση

Έστω ότι: $\deg P(x)=m\geq 1,\ \deg Q(x)=n\geq 1$. Θεωρώντας τους βαθμούς των δύο μελών της δεδομένης σχέσης, λαμβάνουμε την ισότητα:

$$3mn=1+m+3n\Leftrightarrow (m-1)(3n-1)=2\Leftrightarrow m-1=1, 3n-1=2 \text{ ή } m-1=2,\ 3n-1=1 (\text{αδύνατη στο } \mathbb{N}^*)$$

$$\Leftrightarrow m=2,\ n=1.$$

Έστω ότι $P(x)=\alpha x^2+bx+c, \alpha,b,c\in\mathbb{R}, \alpha\neq 0,\ Q(x)=dx+e, d,e\in\mathbb{R}, d\neq 0$. Τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται:

$$\alpha\left((Q(x))^3\right)^2+b(Q(x))^3+c=xP(x)(Q(x))^3, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει ότι το μη σταθερό πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρεί το σταθερό πολυώνυμο c, οπότε $c=0$. Τότε από τη σχέση (1) λαμβάνουμε:

$$\alpha\left((Q(x))^3\right)^2+b(Q(x))^3-xP(x)(Q(x))^3=0\Leftrightarrow (Q(x))^3\left(\alpha(Q(x))^3+b-xP(x)\right)$$

$$\overset{Q(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow}\alpha(Q(x))^3+b-xP(x)=0\ xP(x)=\alpha(Q(x))^3+b \qquad (2)$$

Η σχέση (2) γίνεται: $x\left(\alpha x^2+bx\right)=\alpha(dx+e)^3+b\Leftrightarrow \alpha x^3+bx^2=\alpha d^3x^3+3\alpha d^2ex^2+3\alpha de^2x+\alpha e^3+b$

$$\Leftrightarrow \alpha=\alpha d^3,\ b=3\alpha d^2e,\ 3\alpha de^2=0,\ \alpha e^3+b=0\overset{\alpha,d\neq 0}{\Longleftrightarrow} d=1,\ e=0,\ b=0,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Άρα είναι: $P(x)=\alpha x^2,\ Q(x)=x,\ \alpha\in\mathbb{R}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και πάνω σε αυτό σημείο Γ τέτοιο ώστε $AB=3\cdot A\Gamma$. Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο ΑΓΔΕ τέτοιο ώστε $A\Gamma=\Delta E=\Gamma E>AE$. Θεωρούμε σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε $A\hat{E}Z=A\hat{\Gamma}E=\omega$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Β προς την ευθεία ΕΓ και η κάθετη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ, πάνω στην ευθεία ΕΖ.

Λύση

Αν $A\hat{\Gamma}E=\omega$, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΘΒ έχουμε: $\Gamma\hat{B}\Theta=90^0-B\hat{\Gamma}\Theta=90^0-\omega$, (1)

αφού $B\hat{\Gamma}\Theta=A\hat{\Gamma}E=\omega$, ως κατά κορυφή και επιπλέον $B\hat{H}K=90^0$, με συνέπεια $\Gamma\hat{B}\Theta+B\hat{H}K=90^0-\omega+90^0=18\hat{0}-\omega<180^0$, οπότε οι ευθείες ΒΘ και ΔΗ τέμνονται σε σημείο, έστω Κ. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

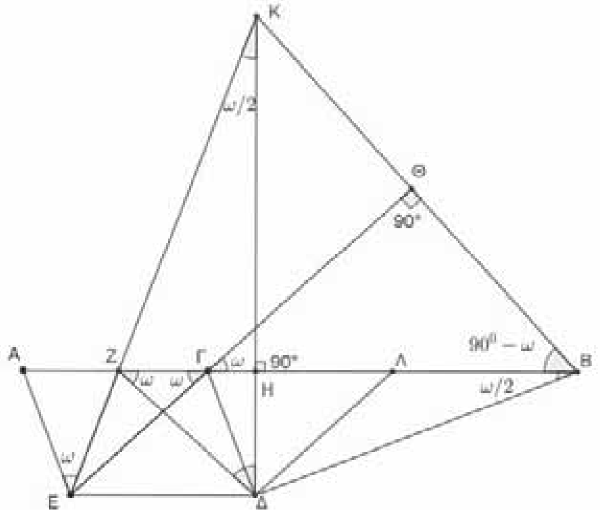
Παρατηρούμε τώρα ότι το τετράπλευρο ΕΔΓΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού $E\Delta\parallel Z\Gamma$ και $ZE=AE=\Gamma\Delta$. Πράγματι, τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΓΕ έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και $A\hat{E}Z=A\hat{\Gamma}E=\omega$, οπότε είναι ισογώνια. Άρα και το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισοσκελές με $A\hat{Z}E=E\hat{A}Z$, οπότε: $AE=ZE$.

Από το ισοσκελές τραπέζιο ΕΔΓΖ έχουμε ότι:

$$E\hat{Z}\Gamma=Z\hat{\Gamma}\Delta=180^0-\Gamma\hat{A}E=180^0-\left(\frac{180^0-\omega}{2}\right)=90^0+\frac{\omega}{2}. \qquad (2)$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ είναι $Z\hat{\Delta}H = 90^0 - \Delta\hat{Z}H = 90^0 - \omega.$ (3)

Από τις (1) και (3) έπεται ότι το τετράπλευρο ΒΔΖΚ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 1

Θεωρούμε το μέσο Λ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ και παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΕΔΛΓ έχει $E\Delta \parallel \Gamma\Lambda$, $\Gamma E = \Delta E = A\Gamma = \Gamma\Lambda$, αφού $A\Gamma = \frac{1}{3}\cdot AB$ και Λ μέσον ΓΒ. Άρα το τετράπλευρο ΕΔΛΓ είναι ρόμβος. Επομένως έχουμε $\Lambda\hat{\Gamma}\Delta = \omega$ και επιπλέον $\Delta\Lambda = \Lambda\Gamma = \Lambda B = \frac{\Gamma B}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΓΔΒ είναι ορθογώνιο στο Δ και από το ισοσκελές τρίγωνο ΛΔΒ έχουμε: $\Delta\hat{B}\Lambda = \frac{\omega}{2}$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΒΔΖΚ έχουμε: $Z\hat{K}\Delta = \Delta\hat{B}Z = \Delta\hat{B}\Lambda = \frac{\omega}{2}$, (4)

οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΚ και τη σχέση (4) έπεται ότι: $\Gamma\hat{Z}K = H\hat{Z}K = 90^0 - \frac{\omega}{2}$ (5)

Από τις σχέσεις (2) και (5) έπεται ότι: $E\hat{Z}\Gamma + \Gamma\hat{Z}K = 90^0 + \frac{\omega}{2} + 90^0 - \frac{\omega}{2} = 180^0$, οπότε τα σημεία Α, Ε και Κ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

Στον πίνακα είναι γραμμένοι σε μία ευθεία οι ακέραιοι από το 1 μέχρι και το 2030 σε αύξουσα σειρά. Έχουμε το δικαίωμα της «κίνησης» Κ:

Επιλέγουμε δύο οποιουσδήποτε αριθμούς α, β που είναι γραμμένοι σε διαδοχικές θέσεις και αντικαθιστούμε το ζευγάρι (α, β) με τον αριθμό $(\alpha - \beta)^{2020}$.

Εκτελούμε την κίνηση Κ αρκετές φορές μέχρι που να μείνει στον πίνακα μόνο ένας αριθμός. Να εξετάσετε, αν είναι δυνατόν να είναι ο αριθμός αυτός: (α) ο 2020^{2020}, (β) ο 2021^{2020}.

Λύση

(α) Πρώτα από όλα παρατηρούμε τα εξής:

Σε οποιαδήποτε κίνηση Κ, οι αριθμοί $\alpha + \beta$ και $(\alpha - \beta)^{2020}$ είναι ισοϋπόλοιποι modulo 2, δηλαδή είναι και δύο άρτιοι ή είναι και οι δύο περιττοί. Επομένως μετά την αντικατάσταση των α, β από τον αριθμό $(\alpha - \beta)^{2020}$ δεν μεταβάλλεται το άρτιο ή το περιττό του αθροίσματος των αριθμών που είναι γραμμένοι στον πίνακα. Επειδή $S_{2030} = \frac{2030 \cdot 2031}{2} = 1015 \cdot 2031$ περιττός, έπεται ότι μετά την τελευταία κίνηση ο μοναδικός αριθμός που θα απομείνει θα πρέπει να είναι περιττός, οπότε η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι αρνητική.

(β) Έστω ότι οι δύο τελευταίοι αριθμοί που έχουν μείνει είναι οι x, y. Τότε η μόνη περίπτωση να μην είναι κάποιος από αυτούς δύναμη του 2020 είναι να μην έχει λάβει μέρος ως τώρα στη διαδικασία. Αυτό μπορεί να έχει συμβεί μόνο με τους αριθμούς στην άκρη, δηλαδή τον 1 και τον 2030. Επειδή ο 1 είναι 1^{2020}, αρκεί να ελέγξουμε για τον 2030. Δηλαδή αν $x=\alpha^{2020}$ και $y=2030$, τότε πρέπει $(\alpha^{2020}-2030)^{2020}=2021^{2020}$. Για $\alpha=1$ δεν έχει λύση, οπότε για $\alpha\geq 2$ παίρνουμε $\alpha^{2020}=4051$, αδύνατο. Σε κάθε άλλη περίπτωση, από τη διαδικασία θα έχουμε ότι $x=(\alpha_1-b_1)^{2020}=m^{2020}$ και $y=(\alpha_2-b_2)^{2020}=n^{2020}$, για κάποια m και n. Κάνοντας την τελευταία πράξη, στον πίνακα προκύπτει ο αριθμός $(m^{2020}-n^{2020})^{2020}$. Θέλουμε τώρα να δούμε αν μπορεί να ισχύει: $(m^{2020}-n^{2020})^{2020}=2021^{2020}$.

Αν $m=n$, δεν ισχύει. Θεωρούμε χωρίς βλάβη ότι $m>n$. Τότε θέλουμε να δούμε, αν μπορεί να ισχύει

$$m^{2020}-n^{2020}=2021. \qquad (1)$$

Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $m^{2020}-n^{2020}$ είναι η τιμή 1, για $m=1, n=0$.

Από την (1) έχουμε ότι $m>n$, οπότε $m\geq n+1$. Επομένως $m^{2020}-n^{2020}\geq(n+1)^{2020}-n^{2020}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία βλέπουμε ότι όλες οι δυνάμεις του n έχουν θετικό συντελεστή, οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως $m^{2020}-n^{2020}\geq(n+1)^{2020}-n^{2020}\geq 2^{2020}-1>2^{11}-1=2047$

οπότε δεν μπορεί ποτέ να ισούται με 2021.

Σημείωση: Για να αποδείξουμε ότι η (1) δεν έχει λύση, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής:

Για $k=m^{505}, \lambda=n^{505}$ η (1) γίνεται: $k^4-\lambda^4=2021=43\cdot 47 \Leftrightarrow (k-\lambda)(k+\lambda)(k^2+\lambda^2)=43\cdot 47$, οπότε $k^2+\lambda^2=47$, που δεν έχει λύσεις.

Πρόβλημα 4

Να βρεθούν όλες τις τιμές του θετικού ακεραίου κ που ικανοποιούν την ιδιότητα: Δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α,β ώστε η παράσταση $A(\kappa,\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\kappa^2\beta^2-\kappa^2\alpha\beta}$ να είναι ένας σύνθετος θετικός ακέραιος.

Λύση

Σταθεροποιούμε $\kappa>1$. Η ιδέα για τη λύση της άσκησης είναι να βρούμε α,β συναρτήσει του κ ώστε ο παρονομαστής να ισούται με 1. Με άλλα λόγια ζητάμε πολυώνυμα $\alpha=P(\kappa)$, $\beta=Q(\kappa)$ τέτοια, ώστε

$$P(\kappa)^2+\kappa^2Q(\kappa)^2-\kappa^2P(\kappa)Q(\kappa)=1.$$

$$P(\kappa)^2=\kappa^2Q(\kappa)\big(P(\kappa)-Q(\kappa)\big)+1 \qquad (1)$$

Αν τα πολυώνυμα έχουν βαθμούς $m=\deg P(\kappa), n=\deg)Q(\kappa)$ με $m>n\geq 0$, τότε από τη σχέση (1) πρέπει $2m=2+m+n \Leftrightarrow m=n+2$.

Θα ασχοληθούμε με την πιο απλή περίπτωση αναζητώντας, αν υπάρχουν, πολυώνυμα βαθμού 2 και 0, αντίστοιχα, που ικανοποιούν τη σχέση (1).

Με κατάλληλες αντικαταστάσεις βρίσκουμε ότι τα $P(\kappa)=\kappa^2-1, Q(\kappa)=1$ ικανοποιούν τη σχέση (1). Επιλέγουμε λοιπόν $\alpha=\kappa^2-1, \beta=1$ και τότε η παράσταση ισούται με $\dfrac{\kappa^2-1+1}{1}=\kappa^2$, που είναι σύνθετος για κάθε $\kappa>1$. Επομένως όλες οι τιμές του $\kappa>1$, δεν ικανοποιούν το πρόβλημα μας.

Για $\kappa=1$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει: $0<A(\alpha,\beta,\kappa)=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}\leq 2$, οπότε ο ρητός αριθμός $A(\alpha,\beta,1)$ δεν μπορεί να είναι σύνθετος θετικός ακέραιος για οποιεσδήποτε τιμές των α,β. Πράγματι, έχουμε $\alpha+\beta>0$ και $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)^2+\dfrac{3\beta^2}{4}>0$, και

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta}\leq 2 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-2\alpha\beta\geq\alpha+\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+\alpha^2-\alpha+\beta^2-\beta\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)\geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

Οι Λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 114

Α59. Αν α,β,γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma=2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}+\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\right).$$

(Λευκορωσία 2017)

Λύση

Από ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy – Schwarz έχουμε:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}\geq\frac{(\alpha+\beta-2)^2}{\beta+\gamma}\overset{\alpha+\beta+\gamma=2}{=}\frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}. \quad (1)$$

$$\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}+\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha}\geq\frac{(\beta+\gamma-2)^2}{\gamma+\alpha}\overset{\alpha+\beta+\gamma=2}{=}\frac{\alpha^2}{\gamma+\alpha}. \quad (2)$$

$$\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha}+\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}\geq\frac{(\gamma+\alpha-2)^2}{\alpha+\beta}\overset{\alpha+\beta+\gamma=2}{=}\frac{\beta^2}{\alpha+\beta}. \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}+\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha}\geq\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha+\beta}\right). \quad (4)$$

Όμως έχουμε

$$\left(\frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha+\beta}\right)-\left(\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta}\right)=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha+\beta}$$
$$=(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)+(\beta-\alpha)=0,$$

οπότε η σχέση (4) γίνεται:

$$\frac{(\alpha-1)^2}{\beta}+\frac{(\beta-1)^2}{\gamma}+\frac{(\gamma-1)^2}{\alpha}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{\gamma^2+\beta^2}{\beta+\gamma}+\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha+\beta}\right).$$

Δ22. Ο Γιώργος γράφει μία ακολουθία τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Σε κάθε βήμα θεωρεί το τριώνυμο που είχε γράψει στο προηγούμενο μήνυμα, έστω $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και προχωράει γράφοντας ένα από τα τριώνυμα $\gamma x^2+\beta x+\alpha$ και $\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma$, για κάποιο πραγματικό αριθμό δ. Αρχίζοντας από το τριώνυμο x^2-2x-1, να εξετάσετε αν είναι δυνατόν μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων να λάβει τα επόμενα τριώνυμα:

(α) $2x^2-1$, (β) $2x^2-x-1$. **(Κροατία 2018)**

Λύση

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα των τριωνύμων $\gamma x^2+\beta x+\alpha$ και $\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma$ ισούται με τη διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Πράγματι, το τριώνυμο $\gamma x^2+\beta x+\alpha$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, αλλά και το τριώνυμο

$$\alpha(x+\delta)^2+\beta(x+\delta)+\gamma=\alpha x^2+(2\alpha\delta+\beta)x+\alpha\delta^2+\beta\delta+\gamma$$

έχει διακρίνουσα ίση με

$$(2\alpha\delta+\beta)^2-4\alpha(\alpha\delta^2+\beta\delta+\gamma)=4\alpha^2\delta^2+4\alpha\beta\delta+\beta^2-4\alpha^2\delta^2-4\alpha\beta\delta-4\alpha\gamma=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

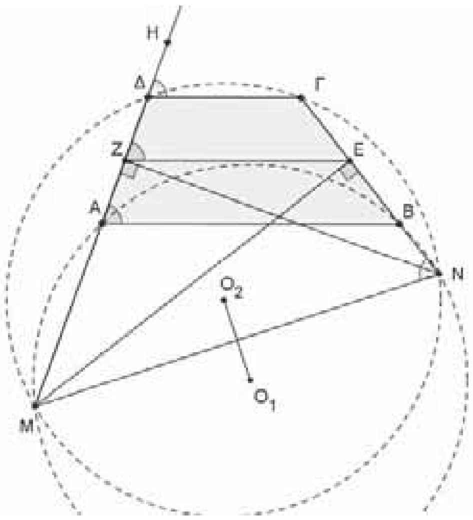
(α) Το τριώνυμο $2x^2-1$ έχει διακρίνουσα ίση με 8, όπως και το αρχικό τριώνυμο x^2-2x-1, οπότε είναι πιθανόν να προκύψει μετά από κάποιο αριθμό βημάτων από το αρχικό τριώνυμο. Πράγματι έχουμε:

$$x^2-2x-1 \to -x^2-2x+1 \overset{\delta=-1}{\to} -x^2+2 \to -2x^2-1.$$

(β) Το τριώνυμο $2x^2-x-1$ έχει διακρίνουσα ίση με 9, οπότε από την εισαγωγή που κάναμε συμπεραίνουμε ότι δεν μπορεί να προκύψει από το αρχικό τριώνυμο.

Γ48. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Μ, ενώ η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ν. Αν O_1 και O_2 είναι τα περίκεντρα των τριγώνων ΑΒΝ και ΓΔΜ, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η ευθεία O_1O_2 διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ. (Κροατία 2018)

Λύση



Επειδή $M\hat{E}N = M\hat{Z}N = 90^0$, το τετράπλευρο ΜΖΕΝ είναι εγγράψιμο, οπότε θα έχουμε:

$$M\hat{N}E = E\hat{Z}\Delta \qquad (1)$$

Όμως η ΕΖ είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου, οπότε

$$E\hat{Z}\Delta = B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}H \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι:

$$M\hat{N}E = B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}H,$$

οπότε και τα τετράπλευρα ΑΒΝΜ και ΔΓΝΜ είναι εγγράψιμα. Επομένως το τμήμα ΝΜ είναι η κοινή χορδή των δύο περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΝ και ΓΔΜ, οπότε η διάκεντρος O_1O_2 διχοτομεί την κοινή χορδή τους ΜΝ.

Ν44. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη (m,n) θετικών ακεραίων που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\mathbf{2^m = 7n^2 + 1.}$$

(Κροατία 2018)

Λύση

Από τη δεδομένη εξίσωση έχουμε ότι $2^m \equiv 1 (\bmod 7)$, οπότε πρέπει $m = 3k, k$ θετικός ακέραιος. Τότε

$$2^{3k}-1=\left(2^k\right)^3-1=\left(2^k-1\right)\left(2^{2k}+2^k+1\right)=7n^2.$$

Γράφουμε $A=2^k-1,\ B=2^{2k}+2^k+1$ και υποθέτουμε ότι:

$$(A,B)=\left(2^k-1,\ 2^{2k}+2^k+1\right)=d.$$

Παρατηρούμε ότι $d \mid B-A^2=2^k+2^{k+1}=3\cdot 2^k$ και αφού ο d δεν μπορεί να είναι άρτιος, έπεται ότι: $d\in\{1,3\}$. Επομένως, οι αριθμοί A,B μπορούν να παραγοντοποιηθούν με τους παρακάτω τρόπους:

1. $A=7\alpha^2$, $B=b^2$, όπου α, b θετικοί ακέραιοι με $(\alpha,b)=1$. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν, γιατί $\left(2^k\right)^2<B<\left(2^k+1\right)^2$, οπότε ο B δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.
2. $A=\alpha^2$, $B=7b^2$, όπου α, b θετικοί ακέραιοι με $(\alpha,b)=1$. Αν $k\geq 2$, τότε $B=2^{2k}+2^k+1=\pi o\lambda.4+1\equiv 1(\bmod 4)\Rightarrow 7b^2\equiv 1(\bmod 4)$, άτοπο. Επομένως, $k=1$, οπότε έχουμε τη λύση $(m,n)=(3,1)$.
3. $A=21\alpha^2$, $B=3b^2$, όπου α, b θετικοί ακέραιοι με $(\alpha,b)=1$. Τότε, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, βρίσκουμε ότι $k=1$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $21\alpha^2=A=2^1-1=1$.
4. $A=3\alpha^2$, $B=21b^2$, όπου α, b θετικοί ακέραιοι με $(\alpha,b)=1$. Τότε:

$$3\mid A=2^k-1\Rightarrow 2^k\equiv 1(\bmod 3)\Rightarrow k=2\ell,\ \text{όπου } \ell \text{ θετικός ακέραιος},$$

οπότε

$$A=3\alpha^2=2^{2\ell}-1=\left(2^\ell-1\right)\left(2^\ell-1\right)$$

και επειδή $\left(2^\ell-1,\,2^\ell+1\right)=1$, έχουμε μόνο δύο δυνατές περιπτώσεις:

$$\left\{\begin{array}{c}2^\ell-1=c^2\\ 2^\ell+1=3d^2\end{array}\right\}\quad (\mathrm{I})\quad ή\quad \left\{\begin{array}{c}2^\ell-1=3c^2\\ 2^\ell+1=d^2\end{array}\right\}\quad (\mathrm{II}),$$

όπου c,d πρώτοι μεταξύ τους θετικοί ακέραιοι.

Στην περίπτωση (I), αν $\ell\geq 2$, τότε $3d^2\equiv 1(\bmod 4)$, άτοπο. Άρα πρέπει να είναι $\ell=1$, οπότε παίρνουμε μία ακόμη λύση $(m,n)=(6,3)$.

Στην περίπτωση (II) έχουμε $2^\ell=(d-1)(d+1)$ και αφού $(d-1,d+1)\leq 2$, συμπεραίνουμε ότι $d-1=2$, δηλαδή $\ell=3$, οπότε $3c^2=2^3-1=7$, αδύνατο.

Ασκήσεις για λύση

N45. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακέραιων που έχουν την ιδιότητα: $\mu^2\nu \mid \nu^2+3\mu$.

Δ23. Σε έναν διαγωνισμό παίρνουν μέρος 300 μαθητές. Για κάθε ζεύγος μαθητών θεωρούμε ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω: γνωρίζονται μεταξύ τους ή δεν γνωρίζονται μεταξύ τους. Δίνεται επίσης ότι δεν υπάρχουν τρεις μαθητές που να γνωρίζονται ανά δύο. Να προσδιορίσετε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του ν για την οποία ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

- Κάθε μαθητής γνωρίζεται με ν το πολύ άλλους μαθητές.
- Για κάθε θετικό ακέραιο μ τέτοιο ώστε $1\leq\mu\leq\nu$, υπάρχει ένας τουλάχιστον μαθητής ο οποίος γνωρίζεται με μ ακριβώς άλλους μαθητές.

A60. Να προσδιορίσετε όλα τα τριώνυμα $f(x)=\alpha x^2+bx+c$, με $\alpha,b,c\in\mathbb{Z}$, για τα οποία ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2}x^2+2x+2016\leq f(x)\leq\frac{1}{2}x^2+6x+2020.$$

Γ49. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ύψη ΑΝ, ΓΚ και ορθόκεντρο το σημείο Η. Συμβολίζουμε με γ_1 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ και με γ_2 τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΝΒΚ.

Οι κύκλοι γ_1 και γ_2 τέμνονται ξανά στο σημείο Θ. Οι ευθείες ΓΑ και ΒΘ τέμνονται στο σημείο Σ. Η ευθεία ΣΗ τέμνει τον κύκλο γ_2 στο σημείο Τ.

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΝΤ, ΘΚ και ΓΑ συντρέχουν ή είναι παράλληλες.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά

Προλεγόμενα: Ο φίλος της στήλης **Πέτρος Καλλιβάς**, μας έστειλε (από πολύ καιρό), το παρακάτω σημείωμα που αναφέρεται στη σημασία της επιστήμης των Μαθηματικών. Ζητάμε την κατανόησή του για την καθυστέρηση.

«Αν ρωτούσαμε όλους τους μαθητές, ποιο μάθημα προτιμούν, είναι αμφίβολο αν οι περισσότεροι θα έλεγαν τα Μαθηματικά. Συνήθως περισσότερο τα εκτιμούν παρά τα αγαπούν. Οι επιστημονικές γνώσεις βρίσκονται σε μεγάλη εκτίμηση, αλλά και ανάμεσα στους μαθητές ασφαλώς υπάρχουν εκείνοι που ενοχλούνται με τη μελέτη τους. Προφανώς αυτό οφείλεται όχι μόνο στο ότι η σπουδή των Μαθηματικών είναι για πολλούς δύσκολη και **απαιτεί επιμονή** και προσπάθεια, αλλά και στο ότι μερικά θέματα των Μαθηματικών του σχολείου δεν είναι αρκετά ενδιαφέροντα, καμιά φορά μάλιστα γίνονται πληκτικά. Αλλά το Αλφάβητο και η Γραμματική κάθε γλώσσας, μας φαίνονται συχνά σαν να μην έχουν ενδιαφέρον. Ωστόσο μόνο μαθαίνοντάς τα, θα έχουμε τη δυνατότητα να γνωρίσουμε τη λογοτεχνία της, τα ελκυστικά παραμύθια, τα διηγήματα, τις νουβέλες, τα μυθιστορήματα και την ποίηση της. Κατά τον ίδιο τρόπο αυτές οι πιο απλές, στοιχειώδεις βάσεις των Μαθηματικών, που μαθαίνουμε στο σχολείο, οδηγούν στα σύγχρονα Μαθηματικά, σ' αυτή την τεράστια, θα λέγαμε αχανή, περιοχή του πλούτου της ανθρώπινης γνώσης, που χρόνο με το χρόνο βρίσκουν όλο και ευρύτερη εφαρμογή.

Καμιά φορά ακούμε να λένε ότι στα Μαθηματικά, βασικά είναι όλα γνωστά, ότι έχει περάσει πια η εποχή των εφευρέσεων και ότι τώρα δε μας μένει άλλο παρά να μαθαίνουμε θεωρήματα, που έχουν τα ονόματα επιστημόνων περασμένων αιώνων και να τα χρησιμοποιούμε για τη λύση διαφόρων προβλημάτων. Στην πραγματικότητα όμως δεν είναι καθόλου έτσι. Γιατί ακριβώς σήμερα τα Μαθηματικά περνούν μια περίοδο εξαιρετικά έντονης ανάπτυξης, μολονότι υπάρχουν σαν επιστήμη πολλές χιλιετηρίδες. Στις μέρες μας, μαθηματικές ανακαλύψεις γίνονται κυριολεκτικά κάθε μέρα σε όλες τις γωνιές του κόσμου. Για να πάρουμε μια ιδέα για τον αριθμό των ανακαλύψεων αυτών, αρκεί να αναφέρουμε το έξης: εκδίδεται ένα μηνιαίο συνοπτικό περιοδικό με τίτλο «Μαθηματικά», όπου με ψιλά στοιχεία δημοσιεύονται περιληπτικές ανακοινώσεις για τις διάφορες μαθηματικές ανακαλύψεις που γίνονται σ' όλο τον κόσμο. Το σύνολο λοιπόν των τευχών του 1970 έδωσε έναν τεράστιο τόμο (πάνω από 3.000 σελίδες μεγάλου μεγέθους!) με περισσότερες από 25.000 ανακοινώσεις. Τόσο μεγάλος είναι ο αριθμός των μαθηματικών ανακαλύψεων που έγιναν μόνο σε ένα χρόνο, δηλαδή μέσος όρος **70 ανακαλύψεις** την ημέρα! Βέβαια δεν παρουσιάζουν όλες το ίδιο επιστημονικό ενδιαφέρον. Προσθέτει όμως η καθεμιά το λιθαράκι της στο τεράστιο οικοδόμημα της επιστήμης.

$$p(n) \sim \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

Αυτή η καταπληκτική ανάπτυξη των Μαθηματικών συνδέεται στενά με το ότι η επιστημονική θεωρία και πρακτική προβάλλουν όλο και νέα προβλήματα, που περιμένουν τη λύση τους από τους μαθηματικούς. Και όταν οι γνώσεις δεν επαρκούν πια, είμαστε υποχρεωμένοι να ανακαλύπτουμε νέους δρόμους, να βρίσκουμε καινούργιες μεθόδους. Τα Μαθηματικά στην εποχή μας δε χρησιμοποιούνται μόνο στην Αστρονομία, τη Μηχανική, τη Φυσική, τη Χημεία και την Τεχνική, όπως γινόταν παλιότερα, αλλά και στη Βιολογία, σε μερικούς κλάδους κοινωνικών επιστημών, ακόμα και στη Γλωσσολογία. Ιδιαίτερα ευρείς ορίζοντες για την εφαρμογή των Μαθηματικών ανοίγονται με τη δημιουργία των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών: με τη βοήθεια τους, γίνεται **η πρόβλεψη** του καιρού, υπολογίζονται οι τροχιές των τεχνητών δορυφόρων και διαστημοπλοίων, μεταφράζονται επιστημονικά κείμενα.

Σε πολύ σύντομο διάστημα νέοι τύποι γενικών και ειδικών ηλεκτρονικών υπολογιστών θα χρησιμοποιούνται όλο και σε πιο ποικίλους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπως είναι η διεύθυνση των διαδικασιών της παραγωγής, η στατιστική, τα λογιστικά, οι υπολογισμοί των σχεδιοποιήσεων, οι οικονομικοί προϋπολογισμοί κλπ.

Με λίγα λόγια μπορούμε να πούμε ότι τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που ασχολείται με τους αριθμούς και τα σχήματα. Είναι δύσκολο να αναφέρουμε έναν τομέα της ανθρώπινης δραστηριότητας, όπου δε θα απασχολούσε τον άνθρωπο η ποσότητα, οι διαστάσεις και το σχήμα των αντικειμένων. Από τα πολύ παλιά χρόνια με την ανάπτυξη της ανθρώπινης κοινωνίας ο άνθρωπος συγκέντρωνε όλο και περισσότερες γνώσεις για τους αριθμούς, τις διαστάσεις και το σχήμα των διαφόρων αντικειμένων. Οι γνώσεις αυτές έπρεπε να συστηματοποιηθούν, για να μεταβιβάζονται πιο εύκολα από γενιά σε γενιά. Έτσι σιγά-σιγά γεννήθηκαν τα Μαθηματικά»

[πηγή: ″ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΉ″, τόμ. 02. Εκδόσεις: ΓΙΑΝΝΙΚΟΣ]

ΙΙ. *Γεωμετρία αγάπη μου*

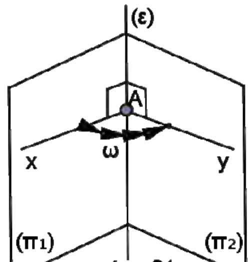
Προλεγόμενα: Στα επόμενα θα αφιερώσουμε μερικά δημοσιεύματα, πάνω σε θέματα Γεωμετρίας του Χώρου (Στερεομετρία), σ’ αντίθεση με την επίσημη τάση για ″κατάργησή″ της. Ξεκινάμε από το πιο αγνοημένο μέρος της Στερεομετρίας, δηλ. τις στερεές γωνίες και συγκεκριμένα από τις δίεδρες (!)

Ορισμός διέδρης: (σχήμα **01**). Δίνονται δύο ημιεπίπεδα (π_1), (π_2) με κοινή αρχική ευθεία (ε). Ονομάζουμε *δίεδρη γωνία*, που ορίζεται από τα δοσμένα στοιχεία, ένα σημειοσύνολο που σαν στοιχεία έχει τα σημεία των δοσμένων ημιεπιπέδων.

Σημείωση: Τα ημιεπίπεδα (π_1),(π_2), λέγονται *έδρες* της δίεδρης. Η κοινή αρχική ευθεία (ε), ονομάζεται *ακμή* της δίεδρης

***αντίστοιχη επίπεδη διέδρης:* (σχήμα 01)**. Ας είναι Α ένα σημείο της ακμής (ε) . Παίρνουμε μια ημιευθεία Αx$\perp$(ε) που να ανήκει στην έδρα (π_1) και μια ημιευθεία Αy$\perp$(ε) που να ανήκει στο (π_2). Η γωνία xΑy λέγεται *αντίστοιχη επίπεδη* της δίεδρης.

παρατήρηση. Οι Αx,Αy, σαν τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο (ρ). Αυτό το επίπεδο είναι κάθετο στην ακμή (ε) της δίεδρης, αφού η (ε) είναι κάθετη στις Αx,Αy. Οι πλευρές της αντίστοιχης επίπεδης, είναι τομές του (ρ) με τις έδρες της δίεδρης. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι: *η αντίστοιχη επίπεδη μιας διέδρης, είναι η τομή ενός επίπεδου με τις έδρες αυτής, το οποίο είναι κάθετο στην ακμή της διέδρης.*



σχήμα 01

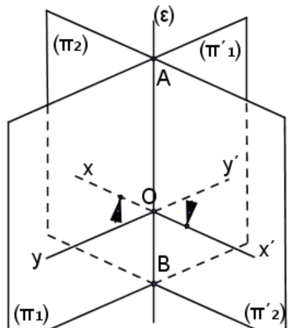
σχέση διέδρης-αντίστοιχης επίπεδης

α. Μια δίεδρη θα λέγεται *οξεία, ορθή, αμβλεία,* ανάλογα αν η αντίστοιχη επίπεδη είναι οξεία, ορθή, αμβλεία.

β. Το *μέτρο* μιας δίεδρης είναι το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας της.

Κατακορυφή διέδρες. Δύο δίεδρες λέγονται *κατακορυφή* αν οι έδρες της μιας είναι αντίθετα ημιεπίπεδα των εδρών της άλλης (σχήμα **02**)

θεώρημα 01. Δύο κατακορυφή δίεδρες είναι ίσες μεταξύ τους (σχήμα **02**).



σχήμα 02

ΙΙΙ. *Αυτό το ξέρατε;*

α. μπορείτε να βρείτε μια σχέση ανάμεσα: στην «*αγάπη*» και τον «*εγωϊσμό*»;

β. μήπως γνωρίζετε τι είναι το "άλεφ μηδέν";

[η απάντηση στο τέλος της στήλης]

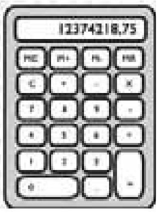
IV. *«Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»*

1^o *θέμα. "Ο μαθηματικός και ο Δικαστής"*

Προλεγόμενα: ο Γιώργος Καρουζάκης σχολιάζοντας το βιβλίο «Ο Μαθηματικός και ο Δικαστής» των Guarav Suri (μαθηματικός από το Πανεπιστήμιο του Stanford) και Hartsosh Singh Bal (δημοσιογράφος και μαθηματικός από το Πανεπιστήμιο της Νέας Υόρκης), σε μετάφραση Τεύκρου Μιχαηλίδη, λέει, μεταξύ των άλλων:

«Θέλεις να δεις ένα μαγικό κόλπο με αριθμούς; με είχε ρωτήσει ο παππούς μου βλέποντάς με να πατάω τα πλήκτρα λίγο πολύ στην τύχη. Καθόμουν στο δωμάτιό του, μαγεμένος με το δώρο μου, έστω και αν δεν ήξερα ακριβώς τι να το κάνω. Ο Ράβι

Καπούρ, ο αφηγητής του βιβλίου, θυμάται με νοσταλγία τα παιδικά του χρόνια, την εποχή που ο παππούς του, ο μαθηματικός Βιτζέι Σαχνί, τού είχε κάνει δώρο μία αριθμομηχανή...

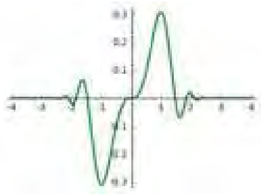


Η αριθμομηχανή, αυτό το δώρο της παιδικής ηλικίας του αφηγητή, σηματοδοτεί το ξεκίνημα μιας περιπέτειας, η οποία δεν συνδέεται μόνο με τη ζωή του κεντρικού ήρωα αλλά και με τα όρια της ανθρώπινης γνώσης. Τα χρόνια πέρασαν, ο Βιτζέι Σαχνί πέθανε, και ο εγγονός του βρέθηκε στο Στάνφορντ να σπουδάζει οικονομικά. Σχεδόν τυχαία, ο νεαρός ήρωας βρίσκεται να παρακολουθεί ένα **μάθημα για το άπειρο**, το οποίο δεν έχει, όμως, άμεση σχέση με το αντικείμενο των σπουδών του. Κάποιοι φίλοι, τον πείθουν να μπει στην αίθουσα που διδάσκει ο Νίκος, ένας φωτισμένος καθηγητής, παθιασμένος με τα Μαθηματικά και τη μουσική τζαζ. Σε αυτό το δημιουργικό περιβάλλον, ο Ράβι Καπούρ συνειδητοποιεί ότι τα Μαθηματικά, η επιστήμη του παππού του, είναι το πεδίο που τον συγκινεί και τον σαγηνεύει περισσότερο από κάθε τι στον κόσμο. Στη διάρκεια αυτών των μαθημάτων εντοπίζει έκπληκτος, στη βιβλιοθήκη του καθηγητή του, ένα άρθρο για **τις ελλειπτικές καμπύλες** που είχε γράψει ο παππούς του όταν επισκέφθηκε την Αμερική. Μια υποσημείωση στο άρθρο αποκαλύπτει ότι το 1919 ο Βιτζέι Σαχνί ήταν κρατούμενος στις φυλακές της Μοριζέτ, στο Νιου Τζέρζυ. Η έρευνα του εγγονού του σε βιβλιοθήκες και αρχεία επιβεβαιώνει ότι ο μαθηματικός είχε φυλακιστεί στην Αμερική, με βάση ένα σκοταδιστικό νόμο περί βλασφημίας, επειδή είχε αμφισβητήσει τη βιβλική εκδοχή της δημιουργίας του κόσμου.

Στη συνέχεια, η αφήγηση εξελίσσεται παράλληλα σε δύο αλληλοεπιδρώντα μέρη, ανάμεσα στο παρόν και το παρελθόν. Το πρώτο περιλαμβάνει τη συστηματική ενασχόληση του Ράβι Καπούρ με τη μαθηματική επιστήμη στο πανεπιστημιακό μάθημα. Τα Παράδοξα του Ζήνωνα, η θεμελίωση της θεωρίας Συνόλων από τον Γκέοργκ Κάντορ, τα Θεωρήματα μη πληρότητας του Γκαίντελ, η προσπάθεια προσέγγισης, μέσα από διαφορετικές διαδρομές, της φύσης του απείρου είναι ορισμένα από τα θέματα με τα οποία έρχεται σε επαφή ο φοιτητής. Αυτή η γνώση, θα τον βοηθήσει να κατανοήσει καλύτερα το διάλογο του παππού του με έναν δικαστή στη φυλακή. Η καταγεγραμμένη συνομιλία, που αναζήτησε και εντόπισε ο Ράβι Καπούρ, συνθέτει το δεύτερο άξονα της αφήγησης. Ο μαθηματικός Βιτζέι Σαχνί και ο δικαστής που διερευνά την υπόθεση της κράτησής του αναπτύσσουν έναν διάλογο λεπτών νοηματικών αποχρώσεων, μια φιλοσοφική συζήτηση για τη φύση της αλήθειας, τη μαθηματική επιστήμη και την ύπαρξη του Θεού.

Σε αυτή τη συνομιλία, τα στοιχεία του Ευκλείδη και το πρότυπο σκέψης τους διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στο ζήτημα της ελευθερίας του φυλακισμένου μαθηματικού. Ο δικαστής υπενθυμίζει, εκτός των άλλων, στον κρατούμενο πώς ο Καρτέσιος χρησιμοποίησε την αξιωματική μέθοδο του Ευκλείδη για να αποδείξει την ύπαρξη του Θεού. Και λέει : «δεν σας τιμωρώ επειδή δεν είστε ο Καρτέσιος! Είναι εντυπωσιακό που ένας μαθηματικός του δικού του διαμετρήματος αποφάσισε να χρησιμοποιήσει τις ίδιες αξιωματικές μεθόδους που τόσο εκτιμάτε για να δοξάσει τον χριστιανισμό, όχι για να τον αποκηρύξει».

Η ανάμειξη της μυθοπλασίας με ιστορικές αναφορές σε πραγματικά γεγονότα, επιστημονικά



δεδομένα που σχετίζονται με την εξέλιξη των Μαθηματικών (από τις Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες έως τις αναζητήσεις του Αϊνστάιν) και ποικίλες φιλοσοφικές ιδέες ισχυροποιείται από την ύπαρξη στέρεων και αληθινών χαρακτήρων, απολύτως εναρμονισμένων με το περιεχόμενο και την ιδιομορφία της ιστορίας.

Τέλος, η αίσθηση του αναγνώστη, ακόμη και εκείνου που δεν είναι εξοικειωμένος με τα Μαθηματικά, συναντά την επιδίωξη των συγγραφέων του βιβλίου που ήθελαν, όπως σημειώνουν στον πρόλογο, να δείξουν ότι τα Μαθηματικά είναι ωραία. Και ότι έχουν να πουν σημαντικά πράγματα σχετικά με το τι σημαίνει να γνωρίζει πραγματικά κάτι ο άνθρωπος. Ο μόνος τρόπος για να πλησιάσουν τον φιλόδοξο στόχο τους και να κερδίσουν το ενδιαφέρον των ανθρώπων ήταν να αφηγηθούν μια ιστορία»

[**πηγή:** Θαλής και Φίλοι]

$2^{ο}$ θέμα. Η «Εικασία του Πουανκαρέ» κι ο Πέρελμαν

προλεγόμενα ***Ένας άνθρωπος με φήμη... αντιστρόφως ανάλογη του έργου του***

«Το ένα εκατομμύριο που άφησε στην άκρη ο Ρώσος μαθηματικός είναι μόνο ένα μικρό παράδειγμα από όλα όσα έχει απαρνηθεί, για χάρη των ιδεών του. Κερδίζοντας την Ολυμπιάδα των Μαθηματικών σε ηλικία 15 ετών και αποκαλύπτοντας το τεράστιο του ταλέντο από πολύ νωρίς, ο Πέρελμαν έχει ένα σημαντικό μαθηματικό παρελθόν. Κατά την διάρκεια όλων αυτών των χρόνων, έχει δεχτεί προτάσεις από τα σημαντικότερα πανεπιστήμια του κόσμου, τα οποία όμως δεν είχαν την τύχη να προσελκύσουν το ενδιαφέρον του.

Δούλεψε για λίγο καιρό στις ΗΠΑ, επέστρεψε στην Ρωσία και συνέχισε την ζωή του, στο σπίτι του, μαζί με την μητέρα του. Αφού απέδειξε την «**Εικασία του Πουανκαρέ**», η... φτωχή καθημερινότητα του, θα μπορούσε να πάρει αντίθετη τροπή. Ωστόσο, η μεγάλη του επιτυχία όχι μόνο δεν διαστρέβλωσε τις αντιλήψεις του, αλλά τον έστρεψε ακόμα περισσότερο στον εαυτό του. Ο Πέρελμαν απομονώθηκε, απέρριψε κάθε ενδεχόμενο συνεργασίας και κλείστηκε στους τέσσερις τοίχους του δωματίου του, συνεχίζοντας το μαθηματικό του ταξίδι.

Τι ήταν όμως η διάσημη «**Εικασία του Πουανκαρέ**» και γιατί ήταν τόσο σημαντική η απόδειξη του Ρώσου μαθηματικού; Χαρακτηριστικό της δυσκολίας του προβλήματος ήταν η γραπτή δήλωση του ίδιου του δημιουργού του, που όταν το διατύπωνε παραδέχτηκε πως: «Αυτή η ερώτηση θα με πάει πολύ μακριά, αν προσπαθήσω να την απαντήσω». Το επί σχεδόν 100 χρόνια άλυτο πρόβλημα έσπασε τα... ρεκόρ των λανθασμένων αποδείξεων. Η εικασία αυτή εντάσσεται στον κλάδο της τοπολογίας, που ομολογουμένως είναι από τα πιο «θολά» τοπία της μαθηματικής επιστήμης.

Στην τοπολογία ένας κύκλος και ένα τρίγωνο είναι ακριβώς το ίδιο σχήμα, επειδή με ειδικούς χειρισμούς μπορεί το ένα να προκύψει από το άλλο. Αντίστοιχα ένα κουλούρι θα μπορούσε να ισούται με μια κούπα καφέ, όχι όμως και με ένα μήλο καθώς αυτό με όποιο τρόπο και να συμπιεστεί, δεν θα μπορούσε να αποκτήσει ανάλογο σχήμα. Η Εικασία Πουανκαρέ λέει ότι μια τρισδιάστατη σφαίρα είναι ο μόνος περιβαλλόμενος τρισδιάστατος χώρος χωρίς οπές. Παραπάνω αναφορές θα ήταν περιττές, αφού η δυσκολία του προβλήματος δεν αφήνει περιθώρια για εκτενείς... φιλοσοφίες πάνω του.

3ο θέμα. Η ιδέα του άπειρου κι ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος (Πέτρ. Σοφιανός)

προλεγόμενα ο συνάδελφος Πέτρος Σοφιανός, ανήκει σε κείνη την κατηγορία μαθηματικών που ασχολούνται με τη μελέτη των αποκαλούμενων **"Ιώνων φιλοσόφων"**

«Τόσο το "ΜΗΔΕΝ" όσο και το "ΑΠΕΙΡΟΝ" κατά την εποχή αυτή δεν είχαν απλά την στενή ποσοτική - αριθμητική έννοια που σήμερα αποδίδουμε στα σύμβολα αυτά.

Τόσο το "ΜΗΔΕΝ" όσο και το "ΑΠΕΙΡΟΝ" δεν θεωρούνταν μόνο "ΑΡΙΘΜΟΙ"! Αλλά τότε τι άλλο άραγε ;

- Ξεκινώντας από τις θρησκευτικές - θεολογικές κοσμογονίες της εποχής εκείνης λοιπόν σε μια ομόθυμη υπέρβασή τους οι Ίωνες Φυσικοί Φιλόσοφοι έβαζαν τις βάσεις μιας "ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗΣ" μπορούμε να λέμε σήμερα "ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΑΣ" !

Επειδή μάλιστα καθένας από αυτούς έβαζε ένα στοιχείο η μια από τις μορφές με τις οποίες γίνεται αντιληπτή - αισθητή σε εμάς η "ΥΛΗ" που μας περιβάλλει ονομάστηκαν αργότερα και "ΥΛΙΣΤΕΣ" Φιλόσοφοι, χωρίς αυτό σήμερα να σημαίνει μή πνευματικούς - "υλόφρονες" θα λέγαμε ανθρώπους .

Καθένας από αυτούς μάλιστα στην βασική ιδέα της εξέλιξης του Κόσμου που μας περιβάλλει πρότεινε και μια συγκεκριμένη Αρχή σαν αφετηρία τούτης της εξέλιξης. Έτσι ο πρώτος κατ' αρχαιότητα τουλάχιστον Θαλής ο Μιλήσιος θεωρούσε το "ΥΔΩΡ" **(το νερό)** σαν βάση και αρχή του Υλικού Κόσμου, ο Αναξιμένης επίσης καταγωγής από την Μίλητο το στοιχείον "ΑΗΡ" (τον αέρα) , ενώ ο Εφέσιος Ηράκλειτος το "ΠΥΡ" (την φωτιά) !

Ο Αναξίμανδρος υιός Πραξιάδου από την Μίλητο κατ' ελάχιστο νεώτερος του Θαλή και μαθητής του στην ίδια Σχολή της Μιλήτου υποστήριξε κάτι εντελώς ιδιαίτερο και πρωτότυπο:

Ξεκινώντας από το *"Χάος"* της Ορφικής και Ησιόδιας Κοσμογονίας, την οποία και ο Αριστοφάνης αργότερα βάζει στο στόμα των πουλιών στο θεατρικό Έργο του *" Όρνιθες"* και μιας Απόλυτης Γέννησης του *" Έρωτα"* μέσα από ένα "*Κοσμικόν Ωόν*" (αυγό), το οποίον ετέχθη από ένα «*Ερμαφρόδιτον Κοσμικόν Αιδοίον*», επινοεί και προτείνει την έννοια του "*Άπειρου*", το οποίον ενοποιεί *ανακυκλίζοντας* όλες τις μορφές της Ύλης (πυρ, χθων, αήρ, ύδωρ) και από τις οποίες ξεκινούν οι άλλοι φυσικοί φιλόσοφοι πριν και μετά από αυτόν!

Όπως Συμπλίκιος αναφέρει για τον Αναξίμανδρο:

"*Είναι φανερό ότι βλέποντας τα τέσσερα στοιχεία να μετατρέπονται το ένα στο άλλο , έκρινε ότι δεν έπρεπε να θεωρήσει κανένα από αυτά ως υπόστρωμα των άλλων, παρά κάτι πλάϊ σ' αυτά και ανήγαγε την γένεση όχι στην αλλοίωση του στοιχείου αλλά στην απόσπαση των αντιθέτων χάρη στην αέναη κίνηση* ".

Κατά δε τον άλλο βιογράφο του Ψευτοπλούταρχο: "*Αυτό που παρήγαγε απ' το αιώνιο ("εκ του* *'αιδοίου") το θερμό και το ψυχρό αποχωρίστηκε στην αρχή αυτού του κόσμου και ότι αυτό σχηματίστηκε γύρω από τον αέρα που περιβάλλει την γη, ένα είδος πύρινης σφαίρας, σαν φλοιός γύρω από το δέντρο. Όταν αυτή η σφαίρα* ***έσκασε και κλείστηκε σε μερικούς κύκλους δημιουργήθηκαν ο ήλιος, η σελήνη και τα άστρα*** " !!!

Συνοπτικά ο Αναξίμανδρος θεωρούσε την "***ΑΝΑΚΥΚΛΙΣΗ***" την πιο θεμελιώδη ιδιότητα της "ΥΛΗΣ" η οποία αλλάζει μορφές στο σύμπαν συνεχώς και αενάως, ήτοι χωρίς αρχή στον Χώρο και τον Χρόνο !

Βέβαια μετά τον Αναξίμανδρο οι Πυθαγόρειοι συνέδεσαν το "ΜΗΔΕΝ" και το "ΑΠΕΙΡΟ" μέσα σε μιαν "εξίσωση": "ΜΗΔΕΝ και ΑΠΕΙΡΟΝ ίσον ΕΝ" , που κατά μία πολλή απλή εξήγηση σημαίνει ότι κάθε μονάδα ενός μεγέθους αποτελείται από άπειρα αδιάστατα σημεία μηδενικού μεγέθους !!!

Όλα τα παραπάνω αποτέλεσαν υλικό βέβαια για νεότερους κλάδους των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Κοσμολογίας, Επιστημών που επικοινωνούν και ενοποιούνται θα λέγαμε στην Επιστήμη των Επιστημών , την "ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ" η οποία γεννήθηκε, όπως τουλάχιστον μπόρεσα να περιγράψω, στην Ιωνία της πρώιμης Αρχαίας Ελλάδας!»

4ο θέμα. "για τη μαθηματική ακριβολογία", του Ηρακλή Ευαγγελινού

προλεγόμενα ο παλιός, καλός φίλος της στήλης Ηρακλής Ευαγγελινός, μας έχει συνηθίσει να γράφει σχόλια για μαθηματικά θέματα τα οποία αφορούν όλο τον κορμό της εκπαίδευσης (απ' το Δημοτικό μέχρι και το Λύκειο). Μας έστειλε, λοιπόν, ένα μικρό σημείωμα και μας παρακαλεί να το δημοσιεύσουμε «για αποκατάσταση της μαθηματικής ακριβολογίας». Εμείς το δημοσιεύουμε, χωρίς όμως να αναφέρουμε (για λόγους δεοντολογίας) το όνομα την ιστοσελίδας στην οποία το είχε πρωτοδημοσιεύσει παλιά.

«...,σε μια ανάρτηση στην ιστοσελίδα… έγραφε κάποιος ότι, π.χ., στο 25 "παράγοντες" είναι {1,5,25}. Με ανάρτησή μου υπέδειξα ότι αντί για "παράγοντες" πρέπει να γράψει "διαιρέτες". Δεν απάντησε ούτε……

Το έψαξα στα Σχολ. Βιβλία Α΄ Γυμνασίου:

1) Στο γινόμενο 3.5, οι 3και 5 <u>μαζί</u> λέγονται "παράγοντες" του γινομένου (Μπούσγου, Α΄ Γυμνασίου)

2) Το εξαγόμενο του πολλαπλασιασμού λέγεται "γινόμενο". Ο πολλαπλασιαστέος κι ο πολλαπλασιαστής <u>μαζί</u> λέγονται "παράγοντες" (ο πολλαπλασιαστής $\neq 1$) (Τόγκα, Α΄ Γυμνασίου)

3) Στο γινόμενο α.β οι αριθμοί α,β λέγονται "παράγοντες" του γινομένου (Μπιναρδόπουλου, Α΄ Γυμνασίου)

παράδειγμα:

Παράγοντες του 24 είναι τα ζεύγη: (2,12),(3,8),(4,6), όχι όμως το (1,24), ούτε το {1,2,3,4,6,8,12,24}

Σημείωση*: Ο Ευριπίδης Κασέτας, έκανε μια σπουδαία παρατήρηση: «λέγονται "παράγοντες" γιατί παράγουν το γινόμενο, π.χ. 3.5=15»*

V. ειδήσεις – ειδησούλες

1. "έφυγε" ο Θάνος Μικρούτσικος.

"Εφυγε" σε ηλικία 72 χρόνων (28 Δεκέμβρη 2019), ο άνθρωπος, ο μαθηματικός και μεγάλος μουσικοσυνθέτης **Θάνος Μικρούτσικος**. Ο Θ. Μικρούτσικος ήταν από τους θερμούς συμπαραστάτες της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και ποτέ δεν αρνήθηκε τη βοήθειά του, όποτε η ΕΜΕ του την ζήταγε. Για το λόγο αυτό η ΕΜΕ, δημοσίευσε ανακοίνωση, στην οποία, μεταξύ των άλλων, τόνιζε:

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, με την αναγγελία του θανάτου του Θάνου Μικρούτσικου, δηλώνει την οδύνη της για την απώλεια ενός φίλου της, Μουσικού, Μαθηματικού και Κοινωνικού Αγωνιστή, με πολλές μουσικές περγαμηνές τόσο στην Ελλάδα όσο και στο εξωτερικό, ο οποίος προσδιόρισε τη νεότερη γενιά της χώρας μας στο μουσικό ύφος της.

Τον Θάνο Μικρούτσικο τίμησε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στο 35ο Συνέδριό της, που έγινε στις 7 - 9 Δεκέμβρη 2018 στην Αθήνα, ολοκληρώνοντας τις εκδηλώσεις για τα 100 χρόνια από την ίδρυσή της.

2. Θεατρικά έργα, με θέμα τα Μαθηματικά. Ο φίλος της στήλης Κώστας Καλός, μας έστειλε ένα μικρό σημείωμα όπου παραθέτει μερικούς τίτλους θεατρικών έργων, με θέμα τα Μαθηματικά.

α. του Ντίνου Κορδόση:

▪ ***"Οι αριθμοί είναι αισθηματίες"***

▪ ***"Καλλιστεία τετραπλεύρων"***,

β. του Μπέρτολντ Μπρέχτ: ***"Η Ζωή του Γαλιλαίου"*** [με θέμα τη ζωή του μεγάλου φυσικού]

γ. του Ε. Ιονέσκο: ***"Το Μάθημα"*** [είναι θέατρο του παράλογου· το πρώτο μισό αναφέρεται στα Μαθηματικά]

δ. του Νίκου Κωνσταντόπουλου: ***"Τα παιδιά του Ευκλείδη"*** [Είναι μια παρουσίαση των Στοιχείων του Ευκλείδη]
ε. του Απόστολου Δοξιάδη: ***"17η Νύχτα"*** [αναφέρεται στο " Θεώρημα της μη πληρότητας" του Γκέντελ]

Εμείς πιστεύουμε ότι, αν "στύψουμε" τη μνήμη μας, θα βρούμε πολύ περισσότερα.

3. ο πιο πρωτότυπος χριστουγεννιάτικος στολισμός!

Αυτός είναι στολισμός !!! Πανεπιστήμιο της Λουμπλιάνας της Σλοβενίας
Τι σημαίνει? Είναι το περίφημο "Αθροισμα του Ramanujan" [βλέπε, εικόνα (α΄)]

[εικόνα (α΄)]

4. Συμμετρία και Χρυσή Τομή στα Κυκλαδικά Ειδώλια

Σε ανακοίνωση του ″Μουσείου των Ηρακλειδών″ διαβάζουμε: «Συμμετρία και Χρυσή Τομή στα Κυκλαδικά Ειδώλια ή άλλως ειπείν τα Μαθηματικά στον Κυκλαδικό Πολιτισμό. Υπήρχαν άραγε τα Μαθηματικά την εποχή εκείνη, την 3η π.Χ. χιλιετία; Μήπως εν τέλει τα Μαθηματικά προϋπάρχουν σύμφωνα με το Πλατωνικό πρότυπο ή είναι δημιούργημα-κατασκεύασμα της ανθρώπινης σκέψης-δημιουργίας; Τα… φιλοσοφικά και όχι μόνο ερωτήματα θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε και παράλληλα θα ανασκάψουμε ως άλλοι αρχαιολόγοι για να ανακαλύψουμε ποια Μαθηματικά ενκρύπτονται μέσα στην Κυκλαδική Τέχνη. Στέλλα Παπαδημητρίου. [10/01/2020]»

5. Αρχαίο Ελληνικό Θέατρο και Δράμα και Διαφορικές Εξισώσεις από το "Mathesis"

Με δύο νέα μαθήματα και τη δυνατότητα παρακολούθησης δύο ακόμη, παλαιότερων, μαθημάτων, ξεκίνησε νέος κύκλος μαθημάτων του Κέντρου Ανοικτών Διαδικτυακών Μαθημάτων **Mathesis** των Πανεπιστημιακών Εκδόσεων Κρήτης (ΠΕΚ) (για το 2020). Να υπενθυμίσουμε ότι η επιτυχημένη πλατφόρμα με τους χιλιάδες φοιτητές δημιουργήθηκε το 2015 με αποκλειστικό σκοπό τη δημιουργία και δωρεάν προσφορά στους φοιτητές, στους επαγγελματίες επιστήμονες και στο ευρύτερο κοινό, διαδικτυακών μαθημάτων στο επίπεδο των καλύτερων διεθνών προτύπων.

- Το πρώτο νέο μάθημα με τίτλο ***«Αρχαίο Ελληνικό Θέατρο και Δράμα»***, διδάσκει ο Καθηγητής Βάιος Λιαπής από το Ανοικτό Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Το δεύτερο νέο μάθημα με τίτλο ***«Διαφορικές Εξισώσεις 3: Γραμμικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές – Σειρές Fourier»*** διδάσκει ο φυσικός Στέφανος Τραχανάς από το ΙΤΕ – Πανεπιστήμιο Κρήτης.

6. Σας παρουσιάζουμε μια έγχρωμη φωτογραφία του Κων/νου Καραθεοδωρή [εικόνα (β΄)]

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;"

α. η φίλη της στήλης Ευαγγελία Λώλη, έδωσε την παρακάτω απάντηση: η διατύπωση:

«Δείξτε ότι η αγάπη γίνεται άπειρη καθώς ο εγωϊσμός εξαφανίζεται»

Κι η μαθηματική απόδειξη απόδειξη $\text{love} = \lim_{\text{ego}\to 0} \frac{1}{\text{ego}} \to +\infty$

β. «...η θεωρία συνόλων ξεκίνησε με την απόδειξη του Kantor ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαφορετικές μορφές του άπειρου: το *αριθμήσιμο άπειρο* που αποτελείται από τους άπειρους ακέραιους αριθμούς (και που αργότερα συμβολίστηκε από τον Kantor με "άλεφ μηδέν") και το *μη αριθμήσιμο άπειρο* των σημείων της ευθείας (το *συνεχές*)...»

[**πηγή:** «Ονοματίζοντας το άπειρο», των Loren Graham και Jean-Michel Kantor]

[εικόνα (β΄)]

Τάξη: Α΄

Εξισώσεις και Ανισώσεις

Χρήστος Λαζαρίδης

Το παρακάτω άρθρο διαπραγματεύεται εξισώσεις και ανισώσεις και χρησιμοποιεί αρκετά τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων του τύπου: $\mathbf{f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0}$ και $\mathbf{f(x)=\alpha x+\beta}$. Σκοπός είναι να αποκτήσουμε ευχέρεια στην σχεδίαση γραφικών παραστάσεων και να κατανοήσουμε πως οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων βοηθούν στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων.

Για την καλύτερη μελέτη είναι απαραίτητη η σχετική θεωρία των **6.3** και **7.3** του σχολικού βιβλίου.

Άσκηση 1

Η παραβολή που παριστάνει η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\alpha<0$, έχει κορυφή η οποία βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

β) Τι συμβαίνει αν $\alpha>0$;

Λύση

α) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ και βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο, άρα,

$$-\frac{\Delta}{4\alpha}<0\ (1)$$

$$(1)\Rightarrow\frac{\Delta}{4\alpha}>0\overset{\alpha<0}{\Rightarrow}\Delta<0.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

β) Αν $\alpha>0$ τότε προκύπτει ότι $\Delta>0$ επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

Άσκηση 2

Η παραβολή που παριστάνει η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ έχει κορυφή $K\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta=\alpha$.

β) Αν επιπλέον $\alpha>0$ τότε:

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα των ριζών της $f(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha x^2-3\alpha x+\frac{9\alpha-1}{4}$

Λύση

α) Για την κορυφή έχουμε $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ άρα

$-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\Delta=\alpha.$

β) Αφού $\alpha>0$ τότε και $\Delta>0$ επομένως η συνάρτηση θα έχει δύο άνισες ρίζες.

i) Επίσης $-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{3}{2}\Rightarrow-\frac{\beta}{\alpha}=3$, άρα το άθροισμα των ριζών ισούται με 3.

ii) Από (i), $\beta=-3\alpha$. Αλλά

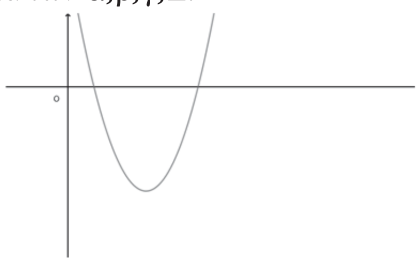
$$\Delta=\alpha\Rightarrow\beta^2-4\alpha\gamma=\alpha\overset{\beta=-3\alpha}{\Rightarrow}9\alpha^2-4\alpha\gamma=\alpha$$

$$\overset{\alpha\neq 0}{\Rightarrow}9\alpha-4\gamma=1\Rightarrow\gamma=\frac{9\alpha-1}{4}.$$

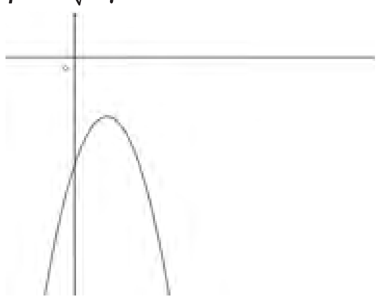
Αντικαθιστούμε τις τιμές των β,γ στον τύπο της f, οπότε παίρνουμε, $f(x)=\alpha x^2-3\alpha x+\frac{9\alpha-1}{4}$

Άσκηση 3

α) Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\alpha\neq 0$. Να βρείτε τα πρόσημα των $\alpha,\beta,\gamma,\Delta$.



β) Αντίστοιχα στο παρακάτω σχήμα να βρείτε τα πρόσημα των α,γ,Δ και να αποδείξετε ότι: $-2\sqrt{\alpha\gamma}<\beta<2\sqrt{\alpha\gamma}$.



Λύση

α) Η f παρουσιάζει ελάχιστο άρα $\alpha>0$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία επομένως, $\Delta>0$.
Έχουμε: $f(0)>0 \Rightarrow \gamma>0$.

Επίσης οι δύο ρίζες είναι θετικές άρα

$S>0 \Rightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha}>0 \Rightarrow \dfrac{\beta}{\alpha}<0 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow} \beta<0$.

β) Η f παρουσιάζει μέγιστο άρα $\alpha<0$. $f(0)<0 \Rightarrow \gamma<0$. Η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον $x'x$ συνεπώς δεν υπάρχουν ρίζες άρα $\Delta<0$. Έχουμε:

$\Delta<0 \Rightarrow \beta^2-4\alpha\gamma<0 \Rightarrow \beta^2<4\alpha\gamma \Rightarrow$
$|\beta|<2\sqrt{\alpha\gamma} \Rightarrow -2\sqrt{\alpha\gamma}<\beta<2\sqrt{\alpha\gamma}$.

Άσκηση 4

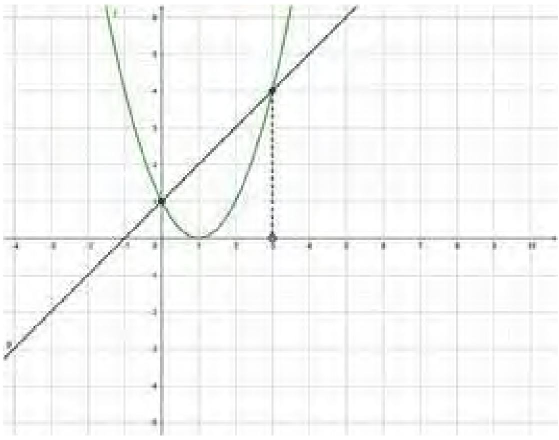
α) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+1$ και της ευθείας $y=x+1$.

β) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $x^2-2x+1<x+1\,(1)$ χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα.

γ) Να λύσετε την (1) με την βοήθεια δύο διαφορετικών συναρτήσεων από αυτές του (α).

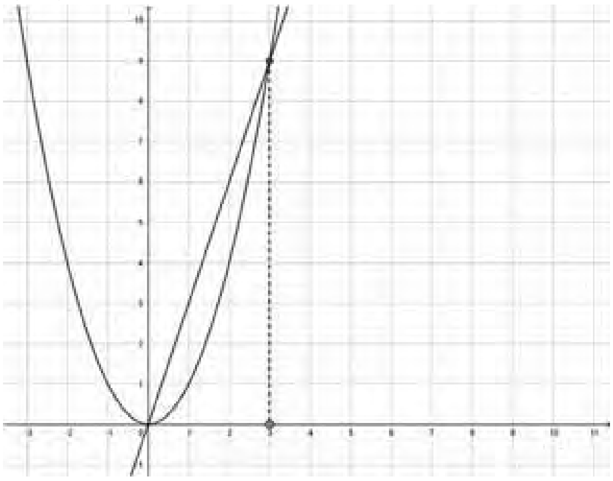
Λύση

α) Σχεδιάζουμε κατά τα γνωστά την παραβολή $f(x)=x^2-2x+1$ και την ευθεία $y=x+1$.



β) Η παραβολή και η ευθεία τέμνονται στα $(0,1)$ και $(3,4)$. Η λύση της ανίσωσης, με τη βοήθεια του σχήματος, είναι εκείνα τα x για τα οποία ότι η παραβολή είναι «κάτω» από την ευθεία, δηλαδή, $0<x<3$.

γ) Η ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $x^2<3x$. Σχεδιάζουμε την παραβολή $.y=x^2$.και την ευθεία $y=3x$ που τέμνονται στα $(0,0)$ και $(3,9)$.



Ομοίως η παραβολή είναι «κάτω» από την ευθεία, αν και μόνο αν, $0<x<3$.

Άσκηση 5

Έστω η εξίσωση $\lambda^2x=\lambda-2x,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1)$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η (1) έχει μοναδική ρίζα x_0, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) $x_0<1$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Δεν υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $x_0=\dfrac{\kappa}{2}$, όπου $|\kappa\sqrt{2}|>1$.

Λύση

α) $(1) \Leftrightarrow \lambda^2x+2x=\lambda \Leftrightarrow (\lambda^2+2)x=\lambda \overset{\lambda^2+2\neq0}{\Leftrightarrow}$

$x=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+2}$.

β) Έχουμε, $x_0=\dfrac{\lambda}{\lambda^2+2}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\dfrac{\lambda}{\lambda^2+2}<1$ ή $\lambda^2-\lambda+2>0$. Η τελευταία ισχύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, αφού το τριώνυμο $\lambda^2-\lambda+2$ έχει διακρίνουσα αρνητική και $\alpha=1>0$.

γ) Έστω ότι υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $x_0=\dfrac{\kappa}{2}$

τότε $\dfrac{\lambda}{\lambda^2+2}=\dfrac{\kappa}{2} \Rightarrow \kappa\lambda^2-2\lambda+2\kappa=0\ (2)$.

Έχουμε, $\kappa\neq0$ αφού $|\kappa\sqrt{2}|>1$. Η διακρίνουσα της (2) ισούται με $\Delta=4(1-2\kappa^2)<0$, διότι $\left|\kappa\sqrt{2}\right|>1\Rightarrow 2\kappa^2>1\Rightarrow 1-2\kappa^2<0$.

Καταλήξαμε λοιπόν ότι η (2) είναι αδύνατη, πράγμα άτοπο.

Άσκηση 6

Έστω η ανίσωση $\lambda x-2>x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\ (1)$.

α) Να λύσετε την (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Για $\lambda=2$ να επαληθεύσετε την λύση που βρήκατε στο (α) σχεδιάζοντας μια κατάλληλη ευθεία.

Λύση

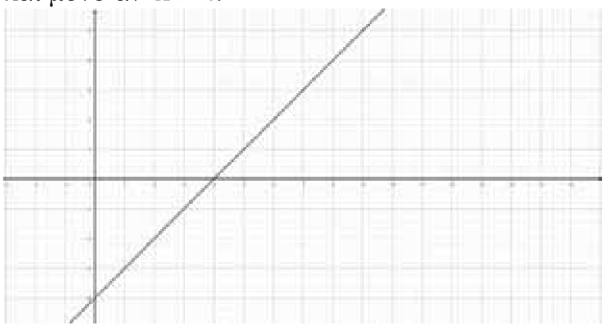
α) Η (1) ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

$$(1)\Leftrightarrow \lambda x-x>\lambda+2\Leftrightarrow(\lambda-1)x>\lambda+2\ (2)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lambda=1$. $(2)\Leftrightarrow 0x>3$, αδύνατη.
- $\lambda>1$. $(2)\Leftrightarrow x>\dfrac{\lambda+2}{\lambda-1}$
- $\lambda<1$. $(2)\Leftrightarrow x<\dfrac{\lambda+2}{\lambda-1}$

β) $2>1$, επομένως από την αντίστοιχη περίπτωση στο (α) ερώτημα παίρνουμε, $x>\dfrac{2+2}{2-1}\Leftrightarrow x>4$. Η (1) για $\lambda=2$ γίνεται: $x-4>0$. Σχεδιάζουμε την ευθεία $y=x-4$ και παρατηρούμε ότι $y>0$, αν και μόνο αν $x>4$.



Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+2$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$ και να επαληθεύσετε γραφικά τη λύση που βρήκατε.

β) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου,

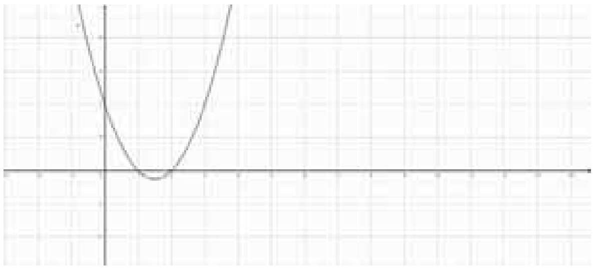
$$f(1{,}1)f(1{,}2)\ldots f(1{,}9).$$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-3|x|+2<0$ και να επαληθεύσετε τη λύση γραφικά.

Λύση

α) Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1$ και ρίζες 12. Βρίσκουμε το πρόσημό του και διαπιστώνουμε $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$.

Η επαλήθευση γίνεται αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-3x+2$ όπως φαίνεται παρακάτω και παρατηρήσουμε ότι είναι «κάτω» από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν $x\in(1,2)$.



β) Οι αριθμοί $1{,}2, 1{,}2, \ldots, 1{,}9$ ανήκουν στο διάστημα $(1,2)$ επομένως η συνάρτηση θα παίρνει αρνητικές τιμές. Πρόκειται για ένα γινόμενο εννέα αρνητικών πραγματικών, το οποίο ασφαλώς είναι αρνητικός.

γ) Η ανίσωση αν θέσουμε $|x|=y\geq 0$ γίνεται $y^2-3y+2<0$. Από το α ερώτημα $y\in(1,2)$.

Δηλαδή $|x|\in(1,2)\Leftrightarrow\begin{cases}|x|<2\\|x|>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\x<-1 \text{ ή } x>1\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\x<-1\end{cases}$ ή $\begin{cases}-2<x<2\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow(-2<x<-1 \text{ ή } 1<x<2)$.

Η επαλήθευση απαιτεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-3|x|+2$, η οποία παρουσιάζεται παρακάτω. Ο τύπος της g γράφεται: $g(x)=x^2-3|x|+2=\begin{cases}x^2-3x+2, x\geq 0\\x^2+3x+2, x<0\end{cases}$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η γραφική παράσταση βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$, αν και μόνο αν, $(-2<x<-1 \text{ ή } 1<x<2)$.

Άσκηση 8

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$ και την εξίσωση $f(x)=-1$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-|f(x)|$.

Λύση

α) Ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, αν και μόνο αν, $x-2\neq 0$ ή ισοδυνάμως $x\neq 2$. Άρα, $A=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

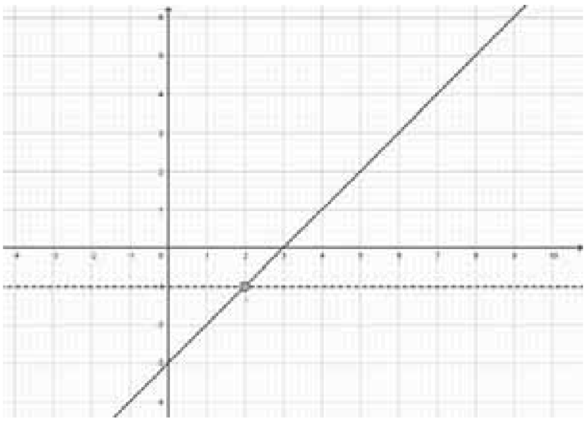
β) Αρχικά θα κάνουμε μία απλοποίηση του τύπου της συνάρτησης. Για κάθε $x\in A$,

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=x-3.$$

Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται παρακάτω. Το σημείο $A(2,-1)$, δεν ανήκει στην γραφική παράσταση, αφού $2\notin A$.

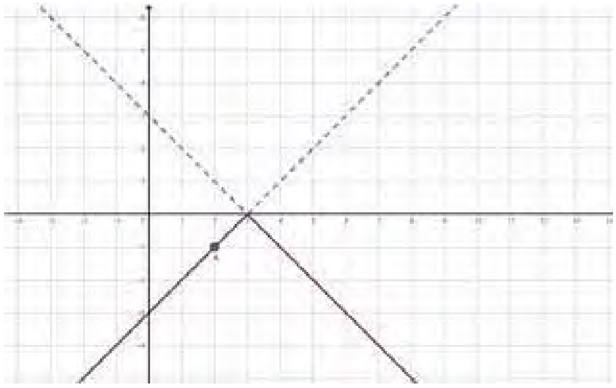
γ) Η ανίσωση και η εξίσωση ορίζονται στο Α. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης

$$f(x)<0\Leftrightarrow x<3\overset{x\in A}{\Leftrightarrow}(-\infty,2)\cup(2,3).$$



Η ευθεία $y=-1$ δεν τέμνει τη γραφική παράσταση διότι $A\notin C_f$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=-1$, είναι αδύνατη.

δ) Αρχικά κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $|f(x)|$, η οποία στο σχήμα παρουσιάζεται διακεκομμένη, και στη συνέχεια της $-|f(x)|$, η οποία είναι συμμετρική της ως προς. $x'x$. Το σημείο $A(2,-1)$, δεν ανήκει στην γραφική παράσταση αφού $2\notin A$.



Άσκηση 9

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+2\lambda x+\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ έτσι ώστε το πεδίο ορισμού της f να είναι το $\mathbb{R}$.

β) Αν το λ ισούται με την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του τότε:

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης λ.

ii) Να αποδείξετε με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$, έχει ακριβώς δύο ρίζες για κάθε $\alpha>0$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν, $x^2+2\lambda x+\lambda\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το τελευταίο ισχύει, δεδομένου ότι το τριώνυμο $x^2+2\lambda x+\lambda$ έχει $\alpha=1>0$, αν και μόνο αν, $\Delta\leq 0$. Αλλά, $\Delta=4\lambda^2-4\lambda=4\lambda(\lambda-1)$.

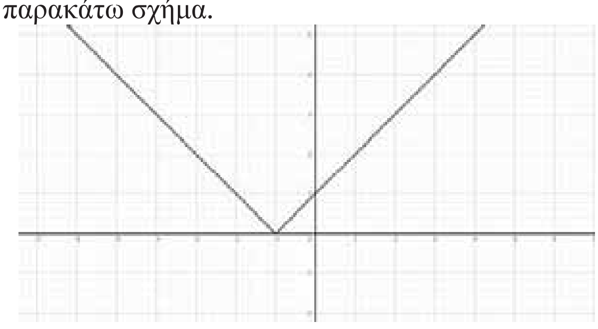
Τελικά, $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 4\lambda(\lambda-1)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq\lambda\leq 1$.

β) Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του λ είναι $\lambda=1$.

i) Για $\lambda=1$:

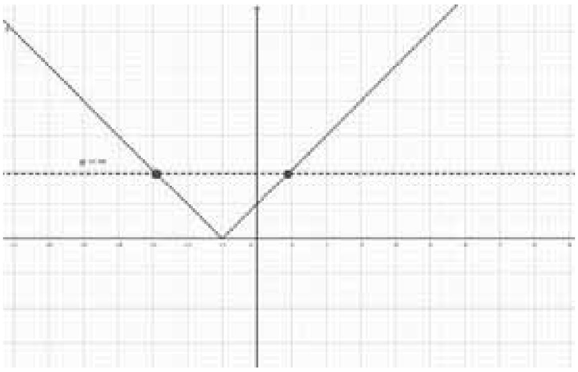
$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=$$
$$=\begin{cases}x+1, x\geq -1\\ -x-1, x<-1\end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=\alpha$ έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της f, για κάθε $\alpha>0$.

Επομένως η εξίσωση, έχει ακριβώς δύο ρίζες.



Άσκηση 10

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x^2-x|>x^2+x+1$.

β) Να επαληθεύσετε την λύση που βρήκατε προηγουμένως με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των $f(x)=|x^2-x|$ και $g(x)=x^2+x+1$.

Λύση

α) Το τριώνυμο x^2+x+1 είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού έχει διακρίνουσα αρνητική και $\alpha=1>0$.

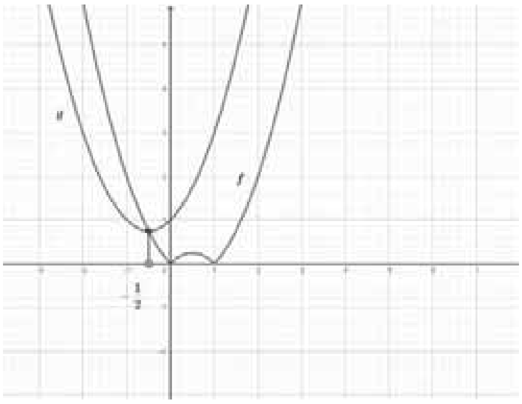
Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη:

$$\left(x^2-x<-x^2-x-1 \text{ ή } x^2-x>x^2+x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2<-1 \text{ ή } -2x>1\right)\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}.$$

β) $f(x)=|x^2-x|=\begin{cases}x^2-x, x\le 0 \text{ ή } x\ge 1\\ -x^2+x, 0<x<1\end{cases}.$

Οι γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονται παρακάτω.



Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν $x<-\frac{1}{2}$.

Άσκηση 11

Η ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\gamma}{\alpha}, \alpha\ne 0$ τέμνει την παραβολή $C: y=x^2$ μόνο στο σημείο $A(1,1)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\boldsymbol{\varepsilon: y=-2x-1.}$$

Λύση

Οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας ε με την παραβολή C προκύπτουν από τις ρίζες της εξίσωσης:

$$\varepsilon: x^2=-\frac{\beta}{\alpha}x-\frac{\gamma}{\alpha}(1).$$

Αλλά

$(1)\Leftrightarrow \alpha x^2=-\beta x-\gamma\Leftrightarrow \alpha x^2+\beta x+\gamma=0(2).$

Η δευτεροβάθμια (2) έχει μοναδική λύση την $x=1$, επομένως

$$\begin{cases}\Delta=0\\ -\frac{\beta}{2\alpha}=1\end{cases}(\Sigma).$$

Έχουμε

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}\beta^2-4\alpha\gamma=0\\ -\frac{\beta}{2\alpha}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha^2-4\alpha\gamma=0\\ \beta=-2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4\alpha-4\gamma=0\\ \beta=-2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=-2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\beta}{\alpha}=-2\\ \frac{\gamma}{\alpha}=1\end{cases}.$$

άρα $\left\{\begin{matrix}\alpha=1\\ \gamma=1\\ \beta=-2\end{matrix}\right\}$

Τελικά, $\varepsilon: y=-2x-1.$

οπότε τελικά

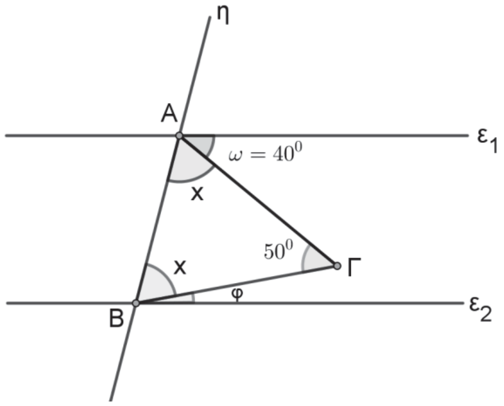
$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon: y=-2x-1}}$$

Τάξη Α΄

Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Θέμα 1. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τις παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ που τέμνονται από την ευθεία (η).



Το τρίγωνο ΓΑΒ είναι ισοσκελές με ΓΑ=ΓΒ. Δίνονται οι γωνίες: $\hat{\Gamma}=50^0$ και $\hat{\omega}=40^0$.

i. Να βρεθούν οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ΓΑΒ.

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$.

iii. Φέρνουμε $\Gamma\Delta\perp(\varepsilon_1)$ (Δ σημείο της (ε_1)). και $AE\perp B\Gamma$ (Ε σημείο του ΒΓ). Δείξτε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα το ΑΔ εφάπτεται του ΒΓ στο σημείο Ε.

Λύση

i. Επειδή $\Gamma A=\Gamma B\Rightarrow \Gamma\hat{A}B=A\hat{B}\Gamma=\hat{x}$.
Στο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε:

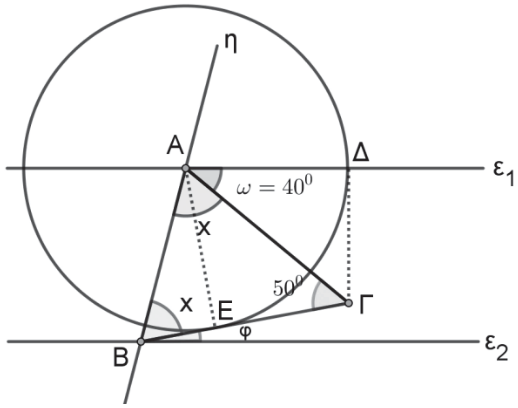
$50^0+2\hat{x}=180^0\Leftrightarrow 2\hat{x}=130^0\Leftrightarrow \hat{x}=65^0$.

ii. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ έχουμε $\left(\hat{\omega}+\hat{x}\right)+\left(\hat{x}+\hat{\varphi}\right)=180^0\Leftrightarrow$

$\hat{\omega}+2\hat{x}+\hat{\varphi}=180^0\Leftrightarrow 170^0+\hat{\varphi}=180^0\Leftrightarrow \hat{\varphi}=10^0$.

iii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ έχουμε

$$A\hat{\Gamma}\Delta=90^0-\hat{\omega}=50^0.$$



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΑΓ, ΕΑΓ έχουν κοινή την υποτείνουσα ΑΓ και $\Delta\hat{\Gamma}A=E\hat{\Gamma}A=50^0$, οπότε είναι ίσα. Άρα $AE=A\Delta$. Αυτό σημαίνει ότι το Ε είναι σημείο του κύκλου $(A,A\Delta)$. Αφού $B\Gamma\perp AE$ η ΒΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου. Συνεπώς ο κύκλος $(A,A\Delta)$ εφάπτεται του ΒΓ στο σημείο Ε.

Θέμα 2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^0\right)$. Στο σημείο Γ φέρουμε κάθετη ευθεία στη ΒΓ και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα ΓΔ = ΑΓ.

α. Αν το σημείο Δ περιέχεται στη $\hat{A}$, δείξτε ότι η διχοτόμος της $\hat{B}$ τέμνει κάθετα το τμήμα ΑΔ στο σημείο Ε.

β. Αν το σημείο Δ περιέχεται στη $\hat{B}$, δείξτε ότι η διχοτόμος της $\hat{B}$ είναι παράλληλη με την ΑΔ.

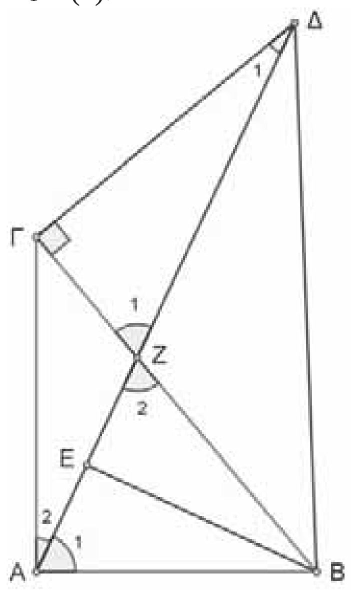
γ. Αν το σημείο Δ περιέχεται στη $\hat{A}$ και Κ είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ, δείξτε ότι το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.

Λύση

α. Αφού ΓΑ = ΓΔ, το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ, οπότε $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_1$ (1).

Έχουμε: $\hat{A}_2=90^0-\hat{A}_1\Leftrightarrow \hat{A}_1=90^0-\hat{A}_2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\hat{A}_1=90^0-\hat{\Delta}_1$ (2).

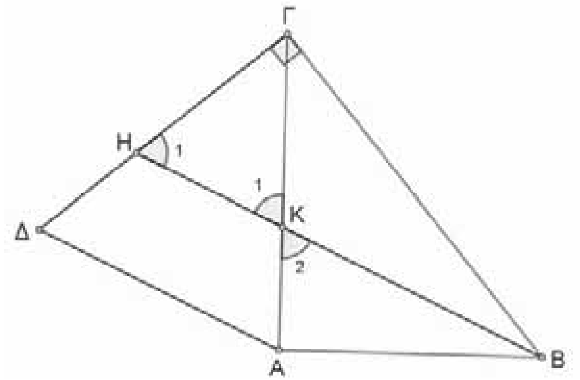


Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΔ έχουμε:

$\hat{Z}_1 = 90^0 - \hat{\Delta}_1$ και επειδή $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ ως κατακορυφήν είναι $\hat{Z}_2 = 90^0 - \hat{\Delta}_1$ (3).

Από τις (2),(3) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{Z}_2$, οπότε το τρίγωνο BAZ είναι ισοσκελές με κορυφή το B και επειδή η BE είναι διχοτόμος της $\hat{B}$ θα είναι και ύψος, δηλαδή $BE \perp AZ \Rightarrow BE \perp A\Delta$.

β. Έστω H το σημείο τομής της διχοτόμου της $\hat{B}$ με το τμήμα $\Gamma\Delta$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓHB έχουμε: $\hat{H}_1 = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2}$ (4). Είναι $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ ως κατακορυφήν. Στο ορθογώνιο τρίγωνο AKB έχουμε:



$\hat{K}_2 = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2} \Leftrightarrow \hat{K}_1 = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2}$ (5).

Από τις (4),(5) προκύπτει ότι $\hat{H}_1 = \hat{K}_1$ δηλαδή το τρίγωνο ΓHK είναι ισοσκελές, οπότε

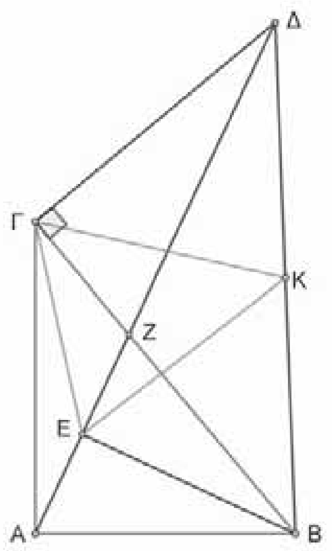
$\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 2\hat{H}_1$,

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta A$ έχουμε:

$\Delta\hat{\Gamma}A = 180^0 - 2\Gamma\hat{\Delta}A$. Άρα $180^0 - 2\hat{H}_1 =$

$180^0 - 2\Gamma\hat{\Delta}A \Leftrightarrow \hat{H}_1 = \Gamma\hat{\Delta}A$. Άρα $BH // A\Delta$

γ.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $EB\Delta$ η EK είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη υποτείνουσα $B\Delta$, οπότε έχουμε: $EK = \frac{B\Delta}{2}$.

Όμοια στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ έχουμε: $\Gamma K = \frac{B\Delta}{2}$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι $KE = K\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $K\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

Θέμα 3. Πάνω σε μία ευθεία (ε) παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ, Δ τέτοια ώστε $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \alpha$. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο $B\Gamma EZ$ έτσι ώστε $\Gamma E = 2B\Gamma$. Τα τμήματα $AE, \Delta Z$ τέμνονται στο K. Τα τμήματα AE, BZ τέμνονται στο M και τα τμήματα $Z\Delta, E\Gamma$ τέμνονται στο Λ. Να δείξετε ότι:

i. $AE \perp \Delta Z$.

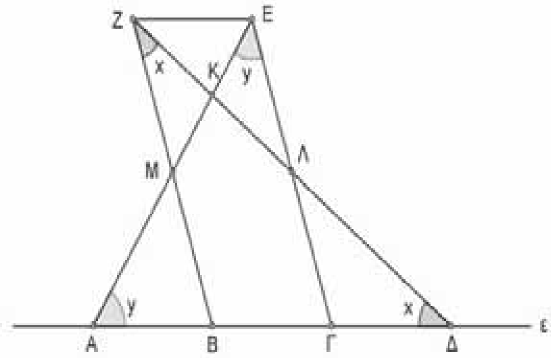
ii. Αν τα τμήματα $\Gamma M, B\Lambda$ τέμνονται στο T, τότε είναι $KT = \alpha$.

Λύση

i. Έχουμε $A\Gamma = \Gamma E = 2\alpha$, οπότε το τρίγωνο ΓAE είναι ισοσκελές. Άρα $\Gamma\hat{A}E = \Gamma\hat{E}A = \hat{y}$. Όμοια το τρίγωνο $B\Delta Z$ είναι ισοσκελές με $B\hat{\Delta}Z = B\hat{Z}\Delta = \hat{x}$

$E\hat{Z}\Delta = Z\hat{\Delta}\Gamma = \hat{x}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ZE, (\varepsilon)$ που τέμνονται από το $Z\Delta$.

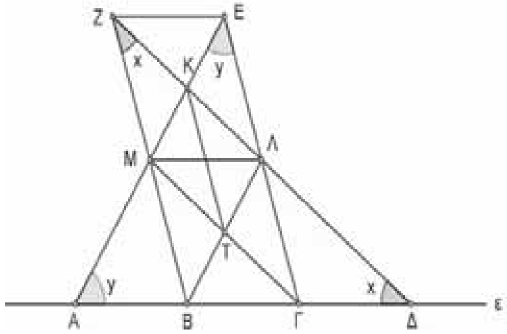
$Z\hat{E}A = E\hat{A}B = \hat{y}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $ZE, (\varepsilon)$ που τέμνονται από το EA.



Επειδή το $ZE\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $B\hat{Z}E + \Gamma\hat{E}Z = 180^0 \Leftrightarrow 2\hat{x} + 2\hat{y} = 180^0 \Leftrightarrow$

$\hat{x} + \hat{y} = 90^0 \Rightarrow A\hat{K}\Delta = 90^0$. Άρα $AE \perp \Delta Z$.

ii. Επειδή $ZE // = AB$ το τετράπλευρο $ZEBA$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του AE, ZB διχοτομούνται. Άρα το M είναι μέσο του AE και άρα $\Gamma M \perp AE$, αφού το τρίγωνο ΓAE είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ και το ΓM είναι διάμεσός του.



Επίσης το τετράπλευρο $ΖΓΔΕ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού $ΖΕ//=ΓΔ$. Το $Λ$ είναι σημείο τομής των διαγωνίων του $ΖΓΔΕ$, οπότε το $Λ$ είναι μέσο του $ΖΔ$. Αφού το τρίγωνο $ΒΖΔ$ είναι ισοσκελές με κορυφή το $Β$ και το $ΒΛ$ είναι διάμεσός του, έχουμε $ΒΛ \perp ΖΔ$. Το τετράπλευρο $ΚΛΤΜ$ είναι ορθογώνιο αφού οι γωνίες του είναι ορθές. Άρα $ΚΤ=ΛΜ$ (1). Το τετράπλευρο $ΜΛΓΒ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού $ΜΒ//=ΛΓ$, οπότε $ΜΛ=ΒΓ=α$. Άρα (1) $\Leftrightarrow ΚΤ=α$.

Θέμα 4. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΓ=2ΑΒ$ και $ΑΔ$ διχοτόμος του. Από την κορυφή $Β$ φέρουμε κάθετο στην $ΑΔ$ που τέμνει την $ΑΔ$ στο σημείο $Κ$ και την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο $Ε$. Ονομάζουμε $Λ$ το μέσο της πλευράς $ΒΓ$.

α. i. Δείξτε ότι: $Β\hat{Ε}Γ=\hat{Α}+Β\hat{Ε}Α$.

ii. Προεκτείνουμε το τμήμα $ΕΛ$ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $ΛΣ=ΕΛ$.

Δείξτε ότι: $ΑΒ=ΒΣ$.

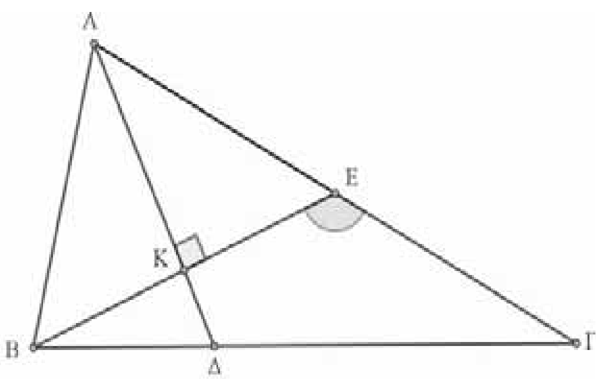
iii. Τα σημεία $Α,Δ,Σ$ είναι συνευθειακά.

β. i. Έστω $Θ$ το σημείο τομής των $ΕΛ,ΓΚ$ Να δείξετε ότι $ΘΕ=\frac{1}{3}ΑΒ$

ii. Το $ΒΘ$ τέμνει την πλευρά $ΑΓ$ στο σημείο $Μ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΕΛΜ$ είναι ισοσκελές.

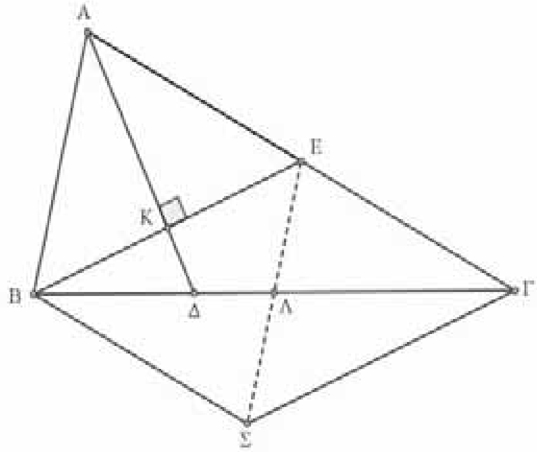
Λύση

α. i. Στο τρίγωνο $ΑΒΕ$ το $ΑΚ$ είναι διχοτόμος και ύψος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΕ$. Επειδή $ΑΓ=2ΑΒ$ το $Ε$ είναι μέσο του $ΑΓ$. Επιπλέον $Α\hat{Β}Ε=Β\hat{Ε}Α$.



Η γωνία $Β\hat{Ε}Γ$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΑΒΕ$ οπότε: $Β\hat{Ε}Γ=\hat{Α}+Ε\hat{Β}Α \Leftrightarrow Β\hat{Ε}Γ=\hat{Α}+Β\hat{Ε}Α$.

ii.

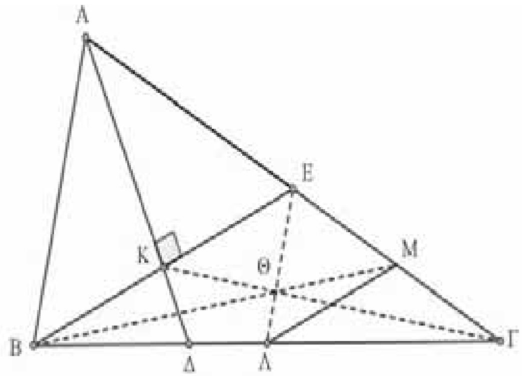


Το τετράπλευρο $ΒΕΓΣ$ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιές του διχοτομούνται. Άρα $ΒΣ=ΕΓ=ΕΑ=ΑΒ \Rightarrow ΒΣ=ΑΒ$.

iii. Έχουμε $ΒΣ//=ΕΓ \Rightarrow ΒΣ//=ΑΕ$. Άρα το $ΑΒΣΕ$ είναι παραλληλόγραμμο και επειδή $ΒΣ=ΑΒ$ θα είναι ρόμβος. Επειδή $ΑΣ \perp ΒΕ$ ως διαγώνιες του ρόμβου $ΑΒΣΕ$, το $ΑΔ$ είναι τμήμα της διαγωνίου $ΑΣ$ αφού $ΑΔ \perp ΒΕ$. Άρα τα σημεία $Α,Δ,Σ$ είναι συνευθειακά.

β. i. Το $ΑΚ$ ως διχοτόμος του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΕ$ από την κορυφή $Α$ θα είναι και διάμεσος. Άρα το $Κ$ είναι μέσο του $ΒΕ$. Το $Θ$ είναι σημείο τομής δύο διαμέσων του τριγώνου $ΕΒΓ$ οπότε είναι βαρύκεντρο του τριγώνου.

Το $ΕΛ$ ενώνει τα μέσα των πλευρών $ΑΓ, ΓΒ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, οπότε είναι $ΕΛ=\frac{ΑΒ}{2}$.



$$ΘΕ=\frac{2}{3}ΕΛ=\frac{2}{3}\frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΘΕ=\frac{1}{3}ΑΒ.$$

ii. Το $ΒΜ$ αφού διέρχεται από το $Θ$ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου $ΕΒΓ$ οπότε

$$ΕΜ=\frac{ΕΓ}{2}=\frac{ΑΕ}{2} \Leftrightarrow ΕΜ=\frac{ΑΒ}{2}=ΕΛ.$$

Άρα το τρίγωνο $ΕΜΛ$ είναι ισοσκελές με κορυφή το σημείο $Ε$.

Τάξη: Β΄

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Μαρία Σίσκου – Χρήστος Π. Τσιφάκης

Άσκηση 1η. Να αποδείξετε ότι: Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται διά του $x-3$, τότε το πολυώνυμο $P(4x-5)$ διαιρείται διά του $x-2$.

Λύση. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται διά του $x-3$ τότε $P(3)=0 \quad (1)$.

Για $x=2$ έχουμε $P(4\cdot 2-5)=P(3)\overset{(1)}{=}0$. Άρα το πολυώνυμο $P(4x-5)$ διαιρείται διά του $x-2$.

Άσκηση 2η. Να αποδείξετε ότι: το πολυώνυμο $P(x)=x^4-9x^3+25x^2-24x+4$ διαιρείται διά του $(x-2)^2$.

Λύση. α΄ τρόπος: Παρατηρούμε ότι το $P(x)$ γράφεται: $P(x)=x^4-9x^3+25x^2-24x+4=$

$x^4-2x^3-7x^3+14x^2+11x^2-22x-2x+4=$
$x^3(x-2)-7x^2(x-2)+11x(x-2)-2(x-2)=$
$(x-2)\cdot(x^3-7x^2+11x-2)=(x-2)\cdot q(x)$.

$q(x)=x^3-7x^2+11x-2=$
$x^3-2x^2-5x^2+10x+x-2=$
$x^2(x-2)-5x(x-2)+(x-2)=$
$(x-2)\cdot(x^2-5x+1)$.

Άρα έχουμε: $P(x)=(x-2)\cdot q(x)=$
$(x-2)\cdot(x-2)\cdot(x^2-5x+1)=(x-2)^2\cdot(x^2-5x+1)$

β΄ τρόπος: Κάνουμε την διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ διά του x^2-4x+4 και έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-9x^3+25x^2-24x+4 & x^2-4x+4 \\ \cline{2-2}
-x^4+4x^3-4x^2 & x^2-5x+1 \\ \hline
-5x^3+21x^2-24x+4 & \\
5x^3-20x^2+20x & \\ \hline
x^2-4x+4 & \\
-x^2+4x-4 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται διά του $(x-2)^2=x^2-4x+4$

γ΄ τρόπος: με σχήμα Horner έχουμε:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -9 & 25 & -24 & 4 & 2 \\
 & 2 & -14 & 22 & -4 & \\ \hline
1 & -7 & 11 & -2 & 0 &
\end{array}
$$

Άρα το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ αφού $P(x)=(x-2)\cdot(x^3-7x^2+11x-2)$.

Αρκεί το $x-2$ να είναι και παράγοντας του πηλίκου

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & -7 & 11 & -2 & 2 \\
 & 2 & -10 & 2 & \\ \hline
1 & -5 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Άρα $P(x)=(x-2)^2\cdot(x^2-5x+1)$.

δ΄τρόπος: Κάνουμε την αντικατάσταση $x-2=y \Leftrightarrow x=y+2$ και έχουμε

$P(y+2)=(y+2)^4-9(y+2)^3+25(y+2)^2-$
$-24(y+2)+4=y^4-y^3-5y^2=y^2(y^2-y-5)$.

Κάνουμε πάλι την αντικατάσταση $y=x-2$ και προκύπτει $P(x)=(x-2)^2\cdot\left[(x-2)^2-(x-2)-5\right]$.

Άρα το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται διά του $(x-2)^2$.

Άσκηση 3η. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$, $\nu\in\mathbb{N}$ διαιρείται με το πολυώνυμο $q(x)=2x^3+3x^2+x$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι το $q(x)$ γράφεται: $q(x)=2x^3+3x^2+x=x(2x^2+3x+1)=$
$x(x+1)(2x+1)$. Άρα αρκεί το πολυώνυμο $f(x)$ να έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $q(x)$, δηλαδή να έχει ρίζες τους αριθμούς $x=0$, $x=-1$ και $x=-\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

$f(0)=(0+1)^{2\nu}-0^{2\nu}-2\cdot 0-1=0$,

$f(-1)=(-1+1)^{2\nu}-(-1)^{2\nu}-2(-1)-1=0$

και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2\nu}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=0$

Άρα το $f(x)$ διαιρείται με το $q(x)$.

Άσκηση 4η. Δίνεται το τριτοβάθμιο πολυώνυμο $P(x)$ με $P(0)=\frac{1}{6}$, για το οποίο ισχύει:

$P(x)-P(x-1)\equiv x^2$ για κάθε $x\in R$.

i) Να βρείτε το $P(x)$

ii) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $P(x)=-\frac{5}{6}$ έχει ακέραιες ρίζες και αν ναι, να βρεθούν.

Λύση. i) Αφού το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού έχει την μορφή: $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ και $\alpha\neq 0$. Αφού $P(0)=\frac{1}{6}$ έχουμε ότι $\delta=\frac{1}{6}$, άρα $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\frac{1}{6}$.

Για κάθε $x\in R$ έχουμε: $P(x)-P(x-1)\equiv x^2$

δηλαδή $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\frac{1}{6}-\alpha(x-1)^3-\beta(x-1)^2-$

$-\gamma(x-1)-\frac{1}{6}\equiv x^2$, δηλαδή

$3\alpha x^2-(3\alpha-2\beta)x+\alpha-\beta+\gamma\equiv x^2$

$$\text{Άρα}\ \left.\begin{aligned}3\alpha&=1\\3\alpha-2\beta&=0\\\alpha-\beta+\gamma&=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{1}{3}\\\beta&=\frac{1}{2}\\\gamma&=\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}$$

Άρα $P(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$.

ii) Η εξίσωση γίνεται:

$P(x)=-\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}\Leftrightarrow$

$2x^3+3x^2+x+6=0$.

Πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\Delta(6)=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Αφού όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί αριθμοί θα δοκιμάσουμε με το σχήμα Horner μόνο τους $-1,-2,-3,-6$ και τελικά βρίσκουμε ότι ακέραια ρίζα είναι το $x=-2$.

Άσκηση 5η. Να λυθεί στο R η εξίσωση

$$x^4-5x^3+7x^2-5x-6=0.$$

Λύση. Πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\Delta(6)=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Με το σχήμα Horner βλέπουμε ότι η εξίσωση δεν έχει ακέραιες ρίζες. Αφού το πολυώνυμο είναι 4ου βαθμού θα γράφεται ως γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων. Έτσι έχουμε:

$x^4-5x^3+7x^2-5x-6=$

$(x^2+\alpha x-2)\cdot(x^2+bx+3)=$

$x^4+(\alpha+b)x^3+(1+\alpha b)x^2+(3\alpha-2b)x-6$

$$\text{Άρα}\ \left.\begin{aligned}\alpha+b&=-5\\1+\alpha b&=7\\3\alpha-2b&=-5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\alpha+b&=-5\\\alpha b&=6\\3\alpha-2b&=-5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=-2,\ b=-3\\&\alpha=-3,\ b=-2\\&3\alpha-2b=-5\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\alpha=-3,b=-2$$

Δηλαδή γράφεται: $(x^2-3x-2)\cdot(x^2-2x+3)$

και η εξίσωση γίνεται: $x^4-5x^3+7x^2-5x-6=0\Leftrightarrow$

$(x^2-3x-2)\cdot(x^2-2x+3)=0\Leftrightarrow$

$x^2-3x-2=0\vee x^2-2x+3=0\Leftrightarrow$

$x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ ή

$x^2-2x+3=0$, αδύνατη.

Άσκηση 6η. Να λυθεί στο R η εξίσωση

$$\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}=x\sqrt{x+2}.$$

Λύση.

Πρέπει και αρκεί

$$\left.\begin{aligned}&x+2\geq0\\&x+6+4\sqrt{x+2}\geq0\\&x\geq0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&x+2\geq0\\&x+2+4+4\sqrt{x+2}\geq0\\&x\geq0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}&x+2\geq0\\&\left(2+\sqrt{x+2}\right)^2>0\\&x>0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow x>0$$

Άρα η εξίσωση γίνεται: $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}=x\sqrt{x+2}\Leftrightarrow$

$\sqrt{\left(2+\sqrt{x+2}\right)^2}=x\sqrt{x+2}\Leftrightarrow$

$2+\sqrt{x+2}=x\sqrt{x+2}\Leftrightarrow(x-1)\sqrt{x+2}=2\overset{\text{Με } x>1}{\Leftrightarrow}$

$(x-1)^2(x+2)=4\Leftrightarrow x^3-3x-2=0\Leftrightarrow$

$x=2\vee x=-1$, διπλή ρίζα που απορρίπτεται.

Άρα ρίζα το $x=2$.

Άσκηση 7η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$\mathbf{x^2-2x+5-3\sqrt{2x^2-4x+5}=0}.$$

Λύση. Πρέπει και αρκεί $2x^2-4x+5\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$x^2-2x+5-3\sqrt{2x^2-4x+5}=0\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2x^2-4x+10-6\sqrt{2x^2-4x+5}=0\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2x^2-4x+5}\right)^2-6\sqrt{2x^2-4x+5}+5=0\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2x^2-4x+5}=5\vee\sqrt{2x^2-4x+5}=1$$

Από $\sqrt{2x^2-4x+5}=5\Leftrightarrow 2x^2-4x+5=25\Leftrightarrow$ $x^2-2x-10=0\Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{11}$, δεκτές.

Από $\sqrt{2x^2-4x+5}=1\Leftrightarrow 2x^2-4x+5=1\Leftrightarrow$ $x^2-2x+2=0\Leftrightarrow(x-1)^2+1=0$, Αδύνατη.

Άρα έχει ρίζες τις $x_{1,2}=1\pm\sqrt{11}$.

Άσκηση 8η. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^3-2x^2+(1-m)x+m$, με $x\in\mathbb{R}$ και $m\in\mathbb{R}$. Εάν η γραφική του παράσταση C_f τέμνει τον $x'x$ σε τρία διαφορετικά σημεία $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $\Gamma(x_3,0)$, να βρείτε τις τιμές του m για τις οποίες ισχύει

$$\mathbf{x_1^2+x_2^2+x_3^2<4}.$$

Λύση. Αφού η γραφική του παράσταση C_f τέμνει τον $x'x$ σε τρία διαφορετικά σημεία $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$ και $\Gamma(x_3,0)$ πρέπει και αρκεί η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει τρεις διαφορετικές ρίζες x_1, x_2, x_3. Έτσι έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow$$

$$x^3-2x^2+x-mx+m=0\Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^2-x-m)=0\Leftrightarrow x=1\vee x^2-x-m=0.$$

Άρα $x_1=1$ και από $x^2-x-m=0$ έχουμε ότι $m\neq 0$, γιατί αν $m=0$ τότε η εξίσωση έχει επιπλέον ρίζες το $x_2=0$ και $x_3=1$, άτοπο. Άρα πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix}\Delta>0\\ m\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}1+4m>0\\ m\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}m>-\frac{1}{4}\\ m\neq 0\end{matrix}\right\}$.

Έτσι έχουμε $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow 1+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow$

$$(x_2+x_3)^2-2x_2x_3<3\underset{P=x_1x_2=-m}{\overset{S=x_1+x_2=1}{\Leftrightarrow}} m<1.$$

Άρα $m\in\left(-\frac{1}{4},0\right)\cup(0,1)$.

Άσκηση 9η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$\mathbf{\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4\quad(1)}.$$

Λύση. Πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix}2x^2+16x+18\geq 0\\ x^2-1\geq 0\\ 2x+4\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}x\leq -4-\sqrt{7}\vee x\geq -4+\sqrt{7}\\ x\leq -1\vee x\geq 1\\ x\geq -2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[1,+\infty)$$

Έτσι έχουμε: $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4\Leftrightarrow$

$$\sqrt{x^2-1}=2x+4-\sqrt{2x^2+16x+18}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{(2x+4)^2-\left(\sqrt{2x^2+16x+18}\right)^2}{2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{2(x^2-1)}{2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2-1}\left(\frac{2\sqrt{x^2-1}}{2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}}-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x=\pm 1 \text{ ή } \frac{2\sqrt{x^2-1}}{2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}}-1=0\Leftrightarrow$$

$$x=\pm 1 \text{ ή } 2\sqrt{x^2-1}=2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$x=\pm 1 \text{ ή } 3\sqrt{x^2-1}=4x+8\Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ ή}$$

$$9(x^2-1)=16x^2+64x+64\Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ ή}$$

$$7x^2+64x+73=0\Leftrightarrow x=\pm 1 \text{ ή } x=\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}$$

ή $x=\frac{-32-3\sqrt{57}}{7}$ που απορρίπτεται. Άρα τελικά το σύνολο ριζών της είναι $S=\left\{-1,1,\frac{-32+3\sqrt{57}}{7}\right\}$

.

Άσκηση 10η. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$\mathbf{\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^3}}$$

Λύση. Πρέπει και αρκεί $\left.\begin{matrix}x-1\geq 0\\ x^2-1\geq 0\\ x\geq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow x\geq 1$.

Έτσι υψώνοντας στο τετράγωνο, έχουμε

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^3}\Leftrightarrow$$

$$x-1+x^2-1+2(x-1)\sqrt{x+1}=x^3\Leftrightarrow$$

$$x^3-x^2-x+2=2(x-1)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow$$

$$x^6-2x^5-x^4+2x^3+x^2=0\Leftrightarrow$$

$$x^2\left(x^4-2x^3-x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=0 \overset{:x^2\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Αν θέσουμε $x-\frac{1}{x}=y$ τότε $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2$ και η εξίσωση γίνεται: $y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow y=1$.

Οπότε $x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi$.

Άσκηση 11η. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ τις εξισώσεις:

i) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}=\left(\sqrt{2}\right)^{x-6}$

ii) $15^{2x^2-10x+12}=(2020)^0$

iii) $9^{x+1}-13\cdot 6^x+4^{x+1}=0$

Λύση. i) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}=\left(\sqrt{2}\right)^{x-6} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2^3}\right)^{x-2}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x-6} \Leftrightarrow$

$$2^{-3x+6}=2^{\frac{x-6}{2}} \Leftrightarrow -3x+6=\frac{x-6}{2} \Leftrightarrow$$

$$-6x+12=x-6 \Leftrightarrow x=\frac{18}{7}.$$

ii) $15^{2x^2-10x+12}=(2020)^0 \Leftrightarrow 15^{2x^2-10x+12}=1 \Leftrightarrow$

$15^{2x^2-10x+12}=15^0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+12=0 \Leftrightarrow$

$x=2 \ \vee \ x=3$.

iii) $9^{x+1}-13\cdot 6^x+4^{x+1}=0 \Leftrightarrow$

$9\cdot 9^x-13\cdot 6^x+4\cdot 4^x=0 \Leftrightarrow$

$$9\cdot\frac{9^x}{4^x}-13\cdot\frac{6^x}{4^x}+4\cdot\frac{4^x}{4^x}=0 \Leftrightarrow$$

$$9\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+4=0 \overset{\left(\frac{3}{2}\right)^x=\omega}{\Leftrightarrow}$$

$9\cdot\omega^2-13\cdot\omega+4=0 \overset{\Delta=25>0}{\Leftrightarrow} \omega=1 \vee \omega=\frac{4}{9}$. Άρα έχουμε: $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1 \Leftrightarrow x=0$ ή $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9} \Leftrightarrow x=-2$

Άσκηση 12η. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2020^{|4x-1|-7}>1$ **ii)** $\left(\frac{1}{625}\right)^{x^2-2x}-5^{x^2-14x+4}\geq 0$

iii) $5\cdot 9^x-2\cdot 6^x<3\cdot 4^x$

Λύση.

i) $2020^{|4x-1|-7}>1 \Leftrightarrow 2020^{|4x-1|-7}>2020^0 \Leftrightarrow$

$|4x-1|-7>0 \Leftrightarrow |4x-1|>7 \Leftrightarrow$

$$4x-1<-7 \vee 4x-1>7 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{2} \vee x>2$$

ii) $\left(\frac{1}{625}\right)^{x^2-2x}-5^{x^2-14x+4}\geq 0 \Leftrightarrow 5^{-4x^2+8x}\geq 5^{x^2-14x+4} \Leftrightarrow$

$$-4x^2+8x\geq x^2-14x+4 \Leftrightarrow 5x^2-22x+4\leq 0 \overset{\Delta=404}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{11-\sqrt{101}}{5}\leq x\leq\frac{11+\sqrt{101}}{5}.$$

iii) $5\cdot 9^x-2\cdot 6^x<3\cdot 4^x \Leftrightarrow 5\cdot\frac{9^x}{9^x}-2\cdot\frac{6^x}{9^x}<3\cdot\frac{4^x}{9^x} \Leftrightarrow$

$$5-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x<3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x-5>0 \overset{\left(\frac{2}{3}\right)^x=y>0}{\Leftrightarrow}$$

$$3y^2+2y-5>0 \overset{\Delta=64}{\Leftrightarrow} y<-\frac{5}{3} \vee y>1.$$

Άρα $\left(\frac{2}{3}\right)^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

Άσκηση 13η. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του m για τις οποίες η εξίσωση $2^{\eta\mu^2 x}+3^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=m\cdot 3^{\eta\mu^2 x}$ έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Η εξίσωση γίνεται:

$$2^{\eta\mu^2 x}+3^{\sigma\upsilon\nu^2 x}=m\cdot 3^{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$2^{\eta\mu^2 x}+3^{1-\eta\mu^2 x}=m\cdot 3^{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\eta\mu^2 x}+3^{1-2\eta\mu^2 x}=m.$$

Αν θέσουμε $t=\eta\mu^2 x$ με $t\in[0,1]$ τότε η εξίσωση γίνεται: $\left(\frac{2}{3}\right)^t+3^{1-2t}=m$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3^{1-2t}=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3\left(\frac{1}{9}\right)^t$ με $t\in[0,1]$.

$$\text{Με } t_1<t_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overset{\frac{2}{3}<1}{\Rightarrow} \left(\frac{2}{3}\right)^{t_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{t_2} \\ \overset{\frac{1}{9}<1}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{9}\right)^{t_1}>\left(\frac{1}{9}\right)^{t_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{t_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{t_2} \\ 3\left(\frac{1}{9}\right)^{t_1}>3\left(\frac{1}{9}\right)^{t_2} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{t_1}+3\left(\frac{1}{9}\right)^{t_1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{t_2}+3\left(\frac{1}{9}\right)^{t_2} \Rightarrow f(t_1)>f(t_2)$$

άρα η f 2 $[0,1]$. Οπότε με

$$0\leq t\leq 1 \overset{f\,2}{\Leftrightarrow} f(1)\leq f(t)\leq f(0) \Leftrightarrow 1\leq m\leq 4.$$

Άρα $m\in\{1,2,3,4\}$.

Άσκηση 14η. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$ ορισμένη στο $(0,+\infty)$.

Εάν ισχύει η σχέση $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(2017)=e^{\frac{m}{n}}$, όπου $m,n\in N$ και $\frac{m}{n}$ ανάγωγο κλάσμα, να υπολογίσετε την παράσταση $P=m-n^2$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι: $1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{1}{x(x+1)}+1=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1\right)^2$$

Άρα ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x)=e^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=e^{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1\right)^2}}=$$

$$e^{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1\right|}=e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+1}=e\cdot e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}.$$

Άρα $f(1)=e\cdot e^{1-\frac{1}{2}}$, $f(2)=e\cdot e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, $f(3)=e\cdot e^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$,

… $f(2016)=e\cdot e^{\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}}$ και $f(2017)=e\cdot e^{\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}}$.

Έτσι έχουμε $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(2017)=e^{2017}\cdot e^{1-\frac{1}{2018}}=$

$$e^{2017}\cdot e^{\frac{2017}{2018}}=e^{2017+\frac{2017}{2018}}=e^{\frac{2017\cdot 2019}{2018}}=e^{\frac{2018^2-1}{2018}}$$

Άρα $m=2018^2-1$ και $n=2018$

οπότε $P=m-n^2=-1$.

Άσκηση 15η. Να υπολογίσετε το άθροισμα S των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:

$$\left(3^x-9\right)^3+\left(9^x-3\right)^3=\left(9^x+3^x-12\right)^3$$

Λύση. Αν θέσουμε $\alpha=3^x-9$, $\beta=9^x-3$ τότε $\alpha+\beta=3^x+9^x-12$.

Άρα η εξίσωση γίνεται: $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3\Leftrightarrow$

$\alpha^3+\beta^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0\Leftrightarrow$

$3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0\Leftrightarrow$ $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\alpha+\beta=0$.

Αν $\alpha=0$ προκύπτει $x=2$. Αν $\beta=0$ προκύπτει $x=\frac{1}{2}$. Αν $\alpha+\beta=0$ προκύπτει

$$3^x+9^x-12=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2+3^x-12=0\Leftrightarrow$$

$3^x=-4$ αδύνατη ή $3^x=3\Leftrightarrow x=1$.

Άρα $S=2+\frac{1}{2}+1=\frac{7}{2}$.

Παρατήρηση: Μπορούμε να εφαρμόσουμε και την ταυτότητα του Euler, γιατί

$$\alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta)^3=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha^3+\beta^3+(-\alpha-\beta)^3=0\overset{\alpha+\beta+(-\alpha-\beta)=0}{\Leftrightarrow}-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=0$$

και συνεχίζουμε όμοια.

Άσκηση 16η. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}$, με $x\in R$. Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in R$ η f παρουσιάζει ελάχιστο καθώς και την τιμή του ελάχιστου.

Λύση. Από την ανισότητα ΑΜ – ΓΜ έχουμε:

$2^{x-1}+2^{3-x}\geq 2\sqrt{2^{x-1}\cdot 2^{3-x}}=2\sqrt{4}=4$ για κάθε $x\in R$. Άρα $f(x)=2^{x-1}+2^{3-x}\geq 4=f(2)$

Συνεπώς η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=2$ το $f(2)=4$.

Άσκηση 17η. Αν S είναι το σύνολο λύσεων της εξίσωσης $2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1$, $x\in R$ να υπολογίσετε το πλήθος και το άθροισμα των στοιχείων του.

Λύση. Η εξίσωση γίνεται:

$$2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1\Leftrightarrow$$

$$2^{x^2-x}+\frac{2^{x^2-x}}{4}=4^{x^2-x-1}+1\Leftrightarrow$$

$$4\cdot 2^{x^2-x}+2^{x^2-x}=4\cdot\frac{4^{x^2-x}}{4}+4\Leftrightarrow$$

$$5\cdot 2^{x^2-x}=2^{2\left(x^2-x\right)}+4\Leftrightarrow\left(2^{x^2-x}\right)^2-5\cdot 2^{x^2-x}+4=0.$$

Αν θέσουμε $2^{x^2-x}=y>0$ έχουμε: $y^2-5y+4=0$ η οποία έχει λύσεις $y=1$ ή $y=4$.

- Για $y=1$ έχουμε
  $2^{x^2-x}=1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=1$
- Για $y=4$ έχουμε
  $2^{x^2-x}=4\Leftrightarrow x^2-x=2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow$
  $x=2\vee x=-1$.

Άρα $S=\{-1,0,1,2\}$, το πλήθος των στοιχείων του είναι 4 και το άθροισμά τους 2.

Βιβλιογραφία:

1. 02-631 Cau Tn Mu - Logarit - Muc do Thong Hieu - Giai Chi Tiet. [Βιετνάμ].
2. Μαθηματικά Β Λυκείου Ύλη επιλογής, ΟΕΔΒ 1980

Διόρθωση: Να γραφεί: Στην άσκηση **6** στο άρθρο: Διαφορικό και ρυθμός μεταβολής τεύχος 114, σελίδες 59-60 δεν τηρήσαμε την σύσταση μας στον πρόλογο, όπου συνιστούσαμε να αποφεύγεται ένας συγκεκριμένος υπαρκτός συμβολισμός, ώστε να μην έχουμε λαθεμένη εντύπωση. Άρα κάθε συμβολισμός εκεί του τύπου $\frac{df(x_0)}{dt}$, να αντικατασταθεί από τον συμβολισμό $\left.\frac{df(x)}{dt}\right|_{t=t_0}$, οπότε $x_0=x(t_0)$.

Τάξη:Β Κανονικά Πολύγωνα – Μέτρηση Κύκλου

Καρδαμίτσης Σπύρος

*Ο αριθμός π, γνωστός από την αρχαιότητα βρέθηκε στον πάπυρο Rhind (17ος αιώνας π.Χ) να περιέχεται μεταξύ των αριθμών 3 και 4 (3 < π < 4), αργότερα ο Αρχιμήδης τον προσέγγισε καλύτερα ($3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$). Στο τέλος του 16ου αιώνα ο Viète υπολόγισε τον αριθμό π με 10 δεκαδικά ψηφία, με κανονικό πολύγωνο 3×2^{16} πλευρών. Το 1873 ο Άγγλος Shanks υπολόγισε τα πρώτα 707 δεκαδικά ψηφία του (σήμερα αναγράφονται στη ζωφόρο του μεγάρου της ανακαλύψεως στο Παρίσι). Το 1958 ο ηλεκτρονικός υπολογιστής IBM 704 υπολόγισε τα πρώτα 10.000 δεκαδικά ψηφία. Το 2000 οι Αμερικάνοι Stan Wagon και Stanley Rabinowitz υπολόγισαν τα πρώτα τετράκις εκατομμυριοστά (10^{15}) ψηφία του π σε δυαδική μορφή. Το 2017 ένας υπάλληλος της Yahoo υπολόγισε τα πρώτα δύο τετράκις εκατομμυριοστά ($2\cdot 10^{15}$) ψηφία του π σε δυαδική μορφή….**Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί, το κύκλου μήκος ίνα ορίση διαμέτρω, παρήγαγεν αριθμόν απέραντον, καί όν, φεύ, ουδέποτε όλον θνητοί θα εύρωσι.***

Άσκηση 1η.

Σε κύκλο ακτίνας R είναι εγγεγραμμένα τετράγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο. Αν το εμβαδό του τετραγώνου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό του τριγώνου κατά $8-3\sqrt{3}$, τότε

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα R του εγγεγραμμένου κύκλου.

β) Να βρεθούν τα εμβαδά των πολυγώνων.

Λύση

α) Για το εμβαδό του τετραγώνου έχουμε:

$$E_4 = 4\cdot\frac{1}{2}\lambda_4\cdot\alpha_4 = 2R\sqrt{2}\,\frac{R\sqrt{2}}{2} = 2R^2$$

Για το εμβαδό του ισοπλεύρου τριγώνου έχουμε:

$$E_3 = \frac{1}{2}\lambda_3\cdot(R+\alpha_3) = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\left(R+\frac{R}{2}\right) = \\ = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

Η διαφορά των δύο εμβαδών είναι:

$$E_4 - E_3 = 2R^2 - \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} = R^2\,\frac{(8-3\sqrt{3})}{4}$$

και με βάση την υπόθεση έχουμε:

$$R^2\,\frac{(8-3\sqrt{3})}{4} = 8-3\sqrt{3} \Rightarrow R = 2$$

β) Αντικαθιστώντας την τιμή της ακτίνας στα παραπάνω εμβαδά που έχουμε υπολογίσει προκύπτει

$$E_4 = 2R^2 = 2\cdot 2^2 = 8 \text{ και}$$

$$E_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}\cdot 2^2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Άσκηση 2η.

Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R και Μ το μέσο της πλευράς του ΓΔ.

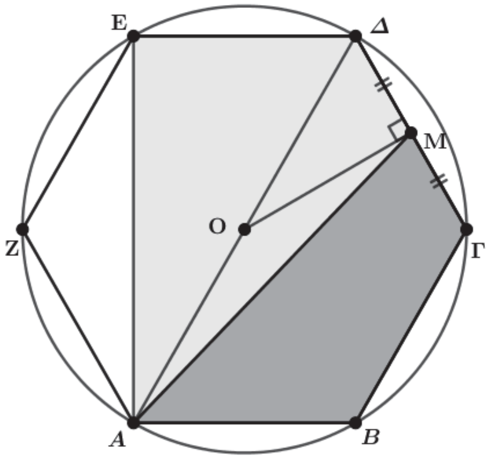
α) Να υπολογιστεί το εμβαδό του κανονικού εξαγώνου ως συνάρτηση της ακτίνας R.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΓΜ ως συνάρτηση της ακτίνας R.

γ) Να υπολογιστεί ο λόγος των εμβαδών των τετραπλεύρων ΑΜΔΕ και ΑΒΓΜ.

Λύση

α) Το εμβαδό του καν. εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ είναι:



$$(ΑΒΓΔΕΖ) = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda_6\cdot\alpha_6 = 3R\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$$

β) Στο τρίγωνο ΑΜΔ η ΟΜ είναι διάμεσός του και το χωρίζει σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα, επομένως

$$(ΑΜΔ) = 2(ΔΜΟ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_6}{2}\cdot\alpha_6 = \frac{1}{4}R^2\sqrt{3}$$

Επομένως το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΓΜ είναι

$$(ΑΒΓΜ) = (ΑΒΓΔ) - (ΑΜΔ) =$$
$$= \frac{1}{2}(ΑΒΓΔΕΖ) - (ΑΜΔ) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}R^2\sqrt{3} - \frac{1}{4}R^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}R^2\sqrt{3}.$$

γ) Το εμβαδό του ΑΖΕ είναι

$$(ΑΖΕ) = \frac{1}{2}\lambda_6\cdot\lambda_6\cdot\etaμ120^\circ = \frac{1}{2}R^2\etaμ(180^\circ - 60^\circ) =$$
$$= \frac{1}{4}R^2\etaμ60 = \frac{1}{4}R^2\sqrt{3}$$

το εμβαδό ΑΜΔΕ είναι

$$(ΑΜΔΕ) = (ΑΒΓΔΕΖ) - (ΑΖΕ) - (ΑΒΓΜ) =$$
$$= \frac{1}{2}R^2\sqrt{3} - \frac{1}{4}R^2\sqrt{3} - \frac{1}{2}R^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$$

και ο λόγος των εμβαδών των δύο τετραπλεύρων ΑΜΔΕ και ΑΒΓΜ είναι:

$$\frac{(ΑΜΔΕ)}{(ΑΒΓΜ)} = \frac{\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}R^2\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$$

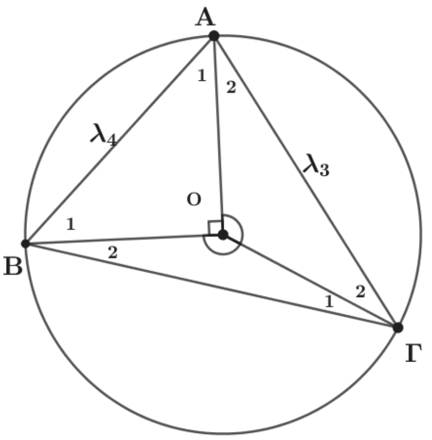
Άσκηση 3η.

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν ΑΒ = λ_4 και ΑΓ = λ_3, τότε

α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας του κύκλου R.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της ακτίνας του κύκλου R



Λύση

α) Αφού η πλευρά ΑΒ = λ_4 η επίκεντρη γωνία ΑΟΒ είναι ορθή και με $OA = OB = R$, τότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι και ισοσκελές, επομένως

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ$$

Αντίστοιχα με την υπόθεση ΑΓ = λ_3, είναι

$$Α\hat{Ο}Γ = 120^\circ \text{ και } \hat{A}_2 = \hat{Γ}_2 = 30^\circ$$

και για το τρίγωνο ΑΟΓ προκύπτει ότι

$$Β\hat{Ο}Γ = 150^\circ \text{ και } \hat{B}_2 = \hat{Γ}_1 = 15^\circ$$

Με βάση τα παραπάνω οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 75^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{Γ} = 45^\circ$

β) Είναι: $ΑΒ = \lambda_4 = R\sqrt{2}$, $ΑΓ = \lambda_3 = R\sqrt{3}$.

και από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΟΓ προκύπτει

$$ΒΓ^2 = ΟΒ^2 + ΟΓ^2 - 2ΟΒ\cdot ΟΓσυν150^\circ =$$
$$R^2 + R^2 - 2R^2συν(180^\circ - 30^\circ) = (2+\sqrt{3})R^2$$

επομένως η τρίτη πλευρά είναι $ΒΓ = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

γ) Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(ΑΒΓ) = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{R\sqrt{2}R\sqrt{3}R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4R}$$
$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{4}R^2\sqrt{6(2+\sqrt{3})}$$

Άσκηση 4η.

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε τις χορδές ΑΒ = R και $ΓΔ = R\sqrt{3}$, που δεν τέμνονται μέσα στον κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου μεταξύ των δύο χορδών αν:

α) Οι χορδές βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του κέντρου.

β) Το κέντρο του κύκλου είναι μεταξύ των χορδών.

Λύση

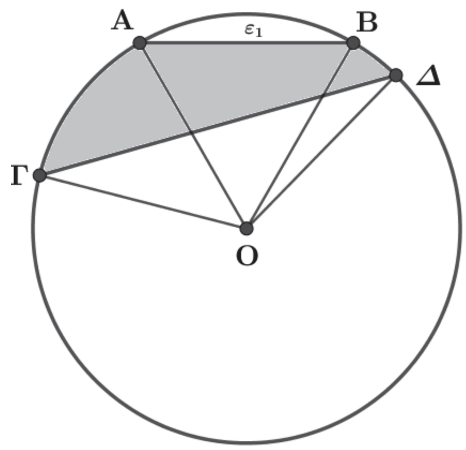
Αφού είναι ΑΒ = R και $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$, αυτές αποτελούν πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισοπλεύρου τριγώνου, τότε οι επίκεντρες γωνίες ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι 60^{o} και 120^{o} αντίστοιχα.

α) Το εμβαδό του κυκλικού τμήματος (ε_1) είναι:

$$(\varepsilon_1) = E_{\tau.(AOB)} - (AOB) = \frac{\pi R^2 \cdot 60^{o}}{360^{o}} - \frac{1}{2}\lambda_6 \alpha_6 =$$

$$= \frac{\pi R^2}{6} - \frac{1}{2}\cdot R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

το ζητούμενο εμβαδό Ε του μικτόγραμμου σχήματος ΑΓΔΒ είναι:

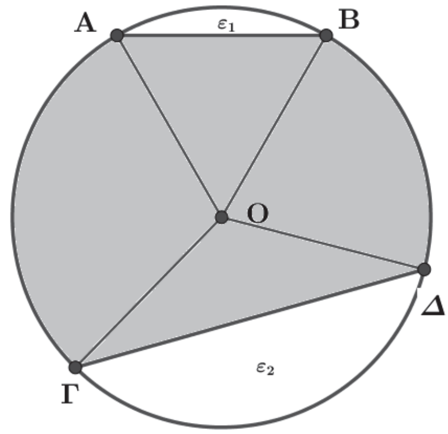


$$E = E_{\tau.(\Gamma O\Delta)} - (\Gamma O\Delta) - (\varepsilon_1) =$$

$$= \frac{\pi R^2 \cdot 120^{o}}{360^{o}} - \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2} - \frac{\pi R^2}{6} + \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{6}$$

β) α) Το εμβαδό του κυκλικού τμήματος (ε_1) είναι: $(\varepsilon_1) = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ από (α) περίπτωση και το εμβαδό του κυκλικού τμήματος (ε_2) είναι:



$$(\varepsilon_2) = E_{\tau.(\Gamma O\Delta)} - (\Gamma O\Delta) = \frac{\pi R^2 \cdot 120^{o}}{360^{o}} - \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 =$$

$$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

επομένως το ζητούμενο εμβαδό Ε του μικτόγραμμου σχήματος ΑΓΔΒ είναι:

$$E = E_{(O,R)} - (\varepsilon_1) - (\varepsilon_2) =$$

$$\pi R^2 - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{R^2(\pi + \sqrt{3})}{2}$$

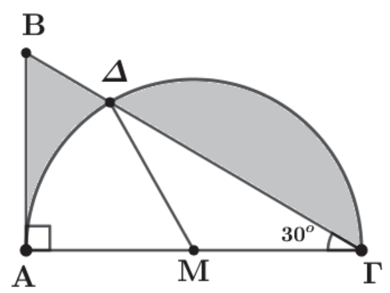
Άσκηση 5η.

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία Γ ίση με 30^{o} Το ημικύκλιο με διάμετρο την κάθετη πλευρά ΑΓ = 2α, τέμνει την υποτείνουσα του τριγώνου στο σημείο Δ. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του α τα εμβαδά:

α) Του κυκλικού τμήματος που περικλείεται μεταξύ της ΓΔ και του ημικυκλίου.

β) Του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΔ.

Λύση



α) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ, τότε

ΜΑ = ΜΔ = ΜΓ = α

και το τρίγωνο ΓΜΔ είναι ισοσκελές αφού η γωνία $\Gamma\hat{M}\Delta = 180^o - 30^o - 30^o$. Επομένως το κυκλικό τμήμα που περικλείεται από την ΓΔ και το ημικύκλιο έχει εμβαδό E_1 ίσο με:

$$E_1 = E_{\tau.(\Delta M\Gamma)} - (\Delta M\Gamma) = \frac{\pi\alpha^2 \cdot 120^o}{360^o} - \frac{1}{2}\alpha^2 \eta\mu 120^o$$

$$= \frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{1}{2}\alpha^2\eta\mu 60^o = \frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$, τότε ΒΓ = 2ΑΒ και με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 4AB^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow$$

$$4AB^2 = AB^2 + 4\alpha^2 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{4\alpha^2}{3}$$

άρα

$$AB = \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$$

Το εμβαδό E_2 του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΔ είναι:

$$E_2 = (AB\Gamma) - (E_{\eta\mu\iota\kappa(A\Gamma)} - E_1) =$$

$$= (AB\Gamma) - E_{\eta\mu\iota\kappa(A\Gamma)} + E_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\alpha \cdot \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

άρα

$$E_2 = \frac{\alpha^2}{6}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} + \pi\right)$$

Άσκηση 6^η.

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) εμβαδού Ε και περιγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ) εμβαδού Ε΄.

α) Να βρεθεί ο λόγος των εμβαδών $\frac{E}{E'}$

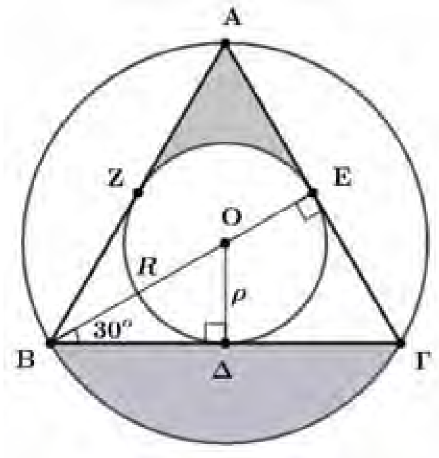
β) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου το εμβαδό του χωρίου ΑΖΕ που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ, ΑΕ και το τόξο ΖΕ του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

γ) Να υπολογίσετε το κυκλικό τμήμα που ορίζεται από την χορδή ΒΓ του περιγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΔ η ΒΟΕ είναι διχοτόμος, επομένως η γωνία ΟΒΔ είναι 30^o άρα

$$O\Delta = \frac{OB}{2} \Rightarrow \rho = \frac{R}{2} \Rightarrow 2\rho = R$$



επομένως έχουμε

$$\frac{E}{E'} = \frac{\pi R^2}{\pi\rho^2} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 = \left(\frac{2\rho}{\rho}\right)^2 = 2^2 = 4$$

β) Το ζητούμενο εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΖ, ΑΕ και το τόξο ΖΕ του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου, λόγω κανονικότητας υπολογίζεται αν από το εμβαδό του τριγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό Ε΄ του κύκλου (Ο, ρ) και το αποτέλεσμα διαιρεθεί δια τρία.

$$E_{\tau.(AZE)} = \frac{(AB\Gamma) - E'}{3} = \frac{(AB\Gamma) - \frac{E}{4}}{3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\lambda_3(R + \alpha_3) - \frac{E}{4}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\cdot R\sqrt{3}\cdot\left(R + \frac{R}{2}\right) - \frac{\pi R^2}{4}}{3} =$$

$$= \frac{1}{12}R^2(3\sqrt{3} - \pi)$$

γ) Σε αντιστοιχία το ζητούμενο εμβαδό του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από την χορδή ΒΓ του περιγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου είναι:

$$E_{\kappa.\tau.} = \frac{E - (AB\Gamma)}{3} = \frac{\pi R^2 - \frac{1}{2}\lambda_3(R + \alpha_3)}{3} =$$

$$= \frac{\pi R^2 - \frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\left(R + \frac{R}{2}\right)}{3} = \ldots = \frac{1}{12}R^2(4\pi - 3\sqrt{3})$$

Άσκηση 7η.

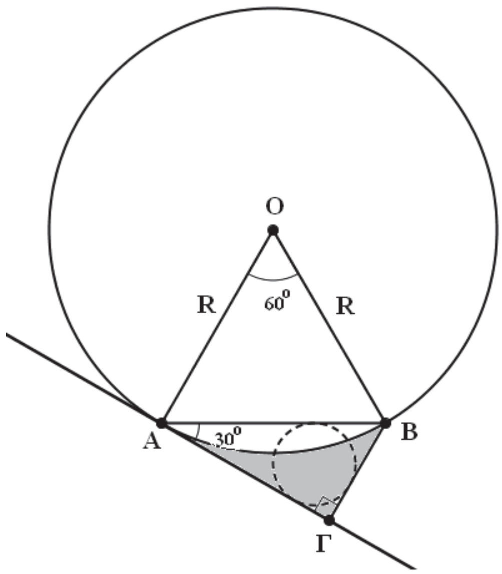
Σε κύκλο (Ο, R) οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν γωνία $A\hat{O}B = 60^o$. Φέρνουμε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο Α και έστω Γ η προβολή του Β στην ευθεία (ε).

α) Να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ ως συνάρτηση της ακτίνας R του κύκλου.

Αν είναι $A\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ τότε:

β) Να υπολογίσετε τη περίμετρο και το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.



Λύση

α) Το τρίγωνο ΑΟΒ έχει δύο πλευρές ίσες και $A\hat{O}B = 60^o$ συνεπώς είναι ισόπλευρο οπότε

$$AB = R \quad \text{και} \quad \hat{A} = 60^o$$

Επομένως

$$B\hat{A}\Gamma = 90^o - 60^o = 30^o$$

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η απέναντι πλευρά ΒΓ της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι $B\Gamma = \frac{R}{2}$.

Με εφαρμογή του πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$$A\Gamma = \sqrt{AB^2 - B\Gamma^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

β) Το μήκος ℓ του τόξου που περιέχει την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ είναι:

$$\ell = \frac{\pi R \cdot 60^o}{180^o} = \frac{\pi R}{3}$$

επομένως η περίμετρος του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\Pi = \ell + AB + B\Gamma =$$

$$= \frac{\pi R}{3} + \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R}{6}\cdot(2\pi + 3 + 3\sqrt{3})$$

Το εμβαδό Ε του καμπυλόγραμμου τριγώνου είναι:

$$E = (AB\Gamma) - E_{\text{κυκλικού τμήματος } AB} =$$

$$= (AB\Gamma) - [\, E_{\tau. (OAB)} - (AOB)] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2} - \left[\frac{\pi R^2 \cdot 60^o}{360^o} - \frac{1}{2}R\cdot R\cdot \eta\mu 60^o\right] =$$

$$= \frac{R^2}{24}(9\sqrt{3} - 4\pi)$$

γ) Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$2\tau = AB + A\Gamma + B\Gamma = R + \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(3 + \sqrt{3})$$

Το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$E = \frac{1}{2}AB\cdot B\Gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

Άρα η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι:

$$E = \tau\cdot\rho \Leftrightarrow \frac{R^2\sqrt{3}}{8} = \frac{R}{4}(3+\sqrt{3})\cdot\rho \Leftrightarrow$$

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2(3+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{12}$$

Τάξη Β΄

Εισαγωγή στις κωνικές τομές

Θανάσης Χριστόπουλος

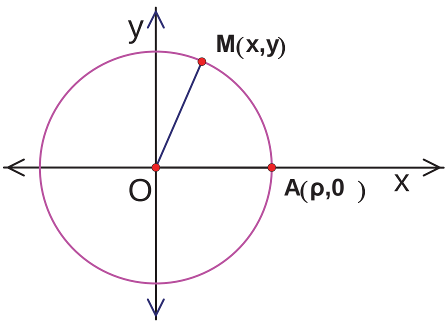
Κύκλος–Παραβολή–Έλλειψη–Υπερβολή

Ας γνωρίσουμε αυτά τα σχήματα που προκύπτουν από την τομή μιας κωνικής επιφάνειας με ένα επίπεδο με διάφορους τρόπους, όπως βλέπουμε στο σχήμα

Ο μεγάλος μαθηματικός **Απολλώνιος,** μελέτησε μεθοδικά τις κωνικές τομές και παρουσίασε με το σύντομο τίτλο **«Κωνικά»** σε οκτώ βιβλία, εκ των οποίων 4 πρώτα σώζονται, τα επόμενα τρία σώθηκαν με **Αραβική μετάφραση**, ενώ το όγδοο δεν διασώθηκε. Το έργο αυτό είναι εκείνο που έκανε τον Leibniz να πει «όποιος κατανοεί τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο θαυμάζει λιγότερο τις επινοήσεις των νεότερων μεγάλων ανδρών»

<u>Ι. ΚΥΚΛΟΣ:</u> Δίνεται σταθερό σημείο Ο, ενός επιπέδου και σταθερό ευθύγραμμο τμήμα με μήκος ρ. Ζητάμε: τα σημεία Μ του επιπέδου που απέχουν από το σταθερό σημείο Ο, απόσταση ίση με ρ, δηλαδή $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$

1. Κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ:



Για να ανήκει ένα σημείο Μ(χ,y) στον κύκλο αυτό αρκεί $(OM) = \rho$ άρα $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$

Οπότε προκύπτει η εξίσωση

(c): $x^2+y^2=\rho^2$ επίσης η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο αφού από αυτή προκύπτει $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$ και άρα $(OM) = \rho$

Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας

Αν $\mathbf{A(x_1,y_1)}$ σημείο του κύκλου **(Ο,ρ),** τότε η εφαπτόμενη ευθεία στον κύκλο, στο σημείο του Α έχει εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = \rho^2}}$$

2. Ο Κύκλος με κέντρο $\mathbf{K(x_0,y_0)}$ και ακτίνα ρ, έχει εξίσωση:

$$(c):\ \boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{y_0})^2=\rho^2}$$

3. Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}\quad (\mathrm{I})\\ \mathbf{\mu\varepsilon}\ \ \mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}\end{array}}$$

και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) με $\mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}$

παριστάνει κύκλο με κέντρο $\mathbf{K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})}$ και ακτίνα $\boldsymbol{\rho = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}}$

(Αν $A^2+B^2-4\Gamma=0$ τότε η εξίσωση παριστάνει σημείο, το σημείο Κ)

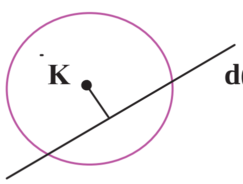
Παραδείγματα:

1. Κύκλος με κέντρο Κ(–3,2) και ακτίνα ρ= 5 έχει εξίσωση, c: $(x+3)^2+(y-2)^2=25$
2. Η εξίσωση c: $(x-1)^2+y^2=5$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το Κ(1,0) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$

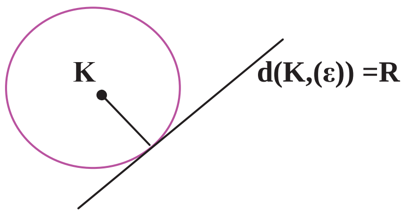
Ειδικά Θέματα στον Κύκλο

1. Σχετική Θέση ευθείας και κύκλου

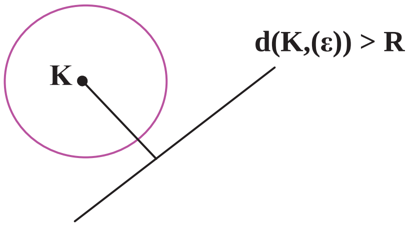
ι)



ιι)



ιιι)



Α΄ τρόπος: **Ελέγχουμε αν**

ι) d(K,(ε)) <R ή **ιι)** d(K,(ε)) =R ή **ιιι)** d(K,(ε)) >R

Β΄τρόπος: ελέγχουμε το σύστημα των εξισώσεων του κύκλου και της ευθείας $\Sigma\begin{Bmatrix}(\varepsilon)\\(c)\end{Bmatrix}$, οπότε:

(ι) αν έχει **δύο λύσεις**, τότε η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία

(ιι) αν έχει **μία λύση** τότε η ευθεία εφάπτεται στο κύκλο σε μοναδικό σημείο – το σημείο επαφής – που η ακτίνα που ορίζει με το κέντρο του κύκλου, είναι το κάθετο τμήμα από το κέντρο προς τη ευθεία

(ιιι) ενώ αν **δεν έχει λύση** (αδύνατο) τότε η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κοινά σημεία.

Παράδειγμα: 1.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία xσυνφ + yημφ = 4ημφ – 2συνφ + 4 εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$

Λύση

Η δοσμένη ευθεία γράφεται

(ε): xσυνφ + yημφ – 4ημφ + 2συνφ – 4 = 0.

$x_0 = -\frac{A}{2} = -2$, $\quad y_0 = -\frac{B}{2} = 4$.

Το κέντρο του κύκλου είναι K(–2, 4)

$\rho^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$ άρα $\rho^2 = \frac{16 + 64 - 16}{4} = 16$

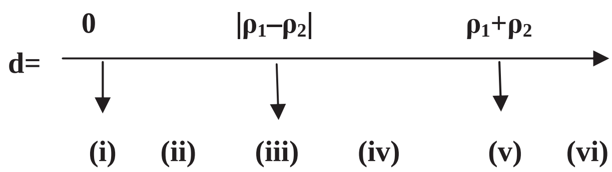
$\Rightarrow \rho = 4$.

$$d(K, (\varepsilon)) = \frac{|-2\sigma\upsilon\nu\varphi + 4\eta\mu\varphi - 4\eta\mu\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi - 4|}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi}}$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{1}} = 4 = \rho = 4 = \rho.$$

Άρα η ευθεία εφάπτεται του κύκλου.

2. Σχετική Θέση δύο κύκλων(Κ,ρ_1), (Λ,ρ_2), όπου $d = |\overrightarrow{K\Lambda}|$ η διάκεντρος.

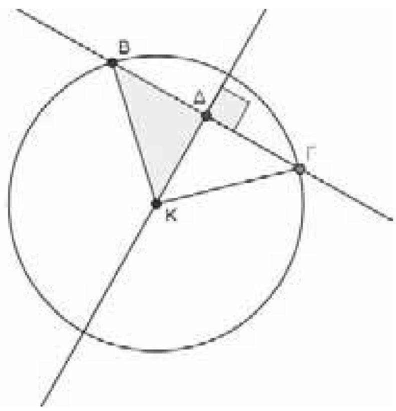


i. **ομόκεντροι**
ii. **Εσωτερικά ο ένας του άλλου**
iii. **εφάπτονται εσωτερικά**
iv. **Τεμνόμενοι**
v. **εφάπτονται εξωτερικά**
vi. **εξωτερικά ο ένας του άλλου**

3. Τέμνουσα κύκλου

1ο Πρόβλημα: δίνεται κύκλος και ευθεία, να βρεθεί το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος από την ευθεία.

2ο Πρόβλημα: δίνεται το μήκος της χορδής και ζητάμε κάποιο άγνωστο στοιχείο του κύκλου (πχ η ακτίνα) ή την εξίσωση της ευθείας.



<u>ΙΙ. ΠΑΡΑΒΟΛΗ:</u> Δίνεται σταθερό σημείο (Ε, Εστία) ενός επιπέδου και σταθερή ευθεία (δ, διευθετούσα). Ζητάμε: τα σημεία Μ του επιπέδου που απέχουν από το σταθερό σημείο, απόσταση ίση με την απόσταση από την ευθεία, δηλαδή $d(M,(\delta)) = |\overrightarrow{ME}|$

Στη Β΄ Λυκείου μελετάμε μόνο παραβολές που έχουν κορυφή, την αρχή των αξόνων και έχουν άξονα συμμετρίας τον x΄x ή τον y΄y

Α) Αν έχει **άξονα συμμετρίας τον x΄x**, τότε η παραβολή:

i. έχει εξίσωση: $y^2=2px$

ii. έχει εστία στον άξονα x΄x, $E(\frac{p}{2},0)$

iii. Διευθετούσα (δ): $x=-\frac{p}{2}$

iv. Αν $A(x_1,y_1)$ σημείο της παραβολής, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στην παραβολή, στο σημείο της Α έχει εξίσωση,

(ε): $y_1\cdot y=p(x+x_1)$ με $\lambda=\frac{p}{y_1}, y_1\neq 0$

v. Η γραφική παράσταση για p<0 βρίσκεται αριστερά από τον άξονα y΄y
Ενώ για p>0 βρίσκεται δεξιά από τον άξονα y΄y

Β) Αν έχει **άξονα συμμετρίας τον** y΄y, τότε:

i. έχει εξίσωση: $x^2=2py$

ii. έχει εστία στον άξονα y΄y, $E(0,\frac{p}{2})$

iii. Διευθετούσα (δ): $y=-\frac{p}{2}$

iv. Αν $A(x_1,y_1)$ σημείο της παραβολής, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στην παραβολή, στο σημείο της Α έχει εξίσωση,

(ε): $x_1\cdot x=p(y+y_1)$ με $\lambda=\frac{x_1}{p}$

v. Η γραφική παράσταση για p<0 βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x
Ενώ για p>0 βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x

<u>III. ΕΛΛΕΙΨΗ:</u> Δίνονται 2 σταθερά σημεία ενός επιπέδου Ε΄,Ε, (εστίες) και σταθερό μήκος α. Αν $|\overrightarrow{E'E}|=2\gamma$ και α>γ Ζητάμε: τα σημεία Μ του επιπέδου που έχουν από τα σταθερά σημεία, άθροισμα αποστάσεων ίσο με 2α, δηλαδή $|\overrightarrow{ME'}|+|\overrightarrow{ME}|=2\alpha$.

Έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x και τον y΄y

Α) Αν έχει εστίες **στον άξονα x΄x**, τότε:

i. έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$

ii. έχει εστίες στον άξονα x΄x, $E'(-\gamma,0), E(\gamma,0)$

iii. Αν **$A(x_1,y_1)$** σημείο της έλλειψης, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στην έλλειψη, στο σημείο της Α έχει εξίσωση,

(ε): $\frac{x_1\cdot x}{\alpha^2}+\frac{y_1\cdot y}{\beta^2}=1$ με $\lambda=-\frac{x_1}{y_1}(\frac{\beta}{\alpha})^2, y_1\neq 0$

Β) Αν έχει εστίες **στον άξονα y΄y**, τότε:

i. έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y}{\alpha^2}=1$, όπου $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$

αφού $\alpha^2>\beta^2$, στις ασκήσεις βλέπουμε που βρίσκεται ο μεγαλύτερος παρονομαστής και αυτόν θέτουμε α^2

ii. έχει εστίες στον άξονα y΄y, $E'(0,-\gamma), E(0,\gamma)$

iii. Αν $A(x_1,y_1)$ σημείο της έλλειψης, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στην έλλειψη, στο σημείο της Α έχει εξίσωση,

(ε): $\frac{x_1\cdot x}{\beta^2}+\frac{y_1\cdot y}{\alpha^2}=1$ με $\lambda=-\frac{x_1}{y_1}(\frac{\alpha}{\beta})^2, y_1\neq 0$

η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}$, οπότε $\varepsilon^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}=1-(\frac{\beta}{\alpha})^2$ δηλαδή είναι μια συνάρτηση του λόγου των δύο ημιαξόνων.

Αν ε τείνει στο μηδέν, η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

<u>IV. ΥΠΕΡΒΟΛΗ:</u> Δίνονται 2 σταθερά σημεία ενός επιπέδου Ε΄,Ε, (εστίες) και σταθερό μήκος α. Αν $|\overrightarrow{E'E}|=2\gamma$ και α<γ Ζητάμε: τα σημεία Μ του επιπέδου που έχουν από τα σταθερά σημεία, διαφορά αποστάσεων ίση με 2α, δηλαδή $\left||\overrightarrow{ME'}|-|\overrightarrow{ME}|\right|=2\alpha$.

Α) Αν έχει εστίες **στον άξονα x΄x**, τότε:

i. Έχει εξίσωση: $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

ii. Έχει εστίες στον άξονα x΄x, $E'(-\gamma,0), E(\gamma,0)$

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής, έχουν εξίσωση, (ε_1): $y=\frac{\beta}{\alpha}x$ και (ε_2): $y=-\frac{\beta}{\alpha}x$

Β) Αν έχει εστίες **στον άξονα y΄y**, τότε:

i. Έχει εξίσωση: $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, όπου $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

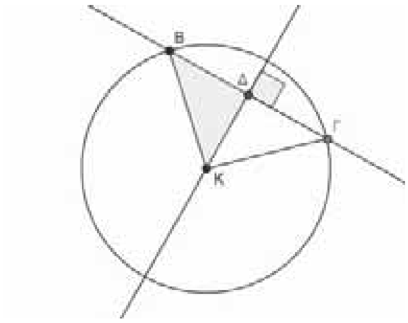
ii. Έχει εστίες στον άξονα **y΄y**, $E'(0,-\gamma), E(0,\gamma)$

iii. Οι ασύμπτωτες της υπερβολής, έχουν εξίσωση, (ε_1): $y=\frac{\alpha}{\beta}x$ και (ε_2): $y=-\frac{\alpha}{\beta}x$ η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$.

Ασκήσεις

A_1. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει με τον κύκλο που έχει εξίσωση: $x^2+y^2-6x-10y+9=0$ χορδή μήκους 8

Λύση



Είναι $A^2+B^2-4\Gamma=36+100-36=100$ άρα η εξίσωση παριστά κύκλο με κέντρο Κ(3,5) και ακτίνα ρ=5.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΔΒ είναι $\left|\overrightarrow{\Delta B}\right|=4$ και $\left|\overrightarrow{KB}\right|=\rho=5$, επομένως $|K\Delta|=\sqrt{5^2-4^2}=3 \Leftrightarrow$ $d(K,(\varepsilon))=3$. Η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, οπότε έχει εξίσωση $y=\lambda x$ $\Leftrightarrow \lambda x-y=0$ άρα $d(K,(\varepsilon))=3 \Leftrightarrow \dfrac{|\lambda x_K-y_K|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=3 \Leftrightarrow$

$\dfrac{|3\lambda-5|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=3 \Leftrightarrow |3\lambda-5|=3\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow (3\lambda-5)^2=9(\lambda^2+1) \Leftrightarrow$

$9\lambda^2-30\lambda+25=9\lambda^2+9 \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{8}{15}$, η ζητούμενη ευθεία είναι η $y=\dfrac{8}{15}x$.

A_2. Δίνεται η έλλειψη με μια εστία την Ε(1,0) και εκκεντρότητα $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$.

Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία στην έλλειψη στο σημείο της με τετμημένη –1, και θετική τεταγμένη, εφάπτεται και στο κύκλο με εξίσωση: $(x-3)^2+(y-6)^2=5$.

Λύση

Η εστία είναι Ε(1,0) άρα γ=1 και αφού η εκκεντρότητα είναι $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{1}{2}$ άρα α=2.

Από $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$ έχουμε $\beta^2=3$ οπότε η εξίσωση της έλλειψης είναι $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ το σημείο της έλλειψης με τετμημένη –1 θα έχει τεταγμένη

$3x^2+4y^2=12 \Leftrightarrow 4y^2=12-3 \Leftrightarrow y^2=\dfrac{9}{4}$ και αφού $y>0 \Rightarrow y=\dfrac{3}{2}$. Η εφαπτόμενη στην έλλειψη έχει τύπο:

$$\frac{-1x}{4}+\frac{\frac{3}{2}y}{3}=1 \Leftrightarrow -3x+6y=12.$$

Θα δείξουμε ότι αυτή η ευθεία εφάπτεται και στον κύκλο που έχει κέντρο Κ(3,6) και $\rho=\sqrt{5}$, για αυτό αρκεί $d(K,(\varepsilon))=\rho=\sqrt{5}$ πράγματι

$$d(K,(\varepsilon))=\frac{|-3\cdot 3+6\cdot 6-12|}{\sqrt{(-3)^2+6^2}} \Leftrightarrow d(K,(\varepsilon))=\frac{15}{3\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

A_3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2=12y$ και Ε η εστία της. Αν μια εφαπτόμενη σε ένα σημείο της Α, τέμνει τον y΄y στο Β(0,–1). Να δειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

Λύση

Η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, επίσης p=6, οπότε η εστία της είναι Ε(0,3).

Η εφαπτόμενη ευθεία στην παραβολή, στο σημείο της $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση, (ε): $x_1\cdot x=p(y+y_1)$ η οποία για $x=0$ δίνει $y+y_1=0 \Leftrightarrow y=-y_1$ οπότε το σημείο τομής με τον y΄y είναι $(0,\ -y_1)$.

Άρα $y_1=1$ και αφού $x^2=12y$, θα είναι $x^2=12$ $\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$ επομένως το σημείο Α είναι $A(2\sqrt{3},1)$ ή $A(-2\sqrt{3},1)$ λόγω συμμετρίας δίνουν ίδια αποτελέσματα.

$$(AB)=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4}=\sqrt{16}=4$$

$$(AE)=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4}=\sqrt{16}=4$$

$$(BE)=\sqrt{0+(3+1)^2}=\sqrt{16}=4.$$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο.

Βιβλιογραφία

1. Analytic Geometry: Kindle Joseph
2. Analytische Geometrie: Kohlmann Wilmut
3. Ιστορία των Μαθηματικών, G. Loria
4. Βιβλίο Κατεύθυνσης ΟΕΔΒ Β΄ Λυκείου

Διόρθωση: στο τ. 114, σελίδα 45, άσκηση 6.i. στην εκφώνηση είναι $\theta \neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Τάξη: Γ΄

Επαναληπτικά Θέματα

Νίκος Αντωνόπουλος, Δημήτρης Αργυράκης, Γιάννης Λουριδάς

Θέμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le \alpha \\ \dfrac{1}{x}, & x>\alpha \end{cases}$ όπου α θετική παράμετρος και

$$g(x)=(x-1)(e^x-x)-e^x+\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α, που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=\alpha$. Είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_o=\alpha$;

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της g έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη τον αριθμό x_o του ερωτήματος (α).

δ. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2e}<\frac{f(x_o)}{e}+1<1-\frac{2}{e}$$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^1\left(e^{x^2-2x}+e^x-1\right)(x-1)dx$$

Λύση

α. Η f είναι συνεχής στο $x_o=\alpha$ μόνο όταν

$$\lim_{x\to\alpha^-}f(x)=f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha^+}f(x),\quad (1)$$

και $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=e^\alpha=f(\alpha)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=\dfrac{1}{\alpha}$

οπότε $\qquad (1)\Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $e^x=\dfrac{1}{x}$ έχει μοναδική (θετική) λύση που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της με

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty \text{ και } f(1)=e-1>0$$

οπότε $f((0,1])=(-\infty,\ e-1]$ όπου περιέχεται και ο αριθμός 0.

Επομένως, η εξίσωση $e^x=\dfrac{1}{x}$ έχει μοναδική (θετική) λύση, που περιέχεται στο διάστημα $(0,1)$ δηλαδή υπάρχει μοναδικός αριθμός α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=\alpha$.

Με x κοντά στο α και

- $x<\alpha$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^-}\frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha}=\left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=\alpha}=e^\alpha$$

- $x>\alpha$ έχουμε:

$$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha^+}\frac{\frac{1}{x}-e^\alpha}{x-\alpha}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}-\lim_{x\to\alpha^+}\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{\alpha^2}$$

και δεδομένου ότι

$$-\frac{1}{\alpha^2}<0<e^\alpha$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to\alpha^-}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\ne\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=\alpha$.

β. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=e^x-x+(x-1)(e^x-1)-e^x+x=(x-1)(e^x-1)$$

οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο των όρων $x-1$ και e^x-1.

Επειδή, $\qquad x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge1$

και $\qquad e^x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge0$

έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$		↗	ΤΜ	↘	ΤΕ	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση g

- Είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$
- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$, το $g(0)=-2$ και τοπικό ελάχιστο για $x=1$, το $g(1)=\dfrac{1}{2}-e$

γ. Η g είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$g''(x)=e^x-1+(x-1)e^x=xe^x-1$$

Αν $x\le 0$ τότε προφανώς $g''(x)<0$ οπότε η g είναι κοίλη και συνεπώς δεν έχει σημείο καμπής με τετμημένη μη θετική. Αν $x>0$ τότε έχουμε

$$g''(x)=x\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$$

οπότε το πρόσημο της $g''(x)$ εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του $e^x-\dfrac{1}{x}$.

Έτσι, λόγω και της μονοτονίας της $h(x)$, από το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι η $g''(x)$ μηδενίζεται στο x_o και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου αυτού. Άρα, η γραφική παράσταση C_g της g έχει μοναδικό σημείο καμπής με τετμημένη τον αριθμό x_o.

δ. Επειδή $0<x_o<1$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$, έχουμε:

$$g(1)<g(x_o)<g(0)\Rightarrow \frac{1}{2}-e<g(x_o)<-2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2e}-1<\frac{g(x_o)}{e}<-\frac{2}{e}\Rightarrow \frac{1}{2e}<\frac{g(x_o)}{e}+1<1-\frac{2}{e}$$

που είναι το ζητούμενο.

ε. Είναι: $I=\displaystyle\int_0^1\left(e^{x^2-2x}+e^x-1\right)(x-1)dx$

$$=\int_0^1 e^{x^2-2x}(x-1)\,dx+\int_0^1(e^x-1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2-2x}(x^2-2x)'\,dx+\int_0^1(e^x-1)(x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2-2x}\right)'dx+\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}\left(e^{x^2-2x}\right)+g(x)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}-1\right)+\frac{1}{2e}-1+2=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}-x,\ x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

β. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{f(x)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right\}$$

γ. Να βρείτε τους αριθμούς α, β ώστε

$$\left(f(\alpha)+2\alpha\right)\left(f(\beta)+2\beta\right)=4$$

δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(e^x+1)e^x>f(e^x+1)+e^xf(e^x)$$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^2\frac{f(1-x)+1-x}{f(x)+e^{x-1}+x}dx$$

Λύση

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=-e^{1-x}-1$$

και επειδή ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, η f είναι «1-1» οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε $\quad f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$.

Είναι: $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}-x\right)=-\infty$

και $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{1-x}-x\right)=+\infty$

οπότε $\quad f(\mathbb{R})=(-\infty,\ +\infty)=\mathbb{R}$

β. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{f(x)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(e^{1-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1-x}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{1-x}}{\sqrt{x^2+1}+x}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=-\frac{1}{2}$$

αφού $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{1-x}}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

Και $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}\overset{x>0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$

γ. Είναι:

$$f(\alpha)+2\alpha=e^{1-\alpha}-\alpha+2\alpha=e^{1-\alpha}+\alpha\ge 1-\alpha+1+\alpha=2$$

αφού $e^{1-\alpha}\ge 1-\alpha+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha=1$. Ομοίως ισχύει $f(\beta)+2\beta\ge 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\beta=1$. Έτσι, έχουμε

$$\left(f(\alpha)+2\alpha\right)\left(f(\beta)+2\beta\right)\ge 4$$

και $\quad \left(f(\alpha)+2\alpha\right)\left(f(\beta)+2\beta\right)=4$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)+\alpha=2\\ f(\beta)+\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$$

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$[f(e^x+1)-f(e^x)](e^x-1)>f(e^x)$$

Εφαρμόζουμε για την f το ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $\left[1,e^x\right]$ και $\left[e^x,e^{x+1}\right]$, οπότε υπάρχουν $x_1\in\left(1,e^x\right)$ και $x_2\in\left(e^x,e^x+1\right)$ ώστε να ισχύουν

$$f'(x_1)=\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1} \text{ και } f'(x_2)=\frac{f(e^x+1)-f(e^x)}{1}$$

Αλλά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x)=-e^{1-x}-1 \text{ και } f''(x)=e^{1-x}>0$$

οπότε η f είναι κυρτή δηλαδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον, $x_1<x_2$ οπότε

$$f'(x_1)<f'(x_2)\Rightarrow\frac{f(e^x)-f(1)}{e^x-1}<\frac{f(e^x+1)-f(e^x)}{1}$$

$$\Rightarrow(e^x-1)[f(e^x+1)-f(e^x)]>f(e^x)-f(1)$$

$$\overset{f(1)=0}{\Rightarrow}(e^x-1)[f(e^x+1)-f(e^x)]>f(e^x)$$

που είναι το ζητούμενο.

ε. Είναι: $I=\int_0^2\frac{f(1-x)+1-x}{f(x)+e^{x-1}+x}dx=\int_0^2\frac{e^x-1+x+1-x}{e^{1-x}-x+e^{x-1}+x}dx$

$$=\int_0^2\frac{e^x}{e^{1-x}+e^{x-1}}dx$$

Αν θέσουμε $x-1=u$ τότε έχουμε

$dx=du$, $u_1=-1$, $u_2=1$ και

$$I=e\int_{-1}^{1}\frac{e^u}{e^u+e^{-u}}du=e\int_{-1}^{1}\frac{e^{2u}}{e^{2u}+1}du=\frac{e}{2}[\ln(e^{2u}+1)]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{e}{2}\ln\frac{e^2+1}{e^{-2}+1}=\frac{e}{2}\ln e^2=e$$

2ος τρόπος (Υπόδειξη) Θέτουμε $2-x=u\ldots$

Σχόλια

1. Στο ερώτημα (γ) θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{1-x}+x$, $x\in\mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$, το $g(1)=2$ οπότε καταλήγουμε πάλι στην $(f(\alpha)+2\alpha)(f(\beta)+2\beta)\geq 4$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\alpha=\beta=1$

2. Αποδεικνύεται, με τη βοήθεια της αντικατάστασης $\alpha+\beta-x=u$, ότι αν μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta\frac{g(x-\alpha)}{g(x-\alpha)+g(\beta-x)}dx=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$$

Αν θέσουμε $g(x)=e^x$, $\alpha=0$ και $\beta=2$ προκύπτει άμεσα ότι $I=e\int_0^2\frac{e^x}{e^{2-x}+e^x}dx=\frac{1}{2}(2-0)e=e$

Θέμα 3

Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(f(x)-x)^2=x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=-2$. Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση $g(x)=\lambda x-\sqrt{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $g(x)\leq x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $f=g$

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

δ. Να λύσετε την ανίσωση:

$$|\eta\mu x|-|x|\geq\frac{\eta\mu^2x-x^2}{\sqrt{\eta\mu^2x+4}+\sqrt{x^2+4}}$$

ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$, την οποία και να βρείτε.

στ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2\frac{f(x)}{x+1}dx<2-3\ell n3$

ζ. Αν $t(x)=(x-2)^3+x-2$, $x\in\mathbb{R}$ και $f_1:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=f(x)$ για κάθε $x\geq 0$, τότε να αποδείξετε ότι οι C_{f_1} και C_t έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη.

η. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f' συναρτήσει της f και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x=2$

Λύση

α. Είναι $(f(x)-x)^2=x^2+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1) και $f(0)=-2$ (2). Επειδή $x^2+4\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι η συνάρτηση $p(x)=f(x)-x$ δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $p(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $p(0)=f(0)=-2<0$ είναι $p(x)=f(x)-x<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα από την (1) έχουμε ότι: $f(x)-x=-\sqrt{x^2+4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $f(x)=x-\sqrt{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x)\leq x-2\Leftrightarrow g(x)-x\leq -2\Leftrightarrow h(x)\leq h(0)$$

όπου $h(x)=g(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή, η συνάρτηση h στο εσωτερικό σημείο

$x_0=0$ παρουσιάζει μέγιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι $h'(0)=0$, δηλαδή $g'(0)-1=0$. Αλλά $g'(x)=\lambda-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}},\ x\in\mathbb{R}$, οπότε $\lambda-1=0$, δηλαδή $\lambda=1$. Για $\lambda=1$ είναι $g(x)=x-\sqrt{x^2+4},\ x\in\mathbb{R}$. Επομένως $f=g$, αφού $A_f=A_g=\mathbb{R}$ και $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. • Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x+\sqrt{x^2+4}}=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=+\infty$. Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=0$, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι η **οριζόντια** ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

• Εξετάζουμε αν υπάρχει στο $-\infty$ ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+4}}{x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}\overset{x<0}{\underset{|x|=-x}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)=1+\sqrt{1+0}=2 \text{ οπότε } \lambda=2,$$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)\overset{\lambda=2}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4}-2x\right)$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-\sqrt{x^2+4}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+4}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-\sqrt{x^2+4}}=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)=-\infty$, οπότε $\beta=0$ Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x$ είναι η ***πλάγια*** ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

• Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)'$$

$$=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{\sqrt{x^2+4}}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

διότι $\sqrt{x^2+4}>0$ και $\sqrt{x^2+4}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$, οπότε $\sqrt{x^2+4}-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1. Άρα η f είναι αντιστρέψιμη, με $A_{f^{-1}}=f(A)=(-\infty,0)$ διότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)\overset{(\beta)}{=}(-\infty,0)$

δ. $|\eta\mu x|-|x|\geq\dfrac{\eta\mu^2x-x^2}{\sqrt{\eta\mu^2x+4}+\sqrt{x^2+4}}$ (3)

• Για $x=0$ η (3) ισχύει ως ισότητα.

• Για $x\neq0$ είναι: $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow|\eta\mu x|-|x|<0$ και η (3) είναι ισοδύναμη με:

$$1\leq\frac{|\eta\mu x|+|x|}{\sqrt{\eta\mu^2x+4}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\eta\mu^2x+4}+\sqrt{x^2+4}\leq|\eta\mu x|+|x|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(|\eta\mu x|-\sqrt{|\eta\mu x|^2+4}\right)+\left(|x|-\sqrt{|x|^2+4}\right)\geq0$$

$\Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x|\right)+f\left(|x|\right)\geq0$, που είναι αδύνατη, διότι $f(A)=(-\infty,0)$ από το ερώτημα (β). Άρα η (3) έχει μοναδική λύση την $x=0$.

2ος τρόπος : Για $x\neq0$ είναι:

$$(3)\Leftrightarrow|\eta\mu x|-|x|\geq\frac{\left(\eta\mu^2x-x^2\right)\left(\sqrt{\eta\mu^2x+4}-\sqrt{x^2+4}\right)}{\eta\mu^2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow|\eta\mu x|-|x|\geq\sqrt{\eta\mu^2x+4}-\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow|\eta\mu x|-\sqrt{\eta\mu^2x+4}\geq|x|-\sqrt{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow f\left(|\eta\mu x|\right)\geq f\left(|x|\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|\geq|x|,$$

που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}-\{0\}$, αφού $|\eta\mu x|<|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Σημείωση: Η παραπάνω ανίσωση μπορεί να λυθεί και αλγεβρικά.

ε. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε ένα σημείο της $A(x_0,f(x_0))$, είναι $(\varepsilon):y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Η (ε) διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$, αν και μόνο αν,

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(2-x_0),$$

δηλαδή $f'(x_0)(x_0-2)-f(x_0)=0$.

Αρκεί να λύσουμε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση

$$f'(x)(x-2)-f(x)=0 \quad (4).$$

1ος τρόπος: (Αλγεβρικά)

Είναι: $f'(x)(x-2)-f(x)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4}=x+2$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $x+2\le 0 \Leftrightarrow x\le -2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$, τότε:

$\sqrt{x^2+4}=x+2 \Leftrightarrow x^2+4=(x+2)^2 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

που είναι δεκτή. Δηλαδή, η εξίσωση (4) έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$ την $x=0$. Επομένως μόνο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,-2)$ διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$ και η εξίσωσή της είναι $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)$, δηλαδή $(\varepsilon): y=x-2$

2ος τρόπος: (με ανάλυση)

Το μηδέν είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης (4) και θα αποδείξουμε ότι είναι και η μόνη.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f'(x)(x-2)-f(x), x\in\mathbb{R}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x)=\left(f'(x)(x-2)-f(x)\right)'=...$$
$$=f''(x)(x-2), x\in\mathbb{R}$$

όπου $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)'=...$

$=-\dfrac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η ρίζα και το πρόσημο της h' δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
h	↗	$2\sqrt{2}-2$ Ο.Μ.	↘

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty, 2]$ η εξίσωση $h(x)=0$ έχει προφανή ρίζα το 0 που είναι και μοναδική, διότι η h είναι 1-1 στο διάστημα αυτό, ως γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $\Delta_2=(2,+\infty)$ η εξίσωση $h(x)=0$ είναι αδύνατη, διότι το $0\notin h(\Delta_2)=(0, 2\sqrt{2}-2)$.

Πράγματι η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=(2,+\infty)$, οπότε

$$h(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}h(x), \lim_{x\to 2}h(x)\right)=\left(0, 2\sqrt{2}-2\right)$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=...=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{x\left(2+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)$$

$$\overset{x>0}{\underset{|x|=x}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}\right)=-2+\frac{2+0}{\sqrt{1+0}}=0,$$

και $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=-f(2)=2\sqrt{2}-2$

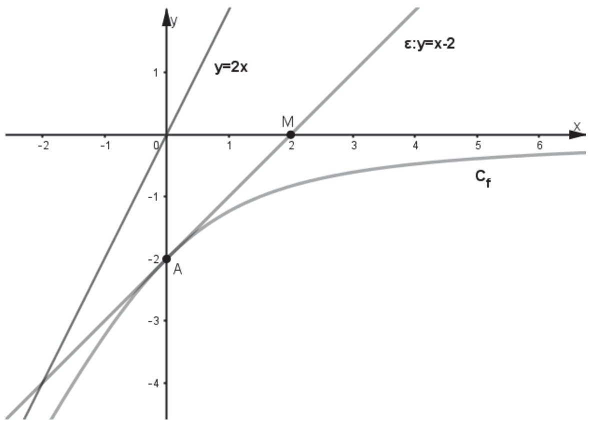
Άρα η εξίσωση $h(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση

$$f'(x)(x-2)-f(x)=0$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$ την $x_0=0$.

Επομένως μόνο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,-2)$ διέρχεται από το σημείο $B(2,0)$ και η εξίσωσή της είναι

$(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)$, δηλαδή $(\varepsilon): y=x-2$



στ. Η συνάρτηση f είναι κοίλη, αφού $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=x-2$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, από ερώτημα (ε), οπότε $f(x)\le x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in[0,2]$ ισχύει $x+1>0$ και $f(x)\le x-2$

οπότε: $f(x)\le x-2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x+1}\le\dfrac{x-2}{x+1}\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x+1}\le 1-\dfrac{3}{x+1}$,

με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα $\displaystyle\int_0^2\frac{f(x)}{x+1}dx<\int_0^2\left(1-\frac{3}{x+1}\right)dx$, με

$$\int_0^2\left(1-\frac{3}{x+1}\right)dx=\left[x-3\ln|x+1|\right]_0^2$$

$= 2 - 3\ell n3 - \left(0 - \ell n1\right) = 2 - 3\ell n3$.

Επομένως $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(x)}{x+1}dx < 2 - 3\ell n3$

ζ. Η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,-2)$, από ερώτημα (ε), οπότε εφάπτεται και της γραφικής παράστασης της f_1 στο $A(0,-2)$, όπου f_1 είναι ο περιορισμός της f στο $[0,+\infty)$. Η ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης t στο σημείο $B(2,0)$, διότι το B είναι κοινό σημείο της C_t και της ευθείας (ε) και $t'(2) = 1 = \lambda_\varepsilon$, αφού $t'(x) = \left((x-2)^3 + x - 2\right)'$

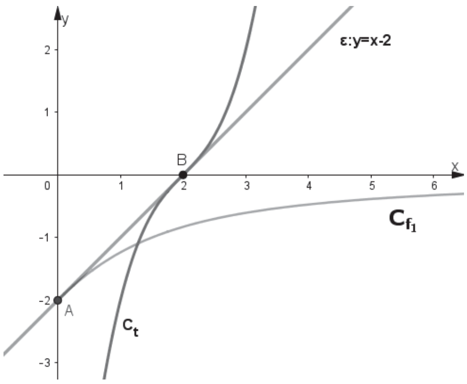
$= 3(x-2)^2(x-2)' + 1 = 3(x-2)^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_{f_1} και C_t. Οι C_{f_1} και C_t δεν έχουν άλλη κοινή εφαπτομένη, διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$t'(x) = 3(x-2)^2 + 1 \ge 1 = t'(2)$ ενώ για κάθε

$x \in [0,+\infty)$ ισχύει: $x \ge 0 \overset{f_1'\downarrow}{\Rightarrow} f_1'(x) \le f_1'(0) = 1$

Άρα οι C_{f_1} και C_t έχουν ακριβώς μία κοινή εφαπτομένη την ευθεία $(\varepsilon): y = x - 2$



η. Είναι: $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{\sqrt{x^2+4} - x}{\sqrt{x^2+4}}$

$= -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

$f'(x) = -\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R} \qquad (5)$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}},\ x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$ και $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ Από την ισότητα (5) έχουμε

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx$

$= \left[-\ell n|f(x)|\right]_0^2 = -\left(\ell n|f(2)| - \ell n|f(0)|\right)$

$= -\left(\ell n\left(2\sqrt{2}-2\right) - \ell n2\right) = -\ell n\left(\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}\right) = -\ell n\left(\sqrt{2}-1\right)$

.

Επομένως $E = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = -\ell n\left(\sqrt{2}-1\right)$

Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1,\ x \in [0,\pi] \text{ και}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x < 0 \\ f(x), & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

α. Να παραστήσετε γραφικά την f

β. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τη μέγιστη κλίση. Ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f είναι αυτό;

γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,\pi]$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $(\xi, g(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΟΑ, όπου O(0,0) και $A(\pi,2)$.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g

ε. Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2}(x-\pi) + 2 \le f(x) \le x - \pi + 2$$

για κάθε $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

στ. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x},\ x \in \left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = \dfrac{3\pi}{4}$ και $x = \pi$, τότε

να αποδείξετε ότι $\mathbf{E<\frac{\pi}{4}+(1-\pi)\ell n\frac{4}{3}}$

Λύση

α. $f(x)=-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1,\ x\in[0,\pi]$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο $[0,\pi]$ με

$f'(x)=(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1)'=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\ \ x\in[0,\pi]$,

και $f''(x)=(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\ ,\ x\in[0,\pi]$.

Είναι: $f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=0$

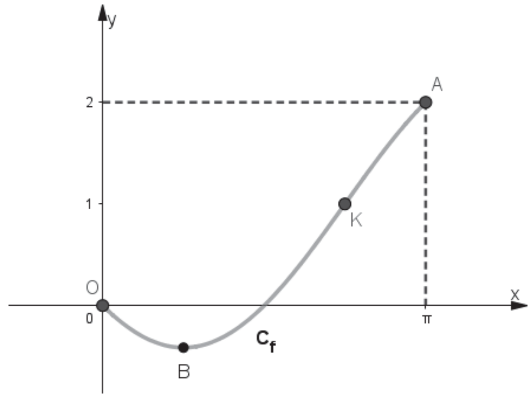
$\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$, διότι $x\in[0,\pi]$

Η f', ως συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$ και επειδή $f'(0)=-1<0$ και $f'(\pi)=1>0$, έχουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$ Επίσης $f''(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}\ \text{ διότι } x\in[0,\pi]$$

Η f'', ως συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και επειδή $f''(0)=1>0$ και $f''(\pi)=-1<0$, έχουμε ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ Σχηματίζουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών της f και στη συνέχεια χαράσσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	0		π/4		3π/4		π
f ΄΄(x)	1	+		+	0	–	-1
f ΄(x)	-1	–	0	+		+	1
f	0						2
	Τ.Μ.		Ο.Ε.		Σ.Κ.		Ο.Μ.
	f(0)=0		$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\sqrt{2}$		$\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$		f(π)=2



β. Λόγω του ερωτήματος (α) η ρίζα και το πρόσημο της f'' δίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0		3π/4		π
f ΄΄(x)		+	0	–	
f ΄			Ο.Μ.		

Δηλαδή η f' παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Άρα το σημείο της γραφικής παράστασης της f με τη μέγιστη κλίση είναι το σημείο καμπής της $K\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$.

γ. Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,\pi]$, διότι:

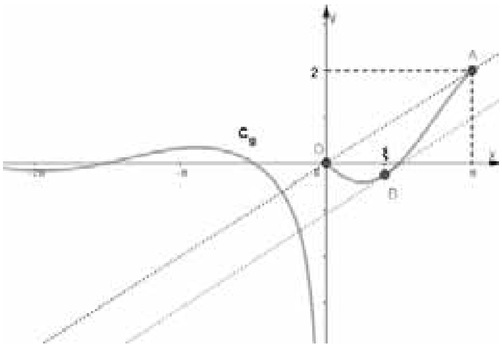
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,\pi]$, αφού είναι συνεχής στο $(0,\pi]\subset(0,+\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

$$=\lim_{x\to0^+}(-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1)=0=g(0).$$

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,\pi)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi}=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}=\frac{2}{\pi}$. Δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της της g στο $(\xi,g(\xi))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΟΑ, όπου Ο(0,0) και $A(\pi,2)$, αφού $\lambda_{OA}=\frac{2}{\pi}$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι το ξ είναι μοναδικό, δηλαδή ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{2}{\pi}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$, διότι

$g(x)=f(x),\ x\in[0,\pi]$.



Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=f\,'(x)-\frac{2}{\pi},\ x\in[0,\pi]$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=f\,''(x),\ x\in[0,\pi].$$

Η ρίζα και το πρόσημο της φ', λόγω και των ερωτημάτων (α) και (β), δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0	3π/4	π
φ΄(x)	+	0	–
φ	-1-2/π ↗	$\sqrt{2}-\frac{2}{\pi}$ Ο.Μ.	↘ 1-2/π

Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$, οπότε

$$\varphi(\Delta_1)=[\varphi(0),\varphi(\pi)]=\left[-1-\frac{2}{\pi},\sqrt{2}-\frac{2}{\pi}\right]$$

Το $0\in\varphi(\Delta_1)=\left[-1-\frac{2}{\pi},\sqrt{2}-\frac{2}{\pi}\right]$ και η φ είναι 1-1 στο διάστημα Δ_1, ως γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_1 η οποία δεν είναι το μηδέν. Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, οπότε

$$\varphi(\Delta_2)=\left[\varphi(\pi),\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{4}^+}\varphi(x)\right)=\left[1-\frac{2}{\pi},\sqrt{2}-\frac{2}{\pi}\right).$$

Το $0\notin\varphi(\Delta_2)=\left[1-\frac{2}{\pi},\sqrt{2}-\frac{2}{\pi}\right)$, οπότε η εξίσωση $\varphi(x)=0$ είναι αδύνατη στο διάστημα $\Delta_2=\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Άρα η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,\pi)$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $(\xi,g(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΟΑ, όπου Ο(0,0) και $A(\pi,2)$.

δ. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{1}{x}\right)=-\infty$,

διότι $\lim\limits_{x\to0^-}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g.

Για $x<0$ είναι:

$$|g(x)|=\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}=-\frac{1}{x}$$

δηλαδή $|g(x)|\le-\frac{1}{x}$, οπότε $\frac{1}{x}\le g(x)\le-\frac{1}{x}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=0.$$

Επομένως η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $-\infty$.

ε. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sqrt{2}(x-\pi)+2\le f(x)\le x-\pi+2$$

για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ (1)

1ος τρόπος:

Για $x=\pi$ η (1) ισχύει ως ισότητα. (2)

Για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x,\pi]$, λόγω του ερωτήματος (α), οπότε υπάρχει $\xi\in(x,\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\frac{f(x)-2}{x-\pi}\quad(3)$$

Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι η συνάρτηση $f\,'$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, οπότε:

$$\frac{3\pi}{4}\le x<\xi<\pi \overset{f'\downarrow\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]}{\Rightarrow} f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)>f'(\xi)>f'(\pi)$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow}1<\frac{f(x)-2}{x-\pi}<\sqrt{2}\overset{x-\pi<0}{\Rightarrow}\sqrt{2}(x-\pi)<f(x)-2<x-\pi$$

$$\Rightarrow\sqrt{2}(x-\pi)+2<f(x)<x-\pi+2 \quad (4)$$

Από (2), (4) έχουμε ότι:

$$\sqrt{2}(x-\pi)+2\le f(x)\le x-\pi+2$$

για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

2^{ος} τρόπος: Υπόδειξη

Κάθε μία από τις ανισότητες $\sqrt{2}(x-\pi)+2\le f(x)$, $f(x)\le x-\pi+2$ στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ μπορεί να αποδειχθεί και με τη βοήθεια ακροτάτου.

3^{ος} τρόπος: Υπόδειξη

Η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και η ευθεία με εξίσωση $y=x-\pi+2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\pi,2)$.

Άρα $f(x)\le x-\pi+2$ για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Επίσης: $\quad f(x)\ge\frac{4}{\pi}x-2\ge\sqrt{2}(x-\pi)+2$

που ισχύει για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, όπου $y=\frac{4}{\pi}x-2$ η εξίσωση της ευθείας ΑΚ, όπου $A(\pi,2)$ και $K\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$ το σημείο καμπής της C_f.

Άρα $f(x)\ge\sqrt{2}(x-\pi)+2$ για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

στ. Η συνάρτηση $h(x)=\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x}$, $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και $h(x)=\frac{f''(x)}{x}\le 0$ για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$, λόγω του ερωτήματος (α). Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}-h(x)dx=-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x}dx. \quad (*)$$

Από το ερώτημα (ε) έχουμε ότι για κάθε $x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ ισχύει:

$$f(x)\le x-\pi+2\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1\le x-\pi+2$$
$$\Rightarrow -\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\le x-\pi+1$$
$$\overset{:x\in\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]}{\Rightarrow}-\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{x}\le 1+\frac{1-\pi}{x}$$

με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=\pi$.

Άρα, $\quad -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x}dx<\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(1+\frac{1-\pi}{x}\right)dx$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow}E<\left[x+(1-\pi)\ell n|x|\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$\Rightarrow E<\pi+(1-\pi)\ell n\pi-\left(\frac{3\pi}{4}+(1-\pi)\ell n\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow E<\frac{\pi}{4}+(1-\pi)\left(\ell n\pi-\ell n\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow E<\frac{\pi}{4}+(1-\pi)\ell n\frac{4}{3}$$

Θέμα 5

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=\ln\frac{e-1}{e}$ η οποία, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση $\quad (e^{-x}+x)f'(x)=1+x$

α. Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α, Β ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει

$$1+x=A\left(e^{-x}+x\right)+B\left(e^{-x}+x\right)'$$

γ. Να αποδείξετε ότι

$f(x)=x+\ln\left(e^{-x}+x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{2020-x}-e^{-x}=x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$

στ. Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=e^{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε

$$\int_0^1 g(x)dx=2$$

Λύση

α. Από την γνωστή ανισότητα $e^x\ge x+1$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν θέσουμε $-x$ στο x, έχουμε:

$$e^{-x}\ge -x+1\Rightarrow e^{-x}+x\ge 1$$

οπότε, από τη δοσμένη ισότητα συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο της $f'(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $x+1$.

Έτσι, εύκολα καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα της μονοτονίας της f.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	Ο. Ε	$\nearrow$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι:
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty\ -1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=-1$. Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με $f(-1)=\ln\dfrac{e-1}{e}$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$1+x=A\left(e^{-x}+x\right)+B\left(e^{-x}+x\right)'$$

$$\Leftrightarrow 1+x=A\left(e^{-x}+x\right)+B(1-e^{-x})$$

Από την ισότητα αυτή, με $x=0$ παίρνουμε:
$1=A+B(1-1)\Rightarrow A=1$ ενώ, αν θέσουμε $x=1$ και με δεδομένο ότι $A=1$, παίρνουμε: $2=A\left(e^{-1}+1\right)+B\left(1-e^{-1}\right)\Rightarrow\left(1-e^{-1}\right)B=1-e^{-1}\Rightarrow B=1$

Για $A=1$ και $B=1$, η αρχική ισότητα γράφεται

$$1+x=e^{-x}+x+\left(e^{-x}+x\right)'$$

και ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^{-x}+x+\left(e^{-x}+x\right)'}{e^{-x}+x}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{\left(e^{-x}+x\right)'}{e^{-x}+x}$$

(με $e^{-x}+x>0,\ x\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x)=\left(x+\ln\left(e^{-x}+x\right)\right)'$

$\Rightarrow f(x)=x+\ln\left(e^{-x}+x\right)+c$ Για $x=-1$, έχουμε:

$$f(-1)=-1+\ln(e-1)+c\Rightarrow\ln\frac{e-1}{e}=-1+c+\ln(e-1)$$

$$\Rightarrow\ln(e-1)-1=-1+c+\ln(e-1)\Rightarrow c=0$$

Άρα, $f(x)=x+\ln\left(e^{-x}+x\right),\ x\in\mathbb{R}$

δ. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Με $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $e^{2020-x}-e^{-x}=x\Leftrightarrow e^{-x}+x=e^{2020-x}$

$$\Leftrightarrow\ln\left(e^{-x}+x\right)=\ln\left(e^{2020-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x+\ln\left(e^{-x}+x\right)=2020\Leftrightarrow f(x)=2020$$

Εξετάζουμε αν ο αριθμός 2020 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f.
Η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ και $\Delta_2=[-1,+\infty)$ με $f(1)=\ln\dfrac{e-1}{e}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\ln\left(e^{-x}+x\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln e^{x}+\ln\left(e^{-x}+x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+xe^{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to1}(\ln t)=0$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{-x=u}{=}-\lim_{x\to-\infty}\frac{u}{e^{u}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}-\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^{u}}=0$$

οπότε $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+xe^{x}\right)=1$

Άρα, $f(\Delta_1)=\left[\ln\dfrac{e-1}{e},\ 0\right)$ που δεν περιέχει τον αριθμό 2020, οπότε η εξίσωση $f(x)=2020$ είναι αδύνατη στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$.

Επιπλέον,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(e^{-x}+x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+xe^{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(\ln t)=+\infty$$

αφού αν θέσουμε $1+xe^{x}=t$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}t=+\infty$$

Επομένως, $f(\Delta_2)=\left[\ln\dfrac{e-1}{e},+\infty\right)$. Ο αριθμός 2020 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x)=2020$ έχει ρίζα στο Δ_2. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της f στο Δ_2.

ε. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x+1)-f(x)=x+1+\ln\left(e^{-x-1}+x+1\right)-x-\ln\left(e^{-x}+x\right)$$

$$=1+\ln\frac{e^{-x-1}+x+1}{e^{-x}+x}=1+\ln\frac{e^{-1}+(x+1)e^{x}}{1+xe^{x}}$$

Αν θέσουμε $\dfrac{e^{-1}+(x+1)e^{x}}{1+xe^{x}}=w$

τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1}+(x+1)e^{x}}{1+xe^{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^{x}}{(x+1)e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}=1$$

Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\ln\frac{e^{-1}+(x+1)e^{x}}{1+xe^{x}}\right]$$

$$=\lim_{w\to+\infty}\left(1+\ln w\right)=1+\ln1=1$$

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$g(x)=e^{f(x)}=e^{x+\ln\left(e^{-x}+x\right)}=e^{x}\left(e^{-x}+x\right)=1+xe^{x}$$

οπότε

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(1+xe^x)dx=1(1-0)+\int_0^1 x(e^x)'dx$$

$$=1+[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx=1+e-(e-1)=2$$

Θέμα 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+f^2(x)t}-\sqrt{t^2+x^4t}\right)=0$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(-1)=f(1)<0$

και η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$

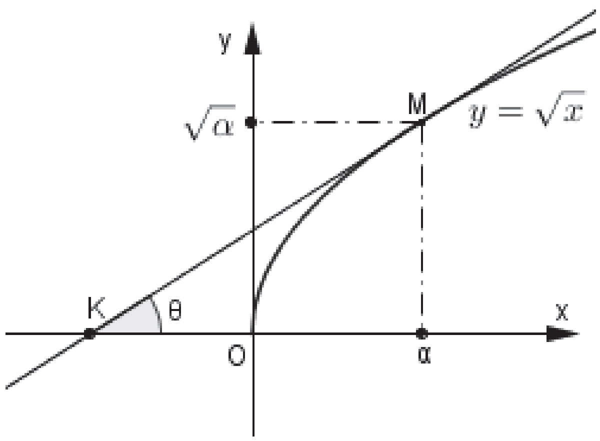
α. **Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

β. **Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

γ. **Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.**

δ. **Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και την παραπάνω κοινή εφαπτομένη.**

ε. **Ένα υλικό σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.**



Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του σημείου Μ δίνεται από τη σχέση $\alpha'(t)=4\alpha(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=x\hat{K}M$ τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο διέρχεται από το σημείο $B\left(\frac{1}{4},g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, όπου Κ είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο Β με τον άξονα x΄x.

Λύση

α. Έστω τυχαίο $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε t κοντά στο $+\infty$ $(t>0)$ είναι:

$$\sqrt{t^2+f^2(x)t}-\sqrt{t^2+x^4t}=\frac{t^2+f^2(x)t-t^2-x^4t}{\sqrt{t^2+f^2(x)t}+\sqrt{t^2+x^4t}}=$$

$$\frac{t\left(f^2(x)-x^4\right)}{|t|\sqrt{1+\frac{f^2(x)}{t}}+|t|\sqrt{1+\frac{x^4}{t}}}\overset{t>0}{=}\frac{f^2(x)-x^4}{\sqrt{1+\frac{f^2(x)}{t}}+\sqrt{1+\frac{x^4}{t}}}$$

Άρα $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2+f^2(x)t}-\sqrt{t^2+x^4t}\right)=\dfrac{f^2(x)-x^4}{2}$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\dfrac{f^2(x)-x^4}{2}=0\Leftrightarrow f^2(x)=x^4$

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ είναι:

$$f^2(x)=x^4>0,\ \text{άρα}\ f(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $f(-1)=f(1)<0$, άρα $f(x)<0$ για κάθε

$$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

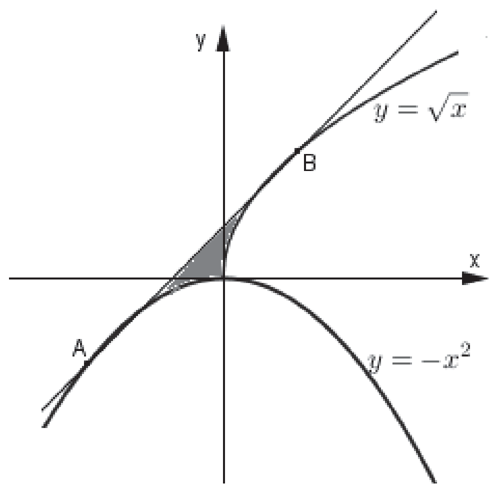
Όμως $f^2(x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f(0)=0$

Επομένως $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $f^2(x)=x^4\Leftrightarrow|f(x)|=|x^2|$

$$\overset{f(x)\le 0}{\Leftrightarrow}-f(x)=x^2\Leftrightarrow f(x)=-x^2$$

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-2x$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$



Έστω (ε_A) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$, τότε:

$$\varepsilon_A : y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_A : y + \alpha^2 = -2\alpha(x-\alpha) \Rightarrow \varepsilon_A : y = -2\alpha x + \alpha^2$$

Έστω (ε_B) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B\big(\beta, g(\beta)\big)$, τότε:

$$\varepsilon_B : y - g(\beta) = g'(\beta)(x-\beta) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \sqrt{\beta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}(x-\beta) \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y - \sqrt{\beta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}x - \frac{\sqrt{\beta}}{2} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_B : y = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}x + \frac{\sqrt{\beta}}{2}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\begin{cases} -2\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{\beta}} & \text{(I)} \\ \alpha^2 = \dfrac{\sqrt{\beta}}{2} & \text{(II)} \end{cases}$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε: $-2\alpha^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha^3 = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

Από τη σχέση (II) έχουμε: $\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{\beta}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\beta} = \frac{1}{2} \overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta = \frac{1}{4}$

Είναι: $A\big(\alpha, f(\alpha)\big)$, δηλαδή $A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$B\big(\beta, g(\beta)\big)$, δηλαδή $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

και η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y = x + \frac{1}{4}$

δ. Είναι: $E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$

με

$$E(\Omega_1) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left[x + \frac{1}{4} - \left(-x^2\right)\right]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(x + x^2\right)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{4}dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{4}\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0 - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

$$E(\Omega_2) = \int_{0}^{\frac{1}{4}}\left[x + \frac{1}{4} - \sqrt{x}\right]dx = \int_{0}^{\frac{1}{4}}\left(x - x^{\frac{1}{2}}\right)dx + \int_{0}^{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}dx =$$

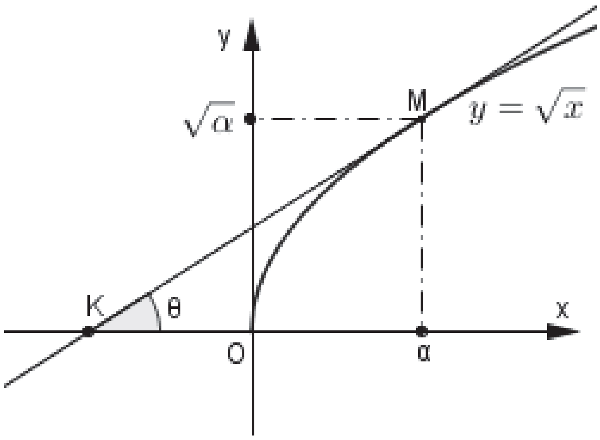
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{32} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{64}} - 0 + \frac{1}{16} =$$

$$= \frac{1}{32} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3 - 8 + 6}{96} = \frac{1}{96}$$

Επομένως, $E(\Omega) = \frac{1}{24} + \frac{1}{96} = \frac{5}{96}$

ε. Είναι $\varepsilon\varphi\theta = g'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, οπότε την τυχαία χρονική στιγμή t είναι $\varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha(t)}}$ (1)

Από υπόθεση είναι $\alpha'(t) = 4\alpha(t)$ (2)



Τα μέλη της σχέσης (1) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε: $\left(1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t) = -\frac{\left(2\sqrt{\alpha(t)}\right)'}{4\alpha(t)} \Leftrightarrow$

$$\left(1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t) = -\frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha(t)}}\cdot\alpha'(t)}{4\alpha(t)} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{4\alpha(t)\sqrt{\alpha(t)}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\theta'(t) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left(1 + \frac{1}{4\alpha(t)}\right)\theta'(t) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$\left(1+\frac{1}{4\alpha(t_0)}\right)\theta'(t_0)=-\frac{1}{\sqrt{\alpha(t_0)}}$$

Είναι $\alpha(t_0)=\frac{1}{4}$, αφού το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Ε, οπότε $2\theta'(t_0)=-2\Leftrightarrow\theta'(t_0)=-1$ rad ανά μονάδα χρόνου.

Σημείωση:

Μια άλλη εκφώνηση του θέματος που διαφοροποιείται από την προηγούμενη στο πρώτο ερώτημα θα μπορούσε να είναι η επόμενη:

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(x+h)-f^2(x-h)}{h^2+4h}=2x^3$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(-1)=f(1)=-1$

και η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και κατόπιν να ακολουθήσουν τα επόμενα ερωτήματα.

Λύση

α. Για κάθε h «κοντά» στο 0 $(h\neq 0)$ είναι:

$$\frac{f^2(x+h)-f^2(x-h)}{h^2+4h}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}\cdot\frac{f(x+h)+f(x-h)}{h+4}=$$

$$=\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]\cdot\frac{f(x+h)+f(x-h)}{h+4}\quad(*)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\quad\text{και}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\overset{u=-h}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u}=f'(x)$$

Επίσης η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως παραγωγίσιμη, οπότε

$$\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)\quad\text{και}\quad\lim_{h\to 0}f(x-h)=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, από τη σχέση (*) έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+h)-f^2(x-h)}{h^2+4h}=\left(f'(x)+f'(x)\right)\frac{f(x)+f(x)}{4}$$

$$=f(x)f'(x)$$

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f(x)f'(x)=2x^3\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=4x^3\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(x^4\right)'$$

Επομένως, $f^2(x)=x^4+c$, $x\in\mathbb{R}$

Με $x=1$ έχουμε:

$$f^2(1)==1+c\Leftrightarrow 1=1+c\Leftrightarrow c=0$$

Άρα, $f^2(x)=x^4$, $x\in\mathbb{R}$

Σημείωση:

Μια ακόμα εκφώνηση του θέματος που διαφοροποιείται από τις προηγούμενες στο πρώτο ερώτημα θα μπορούσε να είναι η επόμενη:

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^{f^2(x)}-e^{x^4}=x^4-f^2(x)$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$
- $f(-1)=f(1)=-1$

και η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και κατόπιν να ακολουθήσουν τα επόμενα ερωτήματα.

Λύση

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$e^{f^2(x)}-e^{x^4}=x^4-f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow e^{f^2(x)}+f^2(x)=e^{x^4}+x^4,\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι:

$$g'(x)=e^x+1>0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1». Έτσι, έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow g\left(f^2(x)\right)=g(x^4)\Leftrightarrow f^2(x)=x^4,\ x\in\mathbb{R}$$

Το Βήμα του Ευκλείδη

Αξιοσημείωτες τριγωνομετρικές ανισότητες

Β΄ ΜΕΡΟΣ

Ανεστόπουλος Κωνσταντίνος και Παπαδημητρίου Βασίλειος

Σε **συνέχεια** του άρθρου* «Αξιοσημείωτες Τριγωνομετρικές Ανισότητες», που δημοσιεύθηκε σε προηγούμενο τεύχος του Ευκλείδη Β΄, στην εργασία αυτή, έγινε προσπάθεια συγκέντρωσης και επίλυσης σημαντικών ανισοτήτων, που έχουν εφαρμογές **στα όρια** και **τα ολοκληρώματα**, με την πιο στοιχειώδη μέθοδο.

Πρόταση5 . Για κάθε $x,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$|\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Απόδειξη: Αν $\alpha\beta=0$, η παραπάνω σχέση είναι προφανής. Έστω $\alpha\beta\neq 0$, τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $f(x)=\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x=$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\eta\mu x+\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sigma\upsilon\nu x\right)$$

και $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\ge\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|\Rightarrow\dfrac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\le 1$

$$\Rightarrow -1\le\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\le 1,\quad \text{όμοια}\quad -1\le\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\le 1$$

επιπλέον $\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2+\left(\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^2=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$,

επομένως, υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$: $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και

$\eta\mu\theta=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Συνεπώς $f(x)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu x)$

$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\eta\mu(x+\theta)$, οπότε $|f(x)|=\left|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\eta\mu(x+\theta)\right|=$

$=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|\eta\mu(x+\theta)|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $|\alpha\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x|\le\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Άσκηση5. Να αποδειχθεί ότι:

$2(1-\sigma\upsilon\nu x)>x\eta\mu x$, για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Λύση: Για κάθε $x\in(0,\pi)$, ισχύει:

$$0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \varepsilon\varphi\frac{x}{2}>\frac{x}{2}>0\Rightarrow\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}>\frac{x}{2}>0\Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}>0\Rightarrow 4\eta\mu^2\frac{x}{2}>2x\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2}>x\eta\mu x\Rightarrow 2(1-\sigma\upsilon\nu x)>x\eta\mu x.$$

Άσκηση6. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$(1+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\le\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, από την $\alpha\beta\le\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$,

έχουμε: $(1+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\le\dfrac{(1+\eta\mu x)^2+(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}{2}=$

$$=\frac{1+2\eta\mu x+\eta\mu^2x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x}{2}=$$

$$=\frac{3+2(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{2}=\frac{3}{2}+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x.$$

Από την πρόταση 5, είναι: $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{2}$, επομένως, από την μεταβατική ιδιότητα έχουμε: $(1+\eta\mu x)(1+\sigma\upsilon\nu x)\le\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άσκηση7. Να αποδειχθεί ότι: $x-\eta\mu x<\varepsilon\varphi x-x$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Λύση: Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$x-\eta\mu x<\varepsilon\varphi x-x\Leftrightarrow 2x<\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x<\eta\mu x+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow 2x<\eta\mu x\left(1+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x<\eta\mu x\frac{\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow 2x\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu x(1+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\sigma\upsilon\nu x<\eta\mu x\cdot 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sigma\upsilon\nu x<2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\sigma\upsilon\nu x<2\eta\mu\frac{x}{2}\sigma\upsilon\nu^3\frac{x}{2}\Leftrightarrow x\sigma\upsilon\nu x<2\frac{\eta\mu\frac{x}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}}\sigma\upsilon\nu^4\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

* **Σχόλιο:** Στο τεύχος 114 στο πρώτο μέρος, ο Παπαδημητρίου Βασίλης ήταν επίσης συγγραφέας του άρθρου

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2}\text{συν}x < \text{εφ}\frac{x}{2}\text{συν}^4\frac{x}{2}.$$

Επιπλέον, έχουμε $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \text{εφ}\frac{x}{2}$.

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$0 < \text{συν}x < \text{συν}^4\frac{x}{2},\ \text{για κάθε}\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Πράγματι: $\text{συν}x < \text{συν}^4\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\text{συν}^2\frac{x}{2} - 1 < \text{συν}^4\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{συν}^4\frac{x}{2} - 2\text{συν}^2\frac{x}{2} + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\text{συν}^2\frac{x}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Άσκηση8. Να δειχθεί για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $\frac{\text{εφ}x}{x} > \frac{x}{\text{ημ}x}$.

Λύση: Για κάθε $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$, με $\alpha \neq \beta$, από την ανισοταυτότητα μεταξύ γεωμετρικού και αρμονικού μέσου, έχουμε:

$$\sqrt{\alpha\beta} > \frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta} > \frac{2}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta} > \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta}(\alpha+\beta) > 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 > 4\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha^2\beta^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)^2 > 0.$$

Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, λόγω της Πρότασης 1, είναι:

$$\sqrt{\text{εφ}x\cdot\text{ημ}x} > \frac{2}{\frac{1}{\text{εφ}x}+\frac{1}{\text{ημ}x}} = \frac{2}{\frac{\text{συν}x}{\text{ημ}x}+\frac{1}{\text{ημ}x}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\text{συν}x+1}{\text{ημ}x}} = \frac{2\text{ημ}x}{1+\text{συν}x} = \frac{4\text{ημ}\frac{x}{2}\text{συν}\frac{x}{2}}{2\text{συν}^2\frac{x}{2}} =$$

$$= 2\text{εφ}\frac{x}{2} > 2\frac{x}{2} = x,\ \text{οπότε}\ \sqrt{\text{εφ}x\cdot\text{ημ}x} > x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}x\cdot\text{ημ}x > x^2 \Leftrightarrow \frac{\text{εφ}x}{x} > \frac{x}{\text{ημ}x},\ \text{για κάθε}\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

Άσκηση9. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\left(1+\frac{1}{\text{ημ}x}\right)\left(1+\frac{1}{\text{συν}x}\right) > 5.$$

Λύση: Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, από την ανισοταυτότητα $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$, έχουμε:

$$\text{ημ}^2x + \text{συν}^2x \geq 2\text{ημ}x\text{συν}x \Leftrightarrow 1 \geq 2\text{ημ}x\text{συν}x \quad (1)$$

Ακόμη $0<\text{ημ}x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{ημ}x}>1$ και $0<\text{συν}x<1 \Leftrightarrow \frac{1}{\text{συν}x}>1$, προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{1}{\text{ημ}x}+\frac{1}{\text{συν}x} > 2 \Leftrightarrow \text{ημ}x+\text{συν}x > 2\text{ημ}x\text{συν}x \quad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε $\text{ημ}x+\text{συν}x+1 > 4\text{ημ}x\text{συν}x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}x+\text{συν}x+\text{ημ}x\text{συν}x+1 > 5\text{ημ}x\text{συν}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}x(1+\text{συν}x)+(1+\text{συν}x) > 5\text{ημ}x\text{συν}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\text{συν}x)(1+\text{ημ}x) > 5\text{ημ}x\text{συν}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\text{συν}x}{\text{συν}x}\frac{1+\text{ημ}x}{\text{ημ}x} > 5 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\text{ημ}x}\right)\left(1+\frac{1}{\text{συν}x}\right) > 5.$$

Άσκηση10. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδειχθεί ότι:

α) $(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{2}} + (\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{2}} \geq 2$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

β) $(1+\text{εφ}x)^{\nu} + (1+\text{σφ}x)^{\nu} \geq 2^{\nu+1}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Λύση: α) Από την $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$, έχουμε:

$$(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{2}} + (\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{2}} = \left[(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{4}}\right]^2 + \left[(\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{4}}\right]^2$$

$$\geq 2(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{4}}(\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{4}} = 2(\text{εφ}x\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{4}} = 2.$$

β) Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει:

$$1+\alpha \geq 2\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (1+\alpha)^2 \geq 4\alpha \Leftrightarrow (1-\alpha)^2 \geq 0.$$

Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι: $\text{εφ}x > 0$ και $\text{σφ}x > 0$, επομένως έχουμε:

$$1+\text{εφ}x \geq 2(\text{εφ}x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (1+\text{εφ}x)^{\nu} \geq 2^{\nu}(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{2}}$$

και $1+\text{σφ}x \geq 2(\text{σφ}x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (1+\text{σφ}x)^{\nu} \geq 2^{\nu}(\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{2}}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις και χρησιμοποιώντας το α ερώτημα, προκύπτει: $(1+\text{εφ}x)^{\nu} + (1+\text{σφ}x)^{\nu} \geq$

$$\geq 2^{\nu}\left[(\text{εφ}x)^{\frac{\nu}{2}} + (\text{σφ}x)^{\frac{\nu}{2}}\right] \geq 2^{\nu}\cdot 2 = 2^{\nu+1},$$

Άσκηση11. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

α) $\text{εφ}^2x + \text{σφ}^2x \geq 2$

β) $\left(1+\text{εφ}^2x\right)^{\nu} + \left(1+\text{σφ}^2x\right)^{\nu} \geq 2^{\nu+1}$.

Λύση: α) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \geq 0,\ \text{συνεπώς}$$

$\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x=\varepsilon\varphi^2x+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2x}\ge 2\Rightarrow \varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x\ge 2$.

β) Για κάθε $\alpha,\beta\ge 0$ ισχύει: $\alpha+\beta\ge 2\sqrt{\alpha\beta}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\ge 4\alpha\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\ge 0$, επομένως

$$(1+\varepsilon\varphi^2x)^\nu+(1+\sigma\varphi^2x)^\nu\ge 2\sqrt{(1+\varepsilon\varphi^2x)^\nu(1+\sigma\varphi^2x)^\nu}=$$

$$2\sqrt{\left[(1+\varepsilon\varphi^2x)(1+\sigma\varphi^2x)\right]^\nu}=$$

$$=2\sqrt{(1+\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x+\varepsilon\varphi^2x\sigma\varphi^2x)^\nu}$$

$$=2\sqrt{(2+\varepsilon\varphi^2x+\sigma\varphi^2x)^\nu}\ge 2\sqrt{4^\nu}=2\cdot 2^\nu=2^{\nu+1}.$$

Άσκηση12. Να αποδειχθεί ότι: $\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\eta\mu x\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right)\le(\alpha+\beta)^2$**, για κάθε** $x,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**.**

Λύση: Για κάθε $x,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\eta\mu x\right)\left(\alpha+\beta\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$=\alpha^2+\alpha\beta\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x+\alpha\beta\sqrt{2}\eta\mu x+2\beta^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=$$

$$=\alpha^2+\alpha\beta\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)+\beta^2\eta\mu 2x\le$$

$$\le\alpha^2+\alpha\beta\sqrt{2}\sqrt{2}+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2,$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\le\sqrt{2}$, από την Πρόταση 5.

Άσκηση13. Να αποδειχθεί ότι: $(\alpha\eta\mu x+\beta\eta\mu y)(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu y)\le\alpha^2+\beta^2$**, για κάθε** $x,y,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$**.**

Λύση: Για κάθε $x,y,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ισχύει:

$$(\alpha\eta\mu x+\beta\eta\mu y)(\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu y)=$$

$$=\alpha^2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\alpha\beta\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\alpha\beta\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x+\beta^2\eta\mu y\sigma\upsilon\nu y=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\eta\mu 2x+\alpha\beta(\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x)+\frac{\beta^2}{2}\eta\mu 2y=$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}\eta\mu 2x+\alpha\beta\eta\mu(x+y)+\frac{\beta^2}{2}\eta\mu 2y\le$$

$$\le\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\beta+\frac{\beta^2}{2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}\le\alpha^2+\beta^2.$$

Άσκηση14. Να δειχθεί ότι για κάθε $x,\alpha\in\mathbb{R}$ **και** $\alpha\ge 0$ **ισχύει:** $\sqrt{\eta\mu^2x+\alpha}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x+\alpha+1}\le\alpha+2$**.**

Λύση: Για κάθε $x,\alpha\in\mathbb{R}$ και $\alpha\ge 0$, από την ανισοταυτότητα $(\kappa+\lambda)^2\le 2(\kappa^2+\lambda^2)$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{\eta\mu^2x+\alpha}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x+\alpha+1}\right)^2\le$$

$$2\left(\eta\mu^2x+\alpha+\sigma\upsilon\nu^2x+\alpha+1\right)=2(2\alpha+2)=4(\alpha+1).$$

Άρα $\sqrt{\eta\mu^2x+\alpha}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x+\alpha+1}\le 2\sqrt{\alpha+1}=2\sqrt{1\cdot(\alpha+1)}\le 1+\alpha+1=\alpha+2$, έχοντας χρησιμοποιήσει την σχέση $2\sqrt{\kappa\lambda}\le\kappa+\lambda$, που ισχύει για κάθε $\kappa,\lambda\ge 0$.

Άσκηση15.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$**, να αποδειχθεί ότι:** $\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right)\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\eta\mu x\right)\sigma\upsilon\nu^4x\le 1$**.**

Λύση: Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$, ισχύει:

$$\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right)\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\eta\mu x\right)=$$

$$=\varepsilon\varphi^4x+\sqrt{2}\varepsilon\varphi^2x\eta\mu x+\sqrt{2}\varepsilon\varphi^2x\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=$$

$$=\varepsilon\varphi^4x+\sqrt{2}\varepsilon\varphi^2x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu 2x\le$$

$$\le\varepsilon\varphi^4x+\sqrt{2}\varepsilon\varphi^2x\sqrt{2}+1=\varepsilon\varphi^4x+2\varepsilon\varphi^2x+1=$$

$$=\left(\varepsilon\varphi^2x+1\right)^2=\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}\right)^2=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4x}.$$

Άρα $\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x\right)\left(\varepsilon\varphi^2x+\sqrt{2}\eta\mu x\right)\sigma\upsilon\nu^4x\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}\right\}$.

Άσκηση16.

Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{\eta\mu^3x}{\eta\mu y}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu y}\ge\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(x-y)}$**, για κάθε** $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$**.**

Λύση: Για κάθε $\alpha,\beta,\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$(\alpha^2+\beta^2)(\kappa^2+\lambda^2)\ge(\alpha\kappa+\beta\lambda)^2$, επομένως

$$\left(\frac{\eta\mu^3x}{\eta\mu y}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu y}\right)\sigma\upsilon\nu(x-y)=$$

$$\left(\frac{\eta\mu^3x}{\eta\mu y}+\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu y}\right)(\eta\mu x\eta\mu y+\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y)\ge$$

$$\ge\left(\sqrt{\frac{\eta\mu^3x}{\eta\mu y}}\sqrt{\eta\mu x\eta\mu y}+\sqrt{\frac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu y}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\eta\mu^4x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^4x}\right)^2=\left(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x\right)^2=1.$$

Επιπλέον, έχουμε $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ και $-\dfrac{\pi}{2}<-y<0$,

οπότε $-\dfrac{\pi}{2}<x-y<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu(x-y)>0$, άρα

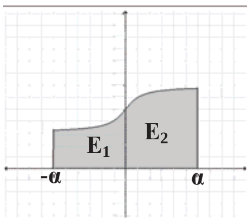
$\dfrac{\eta\mu^3x}{\eta\mu y}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3x}{\sigma\upsilon\nu y}\ge\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(x-y)}$, για κάθε $x,y\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Όταν το γράφημα δίνει νόημα στο ορισμένο ολοκλήρωμα.

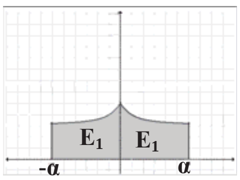
Κεΐσογλου Στέφανος

Μία από τις σημαντικότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζει κάποιος όταν ασχολείται με τα Μαθηματικά είναι η **έλλειψη εποπτείας**, δηλαδή εικόνας, η οποία είναι τόσο σημαντική για την κατανόηση αφηρημένων εννοιών και προτάσεων.
Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι μία πρώτης τάξεως ευκαιρία για ‘‘επιστροφή στις ρίζες’’ της εποπτείας.
Το ολοκλήρωμα γεννήθηκε μέσα από την προσπάθεια να υπολογίσουμε εμβαδά επιπέδων σχημάτων και σιγά σιγά εγκατέλειψε το συγκεκριμένο γεωμετρικό πλαίσιο, απέκτησε δικό του συμβολισμό, ο οποίος συχνά δεν αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο γεωμετρικό αντικείμενο και μπορεί να εκφράζει κάποια συνάρτηση.. Για παράδειγμα η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)dx \quad t\in R$ σε κάθε τιμή του t αντιστοιχεί κάποιον αριθμό F(t).
Τα πράγματα όμως δεν είναι πάντα τόσο αφηρημένα γιατί, πολλές φορές, μπορούμε να αναπαραστήσουμε γεωμετρικά μία δοσμένη σχέση και **να ανακαλύψουμε** το γεωμετρικό της περιεχόμενο.
Συχνά είναι χρήσιμο να εργάζεται κάποιος αντίστροφα, να ξεκινά, δηλαδή από κάποια γεωμετρική παράσταση ή μετασχηματισμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και με βάση αυτή να ανακαλύπτει νέες σχέσεις.. Το τι ακριβώς εννοούμε ελπίζουμε ότι θα φανεί παρακάτω.

Α) Ανάκλαση ως προς τον άξονα y΄y.



Ας υποθέσουμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής και θετική στο διάστημα [-α , α]
Το συνολικό εμβαδόν Ε είναι χωρισμένο στα εμβαδά E_1 και E_2 άρα ισχύει: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ (1)



Αν θεωρήσουμε το συμμετρικό του χωρίου E_1 ως προς τον άξονα ψ΄ψ το εμβαδόν δεν αλλάζει άρα μπορούμε να γράψουμε $E_1 = \int_{0}^{\alpha} f(-x)dx$ οπότε η (1) γράφεται:

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(-x)dx$ Η αυστηρή απόδειξη είναι απλή αρκεί στο ολοκλήρωμα $\int_{0}^{\alpha} f(-x)dx$ να θέσουμε t=-x.

Η σχέση (1) είναι γενική και αν εφαρμοστεί σε άρτιες ή περιττές συναρτήσεις δίνει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα αν η συνάρτηση f είναι άρτια ισχύει
$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ (2)ενώ αν είναι περιττή $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$(3).

Ασκήσεις

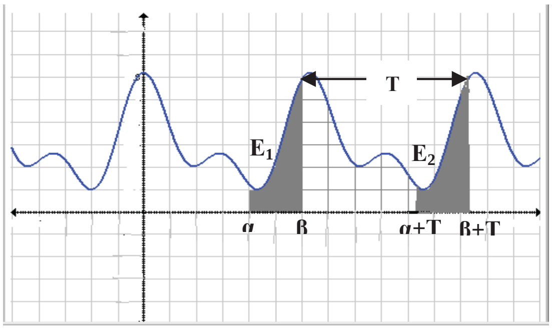
1) Να δώσετε μια γεωμετρική απόδειξη των σχέσεων (2) και (3).

2) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2} f(x^2)dx = \int_{0}^{\pi} \sigma\upsilon\nu x f(x^2)dx$

3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{-1/2}^{1/2} \sigma\upsilon\nu x . \ln\frac{1+x}{1-x} dx$

Β) Οι περιοδικές συναρτήσεις.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια περιοδική συνάρτηση f με περίοδο Τ και τη γραφική της παράσταση.



Από το σχήμα προκύπτει ότι τα δυο εμβαδά E_1 και E_2 είναι ίσα αφού το E_2 προκύπτει αν μεταφέρουμε το E_1 κατά Τ. Η παραπάνω διαπίστωση μας οδηγεί να γράψουμε την ισότητα: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx$ η οποία μπορεί απλά να αποδειχθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης θέτοντας x+T=t και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι f(t-T)=f(t).

Αν αντί για μεταφορά του E_1 κατά Τ το μεταφέρουμε κατά 3Τ το εμβαδόν προφανώς δεν αλλάζει και επομένως γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha+\kappa T}^{\beta+\kappa T} f(x)dx$.Αυτό σημαίνει ότι στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης μπορούμε να αφαιρούμε ή να προσθέτουμε το ίδιο πολλαπλάσιο της περιόδου.

Ασκήσεις

4) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο Τ τότε ισχύει:

$$\int_0^{\kappa T} f(x)dx=\kappa.\int_0^{T} f(x)dx$$

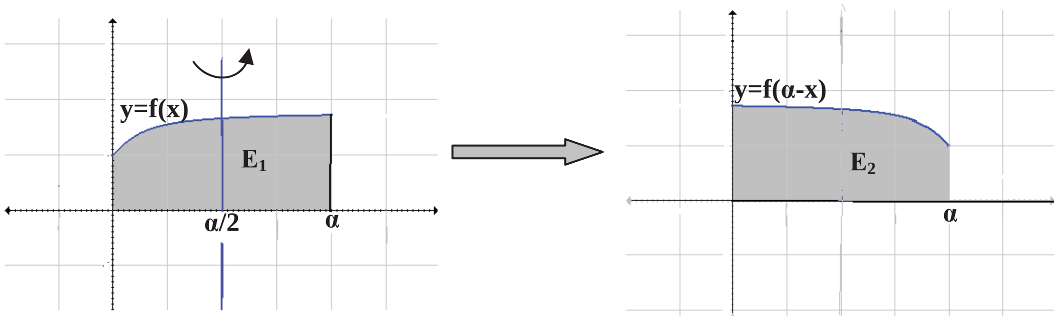
5) **α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=10\eta\mu^3(2x)\sigma\upsilon\nu^2(2x)$ είναι περιοδική με περίοδο π.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{218\pi}^{222\pi} 10\eta\mu^3(2x)\sigma\upsilon\nu^2(2x)dx=0$

Γ) Στροφή περί το μέσον

Ας υποθέσουμε ότι περιστρέφουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y=f(x), η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα [0 α], γύρω από την ευθεία x=α/2.

Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η y=f(α-x) και έχει το ίδιο πεδίο ορισμού. Παρατηρούμε ακόμη ότι το εμβαδόν των δυο χωρίων είναι ίσα δηλαδή $E_1= E_2$.



Γράφοντας τα εμβαδά με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει η σχέση: $\int_0^{\alpha} f(\alpha-x)dx=\int_0^{\alpha} f(x)dx$ την οποία μπορούμε να αποδείξουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης θέτοντας t=α-x.

Ασκήσεις

6) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α β] τότε ισχύει η σχέση: $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της σχέσης;

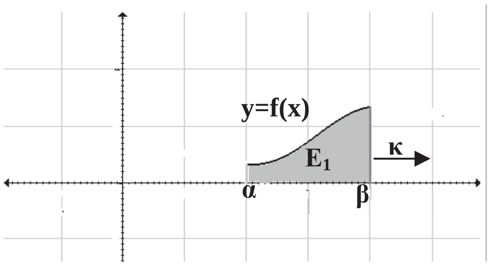
7) Να αποδείξετε ότι: **α)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{\kappa}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^{\kappa}xdx$ **β)** $\int_0^{\pi} x.f(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$

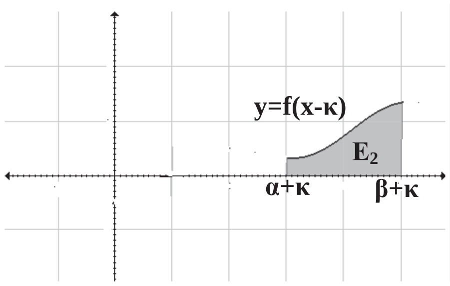
γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ημx\text{-}συνx}{1+ημxσυνx}=0$ **δ)** $\int_0^{\pi} \frac{ημ2κx}{ημx}=0$

Δ) Μεταφορά της γραφικής παράστασης.

Ας υποθέσουμε ότι η συνεχής συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα [α β] και έχει γραφική παράσταση την καμπύλη του σχήματος (1)

Αν η γραφική παράσταση μεταφερθεί παράλληλα προς τον άξονα x΄x κατά κ τότε τα εμβαδά E_1 και E_2 είναι ίσα.





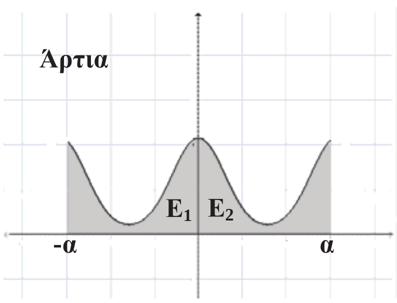
Γράφοντας τα εμβαδά με τη βοήθεια του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει η σχέση: $\int_α^β f(x)dx=\int_{α+κ}^{β+κ} f(x\text{-}κ)dx$ την οποία μπορούμε να αποδείξουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης θέτοντας t=x+κ στο πρώτο ολοκλήρωμα.. Αξίζει κανείς να παρατηρήσει ότι εδώ έχουμε εξετάσει μια περίπτωση μεταφοράς η οποία αν εφαρμοστεί στις περιοδικές συναρτήσεις καταλήγουμε πάλι στη σχέση $\int_α^β f(x)dx=\int_{α+T}^{β+T} f(x)dx$ όπου T η περίοδος της συνάρτησης.

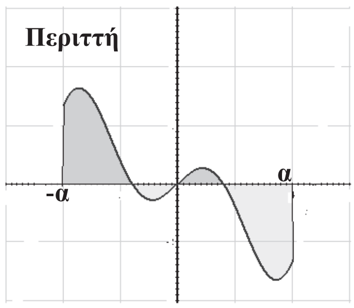
Άσκηση

8) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι θετική και συνεχής στο διάστημα [α β] και ότι το εμβαδόν που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α και x=β είναι ίσο με Ε. Να υπολογίσετε το $\int_α^β [f(x)+κ]dx$ και να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

Λύσεις των ασκήσεων.

1) Στην άρτια συνάρτηση $E_1=E_2$ άρα το συνολικό εμβαδόν Ε ισούται με $2E_2$.
Στην περιττή συνάρτηση τα χωρία που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x έχουν συνολικό εμβαδόν ίσο με το συνολικό εμβαδόν των χωρίων που βρίσκονται κάτω.





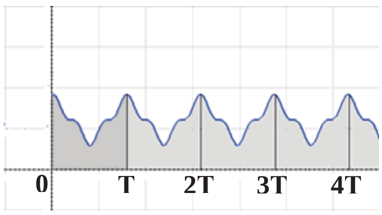
2) Η συνάρτηση $g(x)=\frac{συνx}{2}.f(x^2)$ είναι άρτια άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{συνx}{2} f(x^2)dx = 2\int_0^{\pi} \frac{συνx}{2} f(x^2)dx = \int_0^{\pi} συνx f(x^2)dx$$

3) Η συνάρτηση $g(x)=συνx.\ln\frac{1+x}{1\text{-}x}$ είναι περιττή στο διάστημα [-1/2 1/2] αφού

$g(-x)=$ συν$(-x).\ln\frac{1-x}{1+x}=-g(x)$ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι για $κ>0$ ισχύει $\ln\frac{1}{κ}=-\ln κ$

4) Αν κάνουμε ένα σχήμα τότε μπορούμε να 'δούμε' τη λύση:



$$\int_0^{κT} f(x)dx=\int_0^{T} f(x)dx+\int_T^{2T} f(x)dx+\int_{2T}^{3T} f(x)dx+\ldots$$
$\ldots+\int_{(κ-1)T}^{κT} f(x)dx=κ.\int_0^{T} f(x)dx$ αφού όλοι οι όροι στο δεύτερο μέλος είναι ίσοι.

5) α) Παρατηρούμε ότι $f(x+π)=f(x)$

β) $\int_{218π}^{222π} 10ημ^3(2x)συν^2(2x)dx=\int_0^{4π} 10ημ^3(2x)συν^2(2x)dx=\int_{-2π}^{2π} 10ημ^3(2x)συν^2(2x)dx$ η συνάρτηση όμως $f(x)=10ημ^3(2x)συν^2(2x)$ είναι περιττή και επομένως το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0.

6) Αν θέσουμε $α+β-x=t$ τότε το αρχικό ολοκλήρωμα $\int_α^β f(α+β-x)dx$ μετασχηματίζεται σε $\int_β^α -f(t)dt$ το οποίο ισούται με $\int_α^β f(t)dt$.

Η γεωμετρική ερμηνεία στηρίζεται στο ότι η γραφική παράσταση της $f(α+β-x)$ στο διάστημα $[α\ β]$ προέρχεται από τη γραφική παράσταση της $f(x)$ αν η τελευταία περιστραφεί περί το μέσον του διαστήματος $[α\ β]$ δηλαδή γύρω από την ευθεία

$$x=\frac{α+β}{2}.$$

7) α) Εφαρμόζουμε τον τύπο $\int_0^{\frac{π}{2}} f(\frac{π}{2}-x)dx=\int_0^{\frac{π}{2}} f(x)dx$

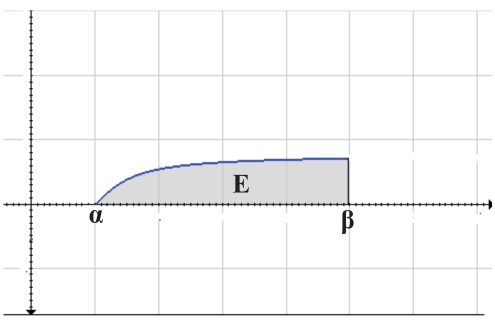
β) $\int_0^{π} x.f(ημx)dx=\int_0^{π}(π-x)f[ημ(π-x)]dx=\int_0^{π} π.f(ημx)dx-\int_0^{π} x.f(ημx)dx$ άρα

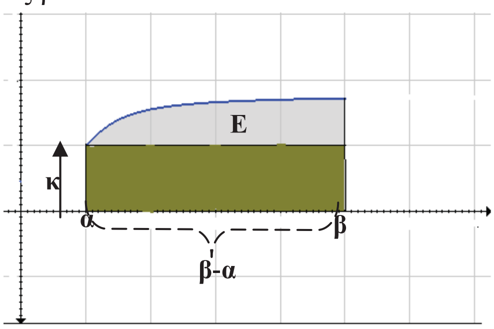
$$2\int_0^{π} x.f(ημx)dx=\int_0^{π} π.f(ημx)dx \text{ δηλαδή } \int_0^{π} x.f(ημx)dx=\frac{π}{2}\int_0^{π} f(ημx)dx$$

γ) $I=\int_0^{\frac{π}{2}}\frac{ημx-συνx}{1+ημxσυνx}=\int_0^{\frac{π}{2}}\frac{ημ(\frac{π}{2}-x)-συν(\frac{π}{2}-x)}{1+ημ(\frac{π}{2}-x)συν(\frac{π}{2}-x)}=-I$ άρα $I=0$ όμοια η δ)

8) $\int_α^β [f(x)+κ]dx=\int_α^β f(x)dx+\int_α^β κdx=E+κ(β-α)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία προκύπτει άμεσα από το σχήμα. Η μεταφορά προς τα επάνω κατά κ της γραφικής παράστασης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του αρχικού εμβαδού κατά το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ύψους κ και πλάτους β-α.

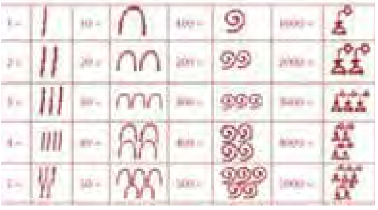




Επίλυση προβλημάτων από την αρχαία Αίγυπτο και την Μεσοποταμία με σύγχρονη αντιμετώπιση και συμβολισμούς

Στέργιος Τουρναβίτης

*Οι περισσότερες γνώσεις μας για τα **Αιγυπτιακά Μαθηματικά** περίπου 3 χιλιετίες π.χ. προέρχονται από τους παπύρους.*



Οι σπουδαιότεροι από αυτούς της Μόσχας, του Αχμή-Rhind, του Βερολίνου, περιέχουν πολλά πρακτικά προβλήματα όπως ο υπολογισμός της χωρητικότητας μιας σιταποθήκης, του όγκου μιας κανονικής ή κόλουρης πυραμίδας, πόσο σιτάρι χρειάζεται για να παρασκευαστεί μία συγκεκριμένη ποσότητα ψωμιού ή ζύθου κ.ά. Οι γνώσεις μας για τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων προέρχονται από τις πλάκες πηλού στις οποίες χαράσσονταν και στη συνέχεια ψήνονταν στον καυτό ήλιο ή σε φούρνους. Ευτυχώς αυτού του είδους τα γραπτά ντοκουμέντα ήταν πιο ανθεκτικά στο χρόνο απ' ότι οι αιγυπτιακοί πάπυροι. Θεωρούσαν απλές τις γραμμικές εξισώσεις για να ασχοληθούν με αυτές, ενώ

αντιμετώπιζαν με άνεση την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού, ήξεραν να επιλύουν προβλήματα με δύο αγνώστους με τρόπο που μοιάζει με τον σημερινό και πολλά ακόμη.

Εμείς στην σύντομη αυτή ξενάγησή μας θα περιοριστούμε σε προβλήματα που καταλήγουν σε εξισώσεις α΄ βαθμού από την επίλυση (ενδεχομένως) ενός γραμμικού συστήματος 2 ή 3 εξισώσεων με ισάριθμους αγνώστους.

1. Επιθυμούμε να διαιρέσουμε 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες.

Λύση: Κάθε άνδρας θα πάρει τα $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ της φραντζόλας. Αυτό προϋποθέτει να κόψουμε κάθε μία από τις 10 φραντζόλες σε 5 ίσα μέρη και να δώσουμε σε κάθε άνδρα τα 3 από αυτά. Μία περισσότερο πρακτική προσέγγιση θα επιτευχθεί αν αναλύσουμε το κλάσμα $\frac{6}{10}$ σε δύο ομώνυμα κλάσματα. $\frac{6}{10}=\frac{1+5}{10}=\frac{1}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί έγινε αυτή η διαδικασία;

2. Να μοιραστούν 700 καρβέλια ψωμιού σε 4 ανθρώπους και σε μερίδια ανάλογα προς τους αριθμούς $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ αντίστοιχα.

Λύση: Έστω x,y,z,w τα μερίδια του 1ου, 2ου, 3ου, 4ου, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το πρόβλημα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις: $x+y+z+w=700$ (1)

$$\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Ένας τρόπος είναι να εξισώσουμε καθένα από τους 4 ίσους λόγους με λ, να αντικαταστήσουμε στην (1) τις μεταβλητές x,y,z,w «συναρτήσει» του λ, να λύσουμε ως προς λ την εξίσωση που θα προκύψει και να αντικαταστήσουμε ξανά το λ για να βρούμε τα 4 άγνωστα μερίδια.

Μπορούμε όμως να βρούμε **κατευθείαν** με τι ισούται καθένα από τα 4 ίσα κλάσματα, εκμεταλλευόμενοι μία ιδιότητα των αναλογιών που χρησιμοποιείται ευρέως σε τέτοιου είδους προβλήματα. Έχουμε: $\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}}=$

$$=\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}}=\frac{x+y+z+w}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=$$

$=\frac{700}{\frac{7}{4}}=400$. Άρα $x=\frac{2}{3}400=266\frac{2}{3}$,

$y=\frac{1}{2}400=200$, $z=\frac{1}{3}400=133\frac{1}{3}$,

$w=\frac{1}{4}400=100$.

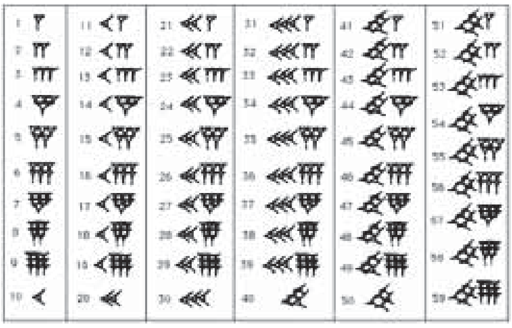
3. Σε τέσσερις ανθρώπους διαμοιράστηκαν 28 καρβέλια ψωμί έτσι ώστε καθένας από αυτούς πήρε 3 παραπάνω από τον προηγούμενό του. Πόσα καρβέλια πήρε ο καθένας χωριστά;

Λύση: Αν υποθέσουμε ότι ο 1ος πήρε x καρβέλια ψωμί, ο $2^{ος}$ πήρε $\mathbf{x+3}$, ο $3^{ος}$ $\mathbf{x+6}$ και ο $4^{ος}$ $\mathbf{x+9}$. Αν αθροίσουμε όλα αυτά τα μερίδια των τεσσάρων ατόμων, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\mathbf{4x+18=28 \Rightarrow x=2,5}.$$

Επομένως αντικαθιστώντας το $\mathbf{x}$, βρίσκουμε την ποσότητα του ψωμιού **2.5, 5.5, 8.5, 11.5** που πήραν ο $1^{ος}$, $2^{ος}$, $3^{ος}$, $4^{ος}$ αντίστοιχα.

*Τα προβλήματα ζύγισης πετρών από διάφορα πολύτιμα μέταλλα, όπως ασήμι, απασχολούσαν πολύ τους **Βαβυλώνιους** όπως φαίνεται από τα γραφόμενά τους στα διάφορα ευρήματα στις **πλάκες πηλού.***



4. Πόση είναι η μάζα μιας πέτρας αν γνωρίζουμε ότι η νέα της μάζα είναι η μάζα της μαζί με το $\frac{1}{7}$ αυτής της μάζας. Επίσης η νέα μάζα μαζί με το $\frac{1}{11}$ της νέας της μάζας είναι 1 μίνα. (Να βρεθεί το αποτέλεσμα σε τζιν. Δίνεται 1 μίνα=60 τζιν)

Λύση: Αν $\mathbf{x}$ είναι η άγνωστη μάζα της πέτρας, $\mathbf{y}$ η νέα της μάζα που προέκυψε από κάποια πρόσμιξη με επιπλέον υλικό, τότε ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\mathbf{y=x+\frac{1}{7}x\ (1),\quad y+\frac{1}{11}y=60\ (2)}$$

Από την λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων παίρνουμε $\mathbf{x=48.125}$ τζιν.

5. Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Αφαίρεσα το $\frac{1}{7}$ της μάζας της, στη συνέχεια αφαίρεσα το $\frac{1}{13}$ από την μάζα που απέμεινε, τη ζύγισα και βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα της πέτρας;

Λύση: Υποθέτουμε ότι η πέτρα έχει μάζα $\mathbf{x}$ τζιν. Από το πρόβλημα προκύπτει η εξίσωση:

$\mathbf{x-\frac{1}{7}x-\frac{1}{13}\left(x-\frac{1}{7}x\right)=60}$. Αν τη λύσουμε ως προς $\mathbf{x}$ προκύπτει $\mathbf{x=75.8\overline{3}}$ τζιν.

6. Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Αφαίρεσα το $\frac{1}{7}$ της μάζας της. Στη νέα μάζα πρόσθεσα το $\frac{1}{11}$ αυτής και από την μάζα που προέκυψε αφαίρεσα το $\frac{1}{13}$ αυτής. Ζύγισα την τελική μάζα και βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα (σε τζιν) της πέτρας;

Λύση: Αν $\mathbf{x}$ η αρχική μάζα της πέτρας και $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ οι μάζες που προκύπτουν από τις προσθαφαιρέσεις μαζών της αρχικής μάζας με την ίδια σειρά που αναφέρονται στο πρόβλημα, τότε έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mathbf{x-\frac{1}{7}x=y,\quad y+\frac{1}{11}y=z,\quad z-\frac{1}{13}z=60}$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $\mathbf{z=65}$. Αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή στην μεσαία και στη συνέχεια αυτό που θα βρούμε για $\mathbf{y}$ στην $1^{η}$, παίρνουμε: $\mathbf{x=69.513\overline{8}}$ τζιν.

7. Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Πήρα 6 φορές τη μάζα της και πρόσθεσα 2 τζιν. Στη μάζα που προέκυψε πρόσθεσα το 24πλάσιο του $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{7}$ αυτής. Τη ζύγισα και τη βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα της πέτρας;

Λύση: Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, καλούμε $\mathbf{x}$ την αρχική μάζα της πέτρας και $\mathbf{y}$ τη νέα μάζα. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις: $\mathbf{6x+2=y\ (1)}$,

$$\mathbf{y+24\cdot\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}y\right)\right]=60\ (2)}$$

Η λύση ως προς $\mathbf{y}$ της τελευταίας εξίσωσης δίνει $\mathbf{y=28}$ ενώ από την $1^{η}$ παίρνουμε $\mathbf{x=4.\overline{3}}$ τζιν.

*Από τους αρχαίους πολιτισμούς της **Περσίας** και της **Ινδίας** όπου καλλιεργούνταν τα κίτρα και τα μάνγκο αντίστοιχα, προέρχονται πιθανόν τα δύο επόμενα προβλήματα.*

8. Η συνολική τιμή 9 κίτρων και 7 μήλων είναι 107 νομισματικές μονάδες, ενώ η συνολική τιμή 7 κίτρων και 9 μήλων είναι 101 ν.μ. Ποια είναι η τιμή του ενός κίτρου και ενός μήλου;

Λύση: Έστω $\mathbf{x}$ η τιμή του ενός κίτρου και $\mathbf{y}$ η τιμή του ενός μήλου.
Τότε έχουμε: $\mathbf{9x+7y=107\ (1)}$, $\mathbf{7x+9y=101\ (2)}$

Με τα γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο *αγνώστους θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στη Β΄ Λυκείου. Ωστόσο από το Γυμνάσιο είχαμε αναπτύξει διάφορες μεθόδους επίλυσης αυτών, όπως επίσης και στη Α΄ Λυκείου σε προβλήματα Φυσικής, Χημείας κ.ά.*

Αν λύσουμε το σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο βρίσκουμε $\mathbf{x=8,\ y=5}$ μονάδες.

9. Μία νύχτα σ' ένα δάσος όπου ζούσε μία οικογένεια μαϊμούδων, ο μπαμπάς τους, δεν μπορούσε να κοιμηθεί και κατέβηκε από το δέντρο στο έδαφος όπου σ' ένα λαγούμι είχαν αποθηκεύσει μερικά μάνγκο. Καθώς ήταν πεινασμένος, πήρε και έφαγε το $\frac{1}{6}$ από τα μάνγκο. Αργότερα την ίδια νύχτα η μητέρα της οικογένειας ήταν και αυτή πεινασμένη και έφαγε το $\frac{1}{5}$ από αυτά που άφησε ο πατέρας τους. Αργότερα καθένας από τα τρία μεγαλύτερα αδέρφια πήραν το $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ από τα αντίστοιχα υπόλοιπα. Ο «Βενιαμίν» της οικογένειας πεινούσε και αυτός και έφαγε τα 3 τελευταία μάνγκο που είχαν απομείνει. Πόσα μάνγκο έφαγε ο καθένας;

Λύση: Έστω $\mathbf{x}$ τα μάνγκο της κρυψώνας. Σύμφωνα με το πρόβλημα και τους υπολογισμούς μας, καθένα από τα μέλη της 6-μελούς οικογένειας έφαγε,… τα $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}}$ από αυτά. Όμως τόσα είναι και αυτά που έμειναν για το μικρότερο, τον «Βενιαμίν» της οικογένειας. Άρα $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}}=\mathbf{3}\Rightarrow\mathbf{x=18}$

10. Κάποιος δίνει στους ιερούς Βραχμάνες 1 μονάδα κάθε $\frac{1}{3}$ της ημέρας. Ένας άλλος δίνει το ίδιο ποσό κάθε $\frac{1}{2}$ της ημέρας και ένας 3^{ος} δίνει 3 μονάδες κάθε 5 ημέρες. Σε πόσο χρονικό διάστημα, αν διατηρηθούν αυτές οι αναλογίες, θα έχουν δώσει 100 μονάδες;

Λύση: Ο 1^{ος} : στο $\frac{1}{3}$ της ημέρας δίνει 1 μονάδα, στα $\frac{3}{3}$ της ημέρας (1 ημέρα) ...δίνει 3 μονάδες.

Ο 2^{ος} : στο $\frac{1}{2}$ της ημέρας δίνει 1 μονάδα, στα $\frac{2}{2}$ της ημέρας ...δίνει 2 μονάδες.

Ο 3^{ος}: σε 5 ημέρες δίνει 3 μονάδες, σε 1 ημέρα δίνει $\frac{3}{5}$ της μονάδας. Σε 1 ημέρα και οι τρεις μαζί δίνουν $\mathbf{3+2+\frac{3}{5}=\frac{28}{5}=5.6}$ μονάδες. Τις $\frac{28}{5}$ μονάδες τις δίνουν και οι τρεις σε 1 ημέρα. Άρα τις 100 μονάδες θα τις δώσουν σε περίπου **17.857** ημέρες.

Έφυγαν από κοντά μας ...για το μεγάλο ταξίδι …

† Κώστας Σκανδάλης

Αγαπητοί φίλοι και συνάδελφοι,

Στις 27 Δεκεμβρίου 2019, "έφυγε" ένας δικός μας άνθρωπος, ένας **ΔΑΣΚΑΛΟΣ** των Μαθηματικών, ένας δημοκράτης, ένας συνδικαλιστής του κλάδου της **δημόσιας εκπαίδευσης.** Ψαριανός στην καταγωγή, γεννήθηκε και μεγάλωσε στον Πειραιά. Τελείωσε την Ιωνίδειο Πρότυπο Σχολή του Πειραιά και φοίτησε στο Μαθηματικό τμήμα του ΕΚΠΑ. Υπηρέτησε την δημόσια εκπαίδευση από όλες τις σκοπιές της. Απλός καθηγητής ή μάλλον **δάσκαλος**, αιρετός του κλάδου, διευθυντής Λυκείου, διευθυντής εκπαίδευσης στην Ανατολική Αττική, πρώτος περιφερειακός Διευθυντής Αττικής, σύμβουλος Υπουργών Παιδείας και όλα αυτά με πλήρη **επιτυχία.** Έφτιαξε μια υπέροχη οικογένεια με την Εύα του, τις κόρες του Μαργαρίτα, Ισιδώρα και το μικρό αγγελούδι του τον εγγονό του, τον Κωστάκη του. Εκλέχτηκε μέλος του Διοικητικού Συμβουλίου της ΕΜΕ για τη διετία 1995-1997 και μέλος της Εξελεγκτικής Επιτροπής για τη διετία 1997-1999. Ο κλάδος μας έχασε έναν **υπέροχο** και **άξιο** συνάδελφο.

Καλό σου ταξίδι Κώστα,

Νίκος Ταπεινός

† Θύμιος Διαμαντόπουλος

Πριν λίγες μέρες έφυγε για το μακρινό ταξίδι και ένας άλλος φίλος, συνάδελφος, **μοναχικός μονομάχος** της ζωής και της εκπαίδευσης, ο Θύμιος Διαμαντόπουλος. Τελείωσε το Μαθηματικό της Αθήνας και έκανε μεταπτυχιακό στην Πραγματική Ανάλυση. Υπηρέτησε την Δημόσια Εκπαίδευση σαν καθηγητής και Διευθυντής σχολείων της Δυτικής Αθήνας. Απλός καθηγητής, αλλά **κυρίως** δάσκαλος του **πίνακα**, που τόσο αγαπούσε με περισσή αγάπη σε κάθε τι, που θα βοηθούσε τα παιδιά και την Ε.Μ.Ε. σε όλες τις δραστηριότητές της … Η εκπαίδευση έχασε έναν αξιόλογο και **φωτεινό** άνθρωπο …

Καλό σου ταξίδι Θύμιο,

οι φίλοι και οι συνάδελφοι σου …

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα».
P. R. HALMOS

Επιμέλεια: **Νίκος Θ. Αντωνόπουλος – Γιάννης Λουριδάς**

ΑΣΚΗΣΗ 328. (ΤΕΥΧΟΣ 111)

Έστω α, β, γ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=1$. Να αποδείξετε ότι

$$2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)\geq\frac{5}{9}$$

(**Γιώργος Αποστολόπουλος** – Μεσολόγγι)

Λύση (**Γιώργος Δεληστάθης** – Κ. Πατήσια)

Είναι:

$$2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)\geq\frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2[(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]-$$

$$-[(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)]\geq\frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2[1-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]-[1-3(1-\gamma)(1-\beta)(1-\alpha)]\geq\frac{5}{9}$$

$$\Leftrightarrow 3(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{4}{9}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3[1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma]-$$

$$-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{4}{9}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3\alpha\beta\gamma-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\frac{4}{9}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\leq\frac{4}{9},\quad (1)$$

Αλλά, $\qquad (\alpha+\beta+\gamma)^2\geq 3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$\Rightarrow \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\leq\frac{1}{3},\quad (2)$$

και $\qquad \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\Rightarrow 3\alpha\beta\gamma\leq\dfrac{1}{9},\quad (3)$

οπότε η (1) προκύπτει άμεσα από τις (2) και (3)

Σχόλια:

1. Η στήλη αισθάνεται την ανάγκη να απολογηθεί για λογαριασμό του δαίμονα της πληκτρολόγησης, αφού το θέμα προτάθηκε χωρίς να αναφέρεται ότι οι αριθμοί είναι «μη αρνητικοί».

2. Από τον συνάδελφο **Καρτσακλή Δημήτρη** πήραμε μια προσέγγιση βασισμένη στους πολλαπλασιαστές Lagrange

3. Η σχέση (1) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα το Euler.

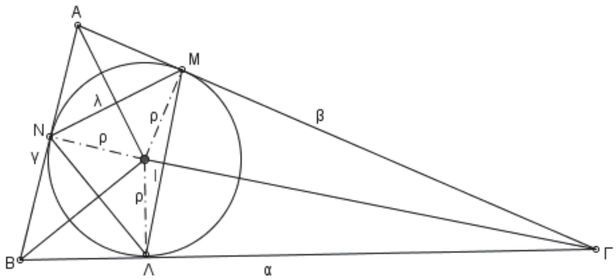
Λύση: Εστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα και Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος.

ΑΣΚΗΣΗ 329. (ΤΕΥΧΟΣ 111)

Ο εγγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Λ, Μ, Ν αντίστοιχα. Αν λ, μ, ν είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΛΜΝ και α, β, γ τα μήκη του αρχικού τριγώνου, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{\lambda^2}=\frac{\beta(\tau-\beta)}{\mu^2}=\frac{\gamma(\tau-\gamma)}{\nu^2}$$

(Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη)



Λύση (Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

Στο παραπάνω σχήμα, τα τετράπλευρα ΑΜΙΝ, ΒΛΙΝ και ΓΛΙΜ είναι εγγράψιμα, οπότε εφαρμόζουμε σε καθένα από αυτά το Θ. Πτολεμαίου.

Στο τετράπλευρο ΑΝΙΜ έχουμε:

$$AI\cdot NM=\rho\cdot AN+\rho\cdot AM$$

που λόγω της ισότητας $AM=AN=\tau-\alpha$ γράφεται

$$\lambda\cdot AI=2\rho(\tau-\alpha)\Rightarrow\lambda=\frac{2\rho(\tau-\alpha)}{AI}\Rightarrow\lambda^2=\frac{4\rho^2(\tau-\alpha)^2}{AI^2}$$

Επιπλέον, $\eta\mu\dfrac{A}{2}=\dfrac{\rho}{AI}\Rightarrow AI=\dfrac{\rho}{\eta\mu\frac{A}{2}}$ και

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\text{, οπότε}$$

$$AI^2=\frac{\beta\gamma\rho^2}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Επομένως,

$$\lambda^2=\frac{4(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}=\frac{4\alpha(\tau-\alpha)(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}$$

$$=\frac{4\alpha(\tau-\alpha)\rho^2\tau}{4R\rho\tau}=\frac{\alpha(\tau-\alpha)\rho}{R}$$

αφού, από τους γνωστούς τύπους για το εμβαδόν τριγώνου, προκύπτει ότι

$$\rho\tau=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

οπότε $\rho^2\tau=(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$

Ομοίως βρίσκουμε ότι

$$\mu^2=\frac{\beta(\tau-\beta)\rho}{R} \text{ και } \nu^2=\frac{\gamma(\tau-\gamma)\rho}{R}$$

οπότε εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι

$$\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{\lambda^2}=\frac{\beta(\tau-\beta)}{\mu^2}=\frac{\gamma(\tau-\gamma)}{\nu^2}=\frac{R}{\rho}$$

Λύση: Έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος και Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα

Σημείωμα σύνταξης: Αποδεικνύεται ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει η γνωστή ως **ανισότητα Πτολεμαίου**.

$$AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot\Delta A\geq A\Gamma\cdot B\Delta$$

Η ισότητα

$$AB\cdot\Gamma\Delta+B\Gamma\cdot\Delta A=A\Gamma\cdot B\Delta$$

ισχύει μόνο όταν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Η τελευταία ισότητα είναι γνωστή και ως **πρώτο θεώρημα του Πτολεμαίου**.

Αν θέσουμε

$AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, $\Delta A=\delta$ και $A\Gamma=\delta_1$, $B\Delta=\delta_2$

τότε το πρώτο θεώρημα του Πτολεμαίου γράφεται:

$$\alpha\gamma+\beta\delta=\delta_1\delta_2$$

Το **δεύτερο θεώρημα του Πτολεμαίου** αναφέρει ότι σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο με τον παραπάνω συμβολισμό ισχύει

$$\frac{\delta_1}{\delta_2}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\alpha\beta+\gamma\delta}$$

- **Charles Leytem**: Geometric inequalities

Τόσο η ανισότητα όσο και τα θεωρήματα του Πτολεμαίου είναι πολύ χρήσιμα σε περιπτώσεις αποστάσεων σημείων που βρίσκονται πάνω σε κύκλο και τα συναντάμε συχνά σε θέματα **Μαθηματικών Διαγωνισμών**. Ενδεικτικά παραθέτουμε μια περίπτωση όπου η εφαρμογή του δίνει άμεση και κομψή λύση.

- **Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο και έστω Ρ σημείο του κύκλου. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον δυο από τις αποστάσεις ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ, ΡΔ είναι αριθμοί άρρητοι.**

Λύση:

Από το Θ. Πτολεμαίου στο τετράπλευρο ΡΑΓΔ έχουμε:

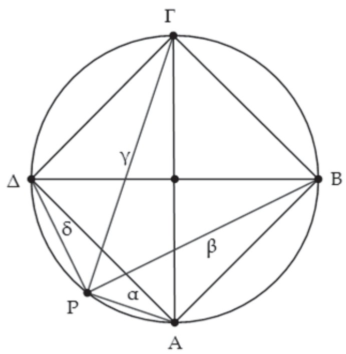
$$\gamma\cdot R\sqrt{2}=2R\cdot\delta+\alpha\cdot R\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{\gamma-\alpha}{\delta}$$

Ομοίως βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{2}=\frac{\beta-\delta}{\alpha}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$$

$$\sqrt{2}=\frac{\beta+\delta}{\gamma}$$



Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι, τουλάχιστον δυο από τους αριθμούς α, β, γ, δ είναι άρρητοι. (Αν το πολύ ένας από αυτούς ήταν άρρητος, τότε σε κάποιο κλάσμα θα προέκυπτε το άτοπο: ρητός = άρρητος).

ΑΣΚΗΣΗ 330. (ΤΕΥΧΟΣ 111)

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο και έστω R, r οι ακτίνες του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Αν $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, Μ το μέσο της ΒΓ και Χ το σημείο τομής των εφαπτομένων του κύκλου στα Β, Γ να αποδείξετε ότι

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}}\geq\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AX}}$$

(Δημήτρης Καρτσακλής – Αγρίνιο)

Λύση: (Βασίλης Λαλογιάννης– Αγ. Παρασκευή)

Ας υποθέσουμε ότι $\hat{B}\geq\hat{\Gamma}$. Τότε από τη μονοτονία της συνάρτησης συνημίτονο και τη σχέση

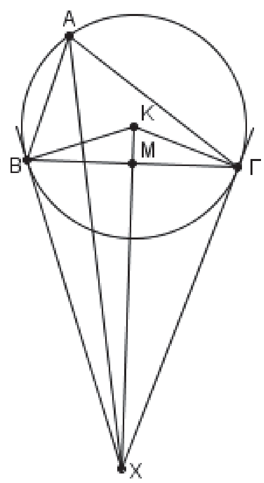
$$\hat{A}\geq 60^o\geq\hat{B}\geq\hat{\Gamma}$$

παίρνουμε: $\text{συν}B+\text{συν}\Gamma\geq 1$, (1)

Επιπλέον, $r=\frac{E}{\tau}\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{E}{\tau R}$

$$\Rightarrow\frac{r}{R}=\frac{2R^2\text{ημ}A\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma}{\tau R}$$

$$=2\frac{R}{r}\text{ημ}A\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma$$



όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$E=2R^2\text{ημ}A\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma$$

Αλλά

$$\frac{R}{\tau}=\frac{1}{\text{ημ}A+\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}$$

οπότε

$$\frac{r}{R}=2\text{ημ}A\text{ημ}B\text{ημ}\Gamma\frac{1}{\text{ημ}A+\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}$$

$$=\frac{16\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}$$
$$=4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

και από γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα, τελικά βρίσκουμε ότι:

$$\frac{r}{R}=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1,\ (2)$$

Αν Κ είναι το κέντρο του κύκλου τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΧΚ έχουμε:

$$\Gamma X=K\Gamma\cdot\varepsilon\varphi(X\hat{K}\Gamma)\Rightarrow\Gamma X=R\cdot\varepsilon\varphi A\overset{\alpha=2R\eta\mu A}{\Rightarrow}\Gamma X=\frac{\alpha}{2\sigma\upsilon\nu A}$$

Επιπλέον, $X\hat{\Gamma}B=\hat{A}\Rightarrow X\hat{\Gamma}A=X\hat{\Gamma}B+\hat{\Gamma}=\hat{A}+\hat{\Gamma}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sigma\upsilon\nu(XBA)=-\sigma\upsilon\nu B$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΧΓ έχουμε:

$$AX^2=\Gamma X^2+A\Gamma^2-2\Gamma X\cdot\Gamma A\sigma\upsilon\nu(XBA)$$
$$\Rightarrow AX^2=\frac{\alpha^2}{4\sigma\upsilon\nu^2 A}+\beta^2+\frac{\alpha\beta\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu A}$$

Αλλά,

$$\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\quad\text{και}\quad\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}$$

οπότε

$$AX^2=\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}+\beta^2+\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)2\beta\gamma}{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)2\alpha\gamma}$$

απ' όπου, μετά την εκτέλεση των πράξεων, προκύπτει ότι

$$AX^2=\frac{\beta^2\gamma^2(2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2)}{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}$$

Εξάλλου για τη διάμεσο ΑΜ ισχύει

$$AM^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4}$$

Με διαίρεση των δυο τελευταίων ισοτήτων, παίρνουμε

$$\frac{AM^2}{AX^2}=\frac{(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2}{4\beta^2\gamma^2}\Rightarrow\frac{AM}{AX}=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$$
$$\Rightarrow\frac{AM}{AX}=\sigma\upsilon\nu A$$

Από τις (1) και (2) σε συνδυασμό με την τελευταία ισότητα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-1\geq\sigma\upsilon\nu A$$
$$\Rightarrow\frac{r}{R}\geq\frac{AM}{AX}$$

που είναι το ζητούμενο.

Λύση: Έστειλαν επίσης και οι συνάδελφοι Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι και Διονύσης Γιάνναρος - Πύργος.

ΑΣΚΗΣΗ 331. (ΤΕΥΧΟΣ 111)

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\tau\geq\sqrt{6R\rho}+\sqrt{2R\rho-\rho^2}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

(Νικητάκης Γιώργος – Σητεία)

Λύση: (Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι)

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

η **ανισότητα Gerretsen**

$$\tau^2\geq\rho(16R-5\rho)$$

οπότε, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sqrt{16R\rho-5\rho^2}\geq\sqrt{6R\rho}+\sqrt{2R\rho-\rho^2},\ \text{ή}$$
$$16R\rho-5\rho^2\geq 6R\rho+2R\rho-\rho^2+2\sqrt{12R^2\rho^2-6\rho^3R},$$

ή

$$8R-4\rho\geq 2\sqrt{12R^2-6\rho R},\ \text{ή}$$
$$16R^2+4\rho^2-16\rho R\geq 12R^2-6\rho R,\ \text{ή}$$
$$2R^2-5\rho R+2\rho^2\geq 0$$

που ισχύει από την γνωστή ανισότητα $R\geq 2\rho$, αφού γράφεται

$$2(R-\rho)\left(R-\frac{\rho}{2}\right)\geq 0$$

Η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Λύση: έστειλαν επίσης οι συνάδελφοι Δεληστάθης Γιώργος – Κ. Πατήσια, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος και Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα

Σημείωμα σύνταξης:

Το 1765 **ο Eüler** απέδειξε την γνωστή ισότητα

$$OI^2=R^2-2Rr$$

που δίνει την απόσταση του **έγκεντρου** από το **περίκεντρο** τριγώνου συναρτήσει των ακτίνων του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα η γνωστή ανισότητα το **Eüler**:

$$R\geq 2r$$

Δυο αιώνες περίπου αργότερα, ο **Gerretsen** απέδειξε ανάλογες σχέσεις για τις αποστάσεις του έγκεντρου από το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο. Οι σχέσεις αυτές δίνονται από τις ακόλουθες ισότητες:

$$\left\{\begin{array}{c} IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)^2 \\ \text{και} \\ 9IG^2 = \frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma)^2 - 16Rr + 5r^2 \end{array}\right\}$$

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν άμεσα οι παρακάτω ανισότητες που είναι γνωστές ως ανισότητες **Gerretsen**

- $\tau^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$
- $\tau^2 \ge 16Rr - 5r^2$

με την ισότητα να ισχύει όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Journal of Geometry – May 2015

ΑΣΚΗΣΗ 332. (ΤΕΥΧΟΣ 111)

Με $\{x\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος ενός πραγματικού αριθμού x, για παράδειγμα

$$\{5\} = 0,\ \left\{\frac{5}{2}\right\} = \frac{1}{2},\ \{\pi\} = \pi - 3$$

Να βρείτε το μικρότερο πραγματικό αριθμό x για τον οποίο ισχύουν

$$x > 1 \text{ και } \{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$$

(Αντωνόπουλος Νίκος – Ίλιον)

Λύση: (Βασίλης Λαλογιάννης – Αγ. Παρασκευή)
Είναι φανερό ότι $x = [x] + \{x\}$, οπότε αν για τον αριθμό x θέσουμε $y = [x]$ και $z = \{x\}$ έχουμε:

$$x = y + z > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} = \frac{1}{y+z} < 1$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{y+z}$$

και η δοσμένη εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$z + \frac{1}{y+z} - 1 = 0 \Rightarrow z^2 + (y-1)z - y + 1 = 0$$

που έχει θετική ρίζα τον αριθμό

$$z = \frac{1 - y + \sqrt{(1-y)^2 + 4(1-y)^2}}{2} \overset{y\ge1}{=} (y-1)\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Έτσι, έχουμε:

$$x = y + z = y + (y-1)\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(y) = y + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}(y-1) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}y - \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ y \ge 1$$

η οποία είναι προφανώς γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Αν $y = 1$, τότε προκύπτει και $x = 1$ που αποκλείεται ενώ αν $y = 2$, τότε προκύπτει η ελάχιστη αποδεκτή τιμή για το x που είναι ίση με

$$f(2) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

όπου φ ο λόγος της χρυσής τομής
Στην περίπτωση αυτή πράγματι έχουμε $[x] = 2$ οπότε

$$\{x\} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\left\{\frac{1}{x}\right\} = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

και συνεπώς,

$$\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$$

Λύσεις έστειλαν επίσης οι Αποστολόπουλος Γιώργος – Μεσολόγγι, Δεληστάθης Γιώργος – Κ. Πατήσια, Ηλιόπουλος Γιάννης – Καλαμάτα, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος και Ιωαννίδης Αντώνης – Λάρισα

Σημείωμα σύνταξης:
Αν x ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός, τότε ως **ακέραιο μέρος [x] του x** ορίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει το x. Από τον ορισμό προκύπτουν οι επόμενες βασικές ιδιότητες.

- $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $[x + \kappa] = [x] + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\left[\frac{[x]}{\kappa}\right] = \left[\frac{x}{\kappa}\right],\ \kappa \in \mathbb{Z}^*$
- $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$

Ως **κλασματικό (δεκαδικό) {x} μέρος του x** ορίζουμε τον αριθμό $\{x\} = x - [x]$.

Για το κλασματικό μέρος του αριθμού ισχύουν:

- $0 \le \{x\} < 1$
- $x = [x] + \{x\}$
- $\{x + y\} \le \{x\} + \{y\} \le \{x + y\} + 1$
- $\{x + \kappa\} = \{x\} + \kappa,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

[Α. Κυριακόπουλος: Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού. **Adreescu- Andrica**: Number Theory]

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες και με τη βοήθεια γνωστών ανισοτήτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλες που περιέχουν το ακέραιο και το κλασματικό μέρος ενός αριθμού.
Έτσι, για παράδειγμα με αφετηρία την ανισότητα

$$\frac{\alpha}{\alpha+2\beta+2\gamma}+\frac{\beta}{2\alpha+\beta+2\gamma}+\frac{\gamma}{2\alpha+2\beta+\gamma}\ge\frac{3}{5}$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς (με την προϋπόθεση ότι τουλάχιστον ένας δεν είναι μηδέν), μπορούμε αν θέσουμε

$$\alpha=x,\ \beta=[x]\ \text{και}\ \gamma=\{x\}$$

να καταλήξουμε στην επόμενη ανισότητα:

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\frac{[x]}{3x+\{x\}}+\frac{\{x\}}{3x+[x]}\ge\frac{4}{15}$$

M. Benze – F. Smaradache: Inequalities for Integer and Fractional Parts.

Προτεινόμενα Θέματα

336. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}},\ x>-1$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$x-\frac{x^2}{2}<f(x)<x$$

β. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$\frac{\nu+1}{2\nu}-\frac{(\nu+1)(2\nu+1)}{12\nu^3}<S_\nu<\frac{\nu+1}{2\nu}$$

Όπου $S_\nu=f\left(\frac{1}{\nu^2}\right)+f\left(\frac{2}{\nu^2}\right)+\ldots+f\left(\frac{\nu}{\nu^2}\right)$

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$

(**Γιώργος Τσιώλης** – Τρίπολη)

337. Θεωρούμε δυο ομόκεντρους κύκλους με κέντρο Ο και ακτίνες R και R_1 ($R_1>R$) και ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, R). Οι προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ τέμνουν τον κύκλο (O, R_1) στα σημεία Γ_1, Δ_1, A_1, B_1 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Αν L_1, L είναι οι περίμετροι των τετράπλευρων $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ και ΑΒΓΔ αντίστοιχα, τότε $\frac{L_1}{L}\ge\frac{R_1}{R}$

β. $\frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(AB\Gamma\Delta)}\ge\left(\frac{R_1}{R}\right)^2$

(**Καρτσακλής Δημήτρης** – Αγρίνιο)

338. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος ΓΔ του τριγώνου και τα συμμετρικά Δ_1, Δ_2 του Δ ως προς τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ. Αν η ευθεία $\Delta_1\Delta_2$ τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ είναι τα άλλα δυο ύψη του τριγώνου

(**Δεληβέρης Βασίλης** – Αθήνα)

339. α. Σε κανονικό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$, $\nu\ge3$ ισχύει $A_1A_5^2=A_1A_2(A_1A_{10}+A_1A_{12})$. Να βρείτε τον αριθμό ν.

β. Το κανονικό επτάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν Κ είναι το αντιδιαμετρικό σημείο της κορυφής A_1 να αποδείξετε ότι $KA_2-KA_3+KA_4=R$

(**Αποστολόπουλος Γιώργος** – Μεσολόγγι)

340. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που είναι ανά δυο διαφορετικοί μεταξύ τους, ισχύει

$$\left(\frac{2\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2+\left(\frac{2\beta-\gamma}{\beta-\gamma}\right)^2+\left(\frac{2\gamma-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2\ge5$$

(**Αντωνόπουλος Νίκος** – Ίλιον)

† Στη μνήμη του Γιώργου Τριάντου

Ο χρόνος που έφυγε, τελείωσε με την απώλεια ενός σημαντικού μέλους της Συντακτικής Επιτροπής του περιοδικού μας, ενός πολύτιμου συνεργάτη και ενός παλιού και αγαπημένου φίλου του **Γιώργου Τριάντου**. Επιμελήθηκε σχεδόν 15 χρόνια τη στήλη «Ο Ευκλείδης προτείνει…» με μεγάλη απήχηση στους μαθητές και κυρίως στους συναδέλφους.

Τον γνώρισα στα μέσα της δεκαετίας του 70 και διατηρήσαμε όλα αυτά τα χρόνια μια αδιατάρακτη φιλία. Διέκρινα από τότε τη μεγάλη αγάπη του για τα **Μαθηματικά** και ιδιαίτερα για τη **Γεωμετρία.**

Μια αγάπη που τον οδήγησε να εγκαταλείψει τη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, όπου είχε εισαχθεί πρώτος, για να ακολουθήσει τη Μαθηματική Σχολή του Πανεπιστημίου Αθηνών με μια πολύ επιτυχημένη πορεία στο χώρο των φροντιστηρίων και αργότερα της Δημόσιας Μέσης Εκπαίδευσης.

Η συντακτική Επιτροπή του περιοδικού και η Μαθηματική κοινότητα, γενικότερα, νομίζω ότι στερείται ενός πολύ αξιόλογου μέλους της.

Καλό σου ταξίδι, φίλε μου.

- Την ίδια μέρα 28 του Δεκέμβρη φτώχυνε και η σειρά των συμφοιτητών μου, του έτους 1966, αφού χάθηκε ένας ακόμη συμφοιτητής μας. Ο σπουδαίος και αγαπητός συνθέτης **Θάνος Μικρούτσικος**.

Εμείς όμως θα τον θυμόμαστε, όχι μόνο σαν τον επιτυχημένο μουσικό, αλλά και σαν τον νεαρό συνοδοιπόρο των φοιτητικών μας χρόνων της δεκαετίας του ΄60.

Γιώργος Τασσόπουλος

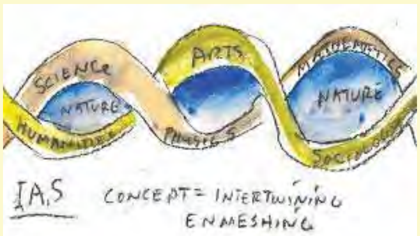
Γυναίκες και Μαθηματικά

Κατερίνα Μωραΐτου

Η χρονιά που πέρασε ήταν ξεχωριστη για τον χώρο των Μαθηματικών αλλά και για τις γυναίκες επιστήμονες ιδιαίτερα. Αυτή η χρονιά μάς χάρισε ένα μοναδικό βραβείο σε μια εξέχουσα επιστήμονα αλλά και **σε μια γυναίκα** σε ένα χώρο όπου η ανδρική ηγεμονία είναι σχεδόν αδιαμφισβήτητη. Το βραβείο **Abel**, το αντίστοιχο Nobel Μαθηματικών, απονεμήθηκε στην **Karen Uhlenbeck.**

Karen Uhlenbeck

Οι επιστημονικές εργασίες της στον τομέα των **μερικών διαφορικών εξισώσεων**, της γεωμετρικής προέλευσης και της θεωρίας των ακέραιων συστημάτων ήταν πρωτοποριακές. Καθοριστικές επίσης ήταν οι προσεγγίσεις της στην **ανάλυση**, στη **γεωμετρία** και στη Μαθηματική φυσική. Το έργο της, στη γεωμετρική ανάλυση και στη θεωρία μέτρου, ήταν θεμελιώδες. Παράλληλα υποστηρίζει την ισότητα των φύλων στις επιστήμες και συμμετέχει σε διάφορες ενέργειες όπως στο πρόγραμμα **WAM** (Women and Mathematics) όπου είναι και ιδρυτικό μέλος και στο **IAS** (Institute for Advanced Study) για τις γυναίκες και τα Μαθηματικά.



Είναι η πρώτη φορά λοιπόν που απονέμεται σε γυναίκα μια τέτοια διάκριση στο πεδίο των Μαθηματικών. Το βραβείο Abel αποτελεί μαζί με το **μετάλλιο Fields** κορυφαία διάκριση και είναι ύψιστη τιμή για ένα μαθηματικό επιστήμονα. Το γεγονός ότι για πρώτη φορά τιμήθηκε γυναίκα, δείχνει τις δυσκολίες που υπάρχουν σε μια γυναίκα στο χώρο των επιστημών, ταυτόχρονα αποδεικνύει ότι δεν είναι και ακατόρθωτο. Για πάρα πολλά χρόνια ο ρόλος της γυναίκας ήταν μονοδιάστατος. Η κοινωνία προετοίμαζε την γυναίκα να γίνει σύζυγος και μητέρα. Εν τούτοις, τα τελευταία χρόνια η άποψη αυτή έχει ξεπεραστεί και έτσι δεν είναι λίγες οι γυναίκες, που τα έχουν καταφέρει εξίσου καλά και ως μητέρες και ως επιστήμονες.

Αδιαμφισβήτητο παράδειγμα είναι η Ιρανή Maryam Mirzakhani που κέρδισε το **μετάλλιο Fields** την μεγαλύτερη διάκριση στην μαθηματική επιστήμη για μαθηματικούς κάτω των 40 ετών. Η Μαριάμ ανακάλυψε νέους τρόπους υπολογισμού των όγκων αντικειμένων με υπερβολικές επιφάνειες όπως για παράδειγμα η σέλα του αλόγου. Το έργο της έχει εφαρμογές στη Φυσική, την Κβαντική Φυσική και σε άλλες επιστήμες.

Maryam Mirzakhani

Η Μαριάμ, Ιρανή μαθηματικός και πρώτη γυναίκα βραβευμένη με το μετάλλιο πέθανε πρόσφατα σε ηλικία 40 ετών στις Η.Π.Α. «Η επιρροή της θα μείνει ζωντανή σε πολλές γυναίκες που τις ενθάρρυνε να ακολουθήσουν το δρόμο των Μαθηματικών και των επιστημών», όπως είχε δηλώσει ο πρόεδρος του πανεπιστημίου Stanford Μαρκ Ντεσιέ-Λαβίν. Η Μαριάμ εκτός από επιστήμονας ήταν μητέρα και σύζυγος, γεγονός που δεν στάθηκε εμπόδιο στην επιστημονική της καριέρα να τα καταφέρνει το ίδιο καλά παντού.

Στις 31 Ιουλίου 2018,στο Rio de Janeiro, έγινε το παγκόσμιο συνέδριο για γυναίκες μαθηματικούς **(WM)**. Εκεί προτάθηκε από τη γυναικεία επιτροπή της Ιρανικής Μαθηματικής Εταιρείας και ύστερα από ψηφοφορία καθιερώθηκε, η 12η Μαΐου ,ημέρα γενεθλίων της Μαριαμ Μιρζαχανι, ως ημέρα δράσεων και εορτασμού της **γυναικείας συμβολής** στα Μαθηματικά. Η πρωτοβουλία αυτή ονομάστηκε «**12 May Initiative**» και λίγους μήνες αργότερα, στις 12 Μαΐου 2019 πραγματοποιήθηκαν για πρώτη φορά περισσότερες από 100 εκδηλώσεις σε διάφορες χώρες παγκοσμίως τονίζοντας την αναγκαιότητα μιας τέτοιας κίνησης. Η ιστοσελίδα **may12.womeninmaths.org** συντόνιζε τις δράσεις που έγιναν, οι οποίες περιλάμβαναν ενδεικτικά κάποια ταινία μικρού μήκους σχετικά με τη ζωή της Μαριάμ, καθώς και εκθέσεις με το έργο της, συζητήσεις γύρω από το φυλετικό χάσμα στα Μαθηματικά, παρουσιάσεις για φημισμένες γυναίκες μαθηματικούς και οτιδήποτε άλλο ήθελε να μοιραστεί κάθε ένας που συμμετείχε εκεί, σε σχέση με τα Μαθηματικά.

Η Maryam Mirzakhani είχε κερδίσει επί 2 συνεχή χρόνια (1994,1995) τις Ολυμπιάδες Μαθηματικών με εξαιρετικές επιδόσεις (Χρυσά μετάλλια για το Ιραν). Παρόλο αυτά η **συμμετοχή** των κοριτσιών, σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, είναι αισθητά **μικρότερη** από αυτή των αγοριών. « Μόλις ένας στους 10 συμμετέχοντες είναι γένους θηλυκού και πολλές ομάδες δεν έχουν καθόλου γυναικείες συμμετοχές.» έλεγε σε σχετική ομιλία του ο **Geoff Smith**, εμπνευστής της ιδέας του European Girls' Math Olympiad **(EGMO)**. Ο διαγωνισμός αυτός ξεκίνησε το **2012** και σκοπεύει να ενθαρρύνει περισσότερα κορίτσια σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Ο Geoff Smith παρατήρησε ότι στην **Κίνα**, ήδη από το **2002** υπήρξε ένας ετήσιος διαγωνισμός για κορίτσια, τα οποία τα είχε εμπνεύσει να συμμετέχουν και σε Διεθνείς Ολυμπιάδες. Ενώ ήταν διστακτικός στην αρχή, αποφάσισε ότι ήταν μια καλή ιδέα για τα κορίτσια της Ευρώπης να έχουν το δικό τους διαγωνισμό ο οποίος δεν θα υστερεί σε τίποτα με τους υπολοίπους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Στον EGMO συμμετέχουν 39 περίπου χώρες συμπεριλαμβανομένων μεταξύ των άλλων Η.Π.Α., της Ρωσίας, της Μ. Βρετανίας, Δανίας, Γερμανίας, Ισπανίας, Ιταλίας … και πρόσφατα και της χώρας μας. Ο πρώτος διαγωνισμός πραγματοποιήθηκε στο Cambridge της Μ. Βρετανίας και ο φετινός 9ος διαγωνισμός θα πραγματοποιηθεί στο **Egmont aan Zee στην Ολλανδία**.

Ευτυχώς τα τελευταία χρόνια υπάρχουν πολλές κοινότητες που προωθούν και εμπνέουν κορίτσια και γυναίκες στην μαθηματική επιστήμη. Ο Οργανισμός για Γυναίκες Μαθηματικούς **(AWM)**, μέσα από ενδιαφέροντα προγράμματα, ενθαρρύνει τις γυναίκες να σπουδάσουν Μαθηματικά και να έχουν ενεργή καριέρα σε αυτά. Το πανεπιστήμιο **MIT** μέσω της ιστοσελίδας του, καλωσορίζει τις γυναίκες στα Μαθηματικά και έχει ως στόχο να παροτρύνει να τα σπουδάσουν, όχι μόνο για την χαρά που σου προσφέρουν, αλλά και για να προωθήσουν την επαγγελματική τους καριέρα σε αυτήν την επιστήμη. Παράλληλα στην Ευρώπη, η European Woman in Mathematics (**EWM**), ένας οργανισμός που υπάρχει από το 1986 και έχει περισσότερα από 400 μέλη σε 33 ευρωπαϊκές χώρες προσφέρει ευκαιρίες και υποστηρίζει ενεργά τις γυναίκες που θέλουν να απασχοληθούν στον τομέα των Μαθηματικών.

Οι γυναίκες πια, έχοντας αποδείξει το πόσο ικανές είναι, και στο χώρο των θετικών επιστημών μετά τις πρόσφατες επιτυχίες και αναγνωρίσεις, διεκδικούν επί ίσοις όροις νευραλγικές θέσεις στα κέντρα λήψης απόφασης, οι οποίες ήταν κατεξοχήν ανδροκρατούμενες.

Jill Pipher

Έτσι λοιπόν συναντάμε γυναίκες πρωθυπουργούς όπως Φιλανδίας, Νορβηγίας, Νέας Ζηλανδίας και άλλες, γυναίκες σε υψηλόβαθμες θέσεις π.χ. στον στρατό, σε εταιρείες και σε οργανισμούς όπως η

Jill Pipher, που είναι πρόεδρος της AMC (American Mathematical Society). Είναι όλο και πιο φανερό λοιπόν, ότι το γυναικείο φύλο δεν υπολείπεται σε ικανότητες σε σχέση με το ανδρικό αλλά η κοινωνία είναι αυτή που δημιουργεί τις συνθήκες για να μπορέσει η γυναίκα να αναλάβει και άλλους ρόλους πέρα από τους παραδοσιακούς.

Εν τούτοις, εξέχουσες γυναικείες προσωπικότητες, παρατηρούνται ήδη από την αρχαιότητα, οι οποίες συνέβαλαν στον χώρο των Μαθηματικών. Το 600 π.Χ. η **Θεανώ,** σύζυγός του Πυθαγόρα, ανακάλυψε τον μαθηματικό κανόνα. Με τον άντρα της ίδρυσαν σχολή, όπου για πρώτη φορά τα 2 φύλα συμμετείχαν ισότιμα.

Υπατία

Η **Υπατία** (370 – 415 μ.Χ.) ασχολήθηκε με τα Μαθηματικά και κατέγραψε τις παρατηρήσεις της για έργα των Διόφαντου, Απολλώνιου και Πτολεμαίου. Πιθανότατα να εφηύρε και την πρώτη μορφή του μηχανισμού των Αντικυθήρων. Ήταν πολύ έντονη η προσωπικότητα της Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και συμμετείχε στα κοινά προκαλώντας θαυμασμό αλλά και φθόνο.

Στην Ιταλία η Maria Gaetana Agnesi (1718-1799) αναφέρεται ως ένα παιδί θαύμα από την ηλικία μόλις των 9 ετών που αργότερα εξελίχθηκε σε μια εξαίρετη μαθηματικό.

Maria Gaetana Agnesi

Ο Πάπας Βενέδικτος XIV μάλιστα την διόρισε πρόεδρο του μαθηματικού τμήματος του πανεπιστημίου της Μπολόνια. Η Γαλλίδα Marie Sophie Germain (1776-1831), παρόλο που δεν είχε την υποστήριξη των γονιών της, κατάφερε να γίνει μια σπουδαία μαθηματικός.

Marie Sophie Germain

Στο έργο της περιλαμβάνεται μια νέα **θεωρία της ελαστικότητας** συμβάλλοντας καθοριστικά στην υλοποίηση σύγχρονων κατασκευών, όπως ο Πύργος του Eiffel. Μάλιστα αναφέρεται ως η «Υπατία» του 18ου αιώνα. Η **Ada Lovelace** είναι μαθηματικός και ερευνήτρια στις αρχές του 19^{ου} αιώνα. Υποστηρίζεται ότι είναι η πρόδρομός των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, γιατί εργάστηκε στις αριθμητικές μηχανές, γράφοντας το πρώτο πρόγραμμα δημιουργώντας τις βάσεις για τους σύγχρονους υπολογιστές.

Ada Lovelace

Άλλη μια γυναίκα που ξεχώρισε στο πεδίο αυτό είναι η μαθηματικός Emily Noether (1882-1935) ως η πρώτη γυναίκα που έγραψε διατριβή στα Μαθηματικά. Την ονόμασαν «η κυρία της άλγεβρας», επέφερε ριζικές αλλαγές στις θεωρίες των δακτυλίων, των σωμάτων και των αλγεβρικών δομών.

Emily Noether

Στην φυσική έχουμε το θεώρημα Noether που εξηγεί την θεμελιώδη σχέση μεταξύ συμμετρίας και του νόμου διατήρησης. Εξήγησε μάλιστα μια θεωρία του Αϊνστάιν και ο ίδιος στον επικήδειο λόγο του, εξήρε την συμβολή της, στην επιστήμη των Μαθηματικών. Η Noether εργάστηκε για πολλά χρόνια ως στέλεχος στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, αλλά επειδή ήταν γυναίκα, δεν της έδωσαν θέση ή μισθό. Η Σύγκλητος είχε δηλώσει, ότι το να επιτραπεί η εκπαίδευση και στα 2 φύλα «θα ανέτρεπε την ακαδημαϊκή τάξη».

Η Sofia Kovalevskaya (1850-1891), με καταγωγή από τη Μόσχα, ήταν αυτοδίδακτη στα Μαθηματικά. Η συμβολή της στην επιστήμη ήταν σπουδαία και συγκεκριμένα στη θεωρία των **διαφορικών εξισώσεων**. Υπήρξε η πρώτη γυναίκα καθηγήτρια Πανεπιστημίου στη Βόρεια Ευρώπη και μέλος της Ακαδημίας Επιστημών της Αγίας Πετρούπολης.

Sofia Kovalevskaya

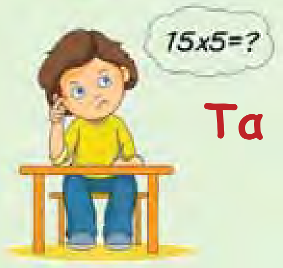
Στην άλλη άκρη του Ατλαντικού η Αμερικανίδα Grace Hopper (1906-1992) μαθηματικός, φυσικός, ερευνήτρια των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και αξιωματικός του ναυτικού ανέπτυξε 2 από τους πρώτους υπολογιστές τον Μαρκ ΙΙ και Μαρκ ΙΙΙ καθώς και τις γλώσσες προγραμματισμού Cobol και Fortran. Το 1996 το αμερικάνικο ναυτικό χάρισε το όνομά της σε ένα από τα πλοία του προς τιμήν της επιστημονικής προσφοράς της. Ακόμα, κοινωνιολογικές μελέτες δείχνουν ότι τα κορίτσια, μέχρι το 19^{ο} αιώνα, έπαιρναν διαφορετική εκπαίδευση από τα αγόρια καθώς διδάσκονταν τα Μαθηματικά από ειδικά βιβλία χρησιμοποιώντας για παράδειγμα «Μαθηματικά για κορίτσια». Συμπερασματικά σε κοινωνίες όπου η ισότητα των φύλων **δεν είχε** κατακτηθεί, τα κορίτσια προορίζονταν να αναλάβουν ρόλους, που δεν σχετίζονταν με τις θετικές επιστήμες. Σήμερα όμως, ειδικά σε ανεπτυγμένες περιοχές του πλανήτη, οι δεξιότητες των αγοριών και των κοριτσιών στα Μαθηματικά είναι εφάμιλλες.

Grace Hopper

Η βράβευση της Uhlenbeck με το βραβείο **Abel** και της Μαριάμ Μιζαρχανί με το μετάλλιο **Fields** αποτελούν ορόσημο στη σύγχρονη ιστορία των γυναικών στην μαθηματική επιστήμη. Μέσω της προβολής τους, μπορούν να εμπνευστούν όλες οι γυναίκες επιστήμονες, που δραστηριοποιούνται σε ανδροκρατούμενους τομείς, όπως αυτός των Μαθηματικών και να αποτελέσουν τα βραβεία αυτά, την αρχή μιας σειράς γυναικείων διακρίσεων στην επιστήμη αυτή.

ΠΗΓΕΣ:

https://en.wikipedia.org/European_Girls_Mathematical_Olympiad
https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm
http://may12.womeninmaths.org
http://www.ams.org
https://www.worldwomeninmaths.org/
http://awm-math.org
http://europeanwomeninmaths.org
https://www.iefimerida.gr/karen-oylinmpek-i-vraveio-abel
http://www.pi.ac.cy/pi/files/epimorfosi/isotita_fylou/dimgymn/
https://www.protothema.gr/culture/mariam-mirzahani



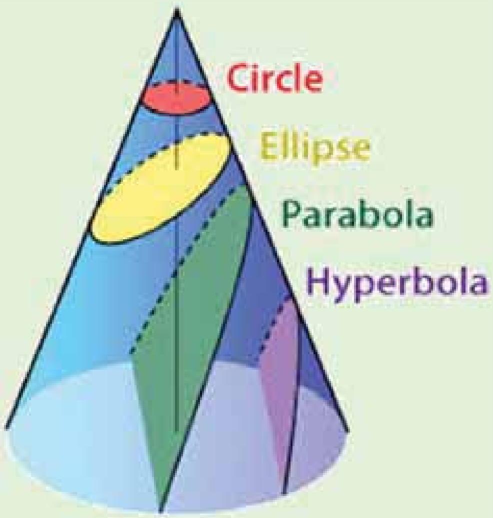
Τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ μας ΔΙΑΣΚΕΔΑΖΟΥΝ

Παναγιώτης Π. Χριστόπουλος

Όποιος κατανοεί τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο θαυμάζει λιγότερο τις επινοήσεις των νεότερων μεγάλων ανδρών

Leibniz

Αυτό είπε ο Leibniz για το έργο «Κωνικά» του Απολλώνιου.



Διπλά βλέπουν αυτοί που μορφώνονται

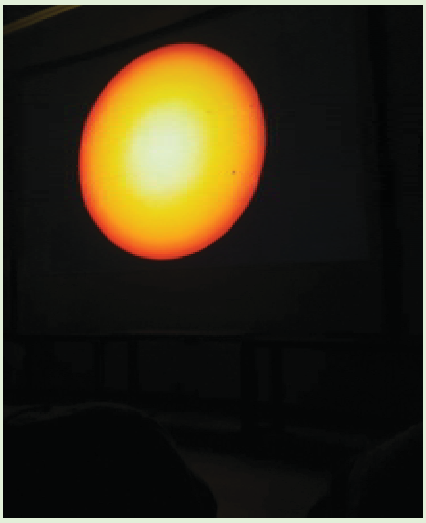
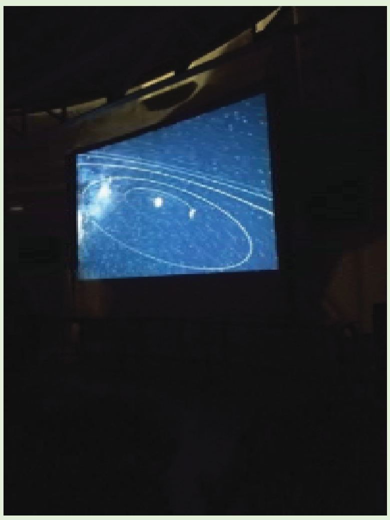
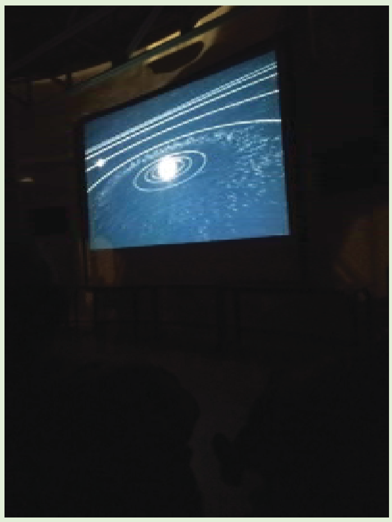
Σωκράτης

Επιγραφή στην είσοδο του Πανεπιστημίου του Εδιμβούργου.

Τα άδεια σακιά τα φουσκώνει ο αέρας και τους ανόητους η έπαρση

Ο Σωκράτης δεν δημιούργησε ποτέ σχολή, δίδασκε στους δρόμους και στις πλατείες της Αθήνας.

Ο Ήλιος το 2020 χωρίς κηλίδες

Με μια ματιά

- Έχετε σκεφτεί ότι την ώρα που καθόμαστε στην καρέκλα μας περιστρεφόμαστε με ταχύτητα **1674,4** χιλιόμετρα την **ώρα** και μετακινούμαστε στο διάστημα με ταχύτητα 30 χιλιόμετρα το δευτερόλεπτο; (έτσι κινείται η Γη)
- Οι επιστήμονες κατάφεραν να επιτύχουν την **κβαντική τηλεμεταφορά** μεταξύ δύο **τσιπ υπολογιστών.** Η κβαντική τηλεμεταφορά είναι κβαντική μεταφορά κατάστασης ενός κβαντικού σωματιδίου από το ένα μέρος στο άλλο.
- Σε όλο τον κόσμο υπάρχουν 150.000 τόνοι χρυσού, δηλαδή συνολικά 5 δις ουγκιές (1 ουγκιά = 31,1 γραμμάρια) με σημερινή αξία περίπου **7 τρις** €υρώ. Χρυσός έχει βρεθεί στα παλαιολιθικά σπήλαια που χρονολογούνται μέχρι και **40.000** π.Χ. Τα πρώτα χρυσά νομίσματα κόπηκαν από τον βασιλιά **Κροίσο της Λυδίας**, γύρω στο 550 π.Χ. και κυκλοφόρησαν σαν νόμισμα σε πολλές χώρες πριν από την εισαγωγή χαρτονομισμάτων. Ο χρυσός **μέχρι το 2014** χρησιμοποιήθηκε ως πρότυπο για την ισοτιμία νομισμάτων πολλών χωρών.
- **Ο Φειδίας** ήταν στην ακμή του, το 448 π.Χ., όταν πήγε σε δίκη για ασέβεια, διότι απεικόνισε το πρόσωπό του στην ασπίδα της Αθηνάς και ακόμη, ότι έκλεψε και δεν έβαλε όλο το χρυσάφι που έπρεπε, στο άγαλμά της.

Παλινδρομικές ημερομηνίες του21ου αιώνα

Πολλές φορές ακούμε από εκφωνητές στο Ραδιόφωνο και την Τηλεόραση ότι οι ημερομηνίες που διαβάζονται και ανάποδα είναι **σπάνιες**, μια φορά κάθε 100 χρόνια και άλλα τέτοια. Τι όμως ακριβώς ισχύει; Βλέπουμε ότι αυτόν τον αιώνα, που βρισκόμαστε έχουμε αρκετές.

10-02-2001, 20-02-2002, 01-02-2010, 11-02-2011,
21-02-2012, 02-02-2020, 12-02-2021, 22-02-2022,
03-02-2030, 13-02-2031, 23-02-2032, 04-02-2040,
14-02-2041, 24-02-2042, 05-02-2050, 15-02-2051,
25-02-2052, 06-02-2060, 16-02-2061, 26-02-2062,
07-02-2070, 17-02-2071, 27-02-2072, 08-02-2080,
18-02-2081, 28-02-2082, 09-02-2090, 19-02-2091,
29-02-2092.

Οι ΓΡΙΦΟΙ και τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Η άνωση

Μια βάρκα φορτωμένη με σιδερένιες ράβδους είναι σε μια δεξαμενή. Αν αδειάσουμε τις ράβδους μέσα στο νερό τι θα συμβεί στην επιφάνεια; Θα ανέβει ή θα κατέβει η στάθμη του νερού;

Η αφαίρεση

Α) Ο Γιώργος αφαίρεσε ένα 4ψήφιο από ένα 5ψήφιο που όλα τα ψηφία τους ήταν ίδια και βρήκε υπόλοιπο 70.000 ποιοι ήταν οι αριθμοί;

Β) Η Ελένη αφαίρεσε από έναν 5ψήφιο, που τα 3 τελευταία του ψηφία ήταν ίδια, τον αριθμό που είχε δύο ζεύγη ίδιων ψηφίων, που προέκυψε διαγράφοντας το τελευταίο ψηφίο του 5ψήφιου. Η διαφορά ήταν 50200 ποιους αριθμούς αφαίρεσε;

Οι λήγοντες

Ποιων αριθμών τα πολλαπλάσια λήγουν σε 1 μόνο ψηφίο, ποιων σε 2 μόνο ψηφία, ποιων σε πέντε και ποιων σε όλα;

Οι Τέχνες

Τέχνη λέμε τη δημιουργία που είναι σημαντική εξαιτίας της έλξης που προκαλεί στα ανθρώπινα συναισθήματα. Ωθεί την ψυχική **δραστηριότητα** διεγείροντας τον **νου** και το **συναίσθημα.** Στην σειρά αρίθμησης ο κινηματογράφος είναι 7ος, πόσες είναι οι καλές τέχνες; ποια είναι πρώτη;

Οι πλάκες

Ο εργολάβος για να στρώσει με πλάκες ένα πεζόδρομο ορθογωνίου σχήματος αγόρασε **2020** τετράγωνες πλάκες πεζοδρομίου και σκόπευε να βάλει **20 πλάκες** στο πλάτος. Ο μηχανικός όμως άλλαξε τα σχέδια και ζήτησε από τον εργολάβο να στρώσει 3πλάσιο μήκος. Ο εργολάβος πήρε 101 πλάκες ακόμα και ολοκλήρωσε το έργο. Πόσες πλάκες κατά πλάτος έχει ο πεζόδρομος;

Το παιχνίδι

Δύο ομάδες παίζουν ένα παιχνίδι που διαρκεί 2 ώρες. Ο αγώνας έληξε και ο λόγος των πόντων των δύο ομάδων ήταν 3 προς 5 . Ποιος θα μπορούσε να είναι ο συνολικός αριθμός των πόντων σε αυτό το αγώνα αν είναι αριθμός ήταν μικρότερος του 90;

Η Ρίζα

Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος η $2^η$ ρίζα του2, η $3^η$ ρίζα του 3, $4^η$ ρίζα του 4, η $5^η$ ρίζα του 5, ή η $6^η$ ρίζα του 6.

Απαντήσεις των Γρίφων στα Μαθηματικά μας Διασκεδάζουν, τεύχους 114

Το σκαλοπάτι

Η διαφορά στο ύψος του Χρήστου από τον Παύλο είναι (38-10):2=14 εκατοστά. Επομένως το σκαλοπάτι έχει ύψος σ=14+10=24 εκατοστά.

Τα γενέθλια

Ο Φεβρουάριος έχει 4 εβδομάδες, άρα η κάθε μέρα του επαναλαμβάνεται 4 φορές, για να είναι μια μέρα και 5η φορά σημαίνει ότι είναι δίσεκτο το έτος. Το 2016 ήταν δίσεκτο, ο Φλεβάρης είχε 29 μέρες και η πρώτη μέρα του μήνα που ήταν Δευτέρα έρχεται και 5η φορά στις 29. Όμως τα δίσεκτα έτη είναι κάθε 4 χρόνια όμως η ίδια μέρα Δευτέρα για 5η φορά το Φλεβάρη είναι κάθε 28 χρόνια. Επομένως ο καθηγητής είναι 56 ετών. (Γεννήθηκε το 1960).

Η μπύρα

Το αποτέλεσμα κάθε νομίσματος είναι ανεξάρτητο από αυτό των άλλων. Το κάθε ένα έχει πιθανότητα 1/2 να φέρει κορώνα. Επομένως είτε 4 είτε 5, έχουμε δύο ανεξάρτητα μεταξύ τους ενδεχόμενα και ο καθένας έχει την ίδια πιθανότητα (1/2) να κερδίσει.

Το κέρασμα

Αν από τη $2^η$ γραμμή αφαιρέσουμε την $3^η$ έχουμε Κ-Τ=1ή ότι Κ=1+Τ.

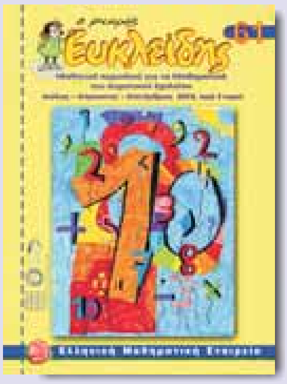
Τώρα από τη $2^η$ έχουμε 3+4Τ=9 ή 4Τ=6 ή Τ=1,5€ και άρα Κ=2,5€. Από την $4^η$ προκύπτει Π=3€ και τέλος από την πρώτη Α=2€.

Τα εγγόνια

Θεωρούμε ότι ο δίσκος άδειασε. Αφού δεν τεμάχισε κανένα γλυκό τότε οι κουραμπιέδες ήταν αριθμός πολλαπλάσιο του 8 (8,16, 24, 32, 40, ...) και τα μελομακάρονα πολλαπλάσια του 10 (10, 20, 30, 40, ...) και ο δίσκος μπορεί να είχε ή (8, 10) ή (16, 10) ή (24, 10)... ή (8,20) ή (8,30) ...(32, 40) ή όποιο άλλο συνδυασμό γλυκών. Άρα το μικρότερο παιδί πήρε (1, 1) ή (2,1) ή (1,2) ... το ίδιο αριθμό γλυκών σε κάθε περίπτωση πήραν και τα άλλα παιδιά. Όλοι οι συνδυασμοί τελικά οδηγούν σε 9 παιδιά.

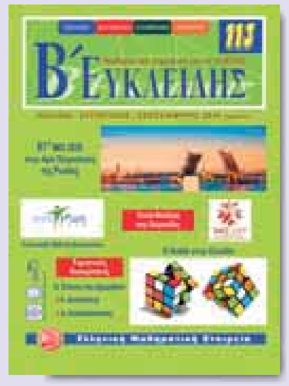
Εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιοδικά



Τιμή τεύχους: 3€

Τιμή τεύχους: 3€



Τιμή τεύχους: 3,5€

Διαγωνισμοί

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Τιμή βιβλίου: 12€

Ολυμπιάδες

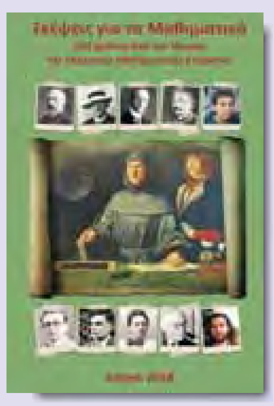
Τιμή βιβλίου: 30€

Τιμή βιβλίου: 20€

Τιμή βιβλίου: 25€

Βιβλία

Τιμή βιβλίου: 18€



Τιμή βιβλίου: 15€

Τιμή βιβλίου: 20€

Κεντρική Διάθεση: Πανεπιστημίου 34 - Αθήνα
τηλ.: 210 3616532, 210 3617784 fax: 210 3641025
www.hms.gr e-mail: info@hms.gr