ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Michael Spivak

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ & ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2η αναθεωρημένη και επαυξημένη έκδοση

Μετάφραση: Απόστολος Γιαννόπουλος

Συμπλήρωση μετάφρασης και προσαρμογή στην τέταρτη αμερικανική έκδοση: Αλέξανδρος Χορταράς

Επιμέλεια: Μιχάλης Λάμπρου, Δημήτρης Καραγιαννάκης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ, 2010

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ
Ίδρυμα Τεχνολογίας & Έρευνας
Αθήνα: Μάνης 5, 106 81, Εξάρχεια, Αθήνα. Τηλ. 210 3849020-22, Fax 210 3301583
Ηράκλειο: Νικ. Πλαστήρα 100, Βασιλικά Βουτών 700 13, Ηράκλειο Κρήτης. Τηλ. 2810 391097 Fax 2810 391085
info@cup.gr, www.cup.gr

ΣΕΙΡΑ: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διευθυντής σειράς: Στέφανος Τραχανάς

Τίτλος πρωτοτύπου:	Calculus, Fourth Edition, Publish or Rerish, Inc.
©:	1967, 1980, 1994, 2008 by Michael Spivak
© για την ελληνική γλώσσα:	1991, 2008 Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
Απόδοση στα ελληνικά:	Απόστολος Γιαννόπουλος
Συμπλήρωση μετάφρασης και προσαρμογή στην 4η αμερικανική έκδοση:	Αλέξανδρος Χορταράς
Επιστημονική επιμέλεια:	Μιχάλης Λάμπρου, Δημήτρης Καραγιαννάκης
Μακέτα εξωφύλλου:	Κωνσταντίνος Καρνίκης
Εκτύπωση - βιβλιοδεσία:	ΛΥΧΝΙΑ

Πρώτη ελληνική έκδοση: 1991
Δεύτερη αναθεωρημένη και επαυξημένη ελληνική έκδοση: Ιούλιος 2010

Η έκδοση στοιχειοθετήθηκε με Times New Roman της Monotype και Garamond Premier Pro της Adobe.
Για τα μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν τα MathTime Pro 2 (MathTime is a trademark of Publish or Perish, Inc. – Personal TeX, Inc. www.pctex.com, November 2009). Την προσαρμογή σε LaTeX και τη σελιδοποίηση έκανε ο David J. McClurkin.

ISBN 978-960-524-302-9

Αφιερωμένο στη μνήμη του Υ. Ρ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θεωρώ ότι οι άνθρωποι
έχουν χρέος προς το
επάγγελμά τους —από το
οποίο φυσικά ζητούν εύνοια
και κέρδος— να
προσπαθούν από καθήκον
να το βελτιώσουν, ώστε να
είναι βοήθεια και στολίδι τους.

FRANCIS BACON

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Το βιβλίο αυτό είναι επηρεασμένο, σε όλες τις πλευρές του, από την επιθυμία να παρουσιάσει τον Λογισμό όχι απλώς ως εισαγωγή, αλλά ως μια ουσιαστική πρώτη συνάντηση με τα Μαθηματικά. Από την εποχή που τα θεμέλια της Ανάλυσης προσέφεραν το πεδίο στο οποίο αναπτύχθηκαν οι σύγχρονοι τρόποι της μαθηματικής σκέψης, ο Λογισμός πρέπει να είναι ο τόπος όπου χρειάζεται να επιδιώκουμε, παρά να αποφεύγουμε, να ενισχύεται η διαίσθηση με τη λογική. Εκτός από την ανάπτυξη της διαίσθησης των σπουδαστών σε σχέση με τις όμορφες έννοιες της Ανάλυσης, σίγουρα είναι εξίσου σημαντικό να τους πείσουμε ότι η ακρίβεια και η αυστηρότητα δεν αποτελούν ούτε εμπόδιο στη διαίσθηση ούτε αυτοσκοπό, αλλά το φυσικό μέσον με το οποίο διαμορφώνουμε και σκεπτόμαστε τις μαθηματικές ερωτήσεις.

Αυτός ο στόχος συνεπάγεται και μια αντίληψη για τα Μαθηματικά, την οποία, κατά κάποιον τρόπο, όλο το βιβλίο προσπαθεί να υπερασπίσει. Ανεξάρτητα του πόσο καλά έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένα θέματα, οι στόχοι μας θα έχουν υλοποιηθεί αν το βιβλίο πετύχει στο σύνολό του. Για αυτόν το λόγο, δεν θα είχε αξία να αναφέρουμε απλώς τα θέματα που καλύπτονται ή να αναφερθούμε σε παιδαγωγικές πρακτικές και άλλες καινοτομίες. Ακόμα και η γρήγορη ματιά, που συνήθως επιδαψιλεύεται στα νέα βιβλία Λογισμού, κατά πάσα πιθανότητα μπορεί να πει πολύ περισσότερα από μια εκτεταμένη διαφήμιση, και ο κάθε διδάσκων που έχει ισχυρές προτιμήσεις σε συγκεκριμένες όψεις του Λογισμού γνωρίζει πού να κοιτάξει για να δει αν το βιβλίο αυτό εκπληρώνει τις απαιτήσεις του.

Εν τούτοις, ορισμένα χαρακτηριστικά του βιβλίου απαιτούν έναν αναλυτικό σχολιασμό. Από τα 29 κεφάλαιά του, τα 2 (με αστερίσκο) είναι προαιρετικά, και τα 3 κεφάλαια που αποτελούν το 5ο Μέρος περιελήφθησαν μόνο χάριν εκείνων των σπουδαστών που θα ήθελαν να εξετάσουν από μόνοι τους μια κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Επιπλέον, τα Παραρτήματα των Κεφαλαίων 3 και 11 επίσης περιέχουν προαιρετικό υλικό.

Η διάταξη των υπολοίπων κεφαλαίων είναι επί τούτου τελείως ανελαστική, αφού ο σκοπός του βιβλίου είναι να παρουσιάσει τον Λογισμό ως εξέλιξη μιας ιδέας και όχι ως μια συλλογή «θεμάτων». Μια και οι πλέον συναρπαστικές έννοιες του Λογισμού δεν εμφανίζονται έως το 3ο Μέρος, θα πρέπει να επισημάνω ότι το 1ο και το 2ο Μέρος πιθανόν να απαιτήσουν λιγότερο χρόνο από ό,τι δείχνει η έκτασή τους —αν και όλο το βιβλίο καλύπτει το διδακτικό πρόγραμμα ενός έτους, τα διάφορα κεφάλαια δεν στοχεύουν στο να καλυφθούν με ομοιόμορφο ρυθμό. Ένα μάλλον φυσικό σημείο διαχωρισμού εμφανίζεται μεταξύ του 2ου και του 3ου Μέρους, και έτσι είναι δυνατόν να φτάσουμε στην παραγώγιση και την ολοκλήρωση πιο γρήγορα αν αντιμετωπίσουμε το 2ο Μέρος συνοπτικά, και πιθανόν επιστρέψουμε αργότερα για μια πιο λεπτομερή θεώρηση. Αυτή η διάταξη της ύλης αντιστοιχεί στην παραδοσιακή παρουσίαση στα περισσότερα βιβλία Λογισμού, αλλά αισθάνομαι ότι θα ελαττώσει την αξία του βιβλίου για σπουδαστές που ξέρουν από πριν λίγο Λογισμό, καθώς και για τους ικανούς σπουδαστές με κάπως αξιόλογο υπόβαθρο.

Τα προβλήματα έχουν σχεδιαστεί λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την πιο πάνω ειδική κατηγορία ακροατηρίου. Κυμαίνονται από εκείνα που λύνονται απευθείας χωρίς να είναι υπεραπλουστευμένα, δηλαδή ασκήσεις που αναπτύσσουν τις βασικές μεθόδους και ελέγχουν την κατανόηση των εννοιών, μέχρι προβλήματα ουσιαστικής δυσκολίας και, ελπίζω, σχετικού ενδιαφέροντος. Υπάρχουν συνολικά περίπου 625 προβλήματα. Εκείνα που δίνουν έμφαση στους μαθηματικούς χειρισμούς συνήθως περιέχουν πολλά παραδείγματα, αριθμημένα με μικρούς λατινικούς αριθμούς, ενώ τα μικρά ελληνικά γράμματα συνήθως χρησιμοποιούνται για να σηματοδοτήσουν αλληλοσχετιζόμενα μέρη σε άλλα προβλήματα. Μια ένδειξη της σχετικής δυσκολίας παρέχει το σύστημα του μονού και διπλού αστερίσκου, αλλά υπάρχουν τόσα πολλά κριτήρια για να θεωρηθεί κάτι δύσκολο, που αυτός ο οδηγός δεν είναι τελείως αξιόπιστος. Μερικά προβλήματα είναι τόσο δύσκολα,

ειδικά αν δεν συμβουλευτούμε τις υποδείξεις, που και οι καλοί σπουδαστές θα πρέπει μάλλον να προσπαθήσουν μόνο εκείνα που τους ενδιαφέρουν πολύ. Από τα λιγότερο δύσκολα προβλήματα θα είναι μάλλον εύκολο να επιλεγεί ένα μέρος τους που θα δώσει ενασχόληση σε μια καλή τάξη χωρίς να την απογοητεύσει. Το Μέρος των Απαντήσεων περιέχει λύσεις περίπου των μισών ασκήσεων που προσφέρονται ως παραδείγματα, ώστε να γίνει μια καλή εξέταση της μεθοδολογικής ικανότητας των σπουδαστών. Υπάρχει και ξεχωριστό βιβλίο απαντήσεων που περιέχει τις λύσεις των υπολοίπων προβλημάτων. Τέλος, υπάρχει μια Προτεινόμενη Βιβλιογραφία στην οποία συχνά αναφέρονται τα προβλήματα, καθώς και Ευρετήριο Συμβόλων.

Είμαι ευγνώμων που μου δίνεται η ευκαιρία να αναφέρω τους πολλούς ανθρώπους στους οποίους οφείλω ευχαριστίες. Η Jane Bjorkgren έφερε εις πέρας το κολοσιαίο έργο της στοιχειοθεσίας, αναπληρώνοντας την ακανόνιστη παραγωγή του χειρογράφου μου. Ο Richard Serkey βοήθησε να συγκεντρωθεί το υλικό με σημαντικές ιστορικές πληροφορίες που υπάρχει στα προβλήματα, και ο Richard Weiss μου έδωσε τις απαντήσεις που υπάρχουν στο τέλος του βιβλίου. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στους φίλους μου Michael Freeman, Jay Goldman, Anthony Phillips και Robert Wells για τη φροντίδα με την οποία διάβασαν τις προκαταρκτικές μορφές του βιβλίου, και τον αλύπητο τρόπο με τον οποίο διατύπωσαν την κριτική τους. Δεν χρειάζεται να πω ότι δεν ευθύνονται για ελαττώματα που έχουν απομείνει, ειδικά αφού κάποιες φορές απέρριψα υποδείξεις τους που θα μπορούσαν να κάνουν το βιβλίο κατάλληλο για μια ευρύτερη ομάδα φοιτητών. Πρέπει να εκφράσω τον θαυμασμό μου προς τους εκδότες και το προσωπικό του W.A. Benjamin, Inc., που πάντοτε προσπαθούσαν να αυξήσουν τη θελκτικότητα του βιβλίου, αν και γνώριζαν το κοινό για το οποίο προοριζόταν.

Οι ατέλειες που πάντοτε περιέχουν οι πρώτες εκδόσεις έγιναν ανεκτές με λεβεντιά από μια σκληροτράχηλη ομάδα πρωτοετών στο Πανεπιστήμιο του Brandeis, κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 1965-1966, στις παραδόσεις για ένα τμήμα αριστούχων. Η μισή ύλη αφιερώθηκε στην Άλγεβρα και την Τοπολογία και η άλλη μισή στον Λογισμό, με κύριο σύγγραμμα το παρόν βιβλίο. Υποχρεώνομαι υπό τις παρούσες συνθήκες να αναφέρω ότι είχε επιτυχία που με αντάμειψε. Βεβαίως, όλα αυτά εκ του ασφαλούς —στο κάτω-κάτω, είναι απίθανο μια τάξη να εγερθεί σύσσωμη και να διαμαρτυρηθεί δημοσίως— αλλά και οι ίδιοι οι σπουδαστές μού φάνηκε ότι αξίζουν συγχαρητηρίων, αφού απορρόφησαν με προσοχή μια εντυπωσιακά μεγάλη ύλη. Ευελπιστώ ότι και κάποιοι άλλοι σπουδαστές θα μπορέσουν να χρησιμοποιήσουν το βιβλίο με τον ίδιο καλό σκοπό και με τον ίδιο ενθουσιασμό.

Waltman, Massachusetts
Φεβρουάριος 1967

MICHAEL SPIVAK

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ

Μου είπαν πολλές φορές ότι ο τίτλος του βιβλίου αυτού θα έπρεπε να ήταν κάτι σαν «Μια Εισαγωγή στην Ανάλυση», αφού χρησιμοποιείται συνήθως στις παραδόσεις όπου οι σπουδαστές έχουν ήδη μάθει τη μηχανική πλευρά του Λογισμού· τέτοια μαθήματα είναι καθιερωμένα πλέον στην Ευρώπη και συνηθίζονται τελευταία όλο και πιο πολύ στις ΗΠΑ. Μετά από 13 χρόνια μου φαίνεται πολύ αργά να αλλάξω τον τίτλο, αλλά χρειαζόταν άλλες αλλαγές πέρα από τις διορθώσεις της πληθώρας των τυπογραφικών και μη σφαλμάτων. Υπάρχουν τώρα στο βιβλίο ξεχωριστά Παραρτήματα για πολλά θέματα, που στην πρώτη έκδοση είχαν υποτιμηθεί: πολικές συντεταγμένες, ομοιόμορφη συνέχεια, παραμετρικοποίηση καμπυλών, αθροίσματα Riemann, και η χρήση των ολοκληρωμάτων για τον υπολογισμό μηκών, όγκων και εμβαδών. Μερικά θέματα, όπως ο χειρισμός των δυναμοσειρών, εξετάζονται πιο αναλυτικά στο παρόν σύγγραμμα και υπάρχουν επίσης πολλά νέα προβλήματα σε σχέση με αυτά τα θέματα, ενώ άλλα θέματα, όπως η μέθοδος Newton, ο Κανόνας του Τραπεζίου και του Simpson, αναπτύσσονται μέσω των προβλημάτων. Υπάρχουν συνολικά 160 περίπου νέα προβλήματα, πολλά από τα οποία είναι μέσης δυσκολίας, κάπου ανάμεσα στα λίγα προβλήματα ρουτίνας στην αρχή κάθε κεφαλαίου και σε εκείνα τα δυσκολότερα που εμφανίζονται αργότερα.

Πολλά από τα νέα προβλήματα τα εκπόνησε ο Ted Shifrin. Ο Frederick Gordon επισήμανε αρκετά σοβαρά λάθη στα προβλήματα της 1ης έκδοσης, και υπέδειξε ορισμένες μη τετριμμένες διορθώσεις, όπως εκείνη της κομψής απόδειξης του Θεωρήματος 12-2, η οποία κατελάμβανε δύο Λήμματα και δύο σελίδες στην πρώτη έκδοση. Ο Joseph Lipman μου μίλησε επίσης για αυτή την απόδειξη, και για ένα παρόμοιο τέχνασμα στην απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος στο παράρτημα του Κεφαλαίου 11, το οποίο είχε αφεθεί αναπόδεικτο στην πρώτη έκδοση. Ο Roy O. Davies μου πρότεινε το τέχνασμα για το Πρόβλημα 11-66 το οποίο προηγουμένως αποδεικνυόταν μόνο στο Πρόβλημα 20-8 [21-8 στην τρίτη έκδοση] και η Marina Ratner πρότεινε αρκετά ενδιαφέροντα προβλήματα, ειδικά κάποια για την ομοιόμορφη συνέχεια και τις σειρές. Σε όλους αυτούς τους ανθρώπους απευθύνω τις ευχαριστίες μου, και εύχομαι κατά τη δημιουργία της νέας έκδοσης η συνεισφορά τους να μην έχει ενσωματωθεί με αδέξιο τρόπο.

[1980] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Η πιο σημαντική αλλαγή σε αυτήν την τρίτη έκδοση είναι η συμπερίληψη ενός νέου (με αστερίσκο) Κεφαλαίου 17 για τις κινήσεις των πλανητών, στο οποίο ο Απειροστικός Λογισμός εφαρμόζεται σε ένα πραγματικό πρόβλημα Φυσικής.

Σε προετοιμασία αυτού, το παλαιό Παράρτημα του Κεφαλαίου 4 αντικαταστάθηκε από τρία Παραρτήματα: τα δύο πρώτα καλύπτουν τα διανύσματα και τις κωνικές τομές, ενώ οι πολικές συντεταγμένες μετατέθηκαν στο τρίτο Παράρτημα, το οποίο περιλαμβάνει και τις εξισώσεις των κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες. Επιπλέον, το Παράρτημα του Κεφαλαίου 12 επεκτάθηκε και πραγματεύεται διανυσματικές πράξεις σε διανυσματικές καμπύλες.

Μια ακόμη μεγάλη αλλαγή είναι απλώς η αναδιοργάνωση του παλαιού υλικού. «Το κοσμοπολίτικο ολοκλήρωμα», το οποίο προηγουμένως ήταν το δεύτερο Παράρτημα του Κεφαλαίου 13, είναι πια Παράρτημα του κεφαλαίου «Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης» (το πρώην Κεφάλαιο 18 και νυν Κεφάλαιο 19). Επιπλέον, τα προβλήματα του κεφαλαίου εκείνου που χρησιμοποιούσαν ύλη του Παραρτήματος εμφανίζονται τώρα στο ανατοποθετημένο Παράρτημα.

Ορισμένες άλλες αλλαγές και κάποιες μεταβολές στην αρίθμηση των Προβλημάτων προέκυψαν από διορθώσεις και την απάλειψη λανθασμένων προβλημάτων.

Ξαφνιάστηκα αλλά και απογοητεύτηκα όταν συνειδητοποίησα ότι αφού άφησα να περάσουν 13 χρόνια μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου, άφησα να περάσουν άλλα 14 μέχρι την τρίτη αυτή έκδοση. Όλο αυτόν τον καιρό φαίνεται πως συγκέντρωσα έναν όχι και τόσο μικρό κατάλογο διορθώσεων. Στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία είχα χρόνο να κάνω μόνο λίγες αλλαγές, η οποία ύστερα από όλα αυτά τα χρόνια πιθανόν να χρειάζεται μια πλήρη αναθεώρηση· αυτό θα πρέπει να περιμένει μέχρι την επόμενη έκδοση, την οποία ελπίζω να κάνω πιο έγκαιρα.

[1994] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΣΤΗΝ ΤΕΤΑΡΤΗ ΕΚΔΟΣΗ

Όλο υποσχέσεις! Στον πρόλογο της τρίτης έκδοσης σημείωσα ότι μεσολάβησαν 13 χρόνια μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης έκδοσης, και στη συνέχεια άλλα 14 χρόνια μέχρι την τρίτη, εκφράζοντας την ελπίδα η επόμενη έκδοση να κυκλοφορήσει πιο σύντομα. Λοιπόν, να που πέρασαν άλλα 14 χρόνια μέχρι την τέταρτη, και μάλλον τελική, έκδοση.

Παρ' ότι έγιναν μικρές αλλαγές σε ορισμένα τμήματα της ύλης, ιδιαίτερα στα Κεφάλαια 5 και 20, η έκδοση αυτή διαφέρει κυρίως όσον αφορά στην εισαγωγή πρόσθετων προβλημάτων, την πλήρη ενημέρωση της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας, και τη διόρθωση πολυάριθμων λαθών.

Τα παραπάνω είχαν τεθεί υπόψιν μου εδώ και χρόνια, μεταξύ άλλων από τον Nils von Barth, τον Philip Loewen, τον Fernndo Mejias, τον Lance Miller που μου έδωσε έναν μακρύ κατάλογο από τέτοια, ειδικά για το βιβλίο των απαντήσεων, και τον Michael Maltenfort που μου έδωσε έναν απίστευτα εκτενή κατάλογο με τυπογραφικά σφάλματα, λάθη και κριτική.

Περισσότερο απ' όλα όμως είμαι υπόχρεος στον φίλο μου Ted Shifrin ο οποίος όλα αυτά τα χρόνια χρησιμοποιεί το βιβλίο μου για το ανανεωμένο μάθημά του στο University of Georgia, και ο οποίος με παρακίνησε και εντέλει με βοήθησε να πραγματοποιήσω αυτή την απαραίτητη αναθεώρηση. Πρέπει επίσης να ευχαριστήσω τους φοιτητές του μαθήματός του τα τελευταία ακαδημαϊκά χρόνια, που λειτούργησαν ως πειραματόζωα για τη νέα έκδοση, η οποία είχε ως αποτέλεσμα, συγκεκριμένα, την απόδειξη που υπάρχει στο Πρόβλημα 8-20 για το Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου, η οποία είναι κατά πολύ απλούστερη από την πρωτότυπη απόδειξη του Reisz, ή ακόμη και την απόδειξη του [38] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας, που τώρα έχει ολοκληρωτικά αναθεωρηθεί και αυτή, και πάλι με μεγάλη βοήθεια από τον Ted.

[2008] **MICHAEL SPIVAK**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ **vi**

ΜΕΡΟΣ I **Εισαγωγή**

1 Βασικές ιδιότητες των αριθμών 3
2 Αριθμοί διαφόρων ειδών 19

ΜΕΡΟΣ II **Θεμέλια**

3 Συναρτήσεις 35
Παράρτημα. Διατεταγμένα ζεύγη 49
4 Γραφικές παραστάσεις 51
Παράρτημα 1. Διανύσματα 68
Παράρτημα 2. Οι κωνικές τομές 73
Παράρτημα 3. Πολικές συντεταγμένες 76
5 Όρια 81
6 Συνεχείς συναρτήσεις 103
7 Τρία δύσκολα θεωρήματα 110
8 Ελάχιστα άνω φράγματα 120
Παράρτημα. Ομοιόμορφη συνέχεια 130

ΜΕΡΟΣ III **Παράγωγοι και ολοκληρώματα**

9 Παράγωγοι 135
10 Παραγώγιση 152
11 Η σημασία της παραγώγου 170
Παράρτημα. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις 198
12 Αντίστροφες συναρτήσεις 208
Παράρτημα. Παραμετρική παράσταση καμπυλών 220
13 Ολοκληρώματα 228
Παράρτημα. Αθροίσματα Riemann 255
14 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού 257
15 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις 274
*16 Ο π είναι άρρητος 293
*17 Κινήσεις των πλανητών 298
18 Η λογαριθμική και η εκθετική συνάρτηση 306
19 Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης 327
Παράρτημα. Το «κοσμοπολίτικο» ολοκλήρωμα 364

ΜΕΡΟΣ IV **Ακολουθίες και σειρές**

20 Προσέγγιση με πολυωνυμικές συναρτήσεις 373
*21 Ο *e* είναι υπερβατικός 401
22 Ακολουθίες 410
23 Σειρές 427
24 Ομοιόμορφη σύγκλιση και δυναμοσειρές 452
25 Μιγαδικοί αριθμοί 475
26 Μιγαδικές συναρτήσεις 488
27 Μιγαδικές δυναμοσειρές 501

ΜΕΡΟΣ V **Επίλογος**

28 Σώματα 525
29 Κατασκευή των πραγματικών αριθμών 531
30 Μοναδικότητα των πραγματικών αριθμών 543

Προτεινόμενη βιβλιογραφία *550*
Απαντήσεις σε επιλεγμένα προβλήματα *560*
Πίνακας Συμβόλων *604*
Ευρετήριο *608*

ΜΕΡΟΣ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το να έχεις συνείδηση της άγνοιάς σου
είναι ένα μεγάλο βήμα προς τη γνώση.

BENJAMIN DISRAELI

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο τίτλος του κεφαλαίου εκφράζει με λίγα λόγια τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για να διαβάσει κάποιος αυτό το βιβλίο. Πραγματικά, σε αυτό το σύντομο κεφάλαιο απλώς εξηγούμε τι εννοούμε με τον όρο «βασικές ιδιότητες των αριθμών»· όλες τους —πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αφαίρεση και διαίρεση, λύσεις εξισώσεων και ανισοτήτων, παραγοντοποίηση και άλλοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί— μας είναι ήδη γνωστές. Όμως, το κεφάλαιο αυτό δεν είναι μια ανασκόπηση. Παρ' όλο που το θέμα είναι οικείο, η παρουσίαση που πρόκειται να κάνουμε πιθανότατα θα φανεί αρκετά πρωτότυπη· δεν είναι σκοπός μας να δώσουμε μια εκτεταμένη ανασκόπηση παλιού υλικού, αλλά να συμπυκνώσουμε αυτές τις γνώσεις σε μερικές απλές και προφανείς ιδιότητες των αριθμών. Ορισμένες μπορεί να φανούν τελείως προφανείς, όμως ένας εντυπωσιακά μεγάλος αριθμός από ποικίλα και σημαντικά αποτελέσματα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων που θα τονίσουμε.

Από τις δώδεκα ιδιότητες που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οι πρώτες εννιά σχετίζονται με τις βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Προς το παρόν, θα ασχοληθούμε μόνο με την πρόσθεση: η πράξη αυτή εκτελείται πάνω σε ένα ζεύγος αριθμών —το άθροισμα $a + b$ υπάρχει οποτεδήποτε μας δοθούν δύο αριθμοί a και b (που βέβαια δεν αποκλείεται να είναι ο ίδιος αριθμός). Φαίνεται ίσως λογικό να θεωρήσει κανείς την πρόσθεση σαν μια πράξη που μπορεί να εκτελεστεί με τη μία για πολλούς αριθμούς, και να πάρει ως βασική έννοια το άθροισμα $a_1 + \cdots + a_n$ των n αριθμών $a_1, \ldots, a_n$. Είναι όμως πιο βολικό να εξετάσουμε την πρόσθεση μόνο για ζεύγη αριθμών, και να ορίσουμε τα άλλα αθροίσματα συναρτήσει των αθροισμάτων αυτού του τύπου. Για το άθροισμα τριών αριθμών a, b και c, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους. Μπορούμε να προσθέσουμε πρώτα τους b και c, παίρνοντας τον $b + c$ και έπειτα να προσθέσουμε τον a σε αυτόν τον αριθμό, παίρνοντας τον $a + (b + c)$· ή να προσθέσουμε πρώτα τους a και b, και έπειτα το άθροισμα $a + b$ στον c, παίρνοντας τον $(a + b) + c$. Τα δύο σύνθετα αθροίσματα που θα πάρουμε είναι βέβαια ίσα, και αυτή είναι η πρώτη ιδιότητα που θα καταγράψουμε:

(I1) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Είναι σαφές ότι η ιδιότητα αυτή μας απαλλάσσει από το να ορίσουμε ξεχωριστά την έννοια του αθροίσματος τριών αριθμών: απλώς συμφωνούμε ότι το $a + b + c$ συμβολίζει τον αριθμό $a + (b + c) = (a + b) + c$. Για την πρόσθεση τεσσάρων αριθμών απαιτούνται παρόμοιοι, αν και κάπως περισσότερο πολύπλοκοι, συλλογισμοί. Ο συμβολισμός $a + b + c + d$ ορίζεται να σημαίνει

$$\begin{aligned} &(1) \quad ((a + b) + c) + d, \\ \text{ή} \quad &(2) \quad (a + (b + c)) + d, \\ \text{ή} \quad &(3) \quad a + ((b + c) + d), \\ \text{ή} \quad &(4) \quad a + (b + (c + d)), \\ \text{ή} \quad &(5) \quad (a + b) + (c + d). \end{aligned}$$

Αυτός ο ορισμός είναι σαφής γιατί οι παραπάνω αριθμοί είναι όλοι ίσοι. Ευτυχώς, *αυτό* το γεγονός δεν χρειάζεται να καταγραφεί ως ξεχωριστή ιδιότητα, γιατί μπορεί να αποδειχθεί

από την ιδιότητα Ι1 που έχουμε ήδη αναφέρει. Για παράδειγμα, ξέρουμε από την Ι1 ότι

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

από όπου έπεται αμέσως ότι οι (1) και (2) είναι ίσοι. Η ισότητα των (2) και (3) είναι άμεση συνέπεια της Ι1, αν και ίσως δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά (πρέπει να αφήσουμε τον $b + c$ να παίξει τον ρόλο του b στην Ι1, και τον d τον ρόλο του c). Οι ισότητες (3) = (4) = (5) αποδεικνύονται επίσης εύκολα.

Είναι ίσως προφανές ότι αρκεί να καταφύγουμε στην Ι1 για να αποδείξουμε την ισότητα των 14 διαφορετικών τρόπων με τους οποίους αθροίζονται πέντε αριθμοί, αλλά δεν είναι και τόσο φανερό πώς γίνεται να δοθεί μια λογική απόδειξη αυτού του πράγματος χωρίς να καταγράψουμε και τα 14 αυτά αθροίσματα. Μια τέτοια διαδικασία είναι εφικτή, αλλά θα γινόταν ιδιαίτερα επίπονη αν εξετάζαμε συλλογές από έξι, επτά, ή περισσότερους αριθμούς· θα ήταν τελείως ανεπαρκής για την απόδειξη της ισότητας όλων των δυνατών αθροισμάτων μιας τυχαίας πεπερασμένης συλλογής από αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$. Αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο, αλλά για αυτούς που θα ήθελαν να καταπιαστούν με την απόδειξη (και αξίζει τον κόπο να το κάνει κανείς τουλάχιστον μία φορά), μια προσέγγιση περιγράφεται στο Πρόβλημα 24. Από δω και πέρα, θα υποθέτουμε πάντοτε, χωρίς να το αναφέρουμε, ότι είναι γνωστά τα αποτελέσματα αυτού του προβλήματος και θα γράφουμε αθροίσματα της μορφής $a_1 + \cdots + a_n$ αδιαφορώντας για τη διάταξη των παρενθέσεων.

Ο αριθμός 0 έχει μια ιδιότητα τόσο σημαντική που θα την καταγράψουμε ως δεύτερη:

(Ι2) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Ο αριθμός 0 παίζει έναν επίσης σπουδαίο ρόλο στην τρίτη ιδιότητα του καταλόγου μας:

(Ι3) Για κάθε αριθμό a, υπάρχει ένας αριθμός, ο $-a$, τέτοιος ώστε

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Η ιδιότητα Ι2 θα έπρεπε να μας δίνει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του αριθμού 0, και είμαστε στην ευχάριστη θέση να αποδείξουμε κάτι τέτοιο, και μάλιστα αμέσως: Πραγματικά, αν ένας αριθμός x ικανοποιεί την

$$a + x = a$$

για οποιονδήποτε αριθμό a, τότε $x = 0$ (και επομένως αυτή η ισότητα ισχύει για όλους τους αριθμούς a). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δεν απαιτεί τίποτα περισσότερο από το να αφαιρέσουμε το a και από τα δύο μέλη της ισότητας· με άλλα λόγια, να προσθέσουμε το $-a$ και στα δύο μέλη. Όπως δείχνει και η λεπτομερής απόδειξη που ακολουθεί, χρειάζονται και οι τρεις ιδιότητες Ι1–Ι3 για να δικαιολογηθεί αυτή η πράξη:

$$\begin{aligned}
&\text{Αν} && a + x = a,\\
&\text{τότε} && (-a) + (a + x) = (-a) + a = 0\cdot\\
&\text{άρα} && ((-a) + a) + x = 0\cdot\\
&\text{άρα} && 0 + x = 0\cdot\\
&\text{άρα} && x = 0.
\end{aligned}$$

Όπως διαφαίνεται, είναι βολικό να θεωρούμε την αφαίρεση ως μια πράξη παράγωγη της πρόσθεσης: θεωρούμε το $a - b$ ως μια σύντμηση για το $a + (-b)$. Μπορούμε τότε να βρούμε τη λύση μερικών απλών εξισώσεων κάνοντας μια σειρά από βήματα (καθένα αιτιολογημένο από τις Ι1, Ι2 ή Ι3), όμοια με αυτά που εμφανίστηκαν για την εξίσωση

$a + x = a$. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
&\text{Αν} && x + 3 = 5,\\
&\text{τότε} && (x + 3) + (-3) = 5 + (-3)\cdot\\
&\text{άρα} && x + (3 + (-3)) = 5 - 3 = 2\cdot\\
&\text{άρα} && x + 0 = 2\cdot\\
&\text{άρα} && x = 2.
\end{aligned}$$

Αυτές οι λεπτομερείς λύσεις έχουν βέβαια ενδιαφέρον μόνο μέχρι να πεισθείτε ότι είναι πάντοτε δυνατές. Στην πράξη, συνήθως είναι χάσιμο χρόνου να προσπαθεί κανείς να λύσει μια εξίσωση δείχνοντας με τόσο αναλυτικό τρόπο την εξάρτηση από τις ιδιότητες I1, I2 και I3 (ή και από τις επόμενες ιδιότητες που θα αναφέρουμε).

Μένει μια ακόμα ιδιότητα της πρόσθεσης που πρέπει να αναφερθεί. Όταν εξετάζαμε τα αθροίσματα τριών αριθμών a, b και c, μόνο δύο αθροίσματα καταγράφηκαν: το $(a + b) + c$ και το $a + (b + c)$. Ασφαλώς μπορούμε να πάρουμε και άλλες πολλές περιπτώσεις αν μεταβάλλουμε τη διάταξη των a, b και c. Το ότι όλα αυτά τα αθροίσματα είναι ίσα, βασίζεται στην

(I4) Αν a και b είναι δύο αριθμοί, τότε

$$a + b = b + a.$$

Η διατύπωση της I4 έχει σκοπό να τονίσει το γεγονός ότι, αν και η πράξη της πρόσθεσης ενός ζεύγους αριθμών θα μπορούσε, ενδεχομένως, να εξαρτάται από τη σειρά των δύο αριθμών, στην πραγματικότητα είναι ανεξάρτητη από αυτήν. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι δεν συμπεριφέρονται όλες οι πράξεις το ίδιο καλά. Για παράδειγμα, η αφαίρεση δεν έχει αυτήν την ιδιότητα: συνήθως $a - b \neq b - a$. Παρεμπιπτόντως, θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε πότε το $a - b$ είναι ίσο με το $b - a$, και είναι ενδιαφέρον το ότι θα ανακαλύψουμε πόσο αδύναμοι είμαστε αν βασιστούμε στις ιδιότητες I1–I4 για να δικαιολογήσουμε τα βήματά μας. Με τελείως στοιχειώδη άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι $a-b = b-a$ μόνο αν $a = b$. Και όμως, είναι αδύνατο να το αποδείξουμε μόνο από τις ιδιότητες I1–I4· είναι διδακτικό να εξετάσετε προσεκτικά τη στοιχειώδη αλγεβρική απόδειξη και να προσδιορίσετε το βήμα ή τα βήματα που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν από τις I1–I4. Βέβαια, όταν θα έχουμε αναφέρει μερικές ακόμα ιδιότητες, θα είμαστε σε θέση να αιτιολογήσουμε όλα τα βήματα με λεπτομέρειες. Κατά έναν περίεργο όμως τρόπο, η επίμαχη ιδιότητα έχει να κάνει με τον πολλαπλασιασμό.

Οι βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μοιάζουν ευτυχώς τόσο πολύ με αυτές της πρόσθεσης, που θα χρειαστούν πολύ λίγα σχόλια· τόσο η έννοια όσο και οι συνέπειές τους θα είναι προφανείς. (Όπως και στη στοιχειώδη άλγεβρα, το γινόμενο των a και b θα συμβολίζεται με $a \cdot b$, ή πιο απλά με ab.)

(I5) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(I6) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Επίσης $1 \neq 0$.

(Φαίνεται ίσως παράξενο το να καταγράφουμε τον ισχυρισμό $1 \neq 0$, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να το κάνουμε, γιατί δεν υπάρχει τρόπος να τον αποδείξουμε με βάση τις υπόλοιπες ιδιότητες —αυτές οι ιδιότητες θα ίσχυαν όλες και αν υπήρχε ένας μόνο αριθμός, ο 0.)

(I7) Για κάθε αριθμό $a \neq 0$, υπάρχει ένας αριθμός a^{-1} τέτοιος ώστε

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

(I8) Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί, τότε

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Μια λεπτομέρεια που αξίζει να υπογραμμίσουμε είναι η εμφάνιση της συνθήκης $a \neq 0$ στην I7. Αυτή η συνθήκη είναι εντελώς απαραίτητη: αφού $0 \cdot b = 0$ για όλους τους αριθμούς b, *δεν* υπάρχει αριθμός 0^{-1} που να ικανοποιεί την $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Αυτός ο περιορισμός έχει μια σημαντική συνέπεια σε σχέση με τη διαίρεση. Ακριβώς όπως η αφαίρεση ορίστηκε μέσω της πρόσθεσης, έτσι και η διαίρεση ορίζεται με βάση τον πολλαπλασιασμό: ο συμβολισμός a/b σημαίνει $a \cdot b^{-1}$. Αφού το 0^{-1} δεν έχει έννοια, το $a/0$ επίσης δεν έχει έννοια —η διαίρεση με 0 είναι *πάντα* αόριστη.

Η ιδιότητα I7 έχει δύο σημαντικές συνέπειες. Αν $a \cdot b = a \cdot c$, δεν έπεται αναγκαστικά ότι $b = c$, γιατί αν $a = 0$, τότε και το $a \cdot b$ και το $a \cdot c$ είναι 0, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα b και c. Όμως, αν $a \neq 0$, τότε $b = c$. Αυτό αποδεικνύεται από την I7 ως εξής:

$$\begin{aligned}
&\text{Αν} && a \cdot b = a \cdot c \text{ και } a \neq 0,\\
&\text{τότε} && a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)\cdot\\
&\text{άρα} && (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c\cdot\\
&\text{άρα} && 1 \cdot b = 1 \cdot c\cdot\\
&\text{άρα} && b = c.
\end{aligned}$$

Συνέπεια της I7 είναι και το γεγονός ότι, αν $a \cdot b = 0$, τότε $a = 0$ ή $b = 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\text{αν} && a \cdot b = 0 \text{ και } a \neq 0,\\
&\text{τότε} && a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0\cdot\\
&\text{άρα} && (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0\cdot\\
&\text{άρα} && 1 \cdot b = 0\cdot\\
&\text{άρα} && b = 0.
\end{aligned}$$

(Μπορεί να συμβεί να ισχύει και η $a = 0$ και η $b = 0$. Αυτό το ενδεχόμενο δεν αποκλείεται όταν λέμε «$a = 0$ ή $b = 0$»· στα μαθηματικά το «ή» χρησιμοποιείται πάντοτε με την έννοια του «το ένα ή το άλλο, ή και τα δύο»).

Η τελευταία αυτή συνέπεια της I7 χρησιμοποιείται συνεχώς για τη λύση εξισώσεων. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι για έναν αριθμό x είναι γνωστό πως επαληθεύει την

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Τότε θα είναι $x - 1 = 0$ ή $x - 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Με βάση τις οκτώ ιδιότητες που έχουμε αναφέρει ώς τώρα, δεν είμαστε ακόμα σε θέση να αποδείξουμε και πολλά πράγματα. Η επόμενη ιδιότητα, που συνδυάζει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, θα μεταβάλλει ουσιαστικά αυτήν την κατάσταση.

(I9) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

(Παρατηρήστε ότι από την I8 ισχύει και η ισότητα $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.)

Ως παράδειγμα της χρησιμότητας της I9, θα προσδιορίσουμε τώρα πότε ακριβώς $a - b = b - a$:

$$\begin{aligned}
&\text{Αν} && a - b = b - a,\\
&\text{τότε} && (a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)\cdot\\
&\text{άρα} && a = b + b - a\cdot\\
&\text{άρα} && a + a = (b + b - a) + a = b + b.\\
&\text{Επομένως} && a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1),\\
&\text{και άρα} && a = b.
\end{aligned}$$

Μια δεύτερη εφαρμογή της I9 συναντάμε στην αιτιολόγηση του ισχυρισμού $a \cdot 0 = 0$, που έχουμε ήδη διατυπώσει, και τον οποίο χρησιμοποιήσαμε κιόλας λίγο νωρίτερα σε μια απόδειξη στη σελίδα 6 (μπορείτε να εντοπίσετε πού;). Αυτό το γεγονός δεν αναφέρθηκε ως μια από τις βασικές ιδιότητες, αν και δεν το αποδείξαμε όταν το αναφέραμε για πρώτη φορά. Με τις I1–I8 μόνο δεν ήταν δυνατόν να δώσουμε μια απόδειξη, γιατί ο αριθμός 0 εμφανίζεται μόνο στις I2 και I3, που αφορούν την πρόσθεση, ενώ ο ισχυρισμός για τον οποίο μιλάμε έχει σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Με την I9 η απόδειξη είναι απλή, αν και μπορεί να μην είναι τελείως προφανής. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, αυτό σημαίνει αυτομάτως (αν προσθέσουμε το $-(a \cdot 0)$ και στα δύο μέλη) ότι $a \cdot 0 = 0$.

Μια σειρά από άλλες συνέπειες της I9 ίσως μας βοηθήσουν να εξηγήσουμε τον κάπως περίεργο κανόνα που μας βεβαιώνει ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Για να ξεκινήσουμε, θα αποδείξουμε τον πιο εύλογο ισχυρισμό ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Για να τον αποδείξουμε, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= [(-a) + a] \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έπεται αμέσως (προσθέτοντας το $-(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη) ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot [(-b) + b] \\ &= (-a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, αν προσθέσουμε το $(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη, παίρνουμε

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Το γεγονός ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικό, είναι επομένως συνέπεια των I1–I9. Με άλλα λόγια, *αν θέλουμε να ισχύουν οι I1 έως και I9, τότε ο κανόνας για το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών μάς επιβάλλεται*.

Οι διάφορες συνέπειες της I9 που εξετάσαμε ώς τώρα, αν και είναι ενδιαφέρουσες και σημαντικές, δεν δείχνουν την πραγματική της σημασία· στο κάτω-κάτω θα μπορούσαμε να έχουμε αναφέρει όλες αυτές τις ιδιότητες χωριστά. Στην πραγματικότητα, η I9 δικαιολογεί σχεδόν όλους τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, ενώ έχουμε δει πώς να λύνουμε την εξίσωση

$$(x - 1)(x - 2) = 0,$$

δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι μας δίνονται οι εξισώσεις σε αυτή τη μορφή. Πιο πιθανό είναι να συναντήσουμε την ίδια εξίσωση στη μορφή

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Η «παραγοντοποίηση» $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ είναι ουσιαστικά μια τριπλή χρήση της I9:

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot (x - 2) &= x \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (x - 2) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\ &= x^2 + x[(-2) + (-1)] + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Ένα τελευταίο παράδειγμα για τη σημασία της I9 είναι το γεγονός ότι αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται ουσιαστικά κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε αραβικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$$

είναι ένας συνοπτικός τρόπος γραφής των εξής ισοτήτων:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 24 &= 13 \cdot (2 \cdot 10 + 4) \\ &= 13 \cdot 2 \cdot 10 + 13 \cdot 4 \\ &= 26 \cdot 10 + 52. \end{aligned}$$

(Σημειώστε πως, το ότι μετακινήσαμε το 26 μια θέση αριστερά στον παραπάνω υπολογισμό, είναι το ίδιο με το να γράφουμε $26 \cdot 10$). Ο πολλαπλασιασμός $13 \cdot 4 = 52$ χρησιμοποιεί και αυτός την I9:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 4 &= (1 \cdot 10 + 3) \cdot 4 \\ &= 1 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\ &= 4 \cdot 10 + 12 \\ &= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \\ &= (4 + 1) \cdot 10 + 2 \\ &= 5 \cdot 10 + 2 \\ &= 52. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες I1–I9 έχουν συγκεκριμένα ονόματα που δεν είναι απαραίτητο να τα θυμόμαστε, αλλά συχνά είναι βολικά όταν αναφερόμαστε σε αυτές. Με αυτήν την ευκαιρία θα κάνουμε έναν κατάλογο των ιδιοτήτων I1–I9 αναφέροντας ταυτόχρονα και τα ονόματα που τους αποδίδονται συνήθως.

(I1)	(Προσεταιριστικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + (b + c) = (a + b) + c.$
(I2)	(Ύπαρξη προσθετικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a + 0 = 0 + a = a.$
(I3)	(Ύπαρξη προσθετικού αντίστροφου)	$a + (-a) = (-a) + a = 0.$
(I4)	(Αντιμεταθετικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + b = b + a.$
(I5)	(Προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(I6)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \cdot \quad 1 \neq 0.$
(I7)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντίστροφου)	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1,$ για $a \neq 0.$
(I8)	(Αντιμεταθετικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot b = b \cdot a.$
(I9)	(Επιμεριστικός νόμος)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Οι τρεις βασικές ιδιότητες των αριθμών που απομένουν αφορούν στις ανισότητες. Αν και οι ανισότητες σπάνια εμφανίζονται στα στοιχειώδη Μαθηματικά, παίζουν εξέχοντα ρόλο στο Λογισμό. Οι δύο μορφές ανισότητας, $a < b$ (ο a είναι μικρότερος από τον b) και $a > b$ (ο a είναι μεγαλύτερος από τον b), συνδέονται στενά: η $a < b$ σημαίνει το ίδιο ακριβώς πράγμα με την $b > a$ (έτσι, η $1 < 3$ και η $3 > 1$ είναι απλώς δύο τρόποι για να γράψουμε την ίδια πρόταση). Οι αριθμοί a για τους οποίους $a > 0$ λέγονται

θετικοί, ενώ εκείνοι οι αριθμοί a για τους οποίους $a < 0$ λέγονται **αρνητικοί**. Ενώ λοιπόν η θετικότητα γίνεται να οριστεί με βάση την $<$, είναι δυνατόν να αντιστρέψουμε τη διαδικασία: μπορούμε να ορίσουμε την $a < b$ έτσι ώστε να σημαίνει ότι ο $b - a$ είναι θετικός. Και μάλιστα, είναι πιο βολικό να πάρουμε ως βασική έννοια το σύνολο όλων των θετικών αριθμών, που συμβολίζεται με P, και να διατυπώσουμε όλες τις άλλες ιδιότητες με τη βοήθεια του P:

(I10) (Νόμος της Τριχοτόμησης) Για κάθε αριθμό a ισχύει μία και μόνο μία από τις:
(i) $a = 0$
(ii) ο a ανήκει στο σύνολο P,
(iii) ο $-a$ ανήκει στο σύνολο P.

(I11) (Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a + b$ είναι στο P.

(I12) (Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a \cdot b$ είναι στο P.

Αυτές οι τρεις ιδιότητες πρέπει να συμπληρωθούν με τους εξής ορισμούς:

$$\begin{aligned} a > b \quad &\text{αν} \quad a - b \text{ ανήκει στο } P\cdot \\ a < b \quad &\text{αν} \quad b > a\cdot \\ a \geq b \quad &\text{αν} \quad a > b \text{ ή } a = b\cdot \\ a \leq b \quad &\text{αν} \quad a < b \text{ ή } a = b.* \end{aligned}$$

Σημειώστε, ειδικότερα, ότι $a > 0$ αν και μόνο αν ο a ανήκει στο P.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων, όσο στοιχειώδεις και αν φαίνονται, είναι συνέπειες των I10–I12. Για παράδειγμα, αν a και b είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a - b = 0$,
ii. ο $a - b$ ανήκει στο σύνολο P,
iii. ο $-(a - b) = b - a$ ανήκει στο σύνολο P.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που μόλις δώσαμε, παίρνουμε ότι ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a = b$,
ii. $a > b$,
iii. $b > a$.

Ένα κάπως πιο ενδιαφέρον στοιχείο προκύπτει από τις εξής πράξεις: αν $a < b$, οπότε ο $b - a$ είναι στο P, τότε σίγουρα ο $(b + c) - (a + c)$ είναι στο P, άρα αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$. Ομοίως, έστω ότι $a < b$ και $b < c$. Τότε

$$\begin{aligned} &\text{ο } b - a \text{ είναι στο } P, \\ \text{και} \quad &\text{ο } c - b \text{ είναι στο } P, \\ \text{άρα} \quad &\text{ο } c - a = (c - b) + (b - a) \text{ είναι στο } P. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$. (Οι δύο ανισότητες $a < b$ και $b < c$ γράφονται συνήθως πιο σύντομα στη μορφή $a < b < c$, που ουσιαστικά περιέχει και την τρίτη ανισότητα $a < c$.)

*Υπάρχει ένα κάπως σκοτεινό σημείο σε σχέση με τα σύμβολα $\geq$ και $\leq$. Οι προτάσεις

$$1 + 1 \leq 3$$
$$1 + 1 \leq 2$$

είναι και οι δύο αληθείς, αν και ξέρουμε ότι το $\leq$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί με $<$ στην πρώτη, και με $=$ στη δεύτερη. Τέτοιες καταστάσεις είναι αναπόφευκτες όταν το $\leq$ χρησιμοποιείται με συγκεκριμένους αριθμούς· η χρησιμότητα του συμβόλου αποκαλύπτεται από μια πρόταση σαν το Θεώρημα 1 —εδώ έχουμε ισότητα για κάποιες τιμές των a και b, και ανισότητα για κάποιες άλλες.

Ο επόμενος ισχυρισμός είναι λιγότερο προφανής. Αν $a < 0$ και $b < 0$, τότε $ab > 0$. Η μόνη δυσκολία που παρουσιάζει η απόδειξη είναι ότι απαιτεί μια ευχέρεια στη χρήση των ορισμών. Το σύμβολο $a < 0$ σημαίνει, εξ ορισμού, $0 > a$, το οποίο σημαίνει ότι ο $0 - a = -a$ ανήκει στο P. Ομοίως ο $-b$ είναι στο P, επομένως, από την I12, ο $(-a)(-b) = ab$ ανήκει στο P. Άρα $ab > 0$.

Το γεγονός ότι $ab > 0$ αν $a > 0$, $b > 0$ καθώς και αν $a < 0$, $b < 0$, έχει μια ξεχωριστή συνέπεια: $a^2 > 0$ αν $a \neq 0$. Έτσι, τα τετράγωνα μη μηδενικών αριθμών είναι πάντα θετικά, και ειδικότερα έχουμε αποδείξει ένα αποτέλεσμα που θα μπορούσε να είχε συμπεριληφθεί στον κατάλογο των ιδιοτήτων μας, ως αρκετά στοιχειώδες: $1 > 0$ (αφού $1 = 1^2$).

Το γεγονός ότι $-a > 0$ αν $a < 0$ είναι η βάση για μια έννοια που θα παίξει εξαιρετικά σπουδαίο ρόλο σε αυτό το βιβλίο. Για κάθε αριθμό a, ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** $|a|$ του a ως εξής:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το $|a|$ είναι πάντα θετικό, εκτός αν $a = 0$. Για παράδειγμα, έχουμε $|-3| = 3$, $|7| = 7$, $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ και $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$. Γενικά, η πιο άμεση προσέγγιση σε οποιοδήποτε πρόβλημα που έχει να κάνει με απόλυτες τιμές απαιτεί να διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις χωριστά, γιατί οι απόλυτες τιμές ορίζονται και αυτές με περιπτώσεις. Χρησιμοποιούμε αυτήν την προσέγγιση για να αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των απολύτων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Για τυχαίους αριθμούς a και b, έχουμε

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα εξετάσουμε 4 περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} &(1) \quad a \geq 0, \quad b \geq 0 \cdot \\ &(2) \quad a \geq 0, \quad b \leq 0 \cdot \\ &(3) \quad a \leq 0, \quad b \geq 0 \cdot \\ &(4) \quad a \leq 0, \quad b \leq 0. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (1) είναι και $a + b \geq 0$, και το θεώρημα είναι προφανές. Μάλιστα έχουμε

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|,$$

δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ισότητα.

Στην περίπτωση (4) έχουμε $a + b \leq 0$, και πάλι ισχύει ισότητα:

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|.$$

Στην περίπτωση (2), όπου $a \geq 0$ και $b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$|a + b| \leq a - b.$$

Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε αυτήν την περίπτωση σε δύο υποπεριπτώσεις. Αν $a + b \geq 0$, τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} a + b &\leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad b &\leq -b, \end{aligned}$$

που προφανώς ισχύει, αφού $b \leq 0$ και επομένως $-b \geq 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $a + b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} -a - b &\leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad -a &\leq a, \end{aligned}$$

η οποία προφανώς ισχύει, αφού $a \geq 0$ και επομένως $-a \leq 0$.

Σημειώστε, τέλος, ότι η απόδειξη της περίπτωσης (3) είναι άμεση, αν εναλλάξουμε τα a και b και εφαρμόσουμε την περίπτωση (2). ∎

Αν και η παραπάνω μέθοδος για να εργαζόμαστε με απόλυτες τιμές (να εξετάζουμε δηλαδή χωριστά διάφορες περιπτώσεις) είναι μερικές φορές η μόνη δυνατή, συχνά υπάρχουν απλούστερες μέθοδοι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Μπορούμε, συγκεκριμένα, να δώσουμε μια πολύ πιο σύντομη απόδειξη του Θεωρήματος 1· αυτή η απόδειξη πηγάζει από την παρατήρηση ότι

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

(Εδώ, και στο υπόλοιπο βιβλίο, όταν γράφουμε $\sqrt{x}$ εννοούμε τη *θετική* τετραγωνική ρίζα του x. Αυτό το σύμβολο έχει έννοια μόνο όταν $x \geq 0$.) Μπορούμε τώρα να δούμε ότι

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $|a+b| \leq |a| + |b|$ γιατί από την $x^2 < y^2$ έπεται η $x < y$, αρκεί τα x και y να είναι και τα δύο μη αρνητικά· η απόδειξη *αυτού* του γεγονότος αφήνεται στον αναγνώστη (Πρόβλημα 5).

Ας κάνουμε και μια τελευταία παρατήρηση για το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε: αν εξετάσουμε προσεκτικά οποιαδήποτε από τις δύο αποδείξεις, βλέπουμε ότι

$$|a+b| = |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν το ίδιο πρόσημο (δηλαδή είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί), ή αν ο ένας από τους δύο είναι 0, ενώ

$$|a+b| < |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν αντίθετα πρόσημα.

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα λεπτό σημείο που παραμελήσαμε ώς τώρα, και το οποίο πρέπει να περιλαμβάνεται σε μια σοβαρή παρουσίαση των ιδιοτήτων των αριθμών. Αφού διατυπώσαμε την ιδιότητα I9, αποδείξαμε ότι από την $a - b = b - a$ έπεται η $a = b$. Η απόδειξη άρχιζε με την επαλήθευση της

$$a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1),$$

από όπου συμπεράναμε ότι $a = b$. Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε από την ισότητα $a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1)$ διαιρώντας και τα δύο μέλη με $1+1$. Όντας ευσυνείδητοι, θα πρέπει να αποφεύγουμε τη διαίρεση με 0. Πρέπει επομένως να παραδεχθούμε ότι, η ισχύς του συλλογισμού μας εξαρτάται από το αν ισχύει η $1+1 \neq 0$. Το Πρόβλημα 25 έχει σχεδιαστεί για να σας πείσει ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδειχθεί από τις ιδιότητες I1–I9 μόνο! Αφού όμως έχουμε στη διάθεσή μας τις I10, I11, και I12, η απόδειξη είναι πολύ απλή: Έχουμε ήδη δει ότι $1 > 0$· έπεται ότι $1+1 > 0$, ειδικότερα ότι $1+1 \neq 0$.

Αυτή η τελευταία απόδειξη ίσως ενισχύει την άποψη ότι είναι παράλογο να προσπαθούμε να αποδείξουμε τόσο προφανή πράγματα· μια πιο προσεκτική όμως εκτίμηση της τωρινής μας κατάστασης θα δικαιολογήσει το γιατί ασχολούμαστε τόσο σοβαρά με τέτοιες λεπτομέρειες. Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε υποθέσει ότι οι αριθμοί είναι γνώριμα αντικείμενα, και ότι οι I1–I12 δεν είναι τίποτα παραπάνω από σαφώς διατυπωμένες προφανείς, πολύ γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Θα ήταν όμως δύσκολο να δικαιολογήσουμε αυτήν την υπόθεση. Αν και όλοι μαθαίνουμε πώς να «δουλεύουμε με» τους αριθμούς στο σχολείο, το τι *είναι* οι αριθμοί ακριβώς παραμένει μάλλον απροσδιόριστο. Ένα μεγάλο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται στο ξεκαθάρισμα της έννοιας του αριθμού,

και μέχρι το τέλος θα έχουμε εξοικειωθεί πολύ μαζί τους. Αλλά, εν τω μεταξύ, θα χρειαστεί να εργαστούμε με αριθμούς. Είναι λοιπόν λογικό να παραδεχθούμε με ειλικρίνεια ότι δεν καταλαβαίνουμε ακόμα πλήρως τους αριθμούς· μπορούμε, ωστόσο, να λέμε ότι, όπως και αν οριστούν τελικά οι αριθμοί, θα πρέπει σίγουρα να έχουν τις ιδιότητες I1–I12.

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου ήταν μια προσπάθεια να δοθούν πειστικά στοιχεία για το ότι οι I1–I12 είναι πράγματι βασικές ιδιότητες που θα πρέπει να τις υποθέσουμε για να πάρουμε τις άλλες γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Μερικά από τα προβλήματα (που περιγράφουν πώς παίρνουμε άλλες ιδιότητες των αριθμών από τις I1–I12) προσφέρονται ως πρόσθετη μαρτυρία. Ένα κρίσιμο ερώτημα που παραμένει είναι αν οι I1–I12 ισοδυναμούν τελικά με *όλες* τις ιδιότητες των αριθμών. Σύντομα θα δούμε ότι *δεν* είναι έτσι. Στο επόμενο κεφάλαιο οι αδυναμίες των ιδιοτήτων I1–I12 θα γίνουν τελείως φανερές, αλλά το κατάλληλο μέσο με το οποίο διορθώνονται αυτές οι αδυναμίες δεν ανακαλύπτεται και τόσο εύκολα. Η κρίσιμη πρόσθετη βασική ιδιότητα των αριθμών που ζητάμε είναι βαθιά και λεπτή, σε αντίθεση με τις I1–I12. Η ανακάλυψη αυτής της κρίσιμης ιδιότητας θα απαιτήσει όλη την εργασία που κάνουμε στο 2ο Μέρος αυτού του βιβλίου. Στο υπόλοιπο του 1ου Μέρους θα αρχίσουμε να βλέπουμε γιατί χρειάζεται κάποια πρόσθετη ιδιότητα. Για να μελετήσουμε κάτι τέτοιο, θα πρέπει να εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τι εννοούμε λέγοντας «αριθμοί».

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $ax = a$ για κάποιον αριθμό $a \neq 0$, τότε $x = 1$.

(ii) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(iii) Αν $x^2 = y^2$, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

(iv) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

(v) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

(vi) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (Υπάρχει ένας πολύ εύκολος τρόπος για να το κάνετε αυτό, χρησιμοποιώντας το (iv), και θα σας δείξει πώς να παραγοντοποιήσετε το $x^n + y^n$ όταν ο n είναι περιττός.)

2. Πού είναι το λάθος στην «απόδειξη» που ακολουθεί; Έστω $x = y$. Τότε

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, αν $b, c \neq 0$.

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, αν $b, d \neq 0$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, αν $a, b \neq 0$. (Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να θυμηθείτε την ιδιότητα που ορίζει τον $(ab)^{-1}$.)

(iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, αν $b, d \neq 0$.

(v) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, αν $b, c, d \neq 0$.

(vi) Αν $b, d \neq 0$, τότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ αν και μόνο αν $ad = bc$. Εξετάστε επίσης πότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$.

4. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $4 - x < 3 - 2x$.

(ii) $5 - x^2 < 8$.

(iii) $5 - x^2 < -2$.

(iv) $(x - 1)(x - 3) > 0$. (Πότε είναι θετικό το γινόμενο δύο αριθμών;)

(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.

(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.

(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.

(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.

(ix) $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$.

(x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$.

(xi) $2^x < 8$.

(xii) $x + 3^x < 4$.

(xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x} > 0$.

(xiv) $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 0$.

5. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $a < b$ και $c < d$, τότε $a + c < b + d$.

(ii) Αν $a < b$, τότε $-b < -a$.

(iii) Αν $a < b$ και $c > d$, τότε $a - c < b - d$.

(iv) Αν $a < b$ και $c > 0$, τότε $ac < bc$.

(v) Αν $a < b$ και $c < 0$, τότε $ac > bc$.

(vi) Αν $a > 1$, τότε $a^2 > a$.

(vii) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^2 < a$.

(viii) Αν $0 \leq a < b$ και $0 \leq c < d$, τότε $ac < bd$.

(ix) Αν $0 \leq a < b$, τότε $a^2 < b^2$. (Χρησιμοποιήστε την (viii).)

(x) Αν $a, b \geq 0$ και $a^2 < b^2$, τότε $a < b$. (Χρησιμοποιήστε την (ix), αντιστρόφως.)

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $0 \leq x < y$, τότε $x^n < y^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(β) Αποδείξτε ότι αν $x < y$ και ο n είναι περιττός, τότε $x^n < y^n$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι περιττός, τότε $x = y$.

(δ) Αποδείξετε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι άρτιος, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

7. Αποδείξτε ότι, αν $0 < a < b$, τότε

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < b.$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$ ισχύει για κάθε $a, b \geq 0$. Μια γενίκευση αυτού του γεγονότος εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-22.

∗**8.** Αν και οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων διατυπώθηκαν με βάση το σύνολο P όλων των θετικών αριθμών, και η $<$ ορίστηκε με τη βοήθεια του P, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία. Έστω ότι αντικαθιστούμε τις I10–I12 με τις

(I′10) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a και b, ισχύει μία, και μόνο μία, από τις:
i. $a = b$,
ii. $a < b$,
iii. $b < a$.

(I′11) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$.

(I′12) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$.

(I′13) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $0 < c$, τότε $ac < bc$.

Δείξτε ότι τότε οι I10–I12 αποδεικνύονται σαν θεωρήματα.

9. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα, με τουλάχιστον ένα ζεύγος απόλυτης τιμής λιγότερο.

(i) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$.

(ii) $|(|a + b| - |a| - |b|)|$.

(iii) $|(|a + b| + |c| - |a + b + c|)|$.

(iv) $|x^2 - 2xy + y^2|$.

(v) $|(|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|)|$.

10. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα χωρίς απόλυτες τιμές, διακρίνοντας περιπτώσεις όπου χρειάζεται.

(i) $|a + b| - |b|$.

(ii) $|(|x| - 1)|$.

(iii) $|x| - |x^2|$.

(iv) $a - |(a - |a|)|$.

11. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $|x - 3| = 8$.

(ii) $|x - 3| < 8$.

(iii) $|x + 4| < 2$.

(iv) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.

(v) $|x - 1| + |x + 1| < 2$.

(vi) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.

(vii) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.

(viii) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

12. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(ii) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, αν $x \neq 0$. (Ο καλύτερος τρόπος για να το κάνετε αυτό είναι να θυμηθείτε τι είναι το $|x|^{-1}$.)

(iii) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, αν $y \neq 0$.

(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (Δώστε μια πολύ σύντομη απόδειξη.)

(v) $|x| - |y| \leq |x - y|$. (Μπορείτε να κάνετε μια πολύ σύντομη απόδειξη, αν γράψετε τα πράγματα με τον σωστό τρόπο.)

(vi) $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. (Γιατί αυτό είναι άμεση συνέπεια του (v);)

(vii) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Υποδείξτε πότε ισχύει ισότητα, και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

13. Ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς x και y συμβολίζεται με $\max(x, y)$. Έτσι, $\max(-1, 3) = \max(3, 3) = 3$ και $\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1$. Ο μικρότερος από τους x και y συμβολίζεται με $\min(x, y)$. Αποδείξτε ότι

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Εξαγάγετε έναν τύπο για το $\max(x, y, z)$ και το $\min(x, y, z)$, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)).$$

14. (α) Αποδείξτε ότι $|a| = |-a|$. (Το θέμα είναι να μην μπερδευτείτε με πάρα πολλές περιπτώσεις. Πρώτα αποδείξτε τον ισχυρισμό για $a \geq 0$. Γιατί τότε είναι προφανής για $a \leq 0$;)

(β) Αποδείξτε ότι $-b \leq a \leq b$ αν και μόνο αν $|a| \leq b$. Ειδικότερα, έπεται ότι $-|a| \leq a \leq |a|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δώσετε μια νέα απόδειξη της $|a + b| \leq |a| + |b|$.

∗**15.** Αποδείξτε ότι αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε

$$x^2 + xy + y^2 > 0,$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.

∗**16.** (α) Δείξτε ότι

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0,$$
$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \text{ ή } x = -y.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0,$$

αποδείξτε ότι $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$ εκτός και αν ο x και ο y είναι και οι δύο 0.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να βρείτε πότε $(x + y)^4 = x^4 + y^4$.

(δ) Βρείτε πότε $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Υπόδειξη: Από την υπόθεση $(x + y)^5 = x^5 + y^5$ πρέπει να είστε σε θέση να αποδείξετε την ισότητα $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$, αν $xy \neq 0$. Από αυτό έπεται ότι $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$.

Θα πρέπει τώρα να μπορείτε να κάνετε μια καλή πρόβλεψη για το πότε $(x + y)^n = x^n + y^n$· η απόδειξη περιέχεται στο Πρόβλημα 11-63.

17. (α) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $2x^2 - 3x + 4$. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο», δηλαδή γράψτε $2x^2 - 3x + 4 = 2(x - 3/4)^2 +$;

(β) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$.

(γ) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$.

18. (α) Έστω ότι $b^2 - 4c \geq 0$. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ικανοποιούν και οι δύο την εξίσωση $x^2 + bx + c = 0$.

(β) Έστω ότι $b^2 - 4c < 0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν αριθμοί x που να ικανοποιούν την $x^2 + bx + c = 0$· και μάλιστα ισχύει $x^2 + bx + c > 0$ για κάθε x. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο».

(γ) Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του ότι, αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε $x^2 + xy + y^2 > 0$.

(δ) Για ποιους αριθμούς a είναι αλήθεια ότι $x^2 + axy + y^2 > 0$ όταν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0;

(ε) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + bx + c$ και του $ax^2 + bx + c$, για $a > 0$.

19. Το γεγονός ότι $a^2 \geq 0$ για κάθε αριθμό a, αν και μοιάζει στοιχειώδες, είναι ωστόσο η θεμελιώδης ιδέα που βρίσκεται τελικά πίσω από τις πιο σημαντικές ανισότητες. Ο πρόγονος όλων των ανισοτήτων είναι η *ανισότητα του Schwarz*:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\,\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}.$$

(Μια πιο γενική μορφή εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-21.) Οι τρεις αποδείξεις της ανισότητας Schwarz που σκιαγραφούνται παρακάτω έχουν ένα μόνο κοινό σημείο —το ότι βασίζονται στο γεγονός πως $a^2 \geq 0$ για κάθε a.

(α) Αποδείξτε ότι, αν $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$ για κάποιον αριθμό $\lambda \geq 0$, τότε ισχύει ισότητα στην ανισότητα του Schwarz. Αποδείξτε το ίδιο πράγμα αν $y_1 = y_2 = 0$. Έστω τώρα ότι ο y_1 και ο y_2 δεν είναι και οι δύο 0, και ότι δεν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2({y_1}^2 + {y_2}^2) - 2\lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) + ({x_1}^2 + {x_2}^2). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 18, ολοκληρώστε την απόδειξη της ανισότητας του Schwarz.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz χρησιμοποιώντας την $2xy \leq x^2 + y^2$ (πώς βγαίνει αυτή;) με

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}}, \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}},$$

πρώτα για $i = 1$ και μετά για $i = 2$.

(γ) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz αποδεικνύοντας πρώτα ότι

$$({x_1}^2 + {x_2}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

(δ) Συμπεράνετε, από καθεμιά από αυτές τις τρεις αποδείξεις, ότι η ισότητα ισχύει μόνο όταν $y_1 = y_2 = 0$ ή όταν υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \geq 0$ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$.

Αργότερα, θα μας φανούν πολύ χρήσιμα τρία πράγματα που έχουν σχέση με τις ανισότητες. Αν και θα δώσουμε τις αποδείξεις μέσα στο κείμενο όταν έρθει η ώρα, η προσωπική τριβή με αυτά τα προβλήματα είναι απείρως πιο διαφωτιστική από την ανάγνωση μιας τέλεια επεξεργασμένης απόδειξης. Στη διατύπωση αυτών των προτάσεων αναμιγνύονται κάποιοι αλλόκοτοι αριθμοί, το βασικό τους όμως μήνυμα είναι πολύ απλό: αν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, και το y είναι αρκετά κοντά στο y_0, τότε το $x + y$ θα είναι κοντά στο $x_0 + y_0$, το xy κοντά στο $x_0 y_0$, και το $1/y$ κοντά στο $1/y_0$. Το σύμβολο «ε» που εμφανίζεται σε αυτές τις προτάσεις θα μπορούσε θαυμάσια να αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Όμως, η παράδοση έχει καταστήσει τη χρήση του ε σχεδόν ιερή (ακόμη και στην ξένη βιβλιογραφία) στις περιπτώσεις που εφαρμόζονται αυτά τα θεωρήματα.

20. Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

τότε

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon,$$
$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \varepsilon.$$

∗**21.** Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

τότε $|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$.

(Το σύμβολο «min» ορίστηκε στο Πρόβλημα 13, αλλά ο τύπος που δίνεται σε εκείνο το πρόβλημα δεν μας βοηθά στην προκειμένη περίπτωση. Η πρώτη ανισότητα στην υπόθεση σημαίνει απλούστατα ότι

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \quad \text{και} \quad |x - x_0| < 1.$$

Σε ένα σημείο της απόδειξης θα χρειαστείτε την πρώτη ανισότητα, και σε ένα άλλο σημείο θα χρειαστείτε τη δεύτερη. Μια τελευταία συμβουλή: αφού οι υποθέσεις δίνουν πληροφορίες μόνο για το $x - x_0$ και το $y - y_0$, είναι προφανές ότι για την απόδειξη θα χρειαστεί να γράψετε το $xy - x_0 y_0$ με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανιστούν τα $x - x_0$ και $y - y_0$.)

∗**22.** Αποδείξτε ότι, αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right),$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

∗**23.** Αντικαταστήστε τα ερωτηματικά στην πρόταση που ακολουθεί με εκφράσεις που περιέχουν τα ε, x_0 και y_0 έτσι ώστε το συμπέρασμα να ισχύει:

Αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < ; \quad \text{και} \quad |x - x_0| < ;$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Αυτό το πρόβλημα είναι τετριμμένο, με την έννοια ότι η λύση του έπεται από τα Προβλήματα 21 και 22 σχεδόν χωρίς κόπο (παρατηρήστε ότι $x/y = x \cdot 1/y$). Το κρίσιμο σημείο είναι να μην τα χάσετε· αποφασίστε ποιο από τα δύο προβλήματα πρέπει να χρησιμοποιήσετε πρώτο και μην πανικοβληθείτε αν η απάντησή σας δεν μοιάζει και πολύ πιθανή.

∗**24.** Αυτό το πρόβλημα δείχνει ότι το να τοποθετούμε παρενθέσεις σε ένα άθροισμα δεν έχει επιπτώσεις. Οι αποδείξεις χρησιμοποιούν «μαθηματική επαγωγή»· αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τέτοιες αποδείξεις αλλά θέλετε να ασχοληθείτε με αυτό το πρόβλημα, αναβάλλετέ το για μετά το Κεφάλαιο 2, όπου θα εξηγηθούν οι αποδείξεις με επαγωγή.

Ας συμφωνήσουμε, για να είμαστε σαφείς, ότι με $a_1 + \cdots + a_n$ θα συμβολίζουμε το

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))) \cdots).$$

Έτσι, με $a_1 + a_2 + a_3$ συμβολίζουμε το $a_1 + (a_2 + a_3)$, με $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ το $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$, κτλ.

(α) Αποδείξτε ότι

$$(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}.$$

Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο k.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $n \geq k$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να δώσετε μια απόδειξη με επαγωγή στο k.

(γ) Έστω $s(a_1, \ldots, a_k)$ κάποιο άθροισμα που σχηματίζεται από τα $a_1, \ldots, a_k$. Δείξτε ότι

$$s(a_1, \ldots, a_k) = a_1 + \cdots + a_k.$$

Υπόδειξη: Πρέπει να υπάρχουν δύο αθροίσματα

$$s'(a_1, \ldots, a_l) \quad \text{και} \quad s''(a_{l+1}, \ldots, a_k)$$

τέτοια ώστε

$$s(a_1, \ldots, a_k) = s'(a_1, \ldots, a_l) + s''(a_{l+1}, \ldots, a_k).$$

25. Ας υποθέσουμε ότι με τη λέξη «αριθμός» εννοούμε το 0 ή το 1, και ότι ορίζουμε δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ με τους εξής δύο πίνακες

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ελέγξτε ότι οι ιδιότητες I1–I9 ισχύουν όλες, αν και $1 + 1 = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΔΩΝ

Στο Κεφάλαιο 1 χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «αριθμός» πολύ χαλαρά, αν και ασχοληθήκαμε με τις βασικές ιδιότητες των αριθμών. Θα χρειαστεί τώρα να διακρίνουμε προσεκτικά διάφορα είδη αριθμών.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι «αριθμοί μέτρησης»

$$1, 2, 3, \ldots.$$

Η θεμελιώδης σημασία αυτού του συνόλου αριθμών τονίζεται από το σύμβολό του $\mathbf{N}$ (που προέρχεται από το natural numbers = **φυσικοί αριθμοί**. Μια σύντομη ματιά στις I1–I12 δείχνει ότι οι βασικές για μας ιδιότητες των «αριθμών» δεν ισχύουν στο $\mathbf{N}$ —για παράδειγμα, οι I2 και I3 δεν έχουν έννοια στο $\mathbf{N}$. Από αυτήν την άποψη, το σύστημα $\mathbf{N}$ έχει πολλές αδυναμίες. Είναι όμως και αρκετά σημαντικό ώστε να του αξίζουν κάποια σχόλια, πριν μελετήσουμε μεγαλύτερα σύνολα αριθμών.

Η πιο βασική ιδιότητα του $\mathbf{N}$ είναι η αρχή της «μαθηματικής επαγωγής». Υποθέτουμε ότι $P(x)$ σημαίνει ότι η ιδιότητα P ισχύει για τον αριθμό x. Τότε η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι ο ισχυρισμός ότι η $P(x)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό x, αν

(1) Η $P(1)$ ισχύει.

(2) Όποτε ισχύει η $P(k)$, ισχύει και η $P(k+1)$.

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (2) ισχυρίζεται την ισχύ της $P(k+1)$ με την υπόθεση ότι ισχύει η $P(k)$· αν ισχύει και η συνθήκη (1) αυτό αρκεί για να εξασφαλίσει την ισχύ της $P(x)$ για κάθε x. Πραγματικά, αν η $P(1)$ ισχύει, έπεται ότι και η $P(2)$ ισχύει (χρησιμοποιούμε την (2) στην ειδική περίπτωση $k = 1$). Τώρα, αφού η $P(2)$ ισχύει, έπεται ότι και η $P(3)$ ισχύει (χρησιμοποιούμε την (2) στην ειδική περίπτωση $k = 2$). Είναι φανερό ότι, με κατάλληλο πλήθος βημάτων αυτού του είδους, μπορούμε να φτάσουμε οποιονδήποτε αριθμό, άρα η $P(k)$ ισχύει για όλους τους αριθμούς k.

Μπορεί να δώσει κανείς μια ωραία εικόνα της λογικής που βρίσκεται πίσω από τη μαθηματική επαγωγή, με μια άπειρη γραμμή από ανθρώπους

$$\text{άνθρωπος No. 1, άνθρωπος No. 2, άνθρωπος No. 3, } \ldots.$$

Αν σε κάθε άνθρωπο έχει δοθεί η οδηγία να λέει κάθε μυστικό που ακούει στον μπροστινό του (αυτόν με τον αμέσως μεγαλύτερο αριθμό) και πούμε ένα μυστικό στον άνθρωπο No. 1, είναι σαφές ότι τελικά όλοι οι άνθρωποι θα μάθουν το μυστικό. Αν $P(x)$ είναι ο ισχυρισμός ότι ο άνθρωπος No. x θα μάθει το μυστικό, τότε οι οδηγίες που δώσαμε (ο καθένας να λέει τα μυστικά που μαθαίνει στον επόμενο) μας εξασφαλίζουν ότι η συνθήκη (2) ισχύει, και το ότι είπαμε το μυστικό στον άνθρωπο No. 1 κάνει και την (1) αληθή. Το επόμενο παράδειγμα είναι μια ουσιαστικότερη εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής. Υπάρχει ένας χρήσιμος και εντυπωσιακός τύπος που εκφράζει το άθροισμα των πρώτων n αριθμών με έναν απλό τρόπο:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Για να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο, παρατηρούμε πρώτα ότι προφανώς ισχύει για $n = 1$. *Υποθέτουμε* τώρα ότι για κάποιον ακέραιο k έχουμε

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

άρα ο τύπος ισχύει και για $k+1$. Με βάση την αρχή της επαγωγής, αποδεικνύει ότι ο τύπος ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n. Το συγκεκριμένο παράδειγμα παρουσιάζει ένα φαινόμενο που συμβαίνει συχνά, ιδιαίτερα σε σχέση με τύπους σαν και αυτόν που ήδη αποδείξαμε. Αν και η απόδειξη με επαγωγή είναι συχνά πολύ απλή και άμεση, η μέθοδος με την οποία ανακαλύφθηκε ο τύπος παραμένει μυστήριο. Τα Προβλήματα 5 και 6 δείχνουν με ποιον τρόπο βρίσκονται μερικοί τύποι αυτού του είδους.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί με έναν ισοδύναμο τρόπο χωρίς να μιλάμε για «ιδιότητες» ενός αριθμού, έναν όρο που είναι αρκετά αόριστος για να σταθεί σε μια μαθηματική συζήτηση. Μια πιο ακριβής διατύπωση μας λέει ότι αν A είναι ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς και

(1) ο 1 ανήκει στο A,

(2) ο $k+1$ ανήκει στο A, όποτε ο k ανήκει στο A,

τότε A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Πρέπει να έγινε φανερό ότι αυτή η διατύπωση αντικαθιστά τη λιγότερο τυπική που δώσαμε πιο πριν, και είναι ισοδύναμη με αυτήν —απλώς θεωρούμε το σύνολο A των φυσικών αριθμών x που ικανοποιούν την $P(x)$. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι A είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών n για τους οποίους ισχύει ότι

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Η απόδειξη που δώσαμε πιο πάνω για αυτόν τον τύπο έδειξε ότι το A περιέχει τον 1, και ότι και ο $k+1$ είναι στο A, αν ο k είναι στο A. Έπεται ότι A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, δηλαδή, ότι ο τύπος ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

Υπάρχει όμως και άλλη μια αυστηρή μορφή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, που μοιάζει πολύ διαφορετική. Αν A είναι ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς, βρισκόμαστε σε πειρασμό να πούμε ότι το A πρέπει να έχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Στην πραγματικότητα, αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να μην είναι σωστός μόνο σε μια περίπτωση, μάλλον ειδική όμως. Ένα εξαιρετικά σημαντικό σύνολο φυσικών αριθμών είναι το σύνολο A που δεν περιέχει κανέναν φυσικό αριθμό, η «κενή συλλογή» ή το «κενό σύνολο»* που συμβολίζεται με $\emptyset$. Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο —αφού δεν έχει κανένα στοιχείο. Αυτή όμως είναι και η μόνη δυνατή εξαίρεση· αν A είναι ένα μη κενό σύνολο φυσικών αριθμών, τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτή η «διαισθητικά προφανής» πρόταση, γνωστή ως «αρχή της καλής διάταξης» αποδεικνύεται από την αρχή της επαγωγής ως εξής: Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω B το σύνολο των φυσικών αριθμών n με την ιδιότητα οι $1, \ldots, n$ όλοι να *μην* βρίσκονται στο A. Προφανώς, ο 1 ανήκει στο B (γιατί αν ο 1 ήταν στο A, τότε το A θα είχε τον αριθμό 1 ως ελάχιστο στοιχείο). Ακόμα, αν οι $1, \ldots, k$ δεν ανήκουν στο A, σίγουρα και ο $k+1$ δεν ανήκει στο A (αλλιώς ο $k+1$ θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του A), άρα οι $1, \ldots, k+1$ όλοι δεν ανήκουν στο A. Αυτό αποδεικνύει ότι αν ο k ανήκει στο B, τότε και ο $k+1$ ανήκει στο B. Έπεται ότι κάθε αριθμός n ανήκει στο B,

*Αν και δεν θα σας κάνει εντύπωση ως σύνολο, με τη συνηθισμένη έννοια της λέξης, το κενό σύνολο εμφανίζεται πολύ φυσικά σε πολλές περιπτώσεις. Συχνά θεωρούμε το σύνολο A, που αποτελείται από όλα τα x που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα P· συχνά, τίποτε δεν μας εγγυάται ότι η P ικανοποιείται από *κάποιον* αριθμό, άρα το A μπορεί να είναι το $\emptyset$ —και μάλιστα συχνά αποδεικνύουμε ότι η P δεν ισχύει ποτέ, αποδεικνύοντας ότι $A = \emptyset$.

δηλαδή, οι αριθμοί $1, \ldots, n$ *δεν* ανήκουν στο A για κάθε φυσικό αριθμό n. Άρα $A = \emptyset$, που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Μπορούμε ακόμα να αποδείξουμε την αρχή της επαγωγής από την αρχή της καλής διάταξης (Πρόβλημα 10). Οποιαδήποτε από τις δύο αρχές μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως μια βασική υπόθεση για τους φυσικούς αριθμούς.

Υπάρχει και άλλη μια μορφή επαγωγής που θα έπρεπε να αναφερθεί. Μερικές φορές προσπαθώντας να αποδείξουμε την $P(k+1)$ δεν αρκεί να υποθέσουμε μόνο την $P(k)$, αλλά και την $P(l)$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς $l \leq k$. Σε αυτήν την περίπτωση μιλάμε για την «αρχή της πλήρους επαγωγής». Συγκεκριμένα, αν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών και

(1) ο 1 ανήκει στο A,

(2) ο $k+1$ ανήκει στο A, αν οι $1, \ldots, k$ ανήκουν στο A,

τότε το A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Αν και η αρχή της πλήρους επαγωγής μοιάζει πολύ πιο ισχυρή από τη συνηθισμένη αρχή της επαγωγής, δεν είναι παρά συνέπειά της. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος αφήνεται στον αναγνώστη, με μια υπόδειξη (Πρόβλημα 11). Εφαρμογές δίνονται στα Προβλήματα 7, 17, 20 και 22.

Στενά συνδεδεμένοι με τις αποδείξεις με επαγωγή είναι οι «αναδρομικοί ορισμοί». Για παράδειγμα, ο αριθμός $n!$ (διαβάζεται «n παραγοντικό») ορίζεται ως το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Αυτό το εκφράζουμε αυστηρότερα ως εξής:

(1) $1! = 1$

(2) $n! = n \cdot (n-1)!$.

Αυτή η μορφή του ορισμού εμφανίζει τη σχέση ανάμεσα στο $n!$ και στο $(n-1)!$ με έναν σαφή τρόπο, ιδανικό για αποδείξεις με επαγωγή. Το Πρόβλημα 23 ανακεφαλαιώνει έναν ορισμό που σας είναι ήδη γνωστός, αλλά που μπορεί να δοθεί πιο σύντομα ως αναδρομικός ορισμός· όπως δείχνει αυτό το πρόβλημα, ο αναδρομικός ορισμός είναι στην πραγματικότητα απαραίτητος για μια αυστηρή απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων του ορισμού.

Ένας ορισμός που ίσως δεν είναι γνωστός εισάγει και έναν εύχρηστο συμβολισμό που θα τον χρησιμοποιούμε συνεχώς. Αντί να γράφουμε

$$a_1 + \cdots + a_n,$$

χρησιμοποιούμε συνήθως το γράμμα Σ και γράφουμε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Με άλλα λόγια, με $\sum_{i=1}^{n} a_i$ συμβολίζουμε το άθροισμα των αριθμών που παίρνουμε θέτοντας $i = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Σημειώνουμε ότι το γράμμα i δεν έχει στην ουσία τίποτα να κάνει με τον αριθμό $\sum_{i=1}^{n} i$, και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε κατάλληλο σύμβολο (εκτός από το n φυσικά!):

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{j} n = \frac{j(j+1)}{2}.$$

Για να ορίσουμε το $\sum_{i=1}^{n} a_i$ αυστηρά, χρειαζόμαστε έναν αναδρομικό ορισμό:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n.$$

Αλλά μόνο οι θαυμαστές της μαθηματικής αυστηρότητας θα επέμεναν τόσο πολύ σε τόση ακρίβεια. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται διάφορες παραλλαγές αυτού του συμβολισμού και κανένας δεν αισθάνεται την ανάγκη να δώσει κάποιες εξηγήσεις. Το σύμβολο

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^{n} a_i,$$

για παράδειγμα, είναι ένας προφανής τρόπος γραφής του

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + \cdots + a_n,$$

ή ακριβέστερα του

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=5}^{n} a_i.$$

Οι αδυναμίες των φυσικών αριθμών που ανακαλύψαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θεραπεύονται εν μέρει αν επεκτείνουμε αυτό το σύστημα στο σύνολο των **ακεραίων**

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.$$

Αυτό το σύνολο συμβολίζεται με $\mathbf{Z}$ (από τη Γερμανική λέξη «Zahl», αριθμός). Από τις ιδιότητες I1–I12, μόνο η I7 δεν ισχύει στο $\mathbf{Z}$.

Παίρνουμε ένα ακόμα μεγαλύτερο σύστημα αριθμών, αν θεωρήσουμε τα πηλίκα m/n ακεραίων (με $n \neq 0$). Αυτοί οι αριθμοί λέγονται **ρητοί αριθμοί**, και το σύνολο όλων των ρητών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbf{Q}$ (από το «quotients» = πηλίκα). Σε αυτό το σύστημα αριθμών όλες οι I1–I12 ισχύουν. Μπαίνουμε στον πειρασμό να συμπεράνουμε ότι οι «ιδιότητες των αριθμών», που μελετήσαμε με αρκετές λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 1, αναφέρονται ακριβώς σε αυτό το σύνολο, το $\mathbf{Q}$. Υπάρχει όμως ένα ακόμα μεγαλύτερο σύνολο αριθμών στο οποίο εφαρμόζονται οι ιδιότητες I1–I12 —το σύνολο όλων των **πραγματικών αριθμών**, που συμβολίζεται με $\mathbf{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί περιέχουν εκτός από τους ρητούς αριθμούς και άλλους αριθμούς (τους **άρρητους αριθμούς**) που παριστάνονται με άπειρα δεκαδικά ψηφία· ο π και ο $\sqrt{2}$ είναι και οι δύο παραδείγματα άρρητων αριθμών. Η απόδειξη ότι ο π είναι άρρητος δεν είναι εύκολη —θα αφιερώσουμε ολόκληρο το Κεφάλαιο 16 του 3ου Μέρους σε μια απόδειξη αυτού του γεγονότος. Το ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, βέβαια, είναι πολύ απλό, και ήταν γνωστό στους αρχαίους Έλληνες. (Αφού το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύει ότι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο,

με πλευρές μήκους 1, έχει υποτείνουσα μήκους $\sqrt{2}$, δεν είναι έκπληξη το ότι οι αρχαίοι είχαν εξετάσει αυτό το πρόβλημα.) Η απόδειξη βασίζεται σε μερικές παρατηρήσεις για τους φυσικούς αριθμούς. Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται είτε στη μορφή $2k$ για κάποιον ακέραιο k, ή αλλιώς στη μορφή $2k+1$ για κάποιον ακέραιο k (αυτό το «προφανές» αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή (Πρόβλημα 8)). Οι φυσικοί αριθμοί της μορφής $2k$ λέγονται **άρτιοι**· αυτοί της μορφής $2k+1$ λέγονται **περιττοί**. Παρατηρούμε ότι άρτιοι αριθμοί έχουν άρτια τετράγωνα, και περιττοί αριθμοί έχουν περιττά τετράγωνα:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2),$$
$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$$

Έπεται ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν ο n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος· αν ο n^2 είναι περιττός, τότε ο n είναι περιττός. Η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος είναι τώρα πολύ απλή. Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός· δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p και q τέτοιοι ώστε

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη (γιατί θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε με όλους τους κοινούς διαιρέτες πριν αρχίσουμε). Τώρα έχουμε

$$p^2 = 2q^2.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο p^2 είναι άρτιος, επομένως ο p πρέπει να είναι άρτιος· δηλαδή, $p = 2k$ για κάποιον φυσικό αριθμό k. Τότε

$$p^2 = 4k^2 = 2q^2,$$

άρα

$$2k^2 = q^2.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο q^2 είναι άρτιος, άρα και ο q είναι άρτιος. Επομένως οι p και q είναι και οι δύο άρτιοι, πράγμα που αντιφάσκει με το ότι οι p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη.

Έχει σημασία να καταλάβουμε ακριβώς τι μας δείχνει αυτή η απόδειξη. Αποδείξαμε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός x τέτοιος ώστε $x^2 = 2$. Αυτός ο ισχυρισμός εκφράζεται πιο σύντομα με το να πούμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Παρατηρήστε όμως ότι η χρήση του συμβόλου $\sqrt{2}$ προϋποθέτει την ύπαρξη *κάποιου* αριθμού (οπωσδήποτε άρρητου) του οποίου το τετράγωνο είναι 2. Δεν έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει τέτοιος αριθμός και μπορούμε να σας διαβεβαιώσουμε ότι, προς το παρόν, μια τέτοια απόδειξη μας είναι *αδύνατη*. Κάθε απόδειξη σε αυτό το στάδιο θα πρέπει να βασίζεται στις I1–I12 (τις μόνες ιδιότητες του $\mathbf{R}$ που έχουμε αναφέρει)· αφού οι I1–I12 ισχύουν και για το $\mathbf{Q}$, ο ίδιος ακριβώς ισχυρισμός θα έδειχνε ότι υπάρχει ένας ρητός αριθμός με τετράγωνο 2, και αυτό όπως ξέρουμε δεν ισχύει. (Σημειώνουμε ότι ο αντίστροφος συλλογισμός δεν λειτουργεί —η απόδειξή μας ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός με τετράγωνο 2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός με τετράγωνο 2, γιατί η απόδειξη χρησιμοποίησε εκτός από τις I1–I12 και μια ακόμα ιδιότητα χαρακτηριστική του $\mathbf{Q}$, ότι κάθε αριθμός στο $\mathbf{Q}$ γράφεται p/q για ακεραίους p και q.)

Αυτή η συγκεκριμένη αδυναμία στον κατάλογό μας των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών θα μπορούσε βέβαια να διορθωθεί αν προσθέταμε μια καινούργια ιδιότητα που να ισχυρίζεται την ύπαρξη τετραγωνικών ριζών για τους θετικούς αριθμούς. Το να καταφύγουμε όμως σε ένα τέτοιο μέτρο δεν είναι ούτε αισθητικά ευχάριστο ούτε μαθηματικά ικανοποιητικό· θα συνεχίζαμε να μην ξέραμε ότι κάθε αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα, αν ο n είναι περιττός, και ότι κάθε θετικός αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα αν ο n είναι άρτιος. Ακόμα και αν υποθέταμε κάτι τέτοιο, δεν θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός αριθμού x που να ικανοποιεί την $x^5 + x + 1 = 0$ (ενώ πράγματι υπάρχει), γιατί δεν ξέρουμε πώς να γράψουμε τη λύση της εξίσωσης συναρτήσει των n-οστών ριζών

(και μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η λύση δεν μπορεί να γραφεί σε αυτήν τη μορφή). Και βέβαια, δεν θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι όλες οι εξισώσεις έχουν λύση, γιατί αυτό δεν ισχύει (για παράδειγμα, δεν υπάρχει αριθμός x που να ικανοποιεί την $x^2 + 1 = 0$). Στην πραγματικότητα, αυτή η κατεύθυνση δεν είναι και πολύ αποδοτική. Οι πιο χρήσιμες υποδείξεις για την ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbf{R}$ από το $\mathbf{Q}$, η πιο πιεστική ένδειξη για να διευκρινιστεί αυτή η ιδιότητα, δεν έρχονται από τη μελέτη των αριθμών και μόνο. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών βαθύτερα, πρέπει να μελετήσουμε κάτι παραπάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αρχίσουμε με τα θεμέλια του ΑπειροστικούΛογισμού, συγκεκριμένα με τη βασική έννοια στην οποία στηρίζεται ο Απειροστικός Λογισμός – τις συναρτήσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε με επαγωγή τους εξής τύπους.

(i) $1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(ii) $1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2$.

2. Βρείτε έναν τύπο για το

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$.

Υπόδειξη: Ποια σχέση έχουν αυτές οι παραστάσεις με το $1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$ και με το $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2$;

3. Αν $0 \le k \le n$, ο «διωνυμικός συντελεστής» $\binom{n}{k}$ ορίζεται από την

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{αν } k \neq 0, n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ (μια ειδική περίπτωση του πρώτου τύπου αν ορίσουμε } 0! = 1),$$

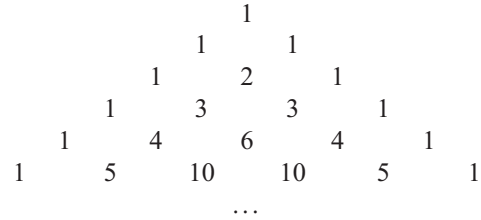
και για $k < 0$ ή $k > n$ ορίζουμε τον διωνυμικό συντελεστή να είναι 0.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(Η απόδειξη δεν απαιτεί επιχείρημα επαγωγής.)

Αυτή η σχέση οδηγεί στο ακόλουθο σχήμα, γνωστό ως «τρίγωνο του Pascal» —ένας αριθμός που δεν βρίσκεται πάνω σε μια από τις πλευρές είναι το άθροισμα των δύο αριθμών από πάνω του· ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ είναι ο $(k+1)$-οστός αριθμός στην $(n+1)$-οστή σειρά.



(β) Παρατηρήστε ότι όλοι οι αριθμοί στο τρίγωνο του Pascal είναι φυσικοί αριθμοί. Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να αποδείξετε με επαγωγή ότι ο $\binom{n}{k}$ είναι πάντα φυσικός αριθμός. (Ολόκληρη η απόδειξή σας θα πρέπει, κατά κάποιον τρόπο, να συνοψίζεται σε μια ματιά στο τρίγωνο του Pascal.)

(γ) Δώστε μια άλλη απόδειξη του ότι ο $\binom{n}{k}$ είναι φυσικός αριθμός, δείχνοντας ότι $\binom{n}{k}$ είναι το πλήθος των συνόλων από k ακριβώς ακεραίους, που κάθε φορά τους διαλέγουμε από τους $1, \ldots, n$.

(δ) Αποδείξτε το «διωνυμικό θεώρημα»: Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί και n είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.\end{aligned}$$

(ε) Αποδείξτε ότι

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$

(iii) $\displaystyle\sum_{l\ \text{περιττός}}\binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$

(iv) $\displaystyle\sum_{l\ \text{άρτιος}}\binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}.$

4. (α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το διωνυμικό θεώρημα στο $(1+x)^n(1+x)^m$.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

5. (α) Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

αν $r \neq 1$ (αν $r = 1$, ο υπολογισμός του αθροίσματος προφανώς δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα).

(β) Αποδείξτε αυτό το αποτέλεσμα θέτοντας $S = 1 + r + \cdots + r^n$, πολλαπλασιάζοντας αυτήν την εξίσωση με r, και λύνοντας τις δύο εξισώσεις ως προς S.

6. Ο τύπος για το $1^2 + \cdots + n^2$ λαμβάνεται και με τον εξής τρόπο. Ξεκινάμε από τον τύπο

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Αν γράψουμε αυτόν τον τύπο για $k = 1, \ldots, n$ και προσθέσουμε, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\
\hline
(n+1)^3 - 1 \quad &= 3[1^2 + \cdots + n^2] + 3[1 + \cdots + n] + n.
\end{aligned}$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε το $\sum_{k=1}^{n} k^2$ αν μας είναι ήδη γνωστό το $\sum_{k=1}^{n} k$ (το οποίο θα μπορούσαμε να το έχουμε βρει με παρόμοιο τρόπο). Χρησιμοποιήστε αυτήν τη μέθοδο για να βρείτε τα

(i) $1^3 + \cdots + n^3$.

(ii) $1^4 + \cdots + n^4$.

(iii) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(iv) $\dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

∗**7.** Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Προβλήματος 6 για να δείξετε ότι το $\sum_{i=1}^{n} k^p$ γράφεται πάντα στη μορφή

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \cdots.$$

(Οι δέκα πρώτες τέτοιες εκφράσεις είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2 \\
\sum_{k=1}^{n} k^6 &= \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n \\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \tfrac{1}{9}n^9 \quad + \tfrac{1}{2}n^8 \ + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 \ + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 \ + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 \ + \tfrac{5}{66}n.$$

Παρατηρήστε ότι οι συντελεστές στη δεύτερη στήλη είναι πάντοτε $\frac{1}{2}$, και ότι μετά την τρίτη στήλη οι δυνάμεις του n με μη μηδενικούς συντελεστές ελαττώνονται κατά 2 μέχρι να φτάσουμε το n^2 ή το n. Οι συντελεστές σε όλες, εκτός από τις δύο πρώτες στήλες μοιάζουν μάλλον τυχαίοι, υπάρχει όμως στην πραγματικότητα κάποιο είδος τύπου· το να τον βρείτε θα μπορούσε να θεωρηθεί ένδειξη πολύ ισχυρής διαίσθησης. Βλ. το Πρόβλημα 27-17 για τη συνέχεια και το τέλος της ιστορίας.)

8. Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι ή άρτιος ή περιττός.

9. Αποδείξτε ότι, αν ένα σύνολο A φυσικών αριθμών περιέχει το n_0 και περιέχει το $k+1$ όποτε περιέχει το k, τότε το A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι $\geq n_0$.

10. Αποδείξτε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής από την αρχή της καλής διάταξης.

11. Αποδείξτε την αρχή της πλήρους επαγωγής από τη συνήθη αρχή της επαγωγής. Υπόδειξη: Αν το A περιέχει το 1 και το A περιέχει το $n+1$ όποτε περιέχει τα $1, \ldots, n$, θεωρήστε το σύνολο B όλων των k για τα οποία οι $1, \ldots, k$ βρίσκονται όλοι στο A.

12. (α) Αν ο a είναι ρητός και ο b άρρητος, είναι ο $a+b$ αναγκαστικά άρρητος; Τί γίνεται αν και ο a και ο b είναι άρρητοι;

(β) Αν ο a είναι ρητός και ο b είναι άρρητος, είναι ο ab αναγκαστικά άρρητος; (Προσοχή!)

(γ) Υπάρχει αριθμός a τέτοιος ώστε ο a^2 να είναι άρρητος, αλλά ο a^4 να είναι ρητός;

(δ) Υπάρχουν δύο άρρητοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα και το γινόμενο να είναι και οι δύο ρητοί;

13. (α) Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}$ είναι άρρητοι. Υπόδειξη: για να εργαστείτε με τον $\sqrt{3}$, για παράδειγμα, χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής $3n$ ή $3n+1$ ή $3n+2$. Γιατί δεν λειτουργεί αυτή η απόδειξη και για τον $\sqrt{4}$;

(β) Αποδείξτε ότι οι $\sqrt[3]{2}$ και $\sqrt[3]{3}$ είναι άρρητοι.

14. Αποδείξτε ότι

(α) ο $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

15. (α) Αποδείξτε ότι, αν $x = p + \sqrt{q}$ όπου ο p και ο q είναι ρητοί, και m είναι φυσικός αριθμός, τότε $x^m = a + b\sqrt{q}$ για κάποιους ρητούς a και b.

(β) Αποδείξτε επίσης ότι $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

16. (α) Αποδείξτε ότι, αν m και n είναι φυσικοί αριθμοί και $m^2/n^2 < 2$, τότε $(m + 2n)^2/(m + n)^2 > 2$· δείξτε, ακόμα, ότι

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$

(β) Αποδείξτε τα ίδια αποτελέσματα με όλες τις ανισότητες αντεστραμμένες.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $m/n < \sqrt{2}$, τότε υπάρχει ένας άλλος ρητός αριθμός m'/n' με $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$.

∗**17.** Φαίνεται σωστό ότι η $\sqrt{n}$ είναι άρρητος αριθμός όποτε ο φυσικός αριθμός n δεν είναι το τετράγωνο κάποιου άλλου φυσικού αριθμού. Αν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Προβλήματος 13 σε οποιαδήποτε ειδική περίπτωση, δεν είναι φανερό εκ των προτέρων ότι λειτουργεί πάντα, και η απόδειξη για τη γενική περίπτωση απαιτεί κάποιες πρόσθετες πληροφορίες. Ένας φυσικός αριθμός p λέγεται **πρώτος αριθμός** αν είναι αδύνατο να γράψουμε $p = ab$ για φυσικούς αριθμούς a και b, εκτός αν ο ένας από αυτούς είναι p και ο άλλος 1· επίσης, θα συμφωνήσουμε για ευκολία ότι ο 1 *δεν* είναι πρώτος αριθμός. Μερικοί πρώτοι αριθμοί στη σειρά είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Αν ο $n > 1$ δεν είναι πρώτος, τότε $n = ab$, όπου οι a και b είναι και οι δύο $< n$· αν ο a ή ο b δεν είναι πρώτος, μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να τον γράψουμε ως γινόμενο· συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων. Για παράδειγμα, $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

(α) Μετατρέψτε αυτό το επιχείρημα σε αυστηρή απόδειξη με πλήρη επαγωγή. (Είναι σίγουρο ότι κάθε λογικός μαθηματικός θα δεχόταν το παράτυπο αυτό επιχείρημα, μάλλον όμως γιατί θα ήταν φανερό για αυτόν πώς να το διατυπώσει αυστηρά.)

Ένα θεμελιώδες θεώρημα για τους ακεραίους, που δεν θα το αποδείξουμε εδώ, μας λέει ότι αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική, αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων. Έτσι, για παράδειγμα, ο 28 δεν μπορεί ποτέ να γραφεί ως γινόμενο πρώτων ο ένας από τους οποίους να είναι ο 3, ούτε μπορεί να γραφεί με έναν τρόπο που να περιέχει το 2 μόνο μία φορά (θα έπρεπε τώρα να εκτιμήσετε το ότι δεν επιτρέψαμε στον 1 να είναι πρώτος).

(β) Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, αποδείξτε ότι ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος, εκτός αν $n = m^2$ για κάποιον φυσικό αριθμό m.

(γ) Αποδείξτε πιο γενικά ότι ο $\sqrt[k]{n}$ είναι άρρητος, εκτός αν $n = m^k$.

(δ) Δεν μπορούμε να κλείσουμε τη συζήτηση για τους πρώτους αριθμούς χωρίς να συμπεριλάβουμε την όμορφη απόδειξη του Ευκλείδη για το ότι υπάρχουν άπειροι ως προς το πλήθος πρώτοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι αριθμοί $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ θεωρώντας τον $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

∗**18.** (α) Αποδείξτε ότι, αν ο x ικανοποιεί την

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

για κάποιους ακέραιους $a_{n-1}, \ldots, a_0$, τότε ο x είναι άρρητος, εκτός αν ο x είναι ακέραιος (Γιατί αυτό γενικεύει το Πρόβλημα 17;)

(β) Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

(γ) Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος. Υπόδειξη: Ξεκινήστε υπολογίζοντας τις πρώτες 6 δυνάμεις αυτού του αριθμού.

19. Αποδείξτε την ανισότητα του Bernoulli: Αν $h > -1$, τότε

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Γιατί αυτό είναι τετριμμένο αν $h > 0$;

20. Η ακολουθία του Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{για } n \geq 3. \end{aligned}$$

Αυτή η ακολουθία, που αρχίζει με τους 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, ανακαλύφθηκε από τον Fibonacci (περίπου 1175 - 1250), με αφορμή ένα πρόβλημα σχετικό με κουνέλια. Ο Fibonacci υπέθετε ότι ένα αρχικό ζευγάρι κουνελιών γεννούσε ένα καινούργιο ζευγάρι κουνελιών το μήνα, και ότι μετά από δύο μήνες κάθε καινούργιο ζευγάρι συμπεριφερόταν όμοια. Το πλήθος a_n των ζευγαριών που γεννιούνται το n-οστό μήνα είναι $a_{n-1} + a_{n-2}$, γιατί ένα ζευγάρι κουνελιών γεννιέται για κάθε ζευγάρι που γεννήθηκε τον προηγούμενο μήνα, και ακόμα κάθε ζευγάρι που γεννήθηκε πριν δύο μήνες δίνει τώρα ζωή σε ένα άλλο ζευγάρι. Το πλήθος των ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων που αφορούν αυτήν την ακολουθία είναι πραγματικά απίστευτο — υπάρχει ακόμα και ένας Όμιλος Fibonacci που εκδίδει ένα έντυπο, το *The Fibonacci Quarterly*. Αποδείξτε ότι

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Ένας τρόπος απόδειξης του εκπληκτικού αυτού τύπου παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 24-16.

21. Η ανισότητα του Schwarz (Πρόβλημα 1-19) έχει στην πραγματικότητα μια πιο γενική μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

Δώστε τρεις αποδείξεις αυτής, ανάλογες προς τις τρεις αποδείξεις του Προβλήματος 1-19.

22. Το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1-7 έχει μια σημαντική γενίκευση: Αν

$$a_1, \ldots, a_n \geq 0$$

τότε ο «αριθμητικός μέσος»

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

και ο «γεωμετρικός μέσος»

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

ικανοποιούν την

$$G_n \leq A_n.$$

(α) Έστω ότι $a_1 < A_n$. Τότε κάποια a_i ικανοποιούν την $a_i > A_n$· για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι $a_2 > A_n$. Έστω $\bar{a}_1 = A_n$ και $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Αποδείξτε ότι

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2.$$

Γιατί αν επαναλάβουμε αυτήν τη διαδικασία αρκετές φορές τελικά αποδεικνύουμε ότι $G_n \leq A_n$; (Να μια περίπτωση, όπου είναι καλή άσκηση το να δώσετε μια τυπική απόδειξη με επαγωγή, καθώς και ένα άτυπο επιχείρημα.) Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση $G_n \leq A_n$;

Η αιτιολόγηση στην προηγούμενη απόδειξη συνδέεται στενά με μια άλλη ενδιαφέρουσα απόδειξη.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $G_n \leq A_n$ για $n = 2$, αποδείξτε, με επαγωγή στο k, ότι $G_n \leq A_n$ για $n = 2^k$.

(γ) Για τυχαίο n, έστω $2^m > n$. Εφαρμόστε το (β) μέρος στους 2^m αριθμούς

$$a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{2^m - n \text{ φορές}}$$

για να αποδείξετε ότι $G_n \leq A_n$.

23. Δίνουμε έναν αναδρομικό ορισμό του a^n:

$$a^1 = a,$$
$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Αποδείξτε, με επαγωγή, ότι

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m,$$
$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

(Μην προσπαθήσετε να κάνετε ευφυολογήματα: χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n ή επαγωγή στο m, όχι και στα δύο μαζί.)

24. Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιότητες I1 και I4 είναι γνωστές για τους φυσικούς αριθμούς, αλλά ότι ο πολλαπλασιασμός δεν έχει ποτέ αναφερθεί. Τότε μπορούμε να δώσουμε έναν αναδρομικό ορισμό του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$1 \cdot b = b,$$
$$(a + 1) \cdot b = a \cdot b + b.$$

Αποδείξτε τα εξής (με τη σειρά που σας προτείνουμε!):

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (χρησιμοποιήστε επαγωγή στο a),
$a \cdot 1 = a$,
$a \cdot b = b \cdot a$ (μόλις αποδείξατε την περίπτωση $b = 1$).

25. Σε αυτό το κεφάλαιο αρχίσαμε με τους φυσικούς αριθμούς και σιγά-σιγά φτάσαμε έως τους πραγματικούς αριθμούς. Για να μελετήσουμε αυστηρά αυτήν τη διαδικασία θα χρειαζόμασταν ένα ολόκληρο μικρό βιβλίο (δείτε το 5ο Μέρος). Κανένας δεν έχει καταφέρει να βρει έναν τρόπο για να φτάσει στους πραγματικούς αριθμούς χωρίς να περάσει μέσα από αυτήν τη διαδικασία, αλλά αν δεχθούμε τους πραγματικούς αριθμούς ως δοθέντες, τότε μπορούμε να *ορίσουμε* τους φυσικούς αριθμούς σαν τους πραγματικούς αριθμούς της μορφής $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1$, κτλ. Όλη η ουσία αυτού του προβλήματος είναι να δείξουμε ότι υπάρχει ένας αυστηρός μαθηματικός τρόπος για να πούμε το «κτλ.».

(α) Ένα σύνολο A πραγματικών αριθμών λέγεται **επαγωγικό** αν

(1) ο 1 ανήκει στο A,
(2) ο $k + 1$ ανήκει στο A, όποτε ο k ανήκει στο A.

Αποδείξτε ότι

(i) το **R** είναι επαγωγικό.

(ii) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών είναι επαγωγικό.

(iii) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που δεν είναι ίσοι με $\frac{1}{2}$ είναι επαγωγικό.

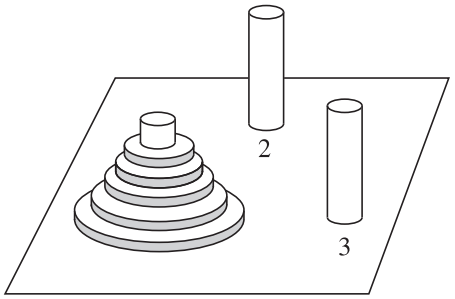
(iv) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που δεν είναι ίσοι με 5 δεν είναι επαγωγικό.

(v) αν το A και το B είναι επαγωγικά, τότε το σύνολο C των πραγματικών αριθμών που ανήκουν και στο A και στο B είναι επίσης επαγωγικό.

(β) Ένας πραγματικός αριθμός n θα λέγεται **φυσικός αριθμός** αν ο n ανήκει σε *κάθε* επαγωγικό σύνολο.

(i) Αποδείξτε ότι ο 1 είναι φυσικός αριθμός

(ii) Αποδείξτε ότι, αν ο k είναι φυσικός αριθμός, τότε και ο $k+1$ είναι φυσικός αριθμός.



ΣΧΗΜΑ 1

26. Υπάρχει μια «σπαζοκεφαλιά» που συνίσταται από τρεις πασσάλους με n ομόκεντρους κρίκους τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο κατά φθίνουσα διάμετρο, περασμένοι μέσα σε ένα πάσσαλο (Σχήμα 1). Ένας κρίκος επιτρέπεται από την κορυφή της στοίβας να περάσει σε άλλο πάσσαλο υπό τον όρο να μην τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερο κρίκο. Για παράδειγμα, αν ο μικρότερος κρίκος μετακινηθεί στον 2ο πάσσαλο και ο αμέσως επόμενος στον 3ο, τότε ο μικρότερος κρίκος μπορεί να τοποθετηθεί επίσης στον 3ο, πάνω από τον άλλο κρίκο. Αποδείξτε ότι η όλη στοίβα των n κρίκων μπορεί να μετακινηθεί στον 3ο πάσσαλο σε $2^n - 1$ κινήσεις και όχι λιγότερες.

∗**27.** Το πανεπιστήμιο Β ήταν υπερήφανο για τους 17 μόνιμους καθηγητές του στα μαθηματικά. Η παράδοση επέβαλλε, σε κάθε εβδομαδιαίο ομαδικό γεύμα όπου πιστά έδιναν το παρόν και οι 17, κάθε μέλος που είχε βρει λάθος σε κάποια δημοσίευσή του να το ανακοίνωνε και αμέσως να παραιτείτο. Τέτοιο πράγμα δεν είχε ποτέ συμβεί, μια και κανείς καθηγητής δεν είχε υπόψη του τα λάθη στη δουλειά του. Αυτό δεν σήμαινε ότι δεν υπήρχαν λάθη. Με το πέρασμα των ετών, στη δουλειά του κάθε μέλους του τμήματος είχε βρεθεί τουλάχιστον ένα λάθος από άλλους συναδέλφους του. Αυτό το λάθος είχε αναφερθεί σε όλους τους άλλους καθηγητές εκτός από τον αμέσως ενδιαφερόμενο, για να εμποδισθούν τυχόν παραιτήσεις.

Μια μοιραία χρονιά, το τμήμα ενισχύθηκε με έναν επισκέπτη καθηγητή από άλλο πανεπιστήμιο, κάποιον κ. Χ, ο οποίος ήλπιζε να μονιμοποιηθεί στο τέλος του ακαδημαϊκού έτους. Όπως είναι φυσικό, τα διάφορα μέλη του τμήματος τον πληροφόρησαν για τα δημοσιευμένα λάθη που είχαν ανακαλυφθεί. Όταν η μονιμοποίηση στην οποία ήλπιζε τελικά δεν πραγματοποιήθηκε, ο κ. Χ πήρε την εκδίκησή του στο τελευταίο γεύμα του έτους. «Ευχαριστήθηκα την επίσκεψη μου εδώ πάρα πολύ» είπε, «αλλά υπάρχει κάτι που θέλω να σας πω. Τουλάχιστον ένας από εσάς έχει δημοσιεύσει λάθος αποτέλεσμα το οποίο μερικοί άλλοι στο τμήμα το έχουν ανακαλύψει». Τί συνέβη την επόμενη χρονιά;

∗∗**28.** Αφού βρείτε, ή δείτε, την απάντηση στο Πρόβλημα 27, εξετάστε το εξής: Κάθε μέλος του τμήματος ήδη γνώριζε αυτό που ισχυρίστηκε ο κ. Χ. Πώς, επομένως, η δήλωσή του μπορεί να άλλαξε κάτι;

ΜΕΡΟΣ 2

ΘΕΜΕΛΙΑ

Συχνά διατυπώνεται η άποψη
ότι ο Διαφορικός Λογισμός ασχολείται
με μια συνεχή ποσότητα, κι όμως
μια ερμηνεία αυτής της συνέχειας
δεν δίνεται πουθενά·
ακόμα και οι πιο αυστηρές μελέτες
πάνω στον Διαφορικό Λογισμό δεν
στηρίζουν τις αποδείξεις τους πάνω
στη συνέχεια, αλλά, με μικρότερη
ή μεγαλύτερη συνείδηση αυτού του πράγματος,
είτε αναφέρονται σε γεωμετρικές
έννοιες ή σε αυτές που υποδεικνύει
η γεωμετρία, ή βασίζονται σε θεωρήματα
που ποτέ δεν αποδείχθηκαν με γνήσια
αριθμητικό τρόπο.
Ανάμεσα σε αυτά, για παράδειγμα,
ανήκει το θεώρημα που αναφέραμε
πιο πάνω, και μια πιο προσεκτική
διερεύνηση με έπεισε ότι αυτό το
θεώρημα, ή οποιοδήποτε ισοδύναμο με αυτό,
μπορεί να θεωρηθεί κατά κάποιον τρόπο
σαν μια καλή βάση για την Απειροστική
Ανάλυση. Δεν έμενε παρά να ανακαλύψω
την αληθινή του καταγωγή στην
αριθμητική και ταυτόχρονα να εξασφαλίσω
έναν πραγματικό ορισμό της ουσίας
της συνέχειας. Τα κατάφερα στις 24 Νοεμβρίου
του 1858, και λίγες μέρες αργότερα
ανακοίνωσα τα αποτελέσματα των συλλογισμών
μου στον αγαπητό μου φίλο
Durège με τον οποίο είχα μια μεγάλη
και ζωηρή συζήτηση.

RICHARD DEDEKIND

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Χωρίς αμφιβολία, η πιο σημαντική έννοια σε ολόκληρα τα μαθηματικά είναι αυτή της συνάρτησης —σε όλους σχεδόν τους κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών οι συναρτήσεις αποδεικνύονται το κεντρικό αντικείμενο έρευνας. Ίσως λοιπόν να μην εκπλαγείτε αν μάθετε ότι η έννοια της συνάρτησης είναι πολύ γενική. Πιθανόν να σας ανακουφίσει η είδηση ότι, προς το παρόν, θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις ενός πολύ ειδικού τύπου· ακόμα και αυτή η μικρή κλάση συναρτήσεων, παρουσιάζει αρκετά μεγάλη ποικιλία για να τραβήξει την προσοχή μας για κάμποσο καιρό. Αρχικά δεν θα δώσουμε καν ούτε έναν αυστηρό ορισμό. Για την ώρα, ένας προκαταρκτικός ορισμός θα μας δώσει τη δυνατότητα να συζητήσουμε πλατιά τις συναρτήσεις, και θα περιγράψει τη διαισθητική έννοια της συνάρτησης, όπως την αντιλαμβάνονται οι μαθηματικοί. Αργότερα, θα μελετήσουμε και θα συζητήσουμε τα πλεονεκτήματα του σύγχρονου μαθηματικού ορισμού. Ας αρχίσουμε λοιπόν με τον ακόλουθο:

ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ Συνάρτηση είναι ένας κανόνας που απεικονίζει, σε καθέναν από κάποιους πραγματικούς αριθμούς, κάποιον άλλον πραγματικό αριθμό.

Τα επόμενα παραδείγματα συναρτήσεων δίνονται για να εξηγήσουν και να ενισχύσουν αυτόν τον ορισμό, ο οποίος, ομολογουμένως, χρειάζεται κάποιες διευκρινίσεις.

Παράδειγμα 1 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό στο τετράγωνό του.

Παράδειγμα 2 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό y στον αριθμό

$$\frac{y^3 + 3y + 5}{y^2 + 1}.$$

Παράδειγμα 3 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό $c \neq 1, -1$ στον αριθμό

$$\frac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}.$$

Παράδειγμα 4 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό x που ικανοποιεί την $-17 \leq x \leq \pi/3$ στον αριθμό x^2.

Παράδειγμα 5 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό a στον αριθμό 0 αν ο a είναι άρρητος, και στον αριθμό 1 αν ο a είναι ρητός.

Παράδειγμα 6 Ο κανόνας που απεικονίζει

$$\begin{aligned}
&\text{το } 2 \text{ στον αριθμό } 5,\\
&\text{το } 17 \text{ στον αριθμό } \frac{36}{\pi},\\
&\text{το } \frac{\pi^2}{17} \text{ στον αριθμό } 28,\\
&\text{το } \frac{36}{\pi} \text{ στον αριθμό } 28,
\end{aligned}$$

και κάθε $y \neq 2, 17, \pi^2/17$ ή $36/\pi$, στον αριθμό 16 αν ο y είναι της μορφής $a + b\sqrt{2}$ με a, b στο $\mathbf{Q}$.

Παράδειγμα 7 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό t στον αριθμό $t^3 + x$. (Αυτός ο κανόνας εξαρτάται βέβαια από την εκλογή του αριθμού x· στην ουσία δηλαδή περιγράφουμε άπειρες το πλήθος διαφορετικές συναρτήσεις, μια για κάθε αριθμό x.)

Παράδειγμα 8 Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε αριθμό z στο πλήθος των ψηφίων 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του z, αν αυτό είναι πεπερασμένος αριθμός, και στο $-\pi$ αν υπάρχουν άπειρα ψηφία 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του z.

Υπάρχει κάτι που θα πρέπει να είναι τελείως καθαρό μετά από αυτά τα παραδείγματα: Μια συνάρτηση είναι *οποιοσδήποτε* κανόνας που απεικονίζει αριθμούς σε κάποιους άλλους αριθμούς, όχι μόνο ένας κανόνας που μπορεί να παρασταθεί με έναν αλγεβρικό τύπο, ούτε ακόμα από μια ομοιόμορφη συνθήκη που να εφαρμόζεται σε όλους τους αριθμούς· ούτε είναι αναγκαστικά ένας κανόνας που εσείς, ή κάποιος άλλος, μπορείτε να εφαρμόσετε στην πράξη (κανένας, για παράδειγμα, δεν ξέρει πού απεικονίζει ο κανόνας 8 τον π). Επίσης, μπορεί ο κανόνας να παραλείπει κάποιους αριθμούς και ακόμα, να μην είναι σαφές σε ποιους ακριβώς αριθμούς εφαρμόζεται η συνάρτηση (προσπαθήστε, για παράδειγμα, να διαπιστώσετε αν η συνάρτηση του Παραδείγματος 6 εφαρμόζεται στον π). Το σύνολο των αριθμών στους οποίους *ορίζεται* μια συνάρτηση λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης.

Πριν πούμε οτιδήποτε άλλο για τις συναρτήσεις, χρειαζόμαστε επειγόντως κάποιο συμβολισμό. Δεδομένου ότι σε αυτό το βιβλίο θα μιλάμε συχνά για συναρτήσεις (στην πραγματικότητα δεν θα μιλήσουμε και για τίποτε άλλο), χρειαζόμαστε έναν κατάλληλο τρόπο για να ονομάζουμε τις συναρτήσεις, και για να αναφερόμαστε σε αυτές γενικά. Η συνηθισμένη πρακτική είναι να συμβολίζουμε μια συνάρτηση με ένα γράμμα. Για προφανείς λόγους, το γράμμα «f» (function = συνάρτηση) είναι το επικρατέστερο, καθιστώντας έτσι και τα «g», «h» προφανείς υποψήφιους, αλλά και κάθε γράμμα (καθώς και οποιοδήποτε λογικό σύμβολο) μας κάνει, χωρίς να αποκλείονται και τα «x», «y», αν και αυτά τα γράμματα συνήθως χρησιμοποιούνται για να συμβολίσουν αριθμούς. Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε ο αριθμός στον οποίο απεικονίζει η f τον αριθμό x, συμβολίζεται με $f(x)$ —αυτό το σύμβολο διαβάζεται «f του x» και συνήθως λέγεται η **τιμή της** f **στο** x. Φυσικό είναι, αν συμβολίζουμε μια συνάρτηση με x, να διαλέξουμε κάποιο άλλο γράμμα ως σύμβολο για τον αριθμό (μια απόλυτα νόμιμη, αν και κάπως ιδιότροπη, επιλογή θα μπορούσε να είναι το «f», δίνοντάς μας το σύμβολο $x(f)$). Σημειώνουμε ότι το σύμβολο $f(x)$ έχει έννοια μόνο για x στο πεδίο ορισμού της f· για τα άλλα x, το σύμβολο $f(x)$ δεν ορίζεται.

Αν συμβολίσουμε τις συναρτήσεις των Παραδειγμάτων 1–8 με f, g, h, r, s, θ, α_x και y, τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τους ορισμούς τους ως εξής:

(1) $f(x) = x^2$ για κάθε x.

(2) $g(y) = \dfrac{y^3 + 3y + 5}{y^2 + 1}$ για κάθε y.

(3) $h(c) = \dfrac{c^3 + 3c + 5}{c^2 - 1}$ για κάθε $c \neq 1, -1$.

(4) $r(x) = x^2$ για κάθε x τέτοιο ώστε $-17 \leq x \leq \pi/3$.

(5) $s(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 1, & \text{αν } x \text{ ρητός.} \end{cases}$

(6) $\theta(x) = \begin{cases} 5, & x = 2 \\ \dfrac{36}{\pi}, & x = 17 \\ 28, & x = \dfrac{\pi^2}{17} \\ 28, & x = \dfrac{36}{\pi} \\ 16, & x \neq 2, 17, \dfrac{\pi^2}{17}, \text{ή } \dfrac{36}{\pi}, \text{ και } x = a + b\sqrt{2} \text{ για } a, b \text{ στο } \mathbf{Q}. \end{cases}$

(7) $\alpha_x(t) = t^3 + x$ για κάθε αριθμό t.

(8) $y(x) = \begin{cases} n, & \text{αν εμφανίζονταν ακριβώς } n \text{ ψηφία 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \\ -\pi, & \text{αν εμφανίζονταν άπειρα ψηφία 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του } x. \end{cases}$

Αυτοί οι ορισμοί υποδεικνύουν τη συνηθισμένη διαδικασία που ακολουθούμε για να ορίσουμε μια συνάρτηση f —μας λένε ποιο είναι το $f(x)$ για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της f. (Παρατηρήστε ότι είναι ακριβώς το ίδιο με το να μας πουν ποιο είναι το $f(a)$ για κάθε αριθμό a, ή το $f(b)$ για κάθε αριθμό b, κτλ.) Στην πράξη, κάποιες συντμήσεις είναι ανεκτές. Ο ορισμός (1) θα μπορούσε να γραφεί απλώς

$$(1) \quad f(x) = x^2$$

με τη διευκρινιστική φράση «για κάθε x» να εννοείται. Βέβαια, για τον ορισμό (4) η μόνη δυνατή σύντμηση είναι η

$$(4) \quad r(x) = x^2, \qquad -17 \leq x \leq \pi/3.$$

Δεχόμαστε συνήθως ότι ένας ορισμός σαν τον

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 0, 1$$

γίνεται να περικοπεί στον

$$k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Με άλλα λόγια, *αν δεν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού, θεωρούμε ότι αποτελείται από όλους τους αριθμούς για τους οποίους ο ορισμός έχει έννοια.*

Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσετε τους ακόλουθους ισχυρισμούς για τις συναρτήσεις που ορίστηκαν πιο πάνω:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) + 2x + 1\cdot \\ g(x) &= h(x) \text{ αν } x^3 + 3x + 5 = 0\cdot \\ r(x+1) &= r(x) + 2x + 1 \text{ αν} -17 \leq x \leq \frac{\pi}{3} - 1\cdot \\ s(x+y) &= s(x) \text{ αν } y \text{ ρητός}\cdot \\ \theta\left(\frac{\pi^2}{17}\right) &= \theta\left(\frac{36}{\pi}\right)\cdot \\ \alpha_x(x) &= x \cdot [f(x) + 1]\cdot \\ y\left(\frac{1}{3}\right) &= 0,\ y\left(\frac{7}{9}\right) = -\pi. \end{aligned}$$

Αν η παράσταση $f(s(a))$ σας φαίνεται παράλογη, τότε ξεχνάτε ότι ο $s(a)$ είναι ένας αριθμός σαν όλους τους άλλους, άρα το $f(s(a))$ έχει έννοια. Και μάλιστα, $f(s(a)) = s(a)$ για κάθε a. Γιατί; Είναι εύκολο, μετά από μια πρώτη ματιά, να διευκρινίσουμε και άλλες, ακόμα πιο πολύπλοκες παραστάσεις από την $f(s(a))$. Η παράσταση

$$f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3})))))),$$

όσο και να μοιάζει τρομερή, υπολογίζεται πολύ εύκολα με λίγη υπομονή:

$$\begin{aligned} & f(r(s(\theta(\alpha_3(y(\tfrac{1}{3})))))) \\ &= f(r(s(\theta(\alpha_3(0))))) \\ &= f(r(s(\theta(3)))) \\ &= f(r(s(16))) \\ &= f(r(1)) \\ &= f(1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Τα πρώτα προβλήματα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου σάς προσφέρουν και άλλη εξάσκηση πάνω σε αυτόν τον συμβολισμό.

Η συνάρτηση που ορίζεται στην (1) είναι ένα μάλλον ειδικό παράδειγμα μιας πολύ σπουδαίας κλάσης συναρτήσεων, των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Μια συνάρτηση f λέγεται **πολυωνυμική συνάρτηση** αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_0, \ldots, a_n$ τέτοιοι ώστε

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad \text{για κάθε } x$$

(όταν η $f(x)$ γράφεται σε αυτήν τη μορφή, συνήθως υποθέτουμε σιωπηρά ότι $a_n \neq 0$). Η μέγιστη δύναμη του x με μη μηδενικό συντελεστή λέγεται ο **βαθμός** της f· για παράδειγμα, η πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = 5x^6 + 137x^4 - \pi$ έχει βαθμό 6.

Οι συναρτήσεις που ορίζονται στις (2) και (3) ανήκουν σε μια κάπως μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων, τις **ρητές συναρτήσεις**· αυτές είναι οι συναρτήσεις της μορφής p/q όπου οι p και q είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις (και η q δεν παίρνει παντού την τιμή 0). Οι ρητές συναρτήσεις, με τη σειρά τους, είναι μάλλον ειδικά παραδείγματα από μια ακόμα μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων, που είναι απλούστερες από αρκετές από τις συναρτήσεις που αναφέρθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου και μελετώνται σε βάθος στον Απειροστικό Λογισμό. Τα ακόλουθα, είναι παραδείγματα συναρτήσεων αυτού του είδους:

(9) $$f(x) = \frac{x + x^2 + x\sin^2 x}{x\sin x + x\sin^2 x}$$

(10) $$f(x) = \sin(x^2).$$

(11) $$f(x) = \sin(\sin(x^2)).$$

(12) $$f(x) = \sin^2(\sin(\sin^2(x\sin^2 x^2))) \cdot \sin\left(\frac{x + \sin(x\sin x)}{x + \sin x}\right).$$

Με ποιο κριτήριο, θα αναρωτηθείτε ίσως, μπορούμε να θεωρήσουμε απλές τέτοιες συναρτήσεις, ειδικά κάτι τερατουργήματα σαν την (12); Η απάντηση είναι ότι μπορούμε να τις κατασκευάσουμε από μερικές απλές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας ορισμένους απλούς τρόπους για να τις συνδυάζουμε. Για να κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις (9)–(12) χρειαζόμαστε αρχικά την «ταυτοτική συνάρτηση» I, για την οποία $I(x) = x$, και τη «συνάρτηση ημιτόνου» $\sin$, που η τιμή της $\sin(x)$ στο x συχνά γράφεται πιο απλά $\sin x$. Μερικοί από τους πιο σημαντικούς τρόπους με τους οποίους συνδυάζουμε συναρτήσεις για να παράγουμε νέες συναρτήσεις είναι οι εξής:

Αν f και g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μια καινούργια συνάρτηση $f + g$, που λέγεται το **άθροισμα** των f και g, με την ισότητα

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Σημειώστε ότι σύμφωνα με τις συμβάσεις που έχουμε υιοθετήσει, το πεδίο ορισμού της $f + g$ αποτελείται από όλα τα x για τα οποία το «$f(x) + g(x)$» έχει έννοια, δηλαδή, το σύνολο των x που ανήκουν και στο πεδίο ορισμού της f και το πεδίο ορισμού της g. Αν A και B είναι τυχαία σύνολα, τότε με $A \cap B$ (διαβάζεται «A τομή B» ή «η τομή των A και B») συμβολίζουμε το σύνολο των x που ανήκουν και στο A και στο B· αυτός ο συμβολισμός μάς επιτρέπει να γράψουμε πεδίο ορισμού$(f + g) =$ πεδίο ορισμού $f \cap$ πεδίο ορισμού g.

Στο ίδιο πνεύμα, ορίζουμε το **γινόμενο** $f \cdot g$ και το **πηλίκο** $\dfrac{f}{g}$ (ή f/g) των f και g με

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

και

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ακόμα, αν g είναι μια συνάρτηση και c ένας αριθμός, ορίζουμε μια καινούργια συνάρτηση $c \cdot g$ με

$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x).$$

Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του συμβολισμού $f \cdot g$, αν συμφωνήσουμε ότι το σύμβολο c παριστάνει και τη συνάρτηση f με $f(x) = c\cdot$ μια τέτοια συνάρτηση, που παίρνει την ίδια τιμή για όλους τους αριθμούς x, λέγεται **σταθερή συνάρτηση**.

Το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ είναι το πεδίο ορισμού $f \cap$ πεδίο ορισμού g, και το πεδίο ορισμού της $c \cdot g$ είναι απλώς το πεδίο ορισμού της g. Από την άλλη πλευρά, το πεδίο ορισμού της f/g είναι μάλλον πολύπλοκο —μπορεί να γραφεί πεδίο ορισμού $f \cap$ πεδίο ορισμού $g \cap \{x : g(x) \neq 0\}$, όπου το σύμβολο $\{x : g(x) \neq 0\}$ συμβολίζει το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους $g(x) \neq 0$. Γενικά, το $\{x : \ldots\}$ συμβολίζει το σύνολο όλων των x για τους οποίους ισχύει η «...». Έτσι με $\{x : x^3 + 3 < 11\}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των αριθμών x με $x^3 < 8$, οπότε $\{x : x^3 + 3 < 11\} = \{x : x < 2\}$. Καθένα από αυτά τα σύμβολα θα μπορούσε κάλλιστα να γραφεί με χρήση του y παντού στη θέση του x. Συνηθίζονται διάφορες παραλλαγές αυτού του συμβολισμού, που δεν απαιτούν ιδιαίτερη συζήτηση. Καθένας μπορεί να μαντέψει ότι το $\{x > 0 : x^3 < 8\}$ συμβολίζει το σύνολο των θετικών αριθμών που ο κύβος τους είναι μικρότερος από 8· θα μπορούσαμε, πιο τυπικά, να το εκφράσουμε ως $\{x : x > 0 \text{ και } x^3 < 8\}$. Παρεμπιπτόντως, αυτό το σύνολο είναι το ίδιο με το σύνολο $\{x : 0 < x < 2\}$. Υπάρχει άλλη μια παραλλαγή, λιγότερο διαυγής αλλά πολύ κοινή. Το σύνολο $\{1, 3, 2, 4\}$, για παράδειγμα, περιέχει ακριβώς τους τέσσερις αριθμούς 1, 2, 3 και 4· συμβολίζεται επίσης με $\{x : x = 1 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 4\}$.

Μερικά πράγματα για το άθροισμα, το γινόμενο, και το πηλίκο συναρτήσεων είναι προφανείς συνέπειες αντίστοιχων ιδιοτήτων του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου αριθμών. Για παράδειγμα, είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Η απόδειξη είναι χαρακτηριστική για όλες σχεδόν τις αποδείξεις ισότητας μεταξύ δύο συναρτήσεων —πρέπει να δείξουμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, και την ίδια τιμή για κάθε αριθμό στο πεδίο ορισμού. Για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι $(f + g) + h = f + (g + h)$, παρατηρούμε ότι, αν εφαρμόσουμε τον ορισμό και στα δύο μέλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}[(f + g) + h](x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= [f(x) + g(x)] + h(x)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}[f + (g + h)](x) &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= f(x) + [g(x) + h(x)],\end{aligned}$$

και η ισότητα των $[f(x) + g(x)] + h(x)$ και $f(x) + [g(x) + h(x)]$ είναι μια ιδιότητα των αριθμών. Σε αυτήν την απόδειξη η ισότητα των δύο πεδίων ορισμού δεν αναφέρθηκε ρητά γιατί είναι προφανής, από τη στιγμή που θα αρχίσουμε να γράφουμε αυτές τις εξισώσεις· το πεδίο ορισμού της $(f + g) + h$ καθώς και της $f + (g + h)$ είναι προφανώς το πεδίο ορισμού $f \cap$ πεδίο ορισμού $g \cap$ πεδίο ορισμού h. Γράφουμε, φυσιολογικά, $f + g + h$ για την $(f + g) + h = f + (g + h)$, ακριβώς όπως κάναμε και για τους αριθμούς.

Είναι το ίδιο εύκολο να αποδείξουμε ότι $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, και αυτή η συνάρτηση συμβολίζεται με $f \cdot g \cdot h$. Οι ισότητες $f + g = g + f$ και $f \cdot g = g \cdot f$, με τη σειρά τους, δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία.

Χρησιμοποιώντας τις πράξεις $+, \cdot, /$ μπορούμε τώρα να εκφράσουμε τη συνάρτηση f που ορίστηκε στην (9) σαν

$$f = \frac{I + I \cdot I + I \cdot \sin \cdot \sin}{I \cdot \sin + I \cdot \sin \cdot \sin}.$$

Είναι όμως σαφές ότι δεν μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση (10) με αυτόν τον τρόπο. Χρειαζόμαστε λοιπόν έναν άλλο τρόπο για να συνδυάζουμε συναρτήσεις. Αυτός ο συνδυασμός, η σύνθεση δύο συναρτήσεων, είναι τελικά ο πιο σπουδαίος.

Αν f και g είναι τυχαίες συναρτήσεις, ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $f \circ g$, τη **σύνθεση** των f και g, με

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))\cdot$$

το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το

$$\{x : x \text{ στο πεδίο ορισμού της } g \text{ και } g(x) \text{ στο πεδίο ορισμού της } f\}.$$

Το σύμβολο «$f \circ g$» συχνά διαβάζεται «f κύκλος g».. Αν συγκριθεί με τη φράση «η σύνθεση των f και g» έχει το πλεονέκτημα της συντομίας, ασφαλώς, υπάρχει όμως και άλλο ένα πλεονέκτημα πολύ μεγαλύτερης σημασίας: υπάρχει πολύ μικρότερος κίνδυνος σύγχυσης της $f \circ g$ με την $g \circ f$, και αυτές οι δύο *δεν* πρέπει να συγχέονται, γιατί συνήθως δεν είναι ίσες· πράγματι, οποιοδήποτε σχεδόν ζεύγος f και g και αν διαλέξετε στην τύχη, θα σας επιβεβαιώσει αυτό που λέμε (δοκιμάστε, ας πούμε, $f = I \cdot I$ και $g = \sin$). Προτού να αρχίσετε να παίρνετε από φόβο την πράξη της σύνθεσης, σπεύδουμε να δηλώσουμε ότι η σύνθεση *είναι* προσεταιριστική:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(και η απόδειξη είναι τετριμμένη)· αυτή η συνάρτηση συμβολίζεται με $f \circ g \circ h$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις συναρτήσεις (10), (11), (12) στη μορφή

(10) $f = \sin \circ (I \cdot I)$,

(11) $f = \sin \circ \sin \circ (I \cdot I)$,

(12) $f = (\sin \cdot \sin) \circ \sin \circ (\sin \cdot \sin) \circ (I \cdot [(\sin \cdot \sin) \circ (I \cdot I)]) \cdot \sin \circ \left(\dfrac{I + \sin \circ (I \cdot \sin)}{I + \sin}\right)$.

Υπάρχει ένα πράγμα που ίσως έχει ήδη γίνει σαφές. Αν και αυτή η μέθοδος γραφής των συναρτήσεων αποκαλύπτει τη «δομή» τους πολύ καθαρά, δεν είναι ούτε σύντομη ούτε εύχρηστη. Το μικρότερο όνομα για τη συνάρτηση f με $f(x) = \sin(x^2)$ για κάθε x, φαίνεται δυστυχώς ότι είναι «η συνάρτηση f με $f(x) = \sin(x^2)$ για κάθε x». Η ανάγκη σύντμησης αυτού του αδέξιου ορισμού ήταν φανερή εδώ και διακόσια χρόνια, αλλά καμία λογική σύντμηση δεν απέσπασε τη γενική αποδοχή. Προς το παρόν, ο ισχυρότερος υποψήφιος για αυτήν την τιμή είναι κάτι σαν

$$x \to \sin(x^2)$$

(διαβάζεται «το x πάει στο $\sin(x^2)$» ή απλώς «x βέλος $\sin(x^2)$»), αλλά δεν είναι καθόλου δημοφιλής ανάμεσα στους συγγραφείς διδακτικών βιβλίων Απειροστικού Λογισμού. Σε αυτό το βιβλίο θα ανεχτούμε έναν βαθμό ασάφειας, και θα μιλάμε για «τη συνάρτηση $f(x) = \sin(x^2)$». Ακόμα πιο δημοφιλής είναι η σύντμηση «η συνάρτηση $\sin(x^2)$». Στο όνομα της ακρίβειας δεν θα χρησιμοποιήσουμε ποτέ αυτήν την περιγραφή, που, για να ακριβολογήσουμε, συγχέει έναν αριθμό με μια συνάρτηση, αλλά είναι τόσο βολική που εσείς πιθανόν να την υιοθετήσετε για προσωπική χρήση. Όπως και σε κάθε σύμβαση, η χρησιμότητα είναι πάντα το κίνητρο, και αυτό το κριτήριο είναι εύλογο όσο τα διάφορα μικρά λογικά μειονεκτήματα δεν προκαλούν σύγχυση. Περιστασιακά, *θα* δημιουργηθεί σύγχυση, εκτός αν χρησιμοποιήσουμε μια πιο ακριβή περιγραφή. Για παράδειγμα, «η συνάρτηση $x + t^3$» είναι διφορούμενη φράση· θα μπορούσε να σημαίνει είτε

$$x \to x + t^3, \text{ δηλαδή, τη συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = x + t^3 \text{ για κάθε } x$$

ή

$$t \to x + t^3, \text{ δηλαδή, τη συνάρτηση } f \text{ με } f(t) = x + t^3 \text{ για κάθε } t.$$

Όπως όμως θα δούμε, για πολλές σημαντικές έννοιες που σχετίζονται με συναρτήσεις, ο Απειροστικός Λογισμός έχει ένα συμβολισμό που εμπεριέχει το «$x \to$».

Ως τώρα έχουμε κάνει μια αρκετά εκτεταμένη εξερεύνηση των συναρτήσεων για να οδηγηθούμε στην αναθεώρηση του ορισμού μας. Ορίσαμε τη συνάρτηση ως έναν

«κανόνα», αλλά δεν είναι καθόλου φανερό τι εννοούμε. Αν ρωτήσουμε «τι συμβαίνει αν παραβούμε αυτόν τον κανόνα;» δεν είναι καθόλου εύκολο να πούμε αν αυτή η ερώτηση είναι απλώς αστεία ή αν έχει πραγματικά κάποιο βάθος. Μια πιο ουσιώδης αντίρρηση στη χρήση της λέξης «κανόνας» είναι ότι οι

$$f(x) = x^2$$

και

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x + 1)$$

είναι ασφαλώς *διαφορετικοί* κανόνες, αν με έναν κανόνα εννοούμε τις οδηγίες που δίνονται για τον προσδιορισμό του $f(x)$· παρ' όλα αυτά, θέλουμε οι

$$f(x) = x^2$$

και

$$f(x) = x^2 + 3x + 3 - 3(x + 1)$$

να ορίζουν την ίδια συνάρτηση. Για αυτόν το λόγο, μια συνάρτηση ορίζεται μερικές φορές ως «σχέση» ανάμεσα σε αριθμούς· δυστυχώς η λέξη «σχέση» γλιτώνει από τις αντιρρήσεις που διατυπώθηκαν εναντίον του «κανόνα», μόνο επειδή είναι ακόμα πιο αόριστη.

Υπάρχει βέβαια ένας ικανοποιητικός τρόπος για να ορίσουμε τις συναρτήσεις, αλλιώς δεν θα μπαίναμε ποτέ στον κόπο να κριτικάρουμε τον αρχικό μας ορισμό. Αλλά ένας ικανοποιητικός ορισμός δεν γίνεται ποτέ να κατασκευαστεί με το να βρίσκουμε συνώνυμα για λέξεις που είναι ασαφείς. Ο ορισμός τον οποίο δέχθηκαν τελικά οι μαθηματικοί για τη «συνάρτηση» είναι ένα όμορφο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο οι διαισθητικές ιδέες εξελίχθηκαν σε αυστηρά μαθηματικά. Η σωστή ερώτηση που θα έπρεπε να κάνει κάποιος για μια συνάρτηση δεν είναι «Τί είναι κανόνας;» ή «Τί είναι σχέση;» αλλά «Τί πρέπει να ξέρω για μια συνάρτηση αν θέλω να ξέρω τα πάντα για αυτή;». Η απάντηση σε αυτήν την τελευταία ερώτηση είναι εύκολη —για κάθε αριθμό x πρέπει κανείς να ξέρει τον αριθμό $f(x)$· μπορούμε να φανταστούμε έναν πίνακα όπου να αναγράφονται όλες οι πληροφορίες που θα ήθελε κανείς να έχει για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$:

x	$f(x)$
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
π	π^2
$-\pi$	π^2

Δεν είναι καν ανάγκη να διατάξουμε τους αριθμούς σε έναν πίνακα (το οποίο πρακτικά θα ήταν αδύνατο αν θέλαμε να τους αναφέρουμε όλους). Αντί για έναν πίνακα με δύο στήλες μπορούμε να θεωρήσουμε ζεύγη αριθμών

$$(1, 1),\ (-1, 1),\ (2, 4),\ (-2, 4),\ (\pi, \pi^2),\ (\sqrt{2}, 2), \ldots$$

που όλα μαζί απλώς αποτελούν ένα σύνολο.* Για να βρούμε το $f(1)$ παίρνουμε τον δεύτερο αριθμό από το ζεύγος που ως πρώτο στοιχείο έχει τον 1· για να βρούμε το $f(\pi)$

*Τα ζεύγη που εμφανίζονται εδώ συχνά λέγονται «διατεταγμένα ζεύγη», για να τονιστεί ότι, για παράδειγμα, το $(2, 4)$ δεν είναι το ίδιο ζεύγος με το $(4, 2)$. Προειδοποιούμε εδώ ότι πρόκειται να ορίσουμε τη συνάρτηση με τη βοήθεια των διατεταγμένων ζευγών, έννοια που επίσης δεν έχει οριστεί. Τα διατεταγμένα ζεύγη *μπορούν* όμως να οριστούν και αυτό γίνεται σε ένα παράρτημα στο τέλος του κεφαλαίου, για τους δύσπιστους.

παίρνουμε τον δεύτερο αριθμό από το ζεύγος που ως πρώτο στοιχείο έχει τον π. Είναι σαν να λέμε ότι μια συνάρτηση θα μπορούσε να οριστεί ως ένα σύνολο από ζεύγη αριθμών. Για παράδειγμα, αν μας έδιναν το εξής σύνολο (που περιέχει ακριβώς 5 ζεύγη):

$$f = \{(1,7),\ (3,7),\ (5,3),\ (4,8),\ (8,4)\},$$

τότε $f(1) = 7$, $f(3) = 7$, $f(5) = 3$, $f(4) = 8$, $f(8) = 4$ και οι 1, 3, 4, 5, 8 είναι οι μόνοι αριθμοί στο πεδίο ορισμού της f. Αν εξετάσουμε το σύνολο

$$f = \{(1,7),\ (3,7),\ (2,5),\ (1,8),\ (8,4)\},$$

τότε $f(3) = 7$, $f(2) = 5$, $f(8) = 4$· αλλά είναι αδύνατο να αποφασίσουμε αν $f(1) = 7$ ή $f(1) = 8$. Με άλλα λόγια, μια συνάρτηση δεν μπορεί να οριστεί ως ένα τυχαίο σύνολο από ζεύγη αριθμών· πρέπει να αποκλείσουμε την εκδοχή που εμφανίστηκε σε αυτήν την περίπτωση. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση είναι ένα σύνολο από ζεύγη αριθμών με την εξής ιδιότητα: αν τα (a, b) και (a, c) είναι και τα δύο στο σύνολο, τότε $b = c$· με άλλα λόγια το σύνολο δεν πρέπει να περιέχει δύο διαφορετικά ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο.

Αυτός είναι ο πρώτος μας πλήρης ορισμός, και παρουσιάζει το σχήμα που θα ακολουθούμε πάντα για να ορίσουμε σπουδαίες νέες έννοιες. Αυτοί οι ορισμοί είναι τόσο σημαντικοί (τουλάχιστον όσο τα θεωρήματα) ώστε είναι ουσιώδες να ξέρουμε πότε τους έχουμε ολοκληρωμένους στη διάθεσή μας και να τους διακρίνουμε από τα σχόλια, τις επεξηγηματικές παρατηρήσεις και τις περιστασιακές ερμηνείες. Για αυτό θα προηγείται η λέξη **ΟΡΙΣΜΟΣ**, η έννοια που ορίζεται θα γράφεται με παχύτερα γράμματα, και ο ορισμός θα αποτελεί από μόνος του ξεχωριστή παράγραφο.

Υπάρχει ένας ακόμα ορισμός (που στην ουσία ορίζει δύο πράγματα ταυτόχρονα) που μπορούμε τώρα να δώσουμε αυστηρά.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν f είναι μια συνάρτηση, το **πεδίο ορισμού** της f είναι το σύνολο όλων των a για τα οποία υπάρχει κάποιο b τέτοιο ώστε το (a, b) να ανήκει στην f. Αν το a είναι στο πεδίο ορισμού της f, έπεται από τον ορισμό της συνάρτησης ότι υπάρχει, πράγματι, ένας *μοναδικός* αριθμός b τέτοιος ώστε το (a, b) να ανήκει στην f. Αυτό το μοναδικό b συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(a)}$.

Με αυτόν τον ορισμό φτάσαμε στον σκοπό μας: το σημαντικό στοιχείο σε μια συνάρτηση f είναι ότι για κάθε αριθμό x στο πεδίο ορισμού της ορίζεται ένας αριθμός $f(x)$. Μπορεί να αισθάνεστε ότι φτάσαμε στο σημείο όπου μια διαισθητική έννοια αντικαταστάθηκε από μια αφαίρεση καθόλου χειροπιαστή. Μπορούμε να σας προσφέρουμε δύο λόγια παρηγοριάς. Πρώτον, αν και οι συναρτήσεις ορίστηκαν ως σύνολα ζευγών, δεν σας εμποδίζει τίποτα να *σκέφτεστε* τη συνάρτηση ως έναν κανόνα. Έπειτα, ούτε ο διαισθητικός ούτε ο τυπικός ορισμός δίνει τον ιδανικό τρόπο για να αντιμετωπίζουμε τις συναρτήσεις. Ο καλύτερος τρόπος είναι να σχεδιάζουμε σχήματα· αλλά για αυτό μας χρειάζεται ένα ολόκληρο κεφάλαιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θέτουμε $f(x) = 1/(1 + x)$. Βρείτε τα:

(i) $f(f(x))$ (Για ποια x έχει έννοια αυτό;).

(ii) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(iii) $f(cx)$.

(iv) $f(x+y)$.

(v) $f(x)+f(y)$.

(vi) Για ποιους αριθμούς c υπάρχει ένας αριθμός x τέτοιος ώστε $f(cx)=f(x)$; Υπόδειξη: Υπάρχουν πολύ περισσότεροι από όσους θα φαντάζεστε με την πρώτη ματιά.

(vii) Για ποιους αριθμούς c αληθεύει ότι $f(cx)=f(x)$ για δύο διαφορετικούς αριθμούς x;

2. Θέτουμε $g(x)=x^2$, και

$$h(x)=\begin{cases}0, & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 1, & \text{αν } x \text{ άρρητος.}\end{cases}$$

(i) Για ποια y είναι $h(y)\le y$;

(ii) Για ποια y είναι $h(y)\le g(y)$;

(iii) Ποιο είναι το $g(h(z))-h(z)$;

(iv) Για ποια w είναι $g(w)\le w$;

(v) Για ποια ε είναι $g(g(\varepsilon))=g(\varepsilon)$;

3. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που ορίζονται με τους εξής τύπους:

(i) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

(ii) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

(iv) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$.

(v) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$.

4. Θέτουμε $S(x)=x^2$, $P(x)=2^x$, και $s(x)=\sin x$. Βρείτε τα ακόλουθα. Σε κάθε περίπτωση η απάντησή σας θα πρέπει να είναι ένας *αριθμός*.

(i) $(S\circ P)(y)$.

(ii) $(S\circ s)(y)$.

(iii) $(S\circ P\circ s)(t)+(s\circ P)(t)$.

(iv) $s(t^3)$.

5. Εκφράστε καθεμιά από τις συναρτήσεις που ακολουθούν μέσω των S, P, s, χρησιμοποιώντας μόνο τα $+$, $\cdot$ και $\circ$ (για παράδειγμα, η απάντηση στο (i) είναι $P\circ s$). Σε κάθε περίπτωση η απάντησή σας θα πρέπει να είναι μια *συνάρτηση*.

(i) $f(x)=2^{\sin x}$.

(ii) $f(x)=\sin 2^x$.

(iii) $f(x)=\sin x^2$.

(iv) $f(x)=\sin^2 x$ (θυμηθείτε ότι το $\sin^2 x$ είναι μια σύντμηση του $(\sin x)^2$).

(v) $f(t)=2^{2^t}$. (Σημείωση: το a^{b^c} *πάντα* σημαίνει $a^{(b^c)}$· αυτή η σύμβαση υιοθετείται γιατί το $(a^b)^c$ γράφεται πιο απλά ως a^{bc}.)

(vi) $f(u)=\sin(2^u+2^{u^2})$.

(vii) $f(y)=\sin\bigl(\sin\bigl(\sin\bigl(2^{2^{2^{\sin y}}}\bigr)\bigr)\bigr)$.

(viii) $f(a) = 2^{\sin^2 a} + \sin(a^2) + 2^{\sin(a^2+\sin a)}$.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις, επειδή είναι πολύ απλές, επομένως εύχρηστες, παίζουν έναν προνομιακό ρόλο στις περισσότερες μελέτες των συναρτήσεων. Τα επόμενα δύο προβλήματα υπογραμμίζουν την ευελιξία τους, και σας καθοδηγούν για να αποδείξετε τις πιο σημαντικές στοιχειώδεις ιδιότητές τους.

6. (α) Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι διαφορετικοί αριθμοί, βρείτε μια πολυωνυμική συνάρτηση f_i βαθμού $n-1$ που να είναι 1 στο x_i και 0 στο x_j για $j \neq i$. Υπόδειξη: Το γινόμενο όλων των $(x - x_j)$ για $j \neq i$, είναι 0 στο x_j αν $j \neq i$. (Αυτό το γινόμενο συνήθως συμβολίζεται με

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j),$$

όπου το σύμβολο Π παίζει τον ίδιο ρόλο για τα γινόμενα με αυτόν που παίζει το Σ για τα αθροίσματα.)

(β) Βρείτε τώρα μια πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $n-1$ τέτοια ώστε $f(x_i) = a_i$ όπου $a_1, \ldots, a_n$ είναι δοθέντες αριθμοί. (Θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις συναρτήσεις f_i από το μέρος (α). Ο τύπος που θα πάρετε λέγεται «τύπος παρεμβολής του Lagrange».)

7. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση f, και κάθε αριθμό a, υπάρχουν μια πολυωνυμική συνάρτηση g, και ένας αριθμός b, έτσι ώστε $f(x) = (x-a)g(x) + b$ για κάθε x. (Η ιδέα είναι να διαιρέσετε το $f(x)$ με $(x-a)$, μέχρι να μείνει ως υπόλοιπο μια σταθερά. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός

$$\begin{array}{rrr|l}
x^3 & -3x & +1 & x \quad -1 \\
\cline{4-4}
x^3 \;\; -x^2 & & & x^2 \;\; +x \;\; -2 \\
\cline{1-2}
\quad x^2 & -3x & & \\
\quad x^2 & \quad -x & & \\
\cline{2-3}
 & -2x & +1 & \\
 & -2x & +2 & \\
\cline{2-3}
 & & -1 &
\end{array}$$

δείχνει ότι $x^3 - 3x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 2) - 1$. Μια αυστηρή απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο βαθμό της f.)

(β) Αποδείξτε ότι αν $f(a) = 0$, τότε $f(x) = (x-a)g(x)$ για κάποια πολυωνυμική συνάρτηση g. (Το αντίστροφο είναι προφανές.)

(γ) Αποδείξτε ότι αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, τότε η f έχει το πολύ n ρίζες, δηλαδή υπάρχουν το πολύ n αριθμοί a με $f(a) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι για κάθε n υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n με n ρίζες. Αν ο n είναι άρτιος βρείτε μία πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n που να μην έχει ρίζες, και αν ο n είναι περιττός βρείτε μία που να έχει μόνο μία ρίζα.

8. Για ποιους αριθμούς a, b, c και d η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

ικανοποιεί την $f(f(x)) = x$ για όλα τα x (για τα οποία η εξίσωση έχει νόημα);

9. (α) Αν A είναι ένα σύνολο πραγματικών αριθμών, ορίζουμε μια συνάρτηση C_A ως εξής:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ στο } A \\ 0, & x \text{ όχι στο } A. \end{cases}$$

Βρείτε εκφράσεις για τις $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ και $C_{\mathbf{R}-A}$, συναρτήσει των C_A και C_B. (Το σύμβολο $A \cap B$ ορίστηκε σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά τα άλλα δύο μπορεί να σας είναι άγνωστα. Μπορούμε να τα ορίσουμε ως εξής:

$$A \cup B = \{x : \text{το } x \text{ ανήκει στο } A \text{ ή το } x \text{ ανήκει στο } B\},$$
$$\mathbf{R} - A = \{x : \text{το } x \text{ ανήκει στο } \mathbf{R} \text{ αλλά όχι στο } A\}.)$$

(β) Έστω ότι f είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) = 0$ ή 1 για κάθε x. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $f = C_A$.

(γ) Δείξτε ότι $f = f^2$ αν και μόνο αν $f = C_A$ για κάποιο σύνολο A.

10. (α) Για ποιες συναρτήσεις f υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε $f = g^2$; Υπόδειξη: Μπορείτε βέβαια να απαντήσετε σε αυτήν την ερώτηση αν αντικαταστήσουμε το «συνάρτηση» με το «αριθμός».

(β) Για ποιες συναρτήσεις f υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε $f = 1/g$;

∗(γ) Για ποιες συναρτήσεις b και c μπορούμε να βρούμε συνάρτηση x τέτοια ώστε

$$(x(t))^2 + b(t)x(t) + c(t) = 0$$

για κάθε αριθμό t;

∗(δ) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις a και b ώστε να υπάρχει συνάρτηση x τέτοια ώστε

$$a(t)x(t) + b(t) = 0$$

για όλους τους αριθμούς t; Πόσες τέτοιες συναρτήσεις x θα υπάρχουν;

11. (α) Έστω ότι H είναι συνάρτηση και y είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $H(H(y)) = y$. Βρείτε το

$$\underbrace{H(H(H(\cdots(H(y)\cdots)}_{80 \text{ φορές}}).$$

(β) Το ίδιο ερώτημα αν αντικαταστήσουμε το 80 με το 81.

(γ) Το ίδιο ερώτημα αν $H(H(y)) = H(y)$.

∗(δ) Βρείτε συνάρτηση H τέτοια ώστε $H(H(x)) = H(x)$ για κάθε αριθμό x, και $H(1) = 36$, $H(2) = \pi/3$, $H(13) = 47$, $H(36) = 36$, $H(\pi/3) = \pi/3$, $H(47) = 47$. (Μην προσπαθήσετε να «λύσετε» ως προς $H(x)$· υπάρχουν πολλές συναρτήσεις H με $H(H(x)) = H(x)$. Οι πρόσθετες συνθήκες για την H υποτίθεται ότι σας υποδεικνύουν τον τρόπο για να βρείτε κατάλληλη H.)

∗(ε) Βρείτε μια συνάρτηση H τέτοια ώστε $H(H(x)) = H(x)$ για κάθε x, και $H(1) = 7$, $H(17) = 18$.

12. Μια συνάρτηση f λέγεται **άρτια** αν $f(x) = f(-x)$, και **περιττή** αν $f(x) = -f(-x)$. Για παράδειγμα, η f είναι άρτια αν $f(x) = x^2$ ή $f(x) = |x|$ ή $f(x) = \cos x$, ενώ η f είναι περιττή αν $f(x) = x$ ή $f(x) = \sin x$.

(α) Εξετάστε αν η $f + g$ είναι άρτια, περιττή, ή τίποτα από τα δύο αναγκαστικά, στις τέσσερις περιπτώσεις που παίρνουμε αν διαλέξουμε την f άρτια ή περιττή, και τη g άρτια ή περιττή. (Μπορείτε για ευκολία να εκθέσετε τις απαντήσεις σας σε έναν 2×2 πίνακα.)

(β) Κάντε το ίδιο για την $f \cdot g$.

(γ) Κάντε το ίδιο για την $f \circ g$.

(δ) Αποδείξτε ότι κάθε άρτια συνάρτηση f γράφεται $f(x) = g(|x|)$, για άπειρες το πλήθος συναρτήσεις g.

∗**13.** (α) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ γράφεται $f = E + O$, όπου η E είναι άρτια και η O περιττή.

(β) Αποδείξτε ότι αυτός ο τρόπος γραφής της f είναι μοναδικός. (Αν προσπαθήσετε να κάνετε το μέρος (β) πρώτα, «λύνοντας» ως προς E και O, θα βρείτε πιθανότατα και τη λύση του (α).)

14. Αν f είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, ορίζουμε μια καινούργια συνάρτηση $|f|$ με $|f|(x) = |f(x)|$. Αν f και g είναι συναρτήσεις, ορίζουμε δυο καινούργιες συναρτήσεις, $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$, με

$$\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x)),$$
$$\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Βρείτε μια έκφραση των $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$ με τη βοήθεια της $|\ \ |$.

15. (α) Δείξτε ότι $f = \max(f, 0) + \min(f, 0)$. Αυτός ο ειδικός τρόπος γραφής της f είναι εξαιρετικά χρήσιμος· οι συναρτήσεις $\max(f, 0)$ και $\min(f, 0)$ λέγονται το **θετικό** και το **αρνητικό μέρος** της f.

(β) Μια συνάρτηση f λέγεται **μη αρνητική** αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f γράφεται $f = g - h$, όπου η g και η h είναι μη αρνητικές, με άπειρους τρόπους. (Ο «συνηθισμένος τρόπος» είναι $g = \max(f, 0)$ και $h = -\min(f, 0)$.) Υπόδειξη: Κάθε *αριθμός* σίγουρα γράφεται ως διαφορά δύο μη αρνητικών *αριθμών* με άπειρους τρόπους.

∗**16.** Έστω ότι η f ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x και y.

(α) Αποδείξτε ότι $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε $f(x) = cx$ για κάθε *ρητό* αριθμό x (σε αυτό το σημείο δεν προσπαθούμε να πούμε τίποτα για το $f(x)$ όταν ο x είναι άρρητος). Υπόδειξη: Πρώτα σκεφτείτε ποιο πρέπει να είναι το c. Τώρα αποδείξτε ότι $f(x) = cx$, πρώτα όταν ο x είναι φυσικός αριθμός, μετά όταν ο x είναι ακέραιος, μετά όταν ο x είναι ο αντίστροφος ενός ακεραίου, και, τέλος, για κάθε ρητό x.

∗**17.** Αν $f(x) = 0$ για κάθε x, τότε η f ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x και y, καθώς και την $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε x και y. Έστω τώρα ότι η f ικανοποιεί αυτές τις δυο σχέσεις, αλλά ότι το $f(x)$ δεν είναι πάντα 0. Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε x, ως εξής:

(α) Αποδείξτε ότι $f(1) = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ αν ο x είναι ρητός.

(γ) Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ αν $x > 0$. (Αυτό το κομμάτι είναι πονηρό, αλλά αν προσέξατε τις «φιλοσοφικές» παρατηρήσεις που συνόδευαν τα προβλήματα στα τελευταία δύο κεφάλαια, θα ξέρετε τι να κάνετε.)

(δ) Αποδείξτε ότι $f(x) > f(y)$ αν $x > y$.

(ε) Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε x. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι ανάμεσα σε δύο τυχαίους αριθμούς υπάρχει ρητός αριθμός.

∗**18.** Ποιες ακριβώς συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι f, g, h και k έτσι ώστε να ισχύει $f(x)g(y) = h(x)k(y)$ για κάθε x και y;

∗**19.** (α) Αποδείξτε ότι *δεν* υπάρχουν συναρτήσεις f και g με μια από τις εξής ιδιότητες:

(i) $f(x) + g(y) = xy$ για κάθε x και y.

(ii) $f(x) \cdot g(y) = x + y$ για κάθε x και y.

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να πάρετε κάποιες πληροφορίες για την f ή την g δίνοντας συγκεκριμένες τιμές στα x και y.

(β) Βρείτε συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f(x + y) = g(xy)$ για κάθε x και y.

∗**20.** (α) Βρείτε μια συνάρτηση f, όχι σταθερή, τέτοια ώστε $|f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

(β) Έστω ότι $f(y) - f(x) \leq (y - x)^2$ για κάθε x και y. (Γιατί αυτό σημαίνει ότι $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$;). Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση. Υπόδειξη: Χωρίστε το διάστημα από το x έως στο y σε n ίσα μέρη.

21. Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

(α) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

(β) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

(γ) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

(δ) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \left(\dfrac{1}{g}\right)$.

22. (α) Έστω ότι $g = h \circ f$. Αποδείξτε ότι αν $f(x) = f(y)$, τότε $g(x) = g(y)$.

(β) Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι f και g είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε $g(x) = g(y)$ όποτε $f(x) = f(y)$. Αποδείξτε ότι $g = h \circ f$ για κάποια συνάρτηση h. Υπόδειξη: Δεν έχετε παρά να προσπαθήσετε να ορίσετε το $h(z)$ όταν το z είναι της μορφής $z = f(x)$ (αυτά είναι τα μόνα z που μας ενδιαφέρουν) και να χρησιμοποιήσετε τις υποθέσεις για να δείξετε ότι ο ορισμός σας δεν θα συναντήσει εμπόδια.

23. Έστω ότι $f \circ g = I$, όπου $I(x) = x$. Αποδείξτε ότι

(α) αν $x \neq y$, τότε $g(x) \neq g(y)$·

(β) κάθε αριθμός b γράφεται $b = f(a)$ για κάποιον αριθμό a.

∗**24.** (α) Έστω ότι g είναι μια συνάρτηση με την ιδιότητα ότι $g(x) \neq g(y)$ αν $x \neq y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $f \circ g = I$.

(β) Έστω ότι f είναι συνάρτηση τέτοια ώστε κάθε αριθμός b να γράφεται $b = f(a)$ για κάποιον αριθμό a. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε $f \circ g = I$.

∗**25.** Βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε $g \circ f = I$ για κάποια g, αλλά τέτοια ώστε να μην υπάρχει συνάρτηση h με $f \circ h = I$.

∗**26.** Υποθέτουμε ότι $f \circ g = I$ και $h \circ f = I$. Αποδείξτε ότι $g = h$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η σύνθεση είναι προσεταιριστική.

27. (α) Έστω ότι $f(x) = x + 1$. Υπάρχουν συναρτήσεις g τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$;

(β) Έστω ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση. Για ποιες συναρτήσεις g ισχύει $f \circ g = g \circ f$;

(γ) Έστω ότι $f \circ g = g \circ f$ για *όλες* τις συναρτήσεις g. Δείξτε ότι η f είναι η ταυτοτική συνάρτηση, $f(x) = x$.

28. (α) Έστω ότι F είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τις $+$ και $\cdot$ όπως ορίστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, ότι όλες οι ιδιότητες Ι1–Ι9 εκτός από την Ι7 ισχύουν στο F, όπου ως 0 και 1 παίρνουμε τις αντίστοιχες σταθερές συναρτήσεις.

(β) Δείξτε ότι η Ι7 δεν ισχύει.

∗(γ) Δείξτε ότι οι Ι10–Ι12 δεν μπορούν να ισχύουν. Με άλλα λόγια, δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο P από συναρτήσεις στο F, τέτοιο ώστε οι Ι10–Ι12 να ισχύουν για το P. (Αρκεί, και θα απλοποιήσει τα πράγματα, να θεωρήσετε μόνο συναρτήσεις που είναι 0 εκτός από δύο σημεία, το x_0 και το x_1.)

(δ) Έστω ότι ορίζουμε το $f < g$ να σημαίνει ότι $f(x) < g(x)$ για κάθε x. Ποιες από τις Ι′10–Ι′13 (του Προβλήματος 1-8) ισχύουν τώρα;

(ε) Αν $f < g$, είναι $h \circ f < h \circ g$; Είναι $f \circ h < g \circ h$;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΖΕΥΓΗ

Όχι μόνο στον ορισμό της συνάρτησης, αλλά και σε άλλα μέρη αυτού του βιβλίου, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους αντικειμένων. Ως τώρα δεν έχουμε δώσει κάποιον ορισμό, ούτε έχουμε αναφέρει με σαφήνεια ποιες ιδιότητες υποτίθεται ότι έχει ένα διατεταγμένο ζεύγος. Η μοναδική ιδιότητα που θα απαιτήσουμε διατυπώνει με τυπικό τρόπο το ότι το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) θα πρέπει να καθορίζεται από τα a και b, καθώς και από τη σειρά με την οποία δίνονται:

$$\text{αν } (a, b) = (c, d), \text{ τότε } a = c \text{ και } b = d.$$

Μπορούμε να χειριστούμε τα διατεταγμένα ζεύγη πιο εύκολα, αν απλώς εισάγουμε το (a, b) χωρίς να το ορίσουμε και υιοθετήσουμε τη βασική ιδιότητα σαν αξίωμα — αφού αυτή η ιδιότητα είναι το μόνο πράγμα που έχει σημασία στα διατεταγμένα ζεύγη, δεν υπάρχει σοβαρός λόγος να ανησυχούμε για το τι είναι «στην πραγματικότητα» ένα διατεταγμένο ζεύγος. Αυτοί που ικανοποιούνται από αυτήν τη θέση δεν χρειάζεται να διαβάσουν παραπέρα.

Το υπόλοιπο αυτού του σύντομου παραρτήματος απευθύνεται σε εκείνους τους αναγνώστες που δεν θα αισθανθούν άνετα αν τα διατεταγμένα ζεύγη δεν οριστούν με κάποιον τρόπο έτσι ώστε αυτή η βασική ιδιότητα να γίνει θεώρημα. Δεν υπάρχει λόγος να περιοριστούμε σε διατεταγμένα ζεύγη αριθμών· είναι το ίδιο λογικό, και το ίδιο σημαντικό, να έχουμε διαθέσιμη την έννοια ενός διατεταγμένου ζεύγους οποιωνδήποτε δύο μαθηματικών αντικειμένων. Αυτό σημαίνει ότι ο ορισμός μας θα πρέπει να περιέχει μόνο έννοιες κοινές σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Η μοναδική έννοια που διαπερνά όλες τις περιοχές των μαθηματικών είναι αυτή του συνόλου, και τα διατεταγμένα ζεύγη (όπως και κάθε τι στα μαθηματικά) μπορούν να οριστούν σε αυτό το πλαίσιο· ένα διατεταγμένο ζεύγος θα είναι τελικά κάποιο μάλλον ειδικό σύνολο.

Το σύνολο $\{a, b\}$, που περιέχει τα δύο στοιχεία a και b, είναι μια προφανής πρώτη επιλογή, αλλά δεν μας κάνει ως ορισμός του (a, b), γιατί δεν υπάρχει τρόπος να καθορίσουμε από το $\{a, b\}$ ποιο από τα a, b εννοούμε ως πρώτο στοιχείο. Ένας πιο ελπιδοφόρος υποψήφιος είναι το μάλλον εντυπωσιακό σύνολο:

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Αυτό το σύνολο έχει δύο στοιχεία, *καθένα* από τα οποία είναι ένα σύνολο· το ένα στοιχείο είναι το σύνολο $\{a\}$, που περιέχει μόνο το στοιχείο a, το άλλο είναι το σύνολο $\{a, b\}$. Όσο παράξενο και αν φαίνεται, θα ορίσουμε ως (a, b) αυτό το σύνολο. Η αιτιολόγηση αυτής της επιλογής δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί αμέσως μετά τον ορισμό —ο ορισμός λειτουργεί, και δεν υπάρχει ουσιαστικά τίποτε άλλο που να αξίζει να πούμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\boldsymbol{(a, b)} = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν $(a, b) = (c, d)$, τότε $a = c$ και $b = d$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η υπόθεση σημαίνει ότι

$$\{\{a\},\ \{a, b\}\} = \{\{c\},\ \{c, d\}\}.$$

Τώρα το $\{\{a\},\ \{a, b\}\}$ περιέχει ακριβώς δύο στοιχεία, το $\{a\}$ και το $\{a, b\}$· και το a είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο αυτών των δύο στοιχείων του $\{\{a\},\ \{a, b\}\}$. Ομοίως, το c είναι το μοναδικό κοινό στοιχείο των δύο στοιχείων του $\{\{c\},\ \{c, d\}\}$. Άρα $a = c$. Επομένως έχουμε

$$\{\{a\},\ \{a, b\}\} = \{\{a\},\ \{a, d\}\},$$

και απομένει να δείξουμε ότι $b = d$. Βολεύει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις.

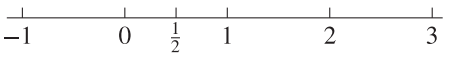
Περίπτωση 1. $b = a$. Σε αυτήν την περίπτωση, $\{a, b\} = \{a\}$, άρα το σύνολο $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ έχει στην πραγματικότητα μόνο ένα στοιχείο, το $\{a\}$. Το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το $\{\{a\}, \{a, d\}\}$, άρα $\{a, d\} = \{a\}$, που σημαίνει ότι $d = a = b$.

Περίπτωση 2. $b \neq a$. Σε αυτήν την περίπτωση, το b ανήκει σε κάποιο στοιχείο του $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ αλλά όχι στο άλλο. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι το b ανήκει σε κάποιο στοιχείο του $\{\{a\}, \{a, d\}\}$ αλλά όχι στο άλλο. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν το b ανήκει στο $\{a, d\}$, αλλά όχι στο $\{a\}$· άρα $b = a$ ή $b = d$, αλλά $b \neq a$· άρα $b = d$. ∎

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

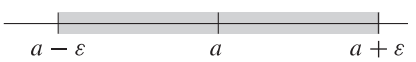
Αν αναφέρετε τους πραγματικούς αριθμούς σε έναν μαθηματικό, είναι πολύ πιθανό να σχηματιστεί, τελείως ασυνείδητα, στο μυαλό του η εικόνα μιας ευθείας γραμμής. Αλλά πολύ πιο πιθανό είναι ότι ούτε θα αποδοκιμάσει ούτε θα σπεύσει να ενστερνιστεί αυτήν τη νοητική εικόνα των πραγματικών αριθμών. Η «γεωμετρική» διαίσθηση θα του επιτρέψει να ερμηνεύσει προτάσεις που αφορούν τους αριθμούς με τη βοήθεια αυτής της εικόνας, μπορεί ακόμα και να του υποδείξει μεθόδους για να τις αποδείξει. Αν και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών που μελετήσαμε στο 1ο Μέρος δεν φωτίζονται ιδιαίτερα από ένα γεωμετρικό σχήμα, μια τέτοια ερμηνεία θα μας βοηθήσει πολύ στο 2ο Μέρος.

Είναι πιθανό να σας είναι ήδη γνωστή η καθιερωμένη μέθοδος με την οποία θεωρούμε την ευθεία ως εικόνα των πραγματικών αριθμών, με την οποία, δηλαδή, σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχούμε ένα σημείο μιας ευθείας. Για να το κάνουμε αυτό (Σχήμα 1) διαλέγουμε, τυχαία, ένα σημείο που το βαφτίζουμε 0, και ένα σημείο στα δεξιά του, που του δίνουμε το όνομα 1. Το σημείο που βρίσκεται δύο φορές πιο μακριά στα δεξιά ονομάζεται 2, το σημείο που απέχει όσο και το 1 από το 0, αλλά βρίσκεται στα αριστερά του 0, ονομάζεται -1, κτλ. Με αυτήν την τοποθέτηση, αν $a < b$, τότε το σημείο που αντιστοιχεί στο a βρίσκεται στα αριστερά του σημείου που αντιστοιχεί στο b. Μπορούμε ακόμα να σχεδιάσουμε ρητούς αριθμούς, όπως το $\frac{1}{2}$ με τον προφανή τρόπο. Συνήθως θεωρείται δεδομένο ότι και οι άρρητοι αριθμοί με κάποιον τρόπο ταιριάζουν σε αυτό το σχήμα, έτσι ώστε κάθε πραγματικός αριθμός να μπορεί να σχεδιαστεί ως ένα σημείο πάνω στην ευθεία. Δεν θα ασχοληθούμε και πολύ με την αιτιολόγηση αυτής της υπόθεσης, αφού αυτή η μέθοδος «σχεδίασης» των αριθμών, αποκλειστικό σκοπό έχει να χρησιμεύσει ως μια μέθοδος απεικόνισης κάποιων αφηρημένων ιδεών, και οι αποδείξεις μας δεν θα εξαρτώνται από αυτά τα σχήματα (αν και συχνά θα χρησιμοποιούμε ένα σχήμα για να υποδείξουμε ή να βοηθήσουμε να γίνει κατανοητή μια απόδειξη). Επειδή αυτή η γεωμετρική εικόνα παίζει έναν εξέχοντα, αν και μη ουσιώδη ρόλο, όταν μιλάμε για αριθμούς θα χρησιμοποιούμε συχνά τη γεωμετρική ορολογία —έτσι ένας αριθμός λέγεται μερικές φορές και *σημείο*, και το $\mathbf{R}$ συχνά αποκαλείται η *πραγματική ευθεία*.



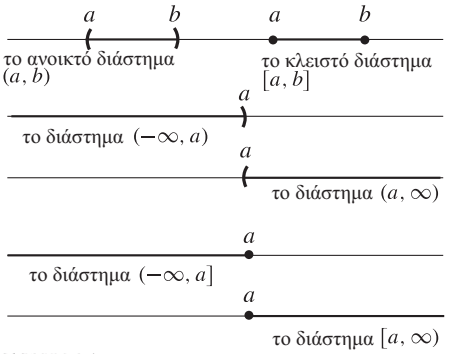
ΣΧΗΜΑ 1

Ο αριθμός $|a-b|$ έχει μια απλή ερμηνεία μέσω αυτής της γεωμετρικής εικόνας: είναι η απόσταση του a από το b, το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που έχει το a ως το ένα άκρο του και το b ως το άλλο. Αυτό σημαίνει —για να διαλέξουμε ένα παράδειγμα που η συχνή του εμφάνιση δικαιολογεί κάποια ειδική αναφορά σε αυτό— ότι το σύνολο των αριθμών x που ικανοποιούν την $|x-a| < \varepsilon$ μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο των σημείων που η απόστασή τους από το a είναι μικρότερη από ε. Αυτό το σύνολο σημείων είναι το «διάστημα» από το $a-\varepsilon$ στο $a+\varepsilon$, που περιγράφεται και ως το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν σε αριθμούς x με $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ (Σχήμα 2).

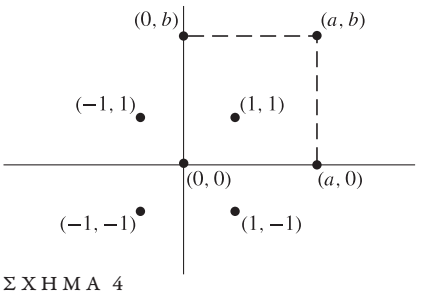


ΣΧΗΜΑ 2

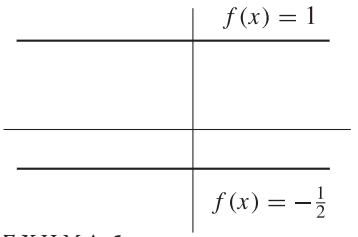
Τα σύνολα αριθμών που αντιστοιχούν σε διαστήματα εμφανίζονται τόσο συχνά που θα θέλαμε να έχουμε ειδικά ονόματα για αυτά. Το σύνολο $\{x : a < x < b\}$ συμβολίζεται με (a, b) και λέγεται το **ανοικτό διάστημα** από το a στο b. Αυτός ο συμβολισμός προκαλεί βέβαια κάποιες παρεξηγήσεις, αφού το (a, b) χρησιμοποιείται και ως σύμβολο ενός ζεύγους αριθμών, αλλά από τα συμφραζόμενα είναι πάντα σαφές (ή μπορεί εύκολα να γίνει σαφές) το αν μιλάμε για ένα ζεύγος ή για ένα διάστημα. Σημειώστε ότι, αν $a \geq b$, τότε $(a, b) = \emptyset$, το κενό σύνολο· στην πράξη όμως πάντοτε υποθέτουμε (και το δηλώνουμε αν είμαστε προσεκτικοί) πως, όταν αναφέρουμε ένα διάστημα (a, b), ο αριθμός a είναι μικρότερος από τον b.



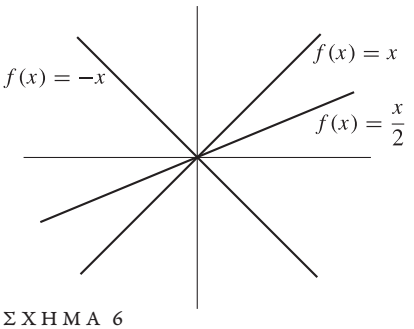
ΣΧΗΜΑ 3



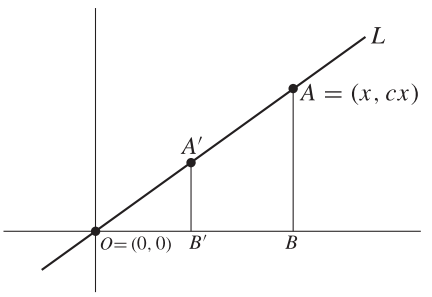
ΣΧΗΜΑ 4



ΣΧΗΜΑ 5



ΣΧΗΜΑ 6



ΣΧΗΜΑ 7

Το σύνολο $\{x : a \le x \le b\}$ συμβολίζεται με $[a, b]$ και λέγεται το **κλειστό διάστημα** από το a στο b. Συνήθως κρατάμε αυτό το σύμβολο για την περίπτωση $a < b$, μερικές όμως φορές χρησιμοποιείται και όταν $a = b$. Ο συνηθισμένος τρόπος απεικόνισης των διαστημάτων (a, b) και $[a, b]$ δίνεται στο Σχήμα 3· δεδομένου ότι κανένα σχήμα με λογικό βαθμό ακρίβειας δεν θα μπορούσε να υποδεικνύει τη διαφορά ανάμεσα στα δυο διαστήματα, έχουν υιοθετηθεί διάφορες συμβάσεις. Το Σχήμα 3 δείχνει και κάποια «άπειρα» διαστήματα. Το σύνολο $\{x : x > a\}$ συμβολίζεται με (a, ∞), ενώ το σύνολο $\{x : x \ge a\}$ με $[a, \infty)$· τα σύνολα $(-\infty, a)$ και $(-\infty, a]$ ορίζονται με τον ίδιο τρόπο. Στο σημείο αυτό πρέπει να σας απευθύνουμε την καθιερωμένη προειδοποίηση: τα σύμβολα ∞ και $-\infty$, αν και συνήθως διαβάζονται «άπειρο» και «πλην άπειρο», έχουν μια έννοια *γνήσια* συμβολική· δεν υπάρχει αριθμός «∞» που να ικανοποιεί την $\infty \ge a$ για όλους τους αριθμούς a. Καθώς τα σύμβολα ∞ και $-\infty$, θα εμφανίζονται σε διάφορες περιστάσεις, θα είναι πάντα απαραίτητο να ορίζουμε τη χρήση τους με τέτοιο τρόπο ώστε να αναφερόμαστε μόνο σε αριθμούς. Το σύνολο $\mathbf{R}$ όλων των πραγματικών αριθμών θεωρείται με τη σειρά του ως «διάστημα», και μερικές φορές συμβολίζεται με $(-\infty, \infty)$.

Ακόμα μεγαλύτερο ενδιαφέρον από τη μέθοδο σχεδίασης αριθμών, παρουσιάζει για μας μία μέθοδος σχεδίασης ζευγών από αριθμούς. Αυτή η διαδικασία, που μπορεί να σας είναι επίσης γνωστή, απαιτεί ένα «σύστημα συντεταγμένων», δύο ευθείες που τέμνονται κάθετα. Για να διακρίνουμε αυτές τις ευθείες, λέμε *οριζόντιο άξονα* τη μία, και *κατακόρυφο άξονα* την άλλη. (Μια πιο πεζή ορολογία, όπως ο «πρώτος» και ο «δεύτερος» άξονας, ίσως είναι προτιμότερη από λογική άποψη, αλλά οι περισσότεροι άνθρωποι κρατούν τα βιβλία τους, ή τουλάχιστον τους μαυροπίνακές τους, με τον ίδιο τρόπο, οπότε οι όροι «οριζόντιος» και «κατακόρυφος» είναι πιο παραστατικοί.) Σε καθένα από τους δύο άξονες μπορούμε να «τοποθετήσουμε» τους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε όμως και να βαφτίσουμε τα σημεία του οριζόντιου άξονα με ζεύγη $(a, 0)$, τα δε σημεία του κατακόρυφου άξονα με ζεύγη $(0, b)$, έτσι ώστε η τομή των δύο αξόνων, η «αρχή» του συστήματος συντεταγμένων, να έχει το όνομα $(0, 0)$. Κάθε σημείο (a, b) σχεδιάζεται τώρα όπως στο Σχήμα 4, έτσι ώστε να βρίσκεται στην κορυφή του ορθογωνίου του οποίου οι άλλες τρεις κορυφές έχουν τα ονόματα $(0, 0)$, $(a, 0)$ και $(0, b)$. Οι αριθμοί a και b λέγονται η *πρώτη* και η *δεύτερη συντεταγμένη*, αντίστοιχα, του σημείου που καθορίζεται με αυτόν τον τρόπο.

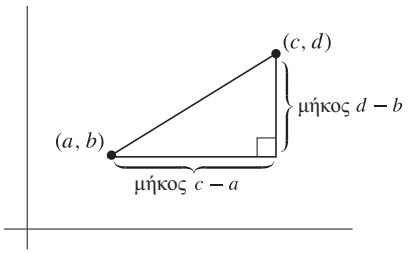
Αυτό που μας ενδιαφέρει πραγματικά, θυμηθείτε, είναι να βρούμε μια μέθοδο για να σχεδιάζουμε συναρτήσεις. Αφού μια συνάρτηση δεν είναι τίποτε άλλο από ένα σύνολο ζευγών από αριθμούς, μπορούμε να σχεδιάσουμε μια συνάρτηση σχεδιάζοντας καθένα από τα ζεύγη της συνάρτησης. Το σχήμα που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο λέγεται η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης. Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση της f περιέχει όλα τα σημεία που αντιστοιχούν σε ζεύγη $(x, f(x))$. Αφού οι περισσότερες συναρτήσεις περιέχουν άπειρα το πλήθος ζεύγη, η σχεδίαση μιας γραφικής παράστασης προβλέπεται επίπονο εγχείρημα, αλλά, στην πράξη, πολλές συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που σχεδιάζονται πολύ εύκολα.

Δεν προκαλεί καμία έκπληξη το γεγονός ότι οι απλούστερες συναρτήσεις, οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = c$, έχουν τις απλούστερες γραφικές παραστάσεις. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = c$ είναι μια ευθεία παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα, σε απόσταση c από αυτόν (Σχήμα 5).

Οι συναρτήσεις $f(x) = cx$ έχουν και αυτές πολύ απλές γραφικές παραστάσεις — ευθείες που περνούν από το $(0, 0)$, όπως στο Σχήμα 6. Μια απόδειξη αυτού του γεγονότος μάς υποδεικνύει το Σχήμα 7: Έστω x κάποιος αριθμός όχι ίσος με 0, και L η ευθεία που περνά από την αρχή O, που αντιστοιχεί στο $(0, 0)$, και από το σημείο A, που αντιστοιχεί στο (x, cx). Ένα σημείο A', με πρώτη συντεταγμένη y, θα ανήκει στην L αν το τρίγωνο $A'B'O$ είναι όμοιο με το τρίγωνο ABO δηλαδή αν

$$\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB} = c\cdot$$

αλλά αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν το A' αντιστοιχεί στο ζεύγος (y, cy), δηλαδή όταν το A' βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f. Για την απόδειξη υποθέσαμε σιωπηρά ότι $c > 0$, μπορούμε όμως αρκετά εύκολα να χειριστούμε και τις άλλες περιπτώσεις.

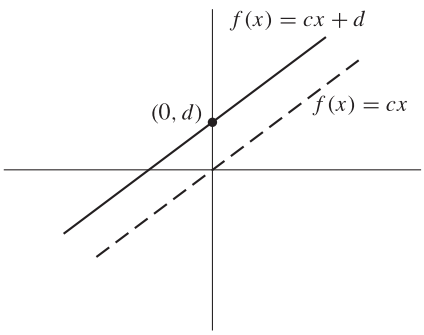


ΣΧΗΜΑ 8

Ο αριθμός c, που μετρά τον λόγο των πλευρών των τριγώνων που εμφανίζονται στην απόδειξη, λέγεται *κλίση* της ευθείας, και για κάθε ευθεία παράλληλη με αυτή λέμε ότι έχει την ίδια κλίση c.

Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δεν μπορούμε ούτε να το ονομάσουμε, ούτε να το θεωρήσουμε τυπική απόδειξη. Πραγματικά, για να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη θα ήταν αναγκαίο να κάνουμε μια παρέκβαση που δεν είμαστε καθόλου έτοιμοι να ακολουθήσουμε. Η αυστηρή απόδειξη *οποιασδήποτε* πρότασης που συνδέει γεωμετρικές και αλγεβρικές έννοιες θα απαιτούσε πρώτα απ' όλα μια πραγματική απόδειξη (με ακριβώς διατυπωμένες υποθέσεις) του ότι τα σημεία μιας ευθείας αντιστοιχούν με συγκεκριμένο τρόπο στους πραγματικούς αριθμούς. Εκτός απ' αυτό, θα ήταν αναγκαίο να μελετήσουμε την επιπεδομετρία στο ίδιο βάθος που σκοπεύουμε να μελετήσουμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Βέβαια η λεπτομερής ανάπτυξη της επιπεδομετρίας είναι ένα ωραιότατο θέμα, αλλά σε καμία περίπτωση δεν προαπαιτείται για τη μελέτη του Απειροστικού Λογισμού. Θα χρησιμοποιούμε τα γεωμετρικά σχήματα μόνο ως βοήθεια στη διαίσθησή μας· για τους σκοπούς μας (και για τα περισσότερα μαθηματικά) είναι καθόλα ικανοποιητικό να *ορίσουμε* το επίπεδο ως το σύνολο όλων των ζευγών πραγματικών αριθμών, και να *ορίσουμε* τις ευθείες ως κάποια σύνολα ζευγών, που περιλαμβάνουν, ανάμεσα σε άλλα, τα σύνολα $\{(x, cx) : x \text{ πραγματικός αριθμός}\}$. Για να εφοδιάσουμε αυτήν την τεχνητά κατασκευασμένη γεωμετρία με όλη τη δομή της γεωμετρίας που διδαχθήκαμε στο Λύκειο, χρειάζεται ένας ακόμα ορισμός. Αν (a, b) και (c, d) είναι δύο σημεία του επιπέδου, δηλαδή ζεύγη πραγματικών αριθμών, *ορίζουμε* ως **απόσταση** των (a, b) και (c, d) το

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$



ΣΧΗΜΑ 9

Αν το κίνητρο για αυτόν τον ορισμό δεν σας είναι φανερό, το Σχήμα 8 δίνει τις απαραίτητες εξηγήσεις —με αυτόν τον ορισμό κατασκευάσαμε στη γεωμετρία μας το Πυθαγόρειο Θεώρημα.*

Επιστρέφοντας για άλλη μια φορά στο άτυπο γεωμετρικό μας σχήμα, δεν είναι δύσκολο να δούμε (Σχήμα 9) ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = cx + d$ είναι μια ευθεία με κλίση c, που περνά από το σημείο $(0, d)$. Για αυτόν το λόγο οι συναρτήσεις $f(x) = cx + d$ λέγονται **γραμμικές συναρτήσεις**. Απλές καθώς είναι, οι γραμμικές συναρτήσεις εμφανίζονται συχνά, και θα πρέπει να τις χειρίζεστε με άνεση. Το επόμενο είναι ένα τυπικό πρόβλημα του οποίου η λύση λογικά δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Αν σας δοθούν δύο διακεκριμένα σημεία (a, b) και (c, d), βρείτε τη γραμμική συνάρτηση f που η γραφική της παράσταση περνά από τα (a, b) και (c, d). Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι $f(a) = b$ και $f(c) = d$. Αν η f είναι της μορφής $f(x) = px + q$, τότε πρέπει να έχουμε

$$pa + q = b,$$
$$pc + q = d\cdot$$

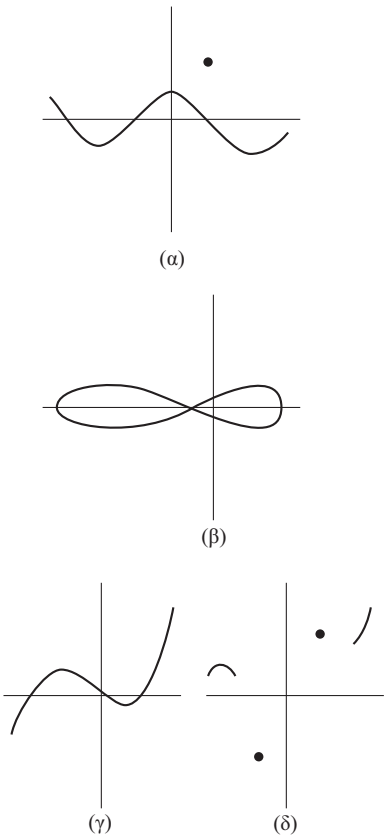
επομένως $p = (d-b)/(c-a)$ και $q = b - [(d-b)/(c-a)]a$, άρα

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}x + b - \frac{d-b}{c-a}a = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b,$$

έναν τύπο που μπορείτε να απομνημονεύσετε εύκολα χρησιμοποιώντας τη «μορφή σημείου-κλίσης» (βλ. Πρόβλημα 6).

Φυσικά, αυτή η λύση είναι δυνατή μόνο αν $a \neq c$· οι γραφικές παραστάσεις των γραμμικών συναρτήσεων αντιστοιχούν μόνο σε εκείνες τις ευθείες που δεν είναι παράλληλες με τον κατακόρυφο άξονα. Οι κατακόρυφες ευθείες δεν είναι γραφική παράσταση *καμίας* συνάρτησης· πραγματικά, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί

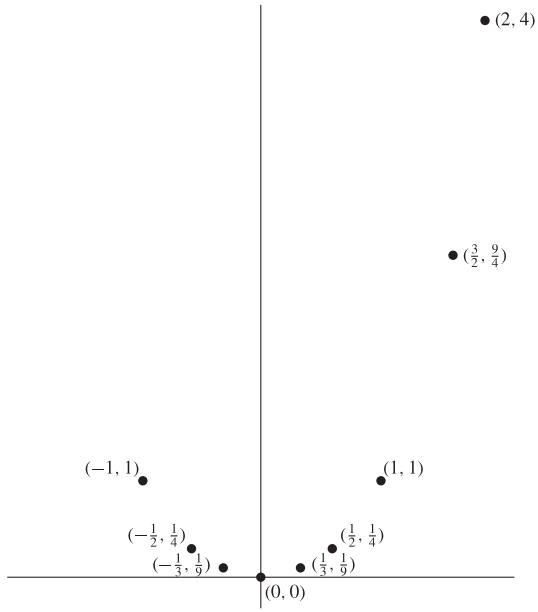
*Ο δύστροπος αναγνώστης ίσως προβάλει αντιρρήσεις σε αυτόν τον ορισμό, στη βάση του ότι δεν ξέρουμε ακόμα ότι οι μη αρνητικοί αριθμοί έχουν τετραγωνική ρίζα. Για την ώρα, είναι αλήθεια ότι δεν μπορούμε να απαντήσουμε σε αυτήν την αντίρρηση —θα πρέπει να δεχθείτε αυτόν τον ορισμό με επιφυλάξεις, μέχρι να διευκρινιστεί αυτό το μικρό σημείο.



ΣΧΗΜΑ 10

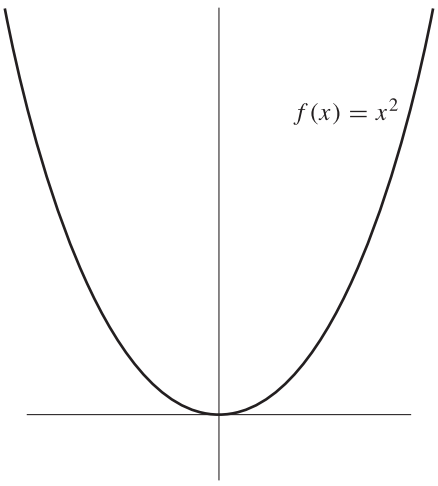
ποτέ να περιέχει δύο διαφορετικά σημεία πάνω στην ίδια κατακόρυφη. Αυτό το συμπέρασμα είναι άμεσο από τον ορισμό της συνάρτησης —δύο σημεία πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία αντιστοιχούν σε ζεύγη της μορφής (a, b) και (a, c) και, εξ ορισμού, μια συνάρτηση δεν μπορεί να περιέχει το (a, b) και το (a, c) αν $b \neq c$. Αντίστροφα, αν ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο έχει την ιδιότητα να μην υπάρχουν δύο σημεία του στην ίδια κατακόρυφη, τότε είναι σίγουρα η γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Έτσι τα πρώτα δύο σύνολα στο Σχήμα 10 δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, και τα τελευταία δύο είναι· παρατηρήστε ότι το τέταρτο είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που το πεδίο ορισμού της δεν είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$, αφού μερικές κατακόρυφες δεν περιέχουν κανένα σημείο του.

Η απλούστερη συνάρτηση, μετά τις γραμμικές, είναι ίσως η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Αν σχεδιάσουμε μερικά από τα ζεύγη της f, δηλαδή μερικά από τα ζεύγη της μορφής (x, x^2), παίρνουμε μια εικόνα σαν αυτή στο Σχήμα 11.



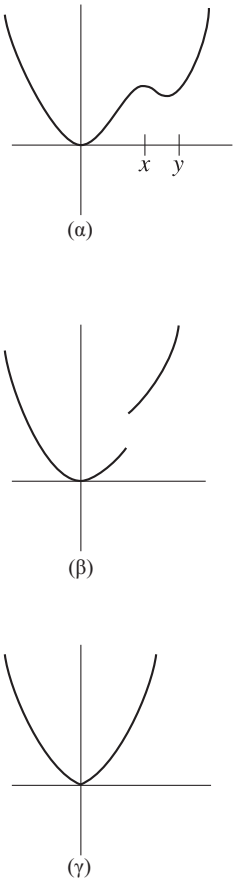
ΣΧΗΜΑ 11

Δεν είναι δύσκολο να πεισθείτε ότι όλα τα ζεύγη (x, x^2) βρίσκονται πάνω σε μια καμπύλη σαν αυτή στο Σχήμα 12· αυτή η καμπύλη είναι γνωστή ως **παραβολή**.



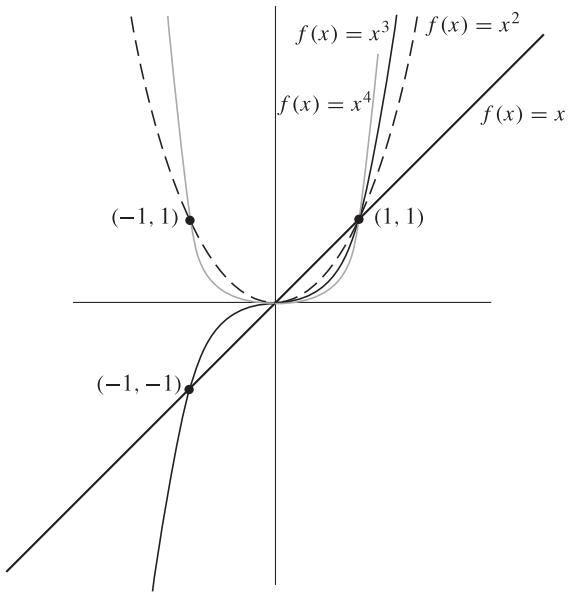
ΣΧΗΜΑ 12

Με δεδομένο το ότι μια γραφική παράσταση δεν είναι παρά ένα σχέδιο πάνω σε χαρτί, φτιαγμένο (στην περίπτωσή μας) με μελάνι, είναι δύσκολο να διατυπωθεί ένα ερώτημα της μορφής «Έτσι είναι στην πραγματικότητα η γραφική παράσταση;» έτσι ώστε να έχει κάποιο νόημα. Όχι, ένα σχέδιο δεν είναι ποτέ *πραγματικά* σωστό γιατί η γραμμή έχει πάχος. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν κάποια ερωτήματα τα οποία *μπορεί* κανείς να θέσει: για παράδειγμα, πώς είστε βέβαιοι ότι η γραφική παράσταση δεν μοιάζει με ένα από τα σχέδια στο Σχήμα 13; Είναι εύκολο να δείτε, και ακόμα να αποδείξετε, ότι η γραφική παράσταση δεν μπορεί να μοιάζει με το (α)· γιατί αν $0 < x < y$ τότε $x^2 < y^2$, άρα η γραφική παράσταση θα έπρεπε να είναι ψηλότερα στο y από ό,τι στο x, κάτι που δεν συμβαίνει στο (α). Είναι επίσης εύκολο να δείτε, σχεδιάζοντας μια πολύ ακριβή γραφική παράσταση, σχεδιάζοντας δηλαδή πολλά ζεύγη (x, x^2), ότι η γραφική παράσταση δεν μπορεί να έχει ένα μεγάλο «άλμα» όπως στο (β) ή μια «γωνία» όπως στο (γ). Για να αποδείξουμε όμως αυτούς τους ισχυρισμούς, χρειάζεται να πούμε πρώτα με μαθηματικό τρόπο, τι εννοούμε όταν λέμε ότι μια συνάρτηση δεν έχει «άλμα» ή «γωνία»· αυτές οι ιδέες περιέχουν ήδη κάποιες από τις θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού. Τελικά, θα πετύχουμε να τις ορίσουμε αυστηρά, εν τω μεταξύ όμως διασκεδάστε προσπαθώντας να ορίσετε αυτές τις έννοιες, και μετά να εξετάσετε τους ορισμούς σας κριτικά. Αργότερα, θα έχετε την ευκαιρία να συγκρίνετε τους ορισμούς σας με αυτούς στους οποίους συμφώνησαν οι μαθηματικοί. Αν η σύγκριση είναι ευνοϊκή, ασφαλώς θα σας αξίζουν συγχαρητήρια!



ΣΧΗΜΑ 13

Οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, για τους διάφορους φυσικούς αριθμούς n, λέγονται μερικές φορές και **συναρτήσεις δύναμης**. Μπορούμε να συγκρίνουμε πιο εύκολα τις γραφικές τους παραστάσεις, αν σχεδιάσουμε πολλές μαζί, όπως στο Σχήμα 14.

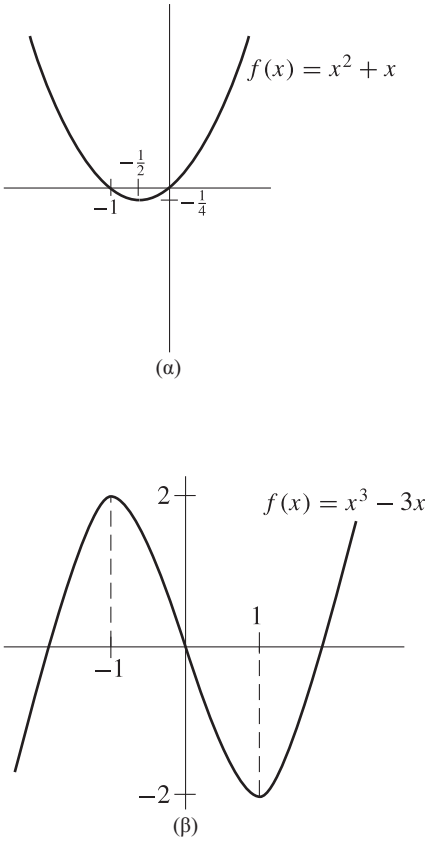


ΣΧΗΜΑ 14

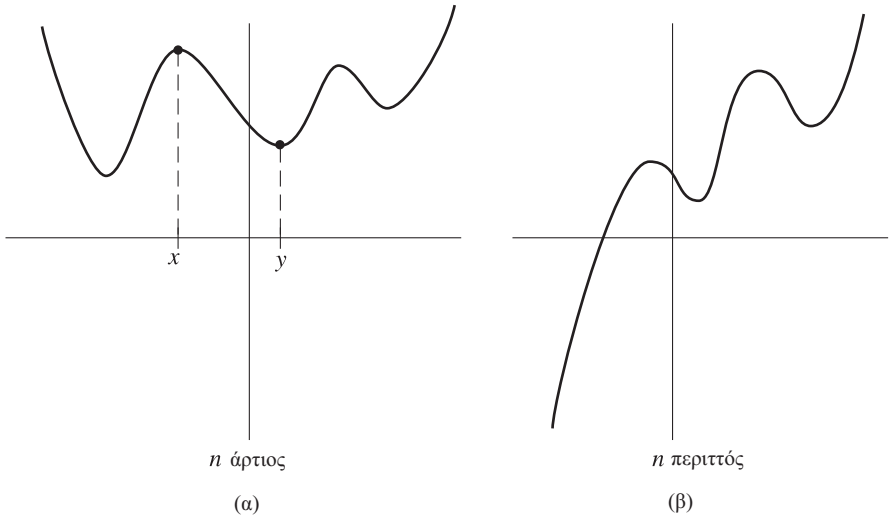
Οι συναρτήσεις δύναμης είναι ειδικές μόνο περιπτώσεις των πολυωνυμικών συναρτήσεων, που εισαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο Σχήμα 15 έχουμε σχεδιάσει δύο συγκεκριμένες πολυωνυμικές συναρτήσεις, ενώ στο Σχήμα 16 προσπαθούμε να δώσουμε μια γενική εικόνα της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

στην περίπτωση που $a_n > 0$.



ΣΧΗΜΑ 15

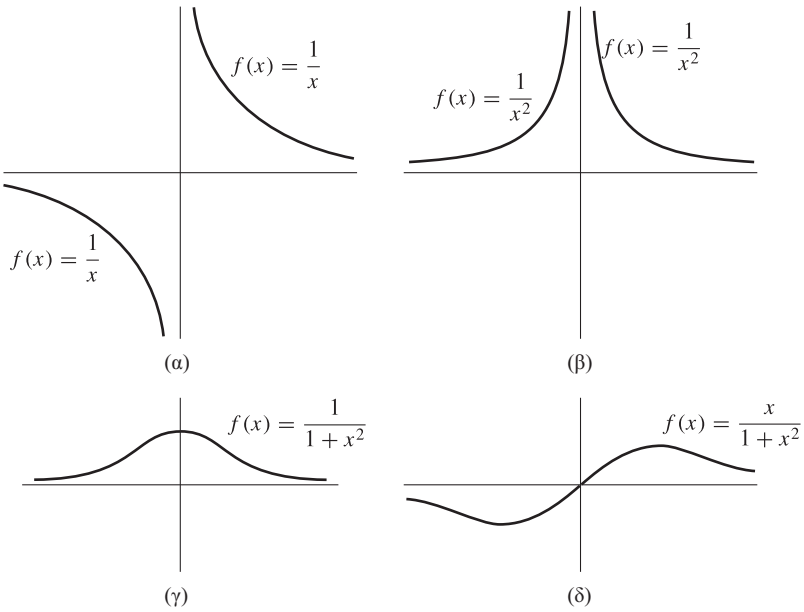


ΣΧΗΜΑ 16

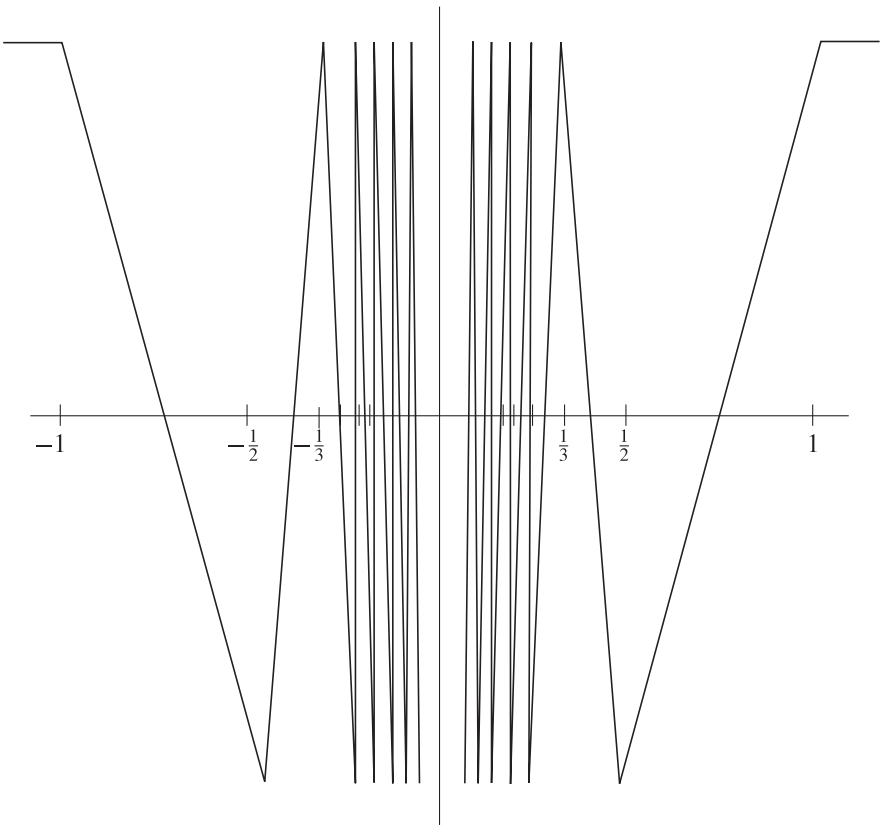
Γενικά, η γραφική παράσταση της f θα έχει το πολύ $n - 1$ «κορυφές» ή «κοιλάδες» («κορυφή» είναι ένα σημείο σαν το $(x, f(x))$ στο Σχήμα 16, ενώ «κοιλάδα» είναι ένα σημείο σαν το $(y, f(y))$. Το πλήθος των κορυφών και των κοιλάδων μπορεί στην πραγματικότητα να είναι πολύ μικρότερο (οι συναρτήσεις δύναμης, για παράδειγμα, έχουν το πολύ μια κοιλάδα). Αν και μπορούμε εύκολα να διατυπώνουμε τέτοιους ισχυρισμούς, δεν θα μας περάσει καν από το μυαλό να δώσουμε αποδείξεις μέχρι να φτάσουμε στο 3ο

Μέρος (από τη στιγμή που οι ισχυρές μέθοδοι του 3ου Μέρους θα είναι στη διάθεσή μας, οι αποδείξεις θα είναι πολύ εύκολες).

Το Σχήμα 17 περιγράφει τις γραφικές παραστάσεις μερικών ρητών συναρτήσεων. Οι ρητές συναρτήσεις εμφανίζουν ακόμα μεγαλύτερη ποικιλία από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, αλλά η συμπεριφορά τους αναλύεται επίσης εύκολα αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο, το βασικό εργαλείο του 3ου Μέρους.



ΣΧΗΜΑ 17



ΣΧΗΜΑ 18

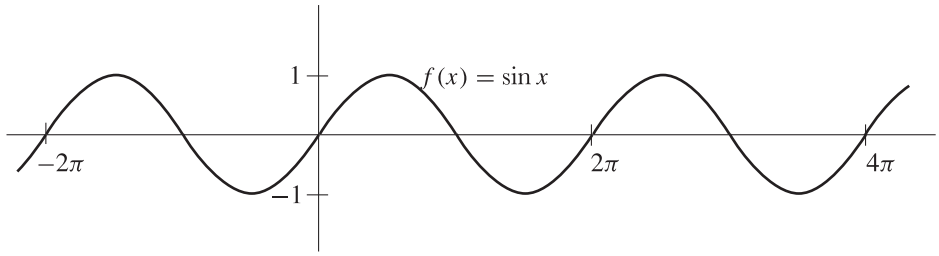
Πολλές ενδιαφέρουσες γραφικές παραστάσεις κατασκευάζονται αν «συγκολλήσουμε» τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που έχουμε ήδη μελετήσει. Η γραφική παράσταση του Σχήματος 18 αποτελείται εξ ολοκλήρου από ευθείες. Η συνάρτηση f με αυτήν τη γραφική παράσταση ικανοποιεί τις

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$
$$f\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{n+1},$$
$$f(x) = 1, \qquad |x| \geq 1,$$

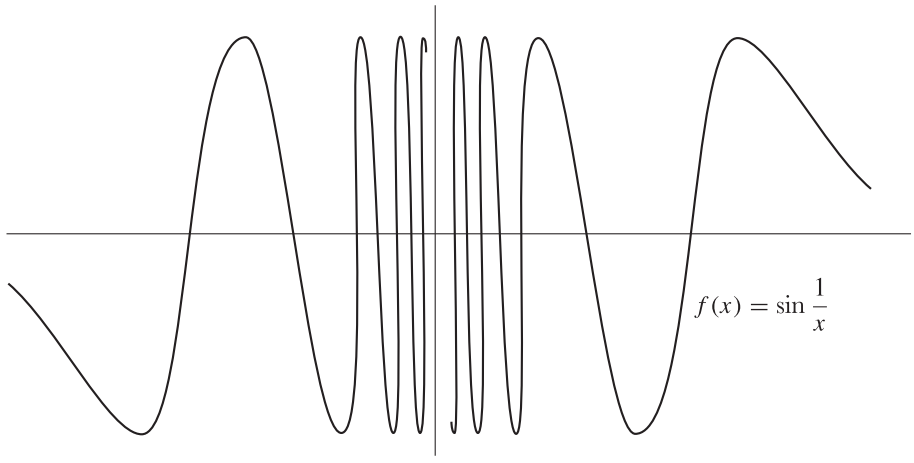
και είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $[1/(n+1), 1/n]$ και $[-1/n, -1/(n+1)]$. (Ο αριθμός 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f.) Βέβαια, μπορεί κανείς να γράψει έναν ακριβή τύπο για το $f(x)$, όταν το x είναι στο $[1/(n+1), 1/n]$· αυτή είναι μια καλή άσκηση πάνω στη χρήση των γραμμικών συναρτήσεων, και εκτός από αυτό θα σας πείσει ότι μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις.

Είναι επίσης δυνατόν να ορίσουμε, με έναν πολύ πιο απλό τρόπο, μια συνάρτηση που να παρουσιάζει ακριβώς αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή να ταλαντώνεται άπειρες φορές κοντά στο 0, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ημιτόνου, την οποία θα μελετήσουμε με λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 15. Ως συνήθως μετρούμε τις γωνίες σε ακτίνια, οπότε μια γωνία 2π σημαίνει μια γωνία «που διαγράφει έναν ολόκληρο» κύκλο, μια γωνία π σημαίνει μια γωνία «που διαγράφει μισό» κύκλο (ή 180° στη καθημερινή ορολογία), μια γωνία $\pi/2$ σημαίνει μια ορθή γωνία, κτλ.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου φαίνεται στο Σχήμα 19.



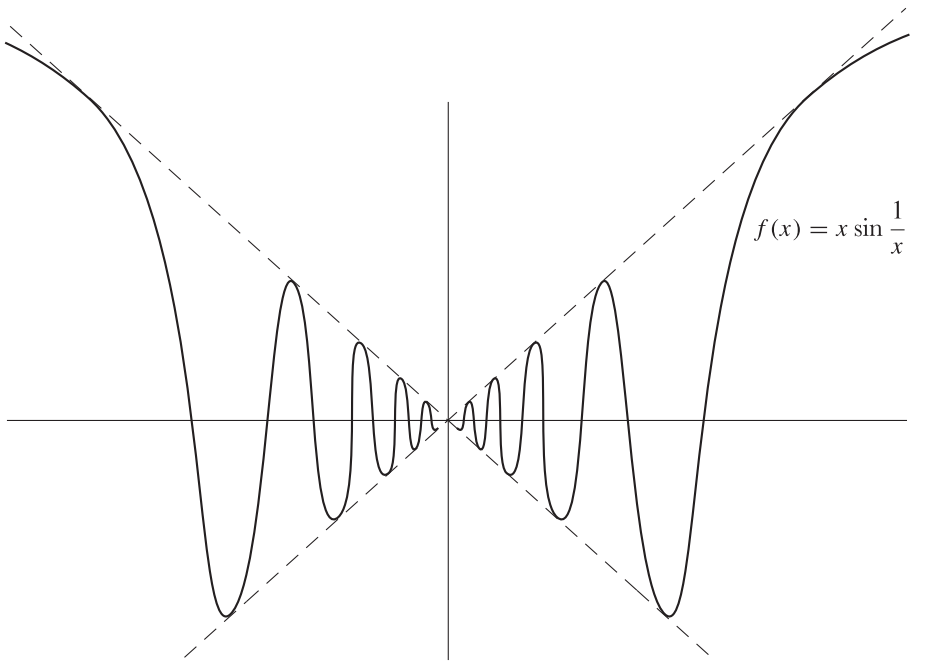
ΣΧΗΜΑ 19



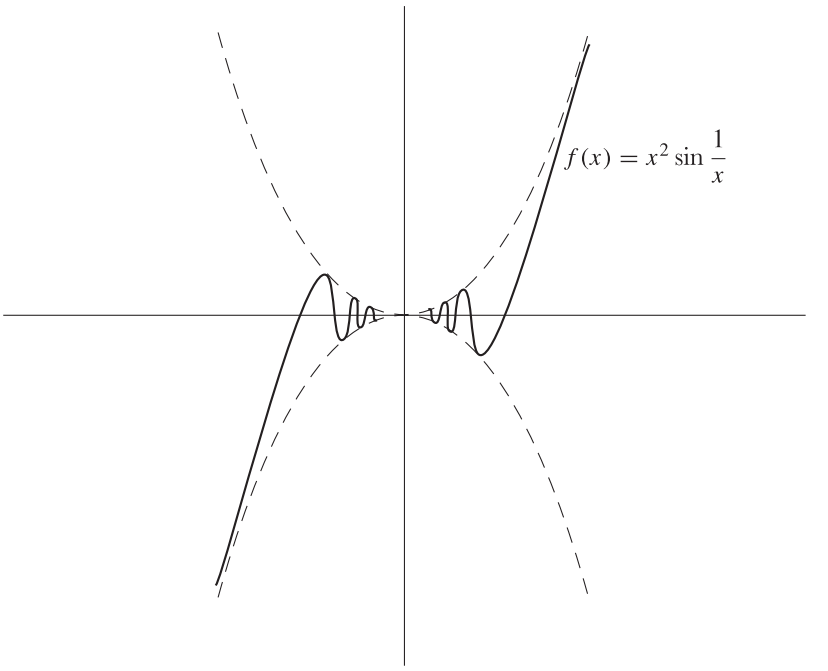
ΣΧΗΜΑ 20

Ας πάρουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = \sin 1/x$. Βλέπετε τη γραφική παράσταση της f στο Σχήμα 20. Για να ζωγραφίσετε αυτήν τη γραφική παράσταση θα βοηθήσει να παρατηρήσετε πρώτα ότι

$$f(x) = 0 \qquad \text{για } x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \ldots,$$
$$f(x) = 1 \qquad \text{για } x = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi}, \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi}, \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 4\pi}, \ldots,$$
$$f(x) = -1 \qquad \text{για } x = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi}, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}, \ldots.$$



ΣΧΗΜΑ 21



ΣΧΗΜΑ 22

Παρατηρήστε πως, όταν το x είναι μεγάλο, οπότε το $1/x$ είναι μικρό, το $f(x)$ είναι επίσης μικρό· όταν το x είναι «πολύ αρνητικό», δηλαδή, όταν το $|x|$ είναι μεγάλο για

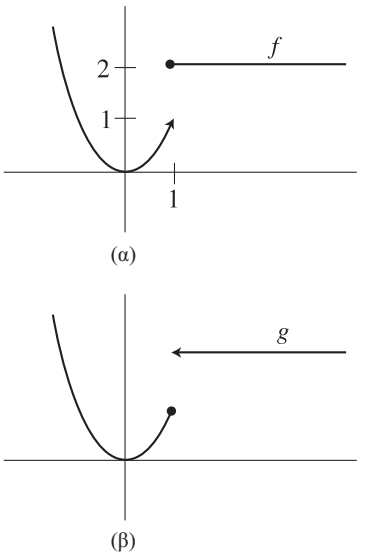
αρνητικό x, πάλι το $f(x)$ είναι κοντά στο 0, αν και $f(x) < 0$.

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή αυτής της συνάρτησης είναι η $f(x) = x \sin 1/x$. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης έχει σχεδιαστεί πρόχειρα στο Σχήμα 21. Αφού το $\sin 1/x$ ταλαντώνεται άπειρες φορές κοντά στο 0, μεταξύ του 1 και του -1, η συνάρτηση $f(x) = x \sin 1/x$ ταλαντώνεται άπειρες φορές μεταξύ του x και του $-x$. Η συμπεριφορά της γραφικής παράστασης για μεγάλα θετικά ή μεγάλα αρνητικά x είναι κάπως δυσκολότερο να αναλυθεί. Αφού το $\sin 1/x$ πλησιάζει το 0, ενώ το x γίνεται όλο και πιο μεγάλο, δεν υπάρχει κάτι που να μας λέει τι θα κάνει το γινόμενο. *Είναι* δυνατόν να το εξακριβώσουμε, αλλά αυτό είναι άλλο ζήτημα που καλύτερα είναι να το αναβάλλουμε για το 3ο Μέρος. Στο Σχήμα 22 δίνουμε και τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 \sin 1/x$.

Για αυτές τις συναρτήσεις με άπειρη ταλάντωση είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση δεν έχει καμία ελπίδα να είναι πραγματικά «ακριβής». Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να δείξουμε ένα τμήμα της και να αφήσουμε κενό το τμήμα κοντά στο 0 (που είναι το ενδιαφέρον τμήμα). Και μάλιστα, είναι εύκολο να βρούμε πολύ πιο απλές συναρτήσεις που η γραφική τους παράσταση να μη σχεδιάζεται «με ακρίβεια». Δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

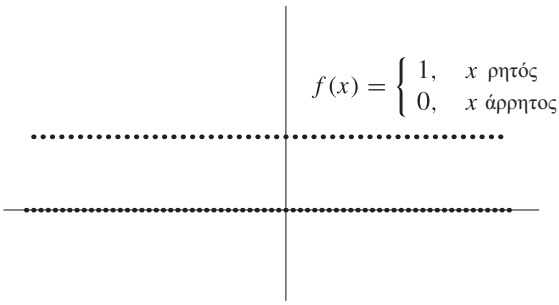
παρά μόνο αν δεχθούμε κάποια σύμβαση ανάλογη με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για τα ανοικτά και κλειστά διαστήματα (Σχήμα 23).



ΣΧΗΜΑ 23

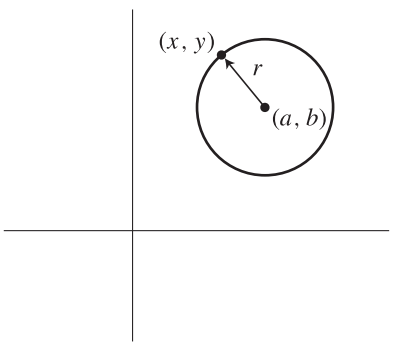
Το τελευταίο μας παράδειγμα είναι μια συνάρτηση που η γραφική της παράσταση είναι αδύνατον να σχεδιαστεί, και μάλιστα με έναν πολύ θεαματικό τρόπο:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1, & x \text{ ρητός.} \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 24

Η γραφική παράσταση της f πρέπει να περιέχει άπειρα σημεία στον οριζόντιο άξονα καθώς και άπειρα σημεία πάνω σε μια ευθεία παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, αλλά δεν πρέπει να περιέχει καμία από αυτές τις ευθείες ολόκληρη. Στο Σχήμα 24 βλέπετε την εικόνα που δίνουν συνήθως στα βιβλία για τη γραφική της παράσταση. Για να ξεχωρίσουμε τα δύο μέρη της γραφικής παράστασης, οι κουκκίδες είναι πιο πυκνά τοποθετημένες στην ευθεία που αντιστοιχεί στους άρρητους x. (Υπάρχει βέβαια μια μαθηματική αιτιολόγηση αυτής της σύμβασης, αλλά βασίζεται σε πιο λεπτές έννοιες, που εισάγονται στα Προβλήματα 21-5 και 21-6.)



ΣΧΗΜΑ 25

Οι ιδιαιτερότητες που εμφανίζονται σε μερικές συναρτήσεις είναι τόσο ελκυστικές, που είναι εύκολο να ξεχάσουμε μερικά από τα πιο απλά, και πιο σημαντικά, υποσύνολα του επιπέδου, που δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Το σπουδαιότερο παράδειγμα από όλα είναι ο **κύκλος**. Ο κύκλος με κέντρο (a, b) και ακτίνα $r > 0$ περιέχει, εξ ορισμού, όλα τα σημεία (x, y) που η απόστασή τους από το (a, b) είναι ίση με r. Ο κύκλος αποτελείται επομένως (Σχήμα 25) από όλα τα σημεία (x, y) με

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

ή

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Ο κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα 1, ο οποίος θεωρείται συχνά κάτι σαν ο εκπρόσωπος της οικογένειας, λέγεται ο *μοναδιαίος κύκλος*.

Ένας στενός συγγενής του κύκλου είναι η **έλλειψη**. Αυτή ορίζεται ως το σύνολο των σημείων που το *άθροισμα* των αποστάσεών τους από δύο «εστιακά» σημεία είναι σταθερό. (Όταν οι δύο εστίες ταυτίζονται, παίρνουμε έναν κύκλο.) Αν, για ευκολία, συμφωνήσουμε οι δύο εστίες να είναι το $(-c,0)$ και το $(c,0)$, και ως άθροισμα των αποστάσεων πάρουμε το $2a$ (ο παράγοντας 2 απλουστεύει κάποιους υπολογισμούς), τότε το (x,y) βρίσκεται πάνω στην έλλειψη αν και μόνο αν

$$\sqrt{(x-(-c))^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

ή

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ή

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

ή

$$4(cx-a^2)=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ή

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

ή

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

ή

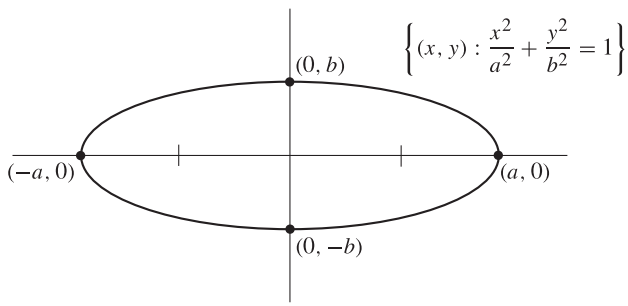
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Αυτή η σχέση γράφεται πιο απλά

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

όπου $b=\sqrt{a^2-c^2}$ (αφού προφανώς πρέπει να διαλέξουμε $a>c$, έπεται ότι $a^2-c^2>0$). Βλέπετε την εικόνα μιας έλλειψης στο Σχήμα 26. Η έλλειψη τέμνει τον οριζόντιο άξονα όταν $y=0$, άρα όταν

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad x=\pm a,$$



ΣΧΗΜΑ 26

και τον κατακόρυφο άξονα όταν $x=0$, δηλαδή

$$\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad y=\pm b.$$

Η **υπερβολή** ορίζεται ανάλογα, μόνο που απαιτούμε η *διαφορά* των δύο αποστάσεων να είναι σταθερή. Διαλέγοντας και πάλι τα σημεία $(-c, 0)$ και $(c, 0)$, και ως σταθερή απόσταση το $2a$, παίρνουμε, ως συνθήκη για να ανήκει το (x, y) στην υπερβολή, την

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

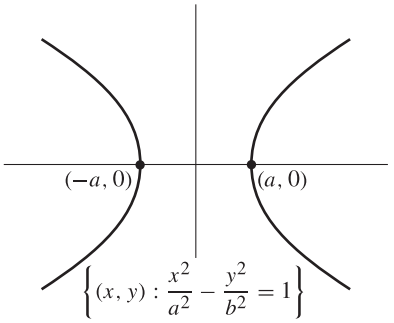
η οποία παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Σε αυτήν την περίπτωση όμως, πρέπει προφανώς να διαλέξουμε $c > a$, οπότε $a^2 - c^2 < 0$. Αν $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, τότε το (x, y) βρίσκεται πάνω στην υπερβολή αν και μόνο αν

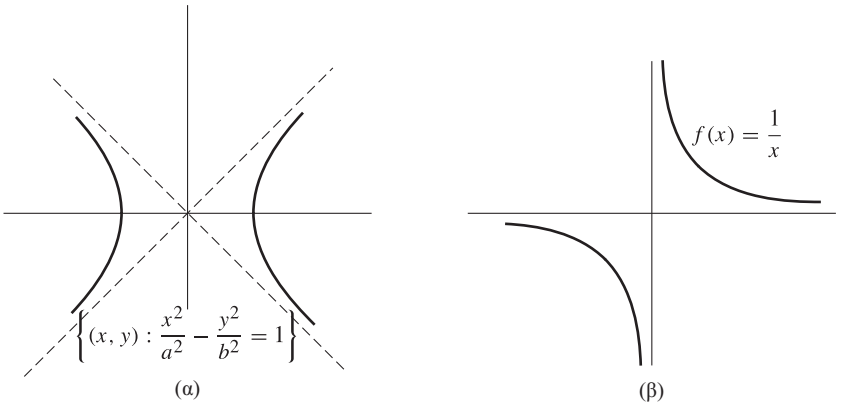
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Η εικόνα της φαίνεται στο Σχήμα 27. Αποτελείται από δύο κομμάτια, γιατί η διαφορά των αποστάσεων του (x, y) από τα $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ παίρνεται με δύο δυνατές διατάξεις. Η υπερβολή τέμνει τον οριζόντιο άξονα όταν $y = 0$, οπότε $x = \pm a$, αλλά δεν τέμνει πουθενά τον κατακόρυφο άξονα.



ΣΧΗΜΑ 27

Παρουσιάζει ενδιαφέρον το να συγκρίνουμε (Σχήμα 28) την υπερβολή με $a = b = \sqrt{2}$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1/x$. Τα σχήματα φαίνονται όμοια, και τα δύο σύνολα πραγματικά ταυτίζονται, αρκεί να κάνουμε μια στροφή κατά γωνία $\pi/4$ (Πρόβλημα 23).



ΣΧΗΜΑ 28

Προφανώς, καμία στροφή του επιπέδου δεν είναι ικανή να μεταμορφώσει έναν κύκλο ή μια έλλειψη σε γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης. Παρ' όλα αυτά, η μελέτη αυτών των σπουδαίων γεωμετρικών σχημάτων γίνεται να αναχθεί στη μελέτη συναρτήσεων. Οι ελλείψεις, για παράδειγμα, αποτελούνται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, της

$$f(x) = b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, \qquad -a \le x \le a$$

και της

$$g(x) = -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, \qquad -a \le x \le a.$$

Υπάρχουν, βέβαια, πολλά άλλα ζεύγη συναρτήσεων με την ίδια ακριβώς ιδιότητα. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & 0 < x \le a \\ -b\sqrt{1 - (x^2/a^2)}, & -a \le x \le 0 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & 0 < x \le a \\ b\sqrt{1-(x^2/a^2}, & -a \le x \le 0. \end{cases}$$

μπορούσαμε επίσης να διαλέξουμε

$$f(x) = \begin{cases} b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ ρητός}, \quad -a \le x \le a \\ -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ άρρητος}, -a \le x \le a \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} -b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ ρητός}, \quad -a \le x \le a \\ b\sqrt{1-(x^2/a^2)}, & x \text{ άρρητος}, -a \le x \le a. \end{cases}$$

Αλλά όλα αυτά τα άλλα ζεύγη περιέχουν αναγκαστικά παράλογες συναρτήσεις με άλματα εδώ και εκεί. Για την ώρα, είναι δύσκολο να δώσουμε μια απόδειξη, ή ακόμα και μια ακριβή διατύπωση αυτού του γεγονότος. Αν και είναι πιθανό να έχετε ήδη αρχίσει να διακρίνετε τις συναρτήσεις που έχουν φυσιολογικές γραφικές παραστάσεις, από αυτές που έχουν αφύσικες γραφικές παραστάσεις, ίσως σας είναι πολύ δύσκολο να διατυπώσετε ένα λογικό ορισμό των «λογικών» συναρτήσεων. Ο μαθηματικός ορισμός αυτής της έννοιας δεν είναι καθόλου εύκολο να δοθεί, και μεγάλο μέρος αυτού του βιβλίου θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια διαδικασία με διαδοχικές απόπειρες να επιβάλλουμε όλο και περισσότερες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί μια «λογική» συνάρτηση. Καθώς θα ορίζουμε διάφορες τέτοιες συνθήκες, θα έχουμε την ευκαιρία να αναρωτηθούμε αν έχουμε πραγματικά καταφέρει να απομονώσουμε τις συναρτήσεις που αξίζουν το χαρακτηρισμό «λογικές». Η απάντηση, δυστυχώς, θα είναι πάντοτε «όχι» ή στην καλύτερη περίπτωση, ένα επιφυλακτικό «ναι».

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Δείξτε σε μια ευθεία το σύνολο όλων των x που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες. Επίσης ονομάστε κάθε σύνολο, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό για τα διαστήματα (σε μερικές περιπτώσεις θα χρειαστείτε και το σύμβολο $\cup$).

(i) $|x-3| < 1$.

(ii) $|x-3| \le 1$.

(iii) $|x-a| < \varepsilon$.

(iv) $|x^2-1| < \dfrac{1}{2}$.

(v) $\dfrac{1}{1+x^2} \ge \frac{1}{5}$.

(vi) $\dfrac{1}{1+x^2} \le a$ (δώστε μια απάντηση συναρτήσει του a, διακρίνοντας διάφορες περιπτώσεις).

(vii) $x^2+1 \ge 2$.

(viii) $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$.

2. Υπάρχει ένας πολύ χρήσιμος τρόπος περιγραφής των σημείων του κλειστού διαστήματος $[a,b]$ (όπου υποθέτουμε, ως συνήθως, ότι $a < b$).

(α) Θεωρήστε πρώτα το διάστημα $[0,b]$, για $b > 0$. Αποδείξτε ότι αν το x είναι στο $[0,b]$, τότε $x = tb$ για κάποιο t με $0 \le t \le 1$. Ποια η σημασία του αριθμού t; Ποιο είναι το μεσαίο σημείο του $[0,b]$;

(β) Τώρα αποδείξτε ότι αν το x είναι στο $[a, b]$, τότε $x = (1-t)a + tb$ για κάποιο t με $0 \leq t \leq 1$. Υπόδειξη: Η έκφραση αυτή γράφεται επίσης με τη μορφή $a + t(b-a)$. Ποιο είναι το μέσον του $[a, b]$; Ποιο είναι το σημείο που βρίσκεται στο 1/3 της απόστασης του a από το b;

(γ) Αποδείξτε, αντιστρόφως, ότι αν $0 \leq t \leq 1$, τότε το $(1-t)a + tb$ είναι στο $[a, b]$.

(δ) Τα σημεία του *ανοικτού* διαστήματος (a, b) είναι αυτά της μορφής $(1-t)a + tb$ για $0 < t < 1$.

3. Σχεδιάστε το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες. (Στις περισσότερες περιπτώσεις το σχήμα σας θα είναι ένα αρκετά μεγάλο κομμάτι του επιπέδου, όχι μόνο μια ευθεία ή καμπύλη.)

(i) $x > y$.

(ii) $x + a > y + b$.

(iii) $y < x^2$.

(iv) $y \leq x^2$.

(v) $|x - y| < 1$.

(vi) $|x + y| < 1$.

(vii) Ο $x + y$ είναι ακέραιος.

(viii) Ο $\dfrac{1}{x+y}$ είναι ακέραιος.

(ix) $(x-1)^2 + (y-2)^2 < 1$.

(x) $x^2 < y < x^4$.

4. Σχεδιάστε το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(i) $|x| + |y| = 1$.

(ii) $|x| - |y| = 1$.

(iii) $|x - 1| = |y - 1|$.

(iv) $|1 - x| = |y - 1|$.

(v) $x^2 + y^2 = 0$.

(vi) $xy = 0$.

(vii) $x^2 - 2x + y^2 = 4$.

(viii) $x^2 = y^2$.

5. Σχεδιάστε το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

(i) $x = y^2$.

(ii) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$.

(iii) $x = |y|$.

(iv) $x = \sin y$.

Υπόδειξη: Αν εναλλάξουμε τα x και y, οι απαντήσεις σάς είναι ήδη γνωστές.

6. (α) Δείξτε ότι η ευθεία που περνά από το (a, b) και έχει κλίση m είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = m(x-a) + b$. Αυτός ο τύπος, γνωστός ως «μορφή σημείου-κλίσης» είναι πολύ πιο εύχρηστος από την ισοδύναμη έκφραση $f(x) = mx + (b - ma)$. Είναι αμέσως φανερό από τη μορφή σημείου-κλίσης ότι η κλίση είναι m, και ότι η τιμή της f στο a είναι b.

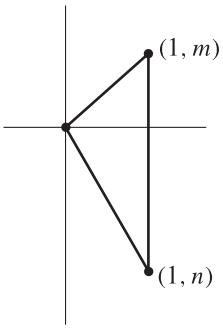
(β) Για $a \neq c$, δείξτε ότι η ευθεία που περνά από τα (a, b) και (c, d) είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{d-b}{c-a}(x-a) + b.$$

(γ) Πότε οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = mx + b$ και $g(x) = m'x + b'$ είναι παράλληλες ευθείες;

7. (α) Για οποιουσδήποτε αριθμούς A, B και C, με τους A και B όχι ταυτόχρονα 0, δείξτε ότι το σύνολο όλων των (x, y) που ικανοποιούν την $Ax + By + C = 0$ είναι μια ευθεία (πιθανόν κατακόρυφη). Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα, πότε η σχέση περιγράφει μια κατακόρυφη ευθεία.

(β) Αντίστροφα, δείξτε ότι κάθε ευθεία, συμπεριλαμβανομένων και των κατακόρυφων, μπορεί να περιγραφεί ως το σύνολο όλων των (x, y) που ικανοποιούν την $Ax + By + C = 0$.



ΣΧΗΜΑ 29

8. (α) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = mx + b,$$
$$g(x) = nx + c,$$

είναι κάθετες αν $mn = -1$, υπολογίζοντας τα τετράγωνα των μηκών των πλευρών του τριγώνου στο Σχήμα 29. (Γιατί αυτή η ειδική περίπτωση, όπου οι ευθείες τέμνονται στην αρχή των αξόνων, είναι το ίδιο καλή με τη γενική περίπτωση;)

(β) Αποδείξτε ότι οι δύο ευθείες που αποτελούνται από όλα τα (x, y) που ικανοποιούν τις συνθήκες

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

είναι κάθετες αν και μόνο αν $AA' + BB' = 0$.

9. (α) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 1-19, ότι

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} + \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}.$$

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}.$$

Ερμηνεύστε αυτήν την ανισότητα γεωμετρικά (ονομάζεται «τριγωνική ανισότητα»). Πότε ισχύει γνήσια ανισότητα;

10. Σχεδιάστε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που ακολουθούν, βρίσκοντας αρκετά σημεία για να πάρετε μια καλή ιδέα του πώς είναι περίπου. (Είναι μέρος του προβλήματος να πάρετε μια απόφαση για το πόσα είναι τα «αρκετά»· τα ερωτήματα που θέτουμε πιο κάτω έχουν σκοπό να δείξουν ότι λίγη σκέψη είναι συχνά πιο σημαντική από εκατοντάδες μεμονωμένων σημείων.)

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. (Τί συμβαίνει για x κοντά στο 0, και για μεγάλα x; Πού βρίσκεται η γραφική παράσταση σε σχέση με τη γραφική παράσταση της ταυτοτικής συνάρτησης; Γιατί αρκεί να θεωρήσουμε μόνο θετικά x αρχικά;)

(ii) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

(iii) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

(iv) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2}$.

11. Περιγράψτε τη γενική εικόνα της γραφικής παράστασης της f αν

(i) η f είναι άρτια.

(ii) η f είναι περιττή.

(iii) η f είναι μη αρνητική.

(iv) $f(x) = f(x+a)$ για κάθε x. (Μια συνάρτηση με αυτήν την ιδιότητα λέγεται **περιοδική** με **περίοδο** a.)

12. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[m]{x}$ για $m = 1, 2, 3, 4$. (Υπάρχει ένας εύκολος τρόπος να το κάνετε, χρησιμοποιώντας το Σχήμα 14. Μην ξεχνάτε, όμως, ότι με $\sqrt[m]{x}$ εννοούμε τη *θετική* m-οστή ρίζα του x όταν ο m είναι άρτιος. Θα πρέπει ακόμα να σημειώσετε ότι υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στη γραφική παράσταση όταν ο m είναι άρτιος και όταν ο m είναι περιττός.)

13. (α) Σχεδιάστε την $f(x) = |x|$ και την $f(x) = x^2$.

(β) Σχεδιάστε την $f(x) = |\sin x|$ και την $f(x) = \sin^2 x$. (Υπάρχει μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις, που δεν μπορούμε για την ώρα να την περιγράψουμε αυστηρά. Δείτε αν μπορείτε να την ανακαλύψετε· το μέρος (α) δίνεται ως ένδειξη.)

14. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση της g με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f αν

(i) $g(x) = f(x) + c$.

(ii) $g(x) = f(x + c)$. (Είναι εύκολο να κάνετε λάθος εδώ.)

(iii) $g(x) = cf(x)$.

(iv) $g(x) = f(cx)$. (Διακρίνετε τις περιπτώσεις $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.)

(v) $g(x) = f(1/x)$.

(vi) $g(x) = f(|x|)$.

(vii) $g(x) = |f(x)|$.

(viii) $g(x) = \max(f, 0)$.

(ix) $g(x) = \min(f, 0)$.

(x) $g(x) = \max(f, 1)$.

15. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + c$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις μεθόδους του Προβλήματος 1-18.

16. Έστω ότι τα A και C δεν είναι και τα δύο μηδέν. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$$

είναι ή παραβολή ή έλλειψη ή υπερβολή (ή μια «εκφυλισμένη περίπτωση»: δύο ευθείες [είτε τεμνόμενες είτε παράλληλες], μία ευθεία, ένα σημείο, ή το Ø). Υπόδειξη: Η περίπτωση $C = 0$ είναι ουσιαστικά το Πρόβλημα 15, και η περίπτωση $A = 0$ είναι απλώς μια μικρή παραλλαγή. Θεωρήστε τώρα ξεχωριστά τις περιπτώσεις που τα A και B είναι και τα δύο θετικά ή αρνητικά ή το ένα θετικό και το άλλο αρνητικό. Πότε έχουμε κύκλο;

17. Το σύμβολο $[x]$ παριστάνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι $\leq x$. Έτσι $[2,1] = [2] = 2$, και $[-0,9] = [-1] = -1$. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων. (Είναι όλες πολύ ενδιαφέρουσες, και αρκετές από αυτές θα εμφανίζονται συχνά σε άλλα προβλήματα.)

(i) $f(x) = [x]$.

(ii) $f(x) = x - [x]$.

(iii) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.

(iv) $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.

(v) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$.

18. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \{x\}$, όπου ως $\{x\}$ ορίζουμε την απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο.

(ii) $f(x) = \{2x\}$.

(iii) $f(x) = \{x\} + \dfrac{1}{2}\{2x\}$.

(iv) $f(x) = \{4x\}$.

(v) $f(x) = \{x\} + \dfrac{1}{2}\{2x\} + \dfrac{1}{4}\{4x\}$.

Πολλές συναρτήσεις περιγράφονται με βάση το δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού. Αν και δεν θα έχουμε τη δυνατότητα να περιγράψουμε αυστηρά τα άπειρα δεκαδικά ψηφία μέχρι το Κεφάλαιο 23, η διαισθητική σας αντίληψη για τα άπειρα δεκαδικά ψηφία πρέπει να αρκεί για να ανταπεξέλθετε στο επόμενο πρόβλημα, και σε άλλα που θα εμφανιστούν πριν από το Κεφάλαιο 23. Υπάρχει μια ασάφεια γύρω από τα άπειρα δεκαδικά ψηφία που πρέπει να τη διευκρινίσουμε: κάθε δεκαδικός αριθμός που καταλήγει σε μια αλυσίδα από 9 είναι ίσος με έναν άλλο που τελειώνει σε μια αλυσίδα από 0 (π.χ. $1,23999\ldots = 1,24000\ldots$). Θα χρησιμοποιούμε πάντα αυτήν που λήγει σε 9.

∗**19.** Περιγράψτε, όσο πιο καλά μπορείτε, τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων. (Συνήθως δεν συζητάμε καθόλου για ένα πλήρες σχήμα.)

(i) $f(x) =$ ο πρώτος αριθμός στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x.

(ii) $f(x) =$ ο δεύτερος αριθμός στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x.

(iii) $f(x) =$ το πλήθος των 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x, αν αυτός ο αριθμός είναι πεπερασμένος, αλλιώς 0.

(iv) $f(x) = 0$ αν το πλήθος των 7 στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x είναι πεπερασμένο, αλλιώς 1.

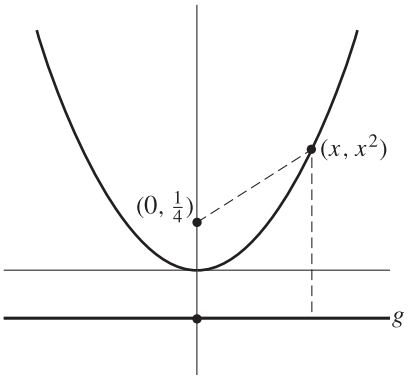
(v) $f(x) =$ ο αριθμός που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε όλα τα ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος του x που έρχονται μετά το πρώτο 7 (αν υπάρχουν τέτοια) με 0.

(vi) $f(x) = 0$ αν το 1 δεν εμφανίζεται καθόλου στο δεκαδικό ανάπτυγμα του x, και n αν το 1 εμφανίζεται για πρώτη φορά στη n-οστή θέση.

∗**20.** Θέτουμε

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ ρητός, όπου } p/q \text{ ανάγωγο.} \end{cases}$$

(Ένα κλάσμα p/q λέγεται **ανάγωγο** αν οι p και q είναι ακέραιοι που δεν έχουν κοινό διαιρέτη, και $q > 0$). Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f όσο πιο καλά μπορείτε (μην αραδιάσετε στην τύχη σημεία στο χαρτί· θεωρήστε πρώτα τους ρητούς αριθμούς με $q = 2$, μετά αυτούς με $q = 3$, κτλ.)



ΣΧΗΜΑ 30

21. (α) Τα σημεία στη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ είναι αυτά της μορφής (x, x^2). Αποδείξτε ότι κάθε τέτοιο σημείο απέχει εξίσου από το σημείο $(0, \frac{1}{4})$ και από τη γραφική παράσταση της $g(x) = -\frac{1}{4}$. (Βλ. Σχήμα 30.)

(β) Αν δοθεί μια οριζόντια ευθεία L, η γραφική παράσταση της $g(x) = \gamma$, και ένα σημείο $P = (\alpha, \beta)$ που δεν ανήκει στην L, έτσι ώστε $\gamma \neq \beta$, δείξτε ότι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) που ισαπέχουν από το P και την L είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ποιο είναι αυτό το σύνολο αν $\gamma = \beta$;

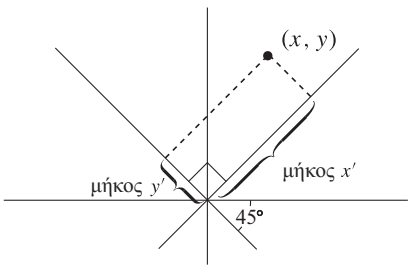
***22.** (α) Δείξτε ότι το τετράγωνο της απόστασης του (c, d) από το (x, mx) είναι

$$x^2(m^2 + 1) + x(-2md - 2c) + d^2 + c^2.$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 1-18 για να βρείτε τον ελάχιστο από αυτούς τους αριθμούς, δείξτε ότι η απόσταση του (c, d) από τη γραφική παράσταση της $f(x) = mx$ είναι

$$|cm - d|/\sqrt{m^2 + 1}.$$

(β) Βρείτε την απόσταση του (c, d) από τη γραφική παράσταση της $f(x) = mx + b$. (Αναγάγετε αυτήν την περίπτωση στο μέρος (α).)



ΣΧΗΜΑ 31

***23.** (α) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 22, δείξτε ότι οι αριθμοί x' και y' που δείχνουμε στο Σχήμα 31 δίνονται από τις

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y,$$
$$y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y.$$

(β) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των (x, y) με $(x'/\sqrt{2})^2 - (y'/\sqrt{2})^2 = 1$ είναι το ίδιο με το σύνολο όλων των (x, y) με $xy = 1$.

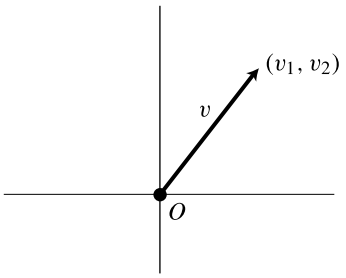
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω ότι το v είναι ένα σημείο του επιπέδου· με άλλα λόγια, το v είναι ένα ζεύγος αριθμών

$$v = (v_1, v_2).$$

Για ευκολία, θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη σύμβαση και θα υποδηλώνουμε με τη βοήθεια των δεικτών το πρώτο και το δεύτερο στοιχείο του σημείου που περιγράφεται από ένα και μόνο γράμμα. Έτσι, όταν αναφερόμαστε στα σημεία w και z, θα εννοούμε ότι το w είναι το ζεύγος (w_1, w_2), ενώ το z είναι το ζεύγος (z_1, z_2).

Αντί για το ζεύγος των αριθμών (v_1, v_2), συχνά αναπαριστούμε το v με τη μορφή ενός βέλους που ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και καταλήγει σε αυτό το σημείο (Σχήμα 1), και αναφερόμαστε σε αυτά τα βέλη ως *διανύσματα* του επιπέδου. Προς το παρόν, δεν έχουμε πει φυσικά τίποτα καινούργιο. Εισαγάγαμε απλώς έναν εναλλακτικό όρο για ένα σημείο του επιπέδου και μια άλλη νοητή εικόνα. Ο πραγματικός στόχος της νέας ορολογίας είναι να τονίσει ότι με τα σημεία του επιπέδου πρόκειται να κάνουμε κάποια καινούργια πράγματα.



ΣΧΗΜΑ 1

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο διανύσματα (δηλαδή σημεία) του επιπέδου, τα

$$v = (v_1, v_2), \quad w = (w_1, w_2).$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο διάνυσμα (ένα νέο σημείο του επιπέδου) $v + w$ μέσω της εξίσωσης

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2). \tag{1}$$

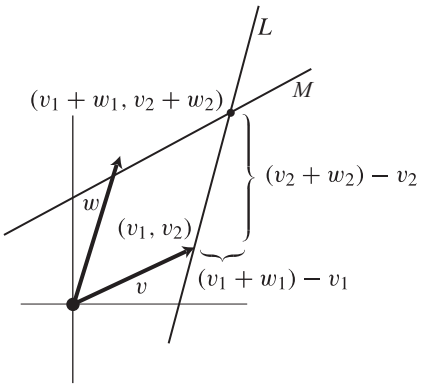
Παρατηρήστε ότι όλα τα γράμματα στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι αριθμοί και ότι το σύμβολο $+$ είναι απλώς η συνηθισμένη πρόσθεση αριθμών. Από την άλλη πλευρά, το σύμβολο $+$ στο αριστερό μέλος είναι καινούργιο: προηγουμένως, το άθροισμα δύο σημείων του επιπέδου δεν είχε οριστεί· την εξίσωση (1) τη χρησιμοποιήσαμε απλώς ως *ορισμό*.

Ένας πολύ σχολαστικός μαθηματικός πιθανόν να θελήσει να χρησιμοποιήσει ένα καινούργιο σύμβολο για τη νέα πράξη που ορίσαμε, όπως το

$$v \boldsymbol{+} w, \qquad \text{ή ίσως το} \qquad v \oplus w,$$

αλλά δεν υπάρχει κανένας λόγος να επιμείνουμε σε αυτό. Αφού το $v + w$ δεν είχε οριστεί προηγουμένως, δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης και επομένως μπορούμε να κρατήσουμε απλό τον συμβολισμό.

Ασφαλώς, οποιοσδήποτε μπορεί να κατασκευάσει καινούργιους συμβολισμούς. Για παράδειγμα, αφού πρόκειται για δικό μας ορισμό, θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε ορίσει το $v + w$ ως $(v_1 + w_1 \cdot w_2,\ v_2 + {w_1}^2)$, ή χρησιμοποιώντας κάποιον άλλο αλλόκοτο τύπο. Το πραγματικό ερώτημα είναι: έχει το καινούργιο μας κατασκεύασμα κάποια ιδιαίτερη σημασία;



ΣΧΗΜΑ 2

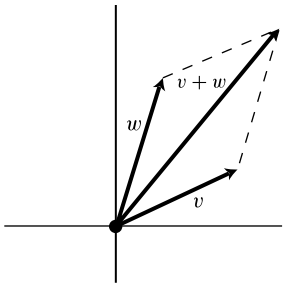
Το Σχήμα 2 δείχνει δύο διανύσματα v και w, καθώς επίσης και το σημείο

$$(v_1 + w_1, v_2 + w_2),$$

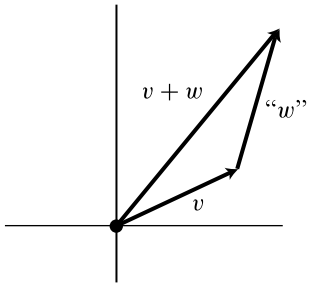
το οποίο, προς το παρόν, σημειώσαμε με τον συνηθισμένο τρόπο, χωρίς να σχεδιάσουμε κάποιο βέλος. Παρατηρήστε ότι είναι εύκολο να υπολογίσουμε την κλίση της ευθείας L που διέρχεται από το v και το νέο μας σημείο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2, η κλίση είναι απλώς

$$\frac{(v_2 + w_2) - v_2}{(v_1 + w_1) - v_1} = \frac{w_2}{w_1},$$

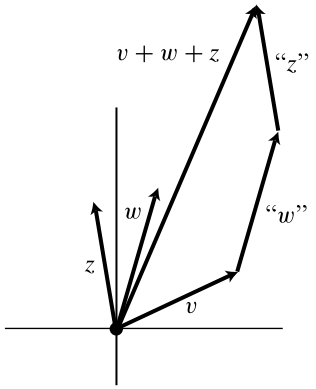
και αυτή είναι, φυσικά, η κλίση του διανύσματος w, από την αρχή των αξόνων O έως το (w_1, w_2), Με άλλα λόγια, η ευθεία L είναι παράλληλη στο w.



ΣΧΗΜΑ 3



ΣΧΗΜΑ 4



ΣΧΗΜΑ 5

Με όμοιο τρόπο, η κλίση της ευθείας M που διέρχεται από το (w_1, w_2) και το νέο μας σημείο είναι

$$\frac{(v_2 + w_2) - w_2}{(v_1 + w_1) - v_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

η οποία είναι η κλίση του διανύσματος v. Άρα η M είναι παράλληλη στο v. Με δυο λόγια, το νέο σημείο $v + w$ βρίσκεται επάνω στο παραλληλόγραμμο που έχει ως πλευρές του τα v και w. Όταν σχεδιάζουμε το $v + w$ με τη μορφή βέλους (Σχήμα 3), αυτό βρίσκεται πάνω στη διαγώνιο του παραλληλογράμμου. Στη Φυσική τα διανύσματα χρησιμοποιούνται για τον συμβολισμό των δυνάμεων, και το άθροισμα δύο διανυσμάτων αντιπροσωπεύει τη συνισταμένη τους, δηλαδή τη συνολική δύναμη που προκύπτει όταν στο ίδιο αντικείμενο εφαρμόζονται δύο διαφορετικές δυνάμεις ταυτόχρονα.

Το Σχήμα 4 παρουσιάζει έναν άλλον τρόπο οπτικής αναπαράστασης του αθροίσματος $v + w$. Αν χρησιμοποιήσουμε το «w» για να συμβολίσουμε ένα βέλος που είναι παράλληλο και έχει το ίδιο μήκος με το w, αλλά που ξεκινά από το v αντί από την αρχή των αξόνων, τότε το $v + w$ είναι το διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και καταλήγει στο τελικό σημείο. Το $v + w$ το λαμβάνουμε, δηλαδή, ακολουθώντας πρώτα το v, και στη συνέχεια το w.

Πολλές από τις ιδιότητες του $+$ για τους συνήθεις αριθμούς ισχύουν και για το νέο αυτό $+$ για τα διανύσματα. Για παράδειγμα, ο «αντιμεταθετικός νόμος»

$$v + w = w + v,$$

είναι προφανής από τη γεωμετρική εικόνα, αφού το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα v και w είναι το ίδιο με το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν τα w και v. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα και αναλυτικά, αφού δηλώνει ότι

$$(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (w_1 + v_1, w_2 + v_2),$$

και επομένως εξαρτάται απλώς από τον αντιμεταθετικό νόμο των αριθμών:

$$v_1 + w_1 = w_1 + v_1,$$
$$v_2 + w_2 = w_2 + v_2.$$

Με όμοιο τρόπο, εφαρμόζοντας τους ορισμούς, διαπιστώνουμε τον «προσεταιριστικό νόμο»

$$[v + w] + z = v + [w + z].$$

Το Σχήμα 5 παρουσιάζει έναν τρόπο εύρεσης του $v + w + z$.

Η αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$ είναι το «προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο»

$$O + v = v + O = v,$$

και αν ορίσουμε

$$-v = (-v_1, -v_2),$$

έχουμε επίσης ότι

$$v + (-v) = -v + v = O.$$

Φυσικά μπορούμε ακόμη να ορίσουμε

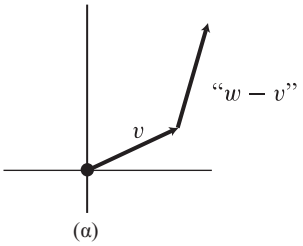
$$w - v = w + (-v),$$

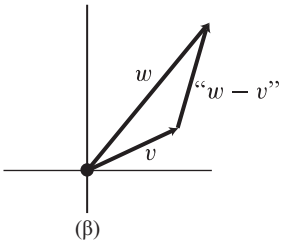
ακριβώς όπως και με τους αριθμούς· ισοδύναμα,

$$w - v = (w_1 - v_1, w_2 - v_2).$$

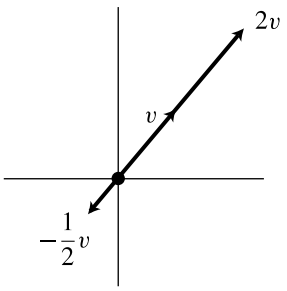
Όπως και με τους αριθμούς, ο ορισμός που δώσαμε για το $w - v$ σημαίνει απλώς ότι ικανοποιεί την

$$v + (w - v) = w.$$

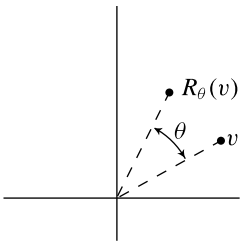




ΣΧΗΜΑ 6



ΣΧΗΜΑ 7



ΣΧΗΜΑ 8

Το Σχήμα 6(α) δείχνει το v και ένα βέλος «$w - v$» που είναι παράλληλο στο $w - v$, αλλά που ξεκινά από το σημείο στο οποίο καταλήγει το v. Όπως διαπιστώσαμε στο Σχήμα 4, το διάνυσμα που ξεκινά από την αρχή των αξόνων και καταλήγει στο σημείο στο οποίο καταλήγει αυτό το βέλος είναι απλώς το $v + (w - v) = w$ (Σχήμα 6(β)). Με άλλα λόγια, μπορούμε να απεικονίσουμε γεωμετρικά το $w - v$ ως το βέλος που πηγαίνει από το v στο w (με τη διαφορά ότι μετά θα πρέπει να το μετακινήσουμε στην αρχή των αξόνων).

Υπάρχει και ένας τρόπος να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό με ένα διάνυσμα: Για έναν αριθμό a και ένα διάνυσμα $v = (v_1, v_2)$, ορίζουμε

$$a \cdot v = (av_1, av_2)$$

(Ορισμένες φορές γράφουμε απλώς av αντί για $a \cdot v$. Στην περίπτωση αυτή είναι φυσικά ιδιαίτερα σημαντικό να θυμόμαστε ότι το v συμβολίζει ένα διάνυσμα, και όχι έναν αριθμό.) Το διάνυσμα $a \cdot v$ έχει την ίδια φορά με το v όταν $a > 0$, και την αντίθετη φορά όταν $a < 0$ (Σχήμα 7).

Μπορείτε εύκολα να ελέγξετε τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot v) &= (ab) \cdot v, \\ 1 \cdot v &= v, \\ 0 \cdot v &= O, \\ -1 \cdot v &= -v. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ορίσαμε μόνο το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα· δεν ορίσαμε κάποιον τρόπο «πολλαπλασιασμού» δύο διανυσμάτων που να δίνει ένα νέο διάνυσμα.* Υπάρχουν, ωστόσο, διάφοροι τρόποι «πολλαπλασιασμού» διανυσμάτων που δίνουν αριθμούς, οι οποίοι διερευνώνται στα προβλήματα που ακολουθούν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αν v είναι ένα δοθέν σημείο του επιπέδου, έστω ότι $R_\theta(v)$ είναι το αποτέλεσμα της περιστροφής του v γύρω από την αρχή των αξόνων κατά γωνία θ (Σχήμα 8). Στόχος αυτού του προβλήματος είναι να βρείτε έναν τύπο για το R_θ, με τους ελάχιστους δυνατούς υπολογισμούς.

(α) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} R_\theta(1, 0) &= (\cos\theta, \sin\theta), \\ R_\theta(0, 1) &= (-\sin\theta, \cos\theta). \end{aligned}$$

[Στην πραγματικότητα θα έπρεπε να γράψουμε $R_\theta((1, 0))$, κτλ.]

(β) Εξηγήστε γιατί ισχύει

$$\begin{aligned} R_\theta(v + w) &= R_\theta(v) + R_\theta(w), \\ R_\theta(a \cdot w) &= a \cdot R_\theta(w). \end{aligned}$$

(γ) Τώρα δείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο (x, y) έχουμε

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$

(δ) Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να δώσετε μια άλλη λύση στο Πρόβλημα 4-23.

*Εάν πάτε στο Κεφάλαιο 25, θα διαπιστώσετε ότι υπάρχει ένας σημαντικός τρόπος ορισμού ενός γινομένου, ο οποίος όμως αφορά ειδικά και μόνο στο επίπεδο —δεν επεκτείνεται, για παράδειγμα, για διανύσματα σε χώρους τριών διαστάσεων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες πράξεις.

2. Για δοθέντα v και w, ορίζουμε τον *αριθμό*

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

ο οποίος συχνά ονομάζεται «εσωτερικό γινόμενο» ή «βαθμωτό γινόμενο» των v και w. (Το επίθετο «βαθμωτό» σε αντιδιαστολή με το «διανυσματικό».)

(α) Για δοθέν v, βρείτε ένα διάνυσμα w τέτοιο ώστε $v \cdot w = 0$. Στη συνέχεια περιγράψτε το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων w.

(β) Δείξτε ότι

$$v \cdot w = w \cdot v$$
$$v \cdot (w + z) = v \cdot w + v \cdot z$$

και ότι

$$a \cdot (v \cdot w) = (a \cdot v) \cdot w = v \cdot (a \cdot w).$$

Παρατηρήστε ότι η τελευταία εξίσωση εμπλέκει *τρία* γινόμενα: το εσωτερικό γινόμενο $\cdot$ δύο διανυσμάτων, το γινόμενο $\cdot$ αριθμού με διάνυσμα, και το συνηθισμένο γινόμενο $\cdot$ δύο αριθμών.

(γ) Δείξτε ότι $v \cdot v \geq 0$, και ότι $v \cdot v = 0$ μόνο όταν $v = O$. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τη *νόρμα* $\|v\|$ ως

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v},$$

η οποία είναι 0 μόνο για $v = O$. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της νόρμας;

(δ) Δείξτε ότι

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $v = 0$ ή $w = 0$ ή $w = a \cdot v$ για κάποιον αριθμό $a > 0$.

(ε) Δείξτε ότι

$$v \cdot w = \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4}.$$

3. (α) Έστω ότι R_θ είναι η περιστροφή κατά γωνία θ (Πρόβλημα 1). Δείξτε ότι

$$R_\theta(v) \cdot R_\theta(w) = v \cdot w.$$

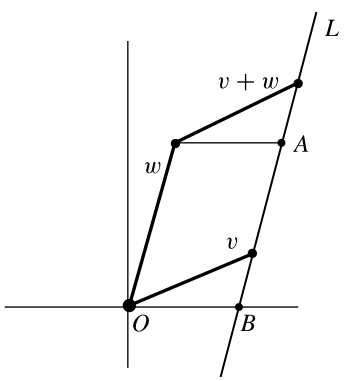
(β) Έστω ότι $e = (1, 0)$ είναι το διάνυσμα μήκους 1 κατά τη φορά του πρώτου άξονα, και έστω $w = (\cos\theta, \sin\theta)$. Αυτό είναι ένα διάνυσμα μήκους 1 που σχηματίζει γωνία θ με τον πρώτο άξονα (συγκρίνετε με το Πρόβλημα 1). Υπολογίστε ότι

$$e \cdot w = \cos\theta.$$

Συμπεράνετε ότι γενικά

$$v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\theta,$$

όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στο v και το w.



ΣΧΗΜΑ 9

4. Για δύο δοθέντα διανύσματα v και w, θα περιμέναμε να έχουμε έναν απλό τύπο, ο οποίος να εμπλέκει τις συντεταγμένες v_1, v_2, w_1, w_2, για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν. Το Σχήμα 9 υποδεικνύει μια στρατηγική για την εύρεση ενός τέτοιου τύπου: αφού το τρίγωνο με κορυφές $w, A, v + w$ είναι ίσο με το τρίγωνο OBv, μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα σε ένα ευκολότερο, στο οποίο η μία πλευρά του παραλληλογράμμου βρίσκεται επάνω στον οριζόντιο άξονα:

(α) Η ευθεία L περνά από το v και είναι παράλληλη στο w, άρα έχει κλίση w_2/w_1. Συμπεράνετε ότι το σημείο B έχει συντεταγμένη

$$\frac{v_1 w_2 - w_1 v_2}{w_2},$$

και, επομένως, ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι

$$\det(v, w) = v_1 w_2 - w_1 v_2.$$

Ο τύπος αυτός, που ορίζει την *ορίζουσα* $\det$, φαίνεται να είναι αρκετά απλός, αλλά στην πραγματικότητα δεν μπορεί να αληθεύει ότι η $\det(v, w)$ δίνει πάντα το εμβαδόν. Στο κάτω-κάτω, είναι φανερό ότι

$$\det(w, v) = -\det(v, w),$$

δηλαδή μερικές φορές η $\det$ θα είναι αρνητική! Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι κατά τον «υπολογισμό» του τύπου μας κάναμε ένα σωρό υποθέσεις (ότι ο w_2 είναι θετικός, ότι το B είχε θετική συντεταγμένη, κτλ.) Παρ' όλα αυτά, φαίνεται πιθανόν η $\det(v, w)$ να είναι $\pm$ το εμβαδόν. Το επόμενο πρόβλημα δίνει μια ανεξάρτητη απόδειξη.

5. (α) Αν το v έχει τη φορά του θετικού οριζόντιου άξονα, δείξτε ότι $\det(v, w)$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα v και w αν το w βρίσκεται επάνω από τον οριζόντιο άξονα ($w_2 > 0$), και το εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο αν το w βρίσκεται κάτω από τον άξονα.

(β) Αν R_θ είναι η περιστροφή κατά γωνία θ (Πρόβλημα 1), δείξτε ότι

$$\det(R_\theta v, R_\theta w) = \det(v, w).$$

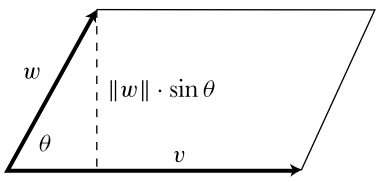
Συμπεράνετε ότι $\det(v, w)$ είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα v και w όταν η περιστροφή από το v στο w γίνεται κατά φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, και το εμβαδόν με αρνητικό πρόσημο όταν η περιστροφή γίνεται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

6. Δείξτε ότι

$$\det(v, w + z) = \det(v, w) + \det(v, z)$$
$$\det(v + w, z) = \det(v, z) + \det(w, z)$$

και ότι

$$a \det(v, w) = \det(a \cdot v, w) = \det(v, a \cdot w).$$



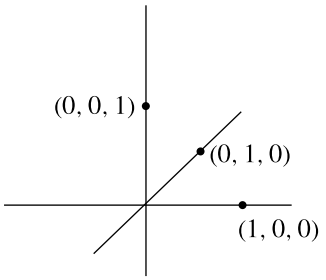
ΣΧΗΜΑ 10

7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Προβλήματος 3, δείξτε ότι

$$\det(v, w) = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\theta,$$

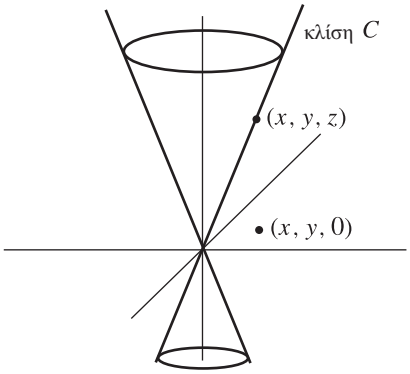
το οποίο είναι προφανές και από τη γεωμετρική ερμηνεία (Σχήμα 10).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2. ΟΙ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ



ΣΧΗΜΑ 1

Αν και θα μας απασχολήσουν σχεδόν αποκλειστικά σχήματα στο επίπεδο, το οποίο τυπικά ορίζεται ως το σύνολο όλων των ζευγών πραγματικών αριθμών, σε αυτό το Παράρτημα θέλουμε να μελετήσουμε τον χώρο των τριών διαστάσεων, τον οποίο μπορούμε να περιγράψουμε με τη βοήθεια τριάδων πραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας ένα «τριδιάστατο σύστημα συντεταγμένων», αποτελούμενο από τρεις ευθείες που τέμνονται κάθετα μεταξύ τους. (Σχήμα 1). Ο *οριζόντιος* και ο *κάθετος* άξονάς μας μεταλλάσσονται τώρα σε δύο άξονες επάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο, με τον τρίτο άξονα να είναι κάθετος και στους δύο.



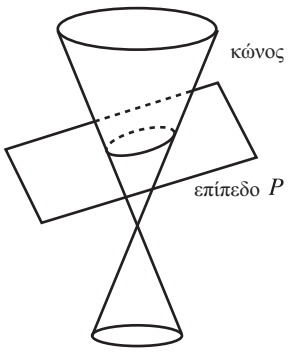
ΣΧΗΜΑ 2

Ένα από τα απλούστερα υποσύνολα αυτού του τριδιάστατου χώρου είναι ο (άπειρος) *κώνος* που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Τον κώνο αυτόν μπορούμε να τον δημιουργήσουμε περιστρέφοντας μια «γενέτειρα ευθεία», κλίσης ας πούμε C, γύρω από τον τρίτο άξονα.

Για οποιεσδήποτε δοθείσες δύο πρώτες συντεταγμένες x και y, το σημείο $(x, y, 0)$ του οριζόντιου επιπέδου απέχει $\sqrt{x^2 + y^2}$ από την αρχή των αξόνων, και άρα

(1) το (x, y, z) βρίσκεται πάνω στον κώνο αν και μόνο αν $z = \pm C\sqrt{x^2 + y^2}$.

Από αυτήν την τριδιάστατη εικόνα μπορούμε να μεταπέσουμε στην πιο γνώριμη διδιάστατη, αν αναρωτηθούμε τι συμβαίνει όταν ο κώνος τμηθεί με κάποιο επίπεδο P (Σχήμα 3).



ΣΧΗΜΑ 3

Αν το επίπεδο είναι παράλληλο με το οριζόντιο επίπεδο, δεν υπάρχει απολύτως κανένα μυστήριο —η τομή είναι απλώς ένας κύκλος. Σε διαφορετική περίπτωση, η τομή του επιπέδου P με το οριζόντιο επίπεδο είναι μια ευθεία. Μπορούμε να απλοποιήσουμε πολύ τα πράγματα αν περιστρέψουμε τα πάντα γύρω από τον κάθετο άξονα, έτσι ώστε η ευθεία αυτή της τομής να δείχνει προς τα έξω από το επίπεδο του χαρτιού, ενόσω ο πρώτος άξονας παραμένει στη συνηθισμένη του, γνώριμή μας θέση. Αυτό που βλέπουμε από το επίπεδο P (Σχήμα 4) είναι τότε η τομή του L με το επίπεδο του πρώτου και του τρίτου άξονα. Από αυτήν την οπτική γωνία ο κώνος φαίνεται σαν δύο ευθείες γραμμές.

Αν αυτή η ευθεία L τύχει να είναι κατακόρυφη και να αποτελείται από όλα τα σημεία (a, z) για κάποιο a, τότε η εξίσωση (1) μας λέει ότι η τομή του κώνου με το επίπεδο αποτελείται από όλα τα σημεία (a, y, z) με

$$z^2 - C^2y^2 = C^2a^2,$$

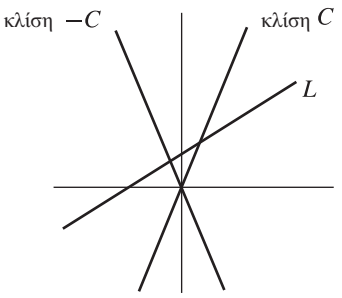
το οποίο είναι μια υπερβολή.

Σε διαφορετική περίπτωση, στο επίπεδο του πρώτου και του τρίτου άξονα, η ευθεία L μπορεί να περιγραφεί ως το σύνολο όλων των σημείων της μορφής

$$(x, Mx + B),$$

όπου M είναι η κλίση της L. Για ένα τυχαίο σημείο (x, y, z) έπεται ότι

(2) το (x, y, z) βρίσκεται στο επίπεδο P αν και μόνο αν $z = Mx + B$.

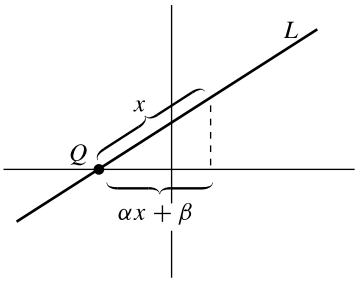


ΣΧΗΜΑ 4

Συνδυάζοντας τις (1) και (2), διαπιστώνουμε ότι το (x, y, z) βρίσκεται στην τομή του κώνου με το επίπεδο αν και μόνο αν

(*) $$Mx + B = \pm C\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Τώρα πρέπει να επιλέξουμε τους άξονες συντεταγμένων του επιπέδου P. Μπορούμε να επιλέξουμε την L ως τον πρώτο άξονα, και να μετράμε τις αποστάσεις από την τομή Q με το οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 5)· ως δεύτερο άξονα επιλέγουμε απλώς την ευθεία που διέρχεται από την Q και είναι παράλληλη με τον αρχικό μας δεύτερο άξονα. Αν η πρώτη συντεταγμένη ενός σημείου του P ως προς αυτούς τους άξονες είναι x, τότε η



ΣΧΗΜΑ 5

πρώτη συντεταγμένη αυτού του σημείου ως προς τους αρχικούς άξονες μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\alpha x + \beta$$

για κάποια α και β. Από την άλλη πλευρά, αν η δεύτερη συντεταγμένη του σημείου ως προς αυτούς τους άξονες είναι y, τότε y είναι η δεύτερη συντεταγμένη και ως προς τους αρχικούς άξονες.

Συνεπώς, η $(*)$ μας λέει ότι το σημείο βρίσκεται στην τομή του επιπέδου με τον κώνο αν και μόνο αν

$$M(\alpha x + \beta) + B = \pm C\sqrt{(\alpha x + \beta)^2 + y^2}.$$

Αν και αυτό φαίνεται αρκετά περίπλοκο, παίρνοντας τα τετράγωνα μπορούμε να το γράψουμε ως

$$C^2y^2 - \alpha^2(M^2 - C^2)x^2 + Ex + F = 0$$

για κάποια E και F τα οποία δεν θα κάνουμε τον κόπο να γράψουμε αναλυτικά.

Το Πρόβλημα 4-16 δείχνει ότι αυτό είναι ή παραβολή, ή έλλειψη, ή υπερβολή. Αν κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά τη λύση, θα δούμε ότι οι τιμές των E και F είναι αδιάφορες:

(1) Αν $M = \pm C$ προκύπτει παραβολή·

(2) Αν $C^2 > M^2$ προκύπτει έλλειψη·

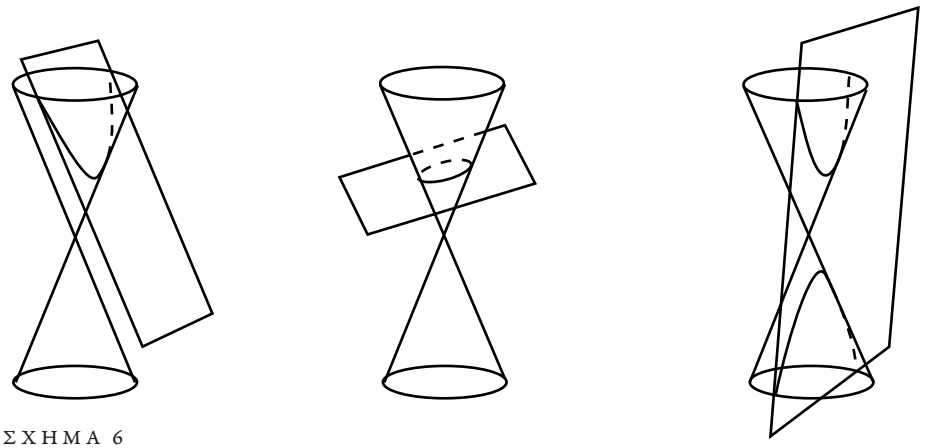
(3) Αν $C^2 < M^2$ προκύπτει υπερβολή.

Τις αναλυτικές αυτές συνθήκες μπορούμε εύκολα να τις ερμηνεύσουμε γεωμετρικά (Σχήμα 6):

(1) αν το επίπεδό μας είναι παράλληλο με κάποια από τις γενέτειρες ευθείες του κώνου προκύπτει παραβολή·

(2) αν η κλίση του επιπέδου μας είναι μικρότερη από την κλίση της γενέτειρας ευθείας του κώνου (έτσι ώστε η τομή μας να μην περιλαμβάνει το ένα μισό του κώνου) προκύπτει έλλειψη·

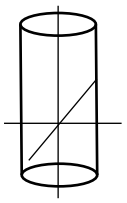
(3) αν η κλίση του επιπέδου μας είναι μεγαλύτερη από την κλίση της γενέτειρας ευθείας του κώνου προκύπτει υπερβολή.



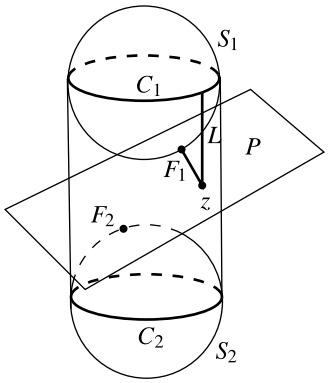
ΣΧΗΜΑ 6

Στην πράξη, τα ίδια τα ονόματα αυτών των «κωνικών τομών» είναι και η περιγραφή τους. Στα Ελληνικά, το συνθετικό *παρα-* της λέξης *παραβολή* έχει την ίδια έννοια με τις λέξεις παράδειγμα, παράδοξο, παράγραφος, παράλληλο, κλπ., η λέξη *έλλειψη* υποδηλώνει κάτι ελαττωματικό ή κάποια παράλειψη, ενώ η λέξη *υπερβολή* σημαίνει κάτι επιπλέον του κανονικού, όπως στις λέξεις υπερδραστήριος, υπερευαίσθητος.*

*Παρόλο που η αντιστοιχία των νοημάτων των ελληνικών λέξεων με τη γεωμετρική εικόνα είναι πολύ όμορφη, οι Έλληνες τις υιοθέτησαν αρχικά για να περιγράψουν τα γνωρίσματα συγκεκριμένων εξισώσεων που συνδέονταν με τις κωνικές τομές.



ΣΧΗΜΑ 7



ΣΧΗΜΑ 8

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θεωρήστε έναν κύλινδρο με γενέτειρα κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο (Σχήμα 7)· η μόνη απαίτηση για να βρίσκεται ένα σημείο (x, y, z) σε αυτόν τον κύλινδρο είναι το (x, y) να βρίσκεται σε έναν κύκλο:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Δείξτε ότι η τομή ενός επιπέδου με αυτόν τον κύλινδρο μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής

$$(\alpha x + \beta)^2 + y^2 = C^2.$$

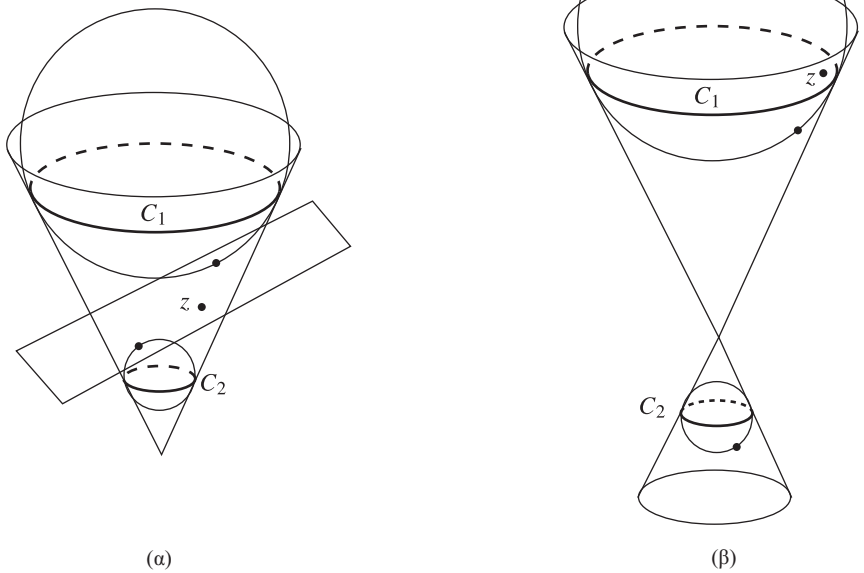
Τί δυνατότητες υπάρχουν;

2. Στο Σχήμα 8, η σφαίρα S_1 έχει την ίδια διάμετρο με τον κύλινδρο έτσι ώστε ο ισημερινός της C_1 να βρίσκεται επάνω στον κύλινδρο· επίσης εφάπτεται στο επίπεδο P στο σημείο F_1. Ομοίως, ο ισημερινός C_2 της S_2 βρίσκεται επάνω στον κύλινδρο, και η S_2 εφάπτεται στο P στο σημείο F_2.

(α) Έστω ότι z είναι ένα οποιοδήποτε σημείο στην τομή του P με το κύλινδρο. Εξηγήστε γιατί το μήκος της ευθείας από το z στο F_1 ισούται με το μήκος της κατακόρυφης ευθείας L από το z στο C_1.

(β) Αποδεικνύοντας το αντίστοιχο για το μήκος της ευθείας από το z στο F_2, δείξτε ότι η απόσταση από το z στο F_1 συν την απόσταση από το z στο F_2 είναι σταθερή, με αποτέλεσμα η τομή να είναι μια έλλειψη, με εστίες τα F_1 και F_2.

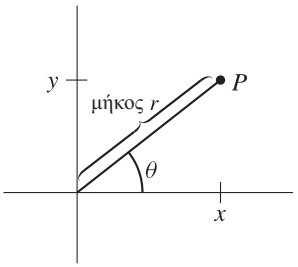
3. Ομοίως, χρησιμοποιήστε το Σχήμα 9(α) για να αποδείξετε γεωμετρικά ότι η τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο είναι έλλειψη όταν το επίπεδο τέμνει το ένα μόνο μισό του κώνου. Ομοίως, χρησιμοποιήστε το (β) για να αποδείξετε ότι η τομή είναι υπερβολή όταν το επίπεδο τέμνει και τα δύο μισά του κώνου.



(α) (β)

ΣΧΗΜΑ 9

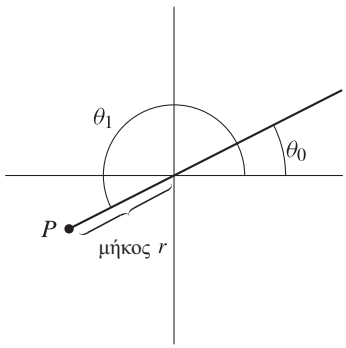
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3. ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



ΣΧΗΜΑ 1

Σε αυτό το Κεφάλαιο συμπεριφερόμασταν σαν να υπήρχε μόνο ένας τρόπος να ονομάζουμε σημεία στο επίπεδο με ζεύγη αριθμών. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι, που ο καθένας δημιουργεί ένα διαφορετικό «σύστημα συντεταγμένων». Οι συνήθεις συντεταγμένες ενός σημείου καλούνται Καρτεσιανές συντεταγμένες, από τον Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο René Descartes (1596-1650), ο οποίος πρώτος εισήγαγε την ιδέα του συστήματος συντεταγμένων. Σε πολλές περιπτώσεις είναι πιο βολικό να εισάγουμε πολικές συντεταγμένες, οι οποίες απεικονίζονται στο Σχήμα 1. Στο σημείο P αντιστοιχούμε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ), όπου r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων O μέχρι το P, και θ είναι το μέτρο της γωνίας, σε ακτίνια, της γωνίας μεταξύ του οριζόντιου άξονα και της ευθείας από το O στο P. Η γωνία θ δεν είναι ξεκάθαρα ορισμένη. Για παράδειγμα, σημεία στη δεξιά πλευρά του οριζόντιου άξονα μπορεί να έχουν $\theta = 0$ ή $\theta = 2\pi$. Επιπλέον, η θ είναι τελείως ασαφής στην αρχή των αξόνων O. Επομένως, είναι αναγκαίο να αποκλείσουμε κάποια ακτίνα που διέρχεται από την αρχή, αν θέλουμε να αντιστοιχούμε ένα μοναδικό ζεύγος (r, θ) σε κάθε σημείο που εξετάζουμε.

Από την άλλη, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα να αντιστοιχήσουμε ένα μοναδικό σημείο σε κάθε ζεύγος (r, θ). Μάλιστα, μπορούμε (αν και αυτό δεν το εγκρίνουν όλοι) να αντιστοιχήσουμε ένα σημείο στο (r, θ) όταν $r < 0$, σύμφωνα με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο Σχήμα 2. Επομένως, έχει πάντοτε νόημα να μιλάμε για «το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r, θ)» (με ή χωρίς τη δυνατότητα να είναι $r < 0$), ακόμα και αν υπάρχει κάποια ασάφεια όταν μιλάμε για «τις πολικές συντεταγμένες» ενός δοθέντος σημείου.



P είναι το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r, θ_1) και επίσης το σημείο με πολικές συντεταγμένες $(-r, \theta_0)$.

ΣΧΗΜΑ 2

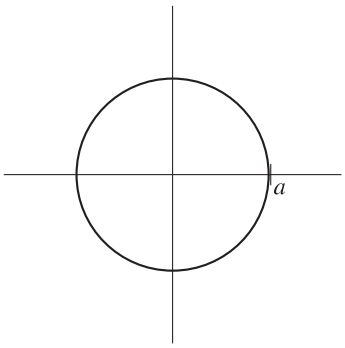
Είναι φανερό, από το Σχήμα 1 (και το Σχήμα 2), ότι το σημείο με πολικές συντεταγμένες (r, θ) έχει Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) που δίνονται από τις σχέσεις

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Αντιστρόφως, αν ένα σημείο έχει Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y), τότε οι (οποιεσδήποτε από τις) πολικές συντεταγμένες του (r, θ) ικανοποιούν τις

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{αν } x \neq 0.$$

Τώρα, έστω ότι f είναι μια συνάρτηση. Τότε, λέγοντας η **γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες**, εννοούμε το σύνολο όλων των σημείων P με πολικές συντεταγμένες (r, θ) που ικανοποιούν την εξίσωση $r = f(\theta)$. Με άλλα λόγια, η γραφική

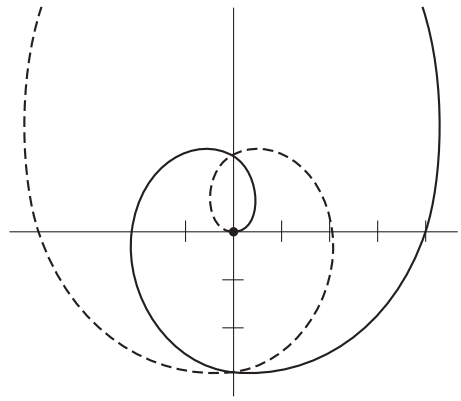


ΣΧΗΜΑ 3

παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες είναι το σύνολο όλων των σημείων με πολικές συντεταγμένες $(f(\theta), \theta)$. Δεν πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στο γεγονός ότι θεωρούμε ζεύγη $(f(\theta), \theta)$ με το $f(\theta)$ πρώτο, σε αντίθεση προς τα ζεύγη $(x, f(x))$ στη συνηθισμένη γραφική παράσταση της f. Είναι απλώς θέμα σύμβασης να θεωρείται το r ως πρώτη πολική συντεταγμένη και η θ ως δεύτερη.

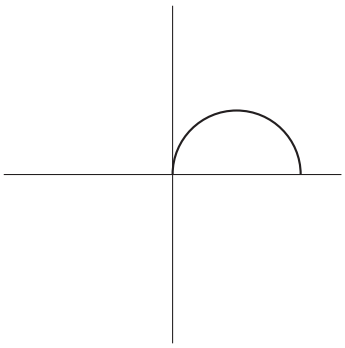
Η γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες περιγράφεται συχνά ως «η γραφική παράσταση της εξίσωσης $r = f(\theta)$». Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια σταθερή συνάρτηση, $f(\theta) = a$ για όλα τα θ. Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $r = a$ είναι απλώς ένας κύκλος με κέντρο O και ακτίνα a (Σχήμα 3). Αυτό το παράδειγμα δείχνει, ξεκάθαρα, ότι οι πολικές συντεταγμένες μάλλον απλοποιούν τα πράγματα σε περιπτώσεις που υπάρχει συμμετρία ως προς την αρχή O.

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $r = \theta$ δείχνεται στο Σχήμα 4. Η παχιά γραμμή αντιστοιχεί σε όλες τις τιμές $\theta \geq 0$, ενώ η διακεκομμένη στις τιμές $\theta \leq 0$.

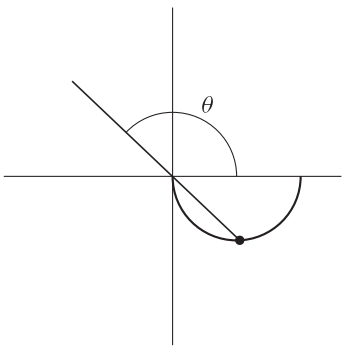


Η σπείρα του Αρχιμήδη

ΣΧΗΜΑ 4



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 5

Ως ένα άλλο παράδειγμα που εμπλέκει και θετικά και αρνητικά r, θεωρήστε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης $r = \cos\theta$. Το Σχήμα 5(α) δείχνει το μέρος που αντιστοιχεί στο $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Το Σχήμα 5(β) δείχνει το μέρος που αντιστοιχεί στο $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ (εδώ $r < 0$). Μπορείτε να ελέγξετε ότι δεν προστίθενται νέα σημεία αν $\theta > \pi$ ή $\theta < 0$. Είναι εύκολο να περιγράψουμε την ίδια γραφική παράσταση με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων. Αφού οι πολικές συντεταγμένες του τυχαίου σημείου της γραφικής παράστασης ικανοποιούν την

$$r = \cos\theta,$$

και άρα

$$r^2 = r\cos\theta,$$

οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

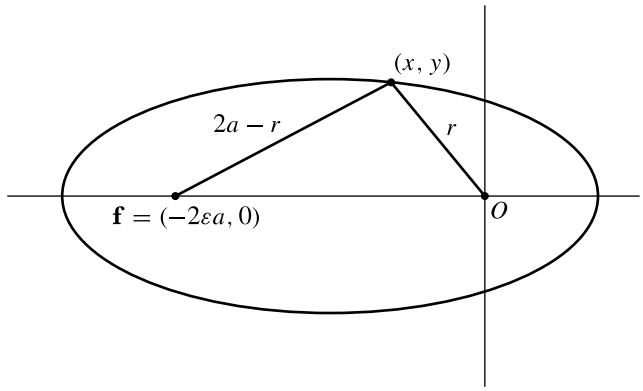
$$x^2 + y^2 = x$$

η οποία περιγράφει έναν κύκλο (Πρόβλημα 4-16). [Αντιστρόφως, είναι φανερό ότι, εάν οι Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου ικανοποιούν την $x^2 + y^2 = x$, τότε αυτό βρίσκεται πάνω στη γραφική παράσταση της εξίσωσης $r = \cos\theta$.]

Παρ' ότι έχουμε πλέον προσδιορίσει την εξίσωση του κύκλου με δύο διαφορετικούς τρόπους, θα ήμασταν μάλλον διστακτικοί να προσπαθήσουμε να βρούμε την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες. Όπως όμως προκύπτει, μπορούμε να πάρουμε μια πολύ όμορφη εξίσωση αν διαλέξουμε ως αρχή των αξόνων μια από τις *εστίες*. Το Σχήμα 6 δείχνει μια έλλειψη η μια εστία της οποίας είναι στο O, και της οποίας το άθροισμα των αποστάσεων όλων των σημείων από το O και την άλλη εστία $\mathbf{f}$ είναι $2a$. Επιλέξαμε το $\mathbf{f}$ να βρίσκεται αριστερά του O, με συντεταγμένες που γράφονται

$$(-2\varepsilon a, 0).$$

(Έχουμε ότι $0 \leq \varepsilon < 1$, αφού πρέπει να ισχύει $2a >$ απόσταση του $\mathbf{f}$ από το O).



ΣΧΗΜΑ 6

Η απόσταση r του (x, y) από το O είναι

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

Από την υπόθεση, η απόσταση από το (x, y) μέχρι το $\mathbf{f}$ είναι $2a - r$, άρα

$$(2a - r)^2 = (x - [-2\varepsilon a])^2 + y^2,$$

ή

$$4a^2 - 4ar + r^2 = x^2 + 4\varepsilon a x + 4\varepsilon^2 a^2 + y^2. \tag{2}$$

Αφαιρώντας την (1) από την (2), και διαιρώντας με $4a$, λαμβάνουμε

$$a - r = \varepsilon x + \varepsilon^2 a,$$

ή

$$\begin{aligned} r &= a - \varepsilon x - \varepsilon^2 a \\ &= (1 - \varepsilon^2)a - \varepsilon x, \end{aligned}$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε ως

$$r = \Lambda - \varepsilon x, \qquad \text{για } \Lambda = (1 - \varepsilon^2)a. \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας το x με $r\cos\theta$, έχουμε

$$\begin{aligned} r &= \Lambda - \varepsilon r\cos\theta, \\ r(1 + \varepsilon\cos\theta) &= \Lambda, \end{aligned}$$

και άρα

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon\cos\theta}. \tag{4}$$

Στο Κεφάλαιο 4 βρήκαμε ότι η

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

είναι η εξίσωση σε Καρτεσιανές συντεταγμένες της έλλειψης με άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες $2a$, αλλά με τις εστίες στα $(-c, 0)$ και $(c, 0)$, όπου

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Αφού η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι $2c$, αν μετακινήσουμε αυτήν την έλλειψη προς τα αριστερά κατά c μονάδες, έτσι ώστε η εστία $(c, 0)$ να βρεθεί στην αρχή των αξόνων, λαμβάνουμε την έλλειψη (4) αν πάρουμε $c = \varepsilon a$ ή $\varepsilon = c/a$ (με την εξίσωση (3) να καθορίζει το Λ). Αντιστρόφως, δοθείσης της έλλειψης που περιγράφει η (4), η τιμή του a για την αντίστοιχη εξίσωση (5) καθορίζεται από την (3),

$$a = \frac{\Lambda}{1 - \varepsilon^2},$$

και χρησιμοποιώντας και πάλι το ότι $c = \varepsilon a$, λαμβάνουμε

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 a^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\Lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Τα a και b, τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα, μπορούμε δηλαδή να τα προσδιορίσουμε αμέσως από τα ε και Λ.

Ο αριθμός

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

η *εκκεντρότητα* της έλλειψης, καθορίζει το «σχήμα» της έλλειψης (τον λόγο του μεγάλου προς τον μικρό άξονα), ενώ ο αριθμός Λ καθορίζει το «μέγεθός» της, όπως φαίνεται από την (4).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αν δύο σημεία έχουν πολικές συντεταγμένες (r_1, θ_1) και (r_2, θ_2), δείξτε ότι η απόσταση d μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$d^2 = {r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Ποια η γεωμετρική της σημασία;

2. Περιγράψτε τα γενικά χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της f σε πολικές συντεταγμένες, αν

(i) η f είναι άρτια.

(ii) η f είναι περιττή.

(iii) $f(\theta) = f(\theta + \pi)$.

3. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω εξισώσεων:

(i) $r = a \sin\theta$.

(ii) $r = a \sec\theta$. Υπόδειξη: Είναι πολύ απλό!

(iii) $r = \cos 2\theta$. Καλή τύχη!

(iv) $r = \cos 3\theta$.

(v) $r = |\cos 2\theta|$.

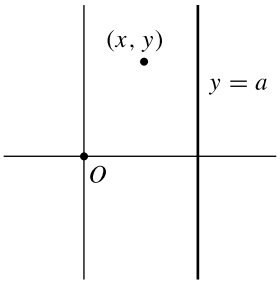
(vi) $r = |\cos 3\theta|$.

4. Βρείτε εξισώσεις για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων των γραφικών παραστάσεων (i), (ii) και (iii) του Προβλήματος 3.

5. Θεωρήστε την υπερβολή όπου η διαφορά των αποστάσεων μεταξύ των δύο εστιών είναι η σταθερά $2a$, και επιλέξετε τη μια εστία στο O και την άλλη στο $(-2\varepsilon a, 0)$. (Σε αυτήν την περίπτωση, πρέπει να έχουμε $\varepsilon > 1$). Δείξτε ότι λαμβάνουμε ακριβώς την ίδια εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες

$$r = \frac{\Lambda}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

που λάβαμε και για την έλλειψη.



ΣΧΗΜΑ 7

6. Θεωρήστε το σύνολο των σημείων (x, y) για τα οποία η απόσταση του (x, y) από το O είναι ίση με την απόσταση του (x, y) από την ευθεία $y = a$ (Σχήμα 7). Δείξτε ότι η απόσταση από την ευθεία είναι $a - r\cos\theta$, και συμπεράνετε ότι η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$a = r(1 + \cos\theta).$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η εξίσωση της παραβολής έχει και πάλι την ίδια μορφή με την (4).

7. Τώρα, για οποιαδήποτε Λ και ε, θεωρήστε τη γραφική παράσταση σε πολικές συντεταγμένες της εξίσωσης (4), από την οποία προκύπτει η (3). Δείξτε ότι τα σημεία που ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση ικανοποιούν την

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = \Lambda^2 - 2\Lambda\varepsilon x.$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 4-16, δείξτε ότι αυτό είναι έλλειψη για $\varepsilon < 1$, παραβολή για $\varepsilon = 1$, και υπερβολή για $\varepsilon > 1$.

8. (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της *καρδιοειδούς* $r = 1 - \sin\theta$.

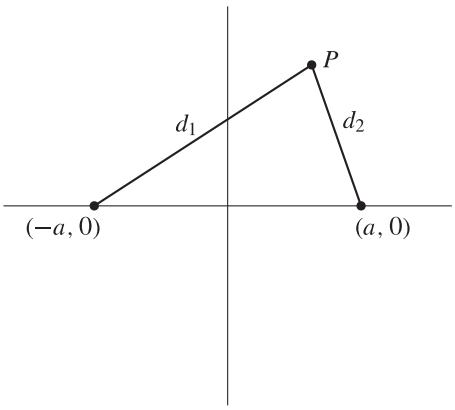
(β) Δείξτε ότι αυτή αποτελεί επίσης και τη γραφική παράσταση της $r = -1 - \sin\theta$.

(γ) Δείξτε ότι μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - y,$$

και συμπεράνετε ότι μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2.$$



ΣΧΗΜΑ 8

9. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των επομένων εξισώσεων:

(i) $r = 1 - \frac{1}{2}\sin\theta$.

(ii) $r = 1 - 2\sin\theta$.

(iii) $r = 2 + \cos\theta$.

10. (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση του *λημνίσκου*

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

(β) Βρείτε μια εξίσωση για τις Καρτεσιανές του συντεταγμένες.

(γ) Δείξτε ότι είναι το σύνολο όλων των σημείων P του Σχήματος 8 που ικανοποιούν την $d_1 d_2 = a^2$.

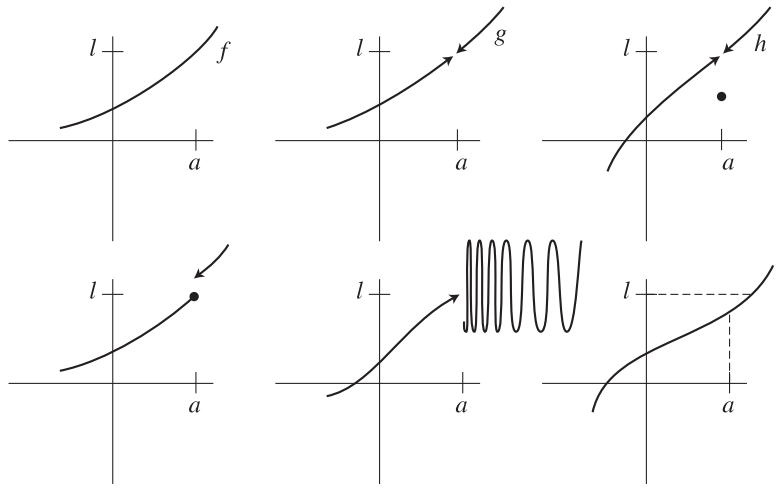
(δ) Προσπαθήστε να μαντέψετε το σχήμα των καμπυλών που σχηματίζονται από το σύνολο όλων των P που ικανοποιούν την $d_1 d_2 = b$, όταν $b > a^2$ και όταν $b < a^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 ΟΡΙΑ

Η έννοια του ορίου είναι οπωσδήποτε η πιο σημαντική, και ίσως η πιο δύσκολη σε ολόκληρο τον Απειροστικό Λογισμό. Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι ο ορισμός των ορίων, θα ξεκινήσουμε όμως για μια ακόμα φορά με έναν δοκιμαστικό ορισμό· αυτό που θα ορίσουμε δεν είναι η λέξη «όριο» αλλά η έννοια μιας συνάρτησης που τείνει σε κάποιο όριο.

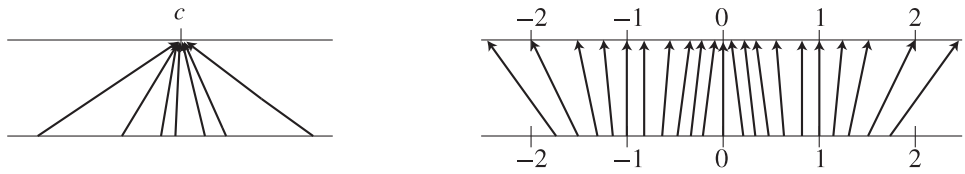
ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να φέρουμε το $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο, αλλά όχι ίσο με το, a.

Από τις έξι συναρτήσεις που σχεδιάσαμε στο Σχήμα 1, μόνο οι πρώτες τρεις τείνουν στο l κοντά στο a. Παρατηρήστε ότι, αν και το $g(a)$ δεν ορίζεται και το $h(a)$ είναι ορισμένο «με λάθος τρόπο», ισχύει και πάλι ότι η g και η h τείνουν στο l κοντά στο a. Αυτό γιατί, στον ορισμό μας, αποκλείσαμε ρητά την ανάγκη να εξετάσουμε την τιμή της συνάρτησης στο a —αρκεί το $f(x)$ να είναι κοντά στο l για x κοντά στο a, αλλά *όχι ίσο με το* a. Απλώς, δεν ενδιαφερόμαστε για την τιμή $f(a)$, ούτε καν θέτουμε το ερώτημα αν το $f(a)$ ορίζεται.



ΣΧΗΜΑ 1

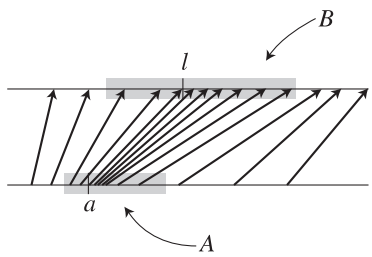
Ένας βολικός τρόπος για να απεικονίσουμε τον ισχυρισμό ότι η f τείνει στο l κοντά στο a παρέχεται από μια μέθοδο σχεδίασης συναρτήσεων που δεν αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4. Σύμφωνα με αυτήν τη μέθοδο, ζωγραφίζουμε δύο ευθείες, που καθεμιά παριστάνει το $\mathbf{R}$, και βέλη από ένα σημείο x της μιας, στο $f(x)$ της άλλης. Στο Σχήμα 2 δίνουμε μια τέτοια εικόνα για δύο διαφορετικές συναρτήσεις.



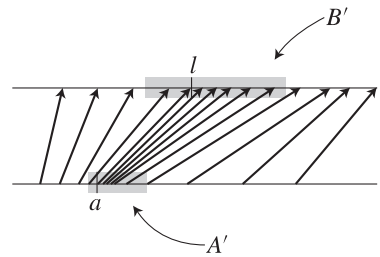
(α) $f(x) = c$ (β) $f(x) = x^3$

ΣΧΗΜΑ 2

Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση f που η γραφική της παράσταση μοιάζει με αυτή στο Σχήμα 3. Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε το $f(x)$ να βρίσκεται κοντά στο l, ας πούμε μέσα στο ανοικτό διάστημα B που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 3. Αυτό εξασφαλίζεται αν θεωρήσουμε μόνο τους αριθμούς x στο διάστημα A του Σχήματος 3. (Σε αυτό το διάγραμμα διαλέξαμε το μεγαλύτερο διάστημα που δουλεύει· θα μπορούσαμε αντί για αυτό να διαλέξουμε οποιοδήποτε μικρότερο διάστημα που περιέχει το a.) Αν διαλέξουμε ένα μικρότερο διάστημα B' (Σχήμα 4) θα πρέπει, συνήθως, να διαλέξουμε ένα μικρότερο A' αλλά όσο μικρό και αν πάρουμε το ανοικτό διάστημα B, υποτίθεται ότι πάντα θα υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα A που θα δουλεύει.

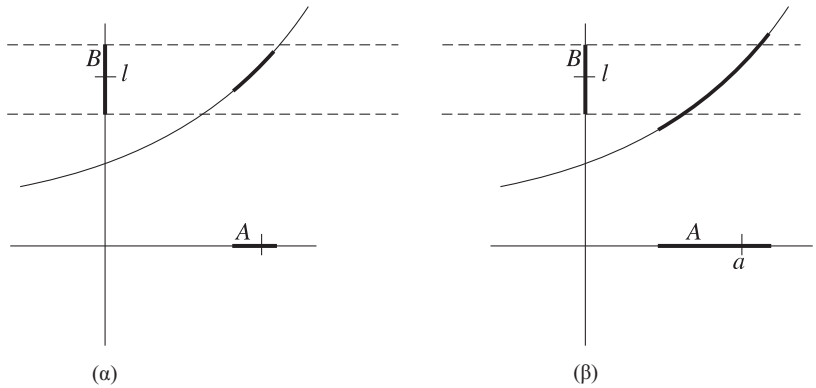


ΣΧΗΜΑ 3



ΣΧΗΜΑ 4

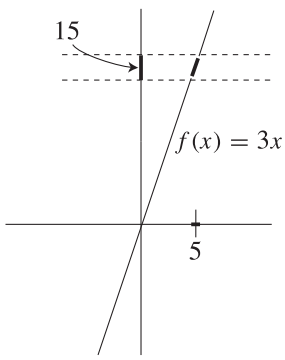
Μια παρόμοια οπτική ερμηνεία είναι δυνατή με βάση τη γραφική παράσταση της f, αλλά σε αυτήν την παράσταση το διάστημα B πρέπει να σχεδιαστεί στον κατακόρυφο άξονα, και το σύνολο A στον οριζόντιο άξονα. Το γεγονός ότι το $f(x)$ ανήκει στο B όταν το x είναι στο A σημαίνει ότι το μέρος της γραφικής παράστασης που βρίσκεται πάνω από το A περιέχεται στο χωρίο που περικλείεται από τις οριζόντιες ευθείες που περνούν από τα άκρα του B· συγκρίνετε το Σχήμα 5(α) όπου έχουμε διαλέξει κατάλληλο διάστημα A, με το Σχήμα 5(β), όπου το A είναι πολύ μεγάλο.



(α) (β)

ΣΧΗΜΑ 5

Για να πάρουμε ένα συγκεκριμένο απλό παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x$ με $a = 5$ (Σχήμα 6). Η f αναμένεται προφανώς να τείνει στο όριο 15 κοντά στο 5 —θα πρέπει να είμαστε σε θέση να πάρουμε το $f(x)$ όσο κοντά στο 15 θέλουμε, αν απαιτήσουμε να είναι το x αρκετά κοντά στο 5. Για να είμαστε συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εξασφαλίσουμε ότι το $3x$ θα βρίσκεται μέσα στο $\frac{1}{10}$ γύρω από το 15. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να ισχύει



ΣΧΗΜΑ 6

$$15 - \frac{1}{10} < 3x < 15 + \frac{1}{10},$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε και ως

$$-\frac{1}{10} < 3x - 15 < \frac{1}{10}.$$

Για να το κάνουμε αυτό πρέπει απλώς να απαιτήσουμε ότι

$$-\frac{1}{30} < x - 5 < \frac{1}{30},$$

ή απλώς ότι $|x - 5| < \frac{1}{30}$. Δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο σε σχέση με τον αριθμό $\frac{1}{10}$. Είναι το ίδιο εύκολο να εξασφαλίσουμε ότι $|3x - 15| < \frac{1}{100}$· αρκεί να απαιτήσουμε ότι $|x - 5| < \frac{1}{300}$. Αν πάρουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|3x - 15| < \varepsilon$ απαιτώντας απλώς ότι $|x - 5| < \varepsilon/3$.

Δεν υπάρχει τίποτα το ιδιαίτερο ούτε σε σχέση με την επιλογή $a = 5$. Είναι το ίδιο εύκολο να δούμε ότι η f τείνει στο όριο $3a$ στο a για οποιοδήποτε a: Για να εξασφαλίσουμε ότι

$$|3x - 3a| < \varepsilon$$

αρκεί να απαιτήσουμε ότι

$$|x - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Όπως είναι φυσικό, ο ίδιος συλλογισμός δουλεύει και με τη συνάρτηση $f(x) = 3.000.000x$. Πρέπει μόνο να είμαστε 1.000.000 φορές πιο προσεκτικοί, επιλέγοντας $|x - a| < \varepsilon/3.000.000$ προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι λίγο πιο ενδιαφέρουσα. Θα πρέπει προφανώς να είμαστε σε θέση να δείξουμε ότι η $f(x)$ τείνει στο 9 κοντά στο 3. Πρέπει δηλαδή να δείξουμε πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ανισότητα

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

για οποιονδήποτε δοθέντα θετικό αριθμό ε απαιτώντας να είναι το $|x - 3|$ αρκετά μικρό. Το προφανές πρώτο βήμα είναι να γράψουμε

$$|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3|,$$

το οποίο μας δίνει τον χρήσιμο παράγοντα $|x - 3|$. Σε αντίθεση όμως με την κατάσταση στα προηγούμενα παραδείγματα, εδώ ο επιπλέον παράγοντας είναι ο $|x + 3|$, ο οποίος δεν είναι μια βολική σταθερά όπως το 3 ή το 3.000.000. Το μόνο κρίσιμο σημείο, όμως, είναι να εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε να πούμε *κάτι* σχετικά με το πόσο μεγάλο είναι το $|x + 3|$. Έτσι, το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε είναι να απαιτήσουμε ότι $|x - 3| < 1$. Έχοντας καθορίσει ότι $|x - 3| < 1$, ή $2 < x < 4$, έχουμε ότι $5 < x + 3 < 7$ και έχουμε εξασφαλίσει ότι $|x + 3| < 7$. Επομένως, έχουμε

$$|x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < 7|x - 3|,$$

το οποίο μας δείχνει ότι $|x^2 - 9| < \varepsilon$ για $|x - 3| < \varepsilon/7$, με την προϋπόθεση ότι έχουμε επιπλέον απαιτήσει ότι $|x - 3| < 1$. Ή, για να το κάνουμε να φανεί πιο αυστηρό: απαιτούμε ότι $|x - 3| < \min(\varepsilon/7, 1)$.

Την αρχική επιλογή $|x - 3| < 1$ την κάναμε απλώς για ευκολία. Θα μπορούσαμε κάλλιστα να έχουμε καθορίσει ότι $|x - 3| < \frac{1}{10}$ ή $|x - 3| < 10$ ή οποιονδήποτε άλλο βολικό αριθμό. Για να είστε σίγουροι ότι καταλάβατε τον συλλογισμό της προηγούμενης παραγράφου, μια καλή άσκηση είναι να διαπιστώσετε ποια μορφή θα λάμβανε ο συλλογισμός αν επιλέγαμε $|x - 3| < 10$.

Ο συλλογισμός μας που δείχνει ότι η f τείνει στο 9 κοντά στο 3 επεκτείνεται για να δείξουμε ότι η f τείνει στο a^2 κοντά στο a για οποιοδήποτε a, με τη διαφορά ότι θα

πρέπει να προβληματιστούμε λίγο περισσότερο για το πώς θα λάβουμε την κατάλληλη ανισότητα για το $|x + a|$. Πρώτα απαιτούμε ότι $|x - a| < 1$, και πάλι με την προσδοκία πως αυτό θα μας εξασφαλίσει ότι το $|x + a|$ δεν είναι υπερβολικά μεγάλο. Το Πρόβλημα 1-12 δείχνει ότι

$$|x| - |a| \leq |x - a| < 1,$$

άρα

$$|x| < 1 + |a|,$$

και επομένως

$$|x + a| \leq |x| + |a| < 2|a| + 1,$$

έτσι ώστε να έχουμε

$$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |x - a| \cdot |x + a| \\ &< |x - a| \cdot (2|a| + 1), \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ για $|x - a| < \varepsilon/(2|a| + 1)$, με την προϋπόθεση ότι έχουμε επιπλέον ότι $|x - a| < 1$. Πιο αυστηρά: απαιτούμε ότι $|x - a| < \min(\varepsilon/(2|a| + 1), 1)$.

Σε αντίθεση με αυτό το παράδειγμα, θα θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $f(x) = 1/x$ (για $x \neq 0$), και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η f τείνει στο $1/3$ κοντά στο 3. Πρέπει δηλαδή να δείξουμε πώς μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ανισότητα

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

για οποιονδήποτε δοθέντα θετικό αριθμό ε απαιτώντας να είναι το $|x - 3|$ αρκετά μικρό. Ξεκινάμε γράφοντας

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3 - x}{3x} \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x - 3|,$$

το οποίο μας δίνει τον χρήσιμο παράγοντα $|x - 3|$, και ακόμα ένα επιπλέον $\frac{1}{3}$ για μια καλή μέτρηση, μαζί με τον παράγοντα του προβλήματος $1/|x|$. Σε αυτήν την περίπτωση, πρώτα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το $|x|$ δεν είναι υπερβολικά *μικρό*, ώστε το $1/|x|$ να μην είναι υπερβολικά μεγάλο.

Μπορούμε πρώτα να απαιτήσουμε ότι $|x - 3| < 1$, διότι αυτό δίνει $2 < x < 4$, έτσι ώστε

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2},$$

το οποίο όχι μόνο μας λέει ότι $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$, αλλά και ότι $x > 0$, που είναι σημαντικό για να συμπεράνουμε ότι $\dfrac{1}{|x|} < \dfrac{1}{2}$. Στη συνέχεια έχουμε

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x - 3| < \frac{1}{6}|x - 3|,$$

το οποίο μας δείχνει ότι $|1/x - 1/3| < \varepsilon$ για $|x - 3| < 6\varepsilon$, με την προϋπόθεση ότι έχουμε επιπλέον απαιτήσει ότι $|x - 3| < 1$. Ή, για να το κάνουμε και πάλι να φανεί πιο αυστηρό: απαιτούμε ότι $|x - 3| < \min(6\varepsilon, 1)$.

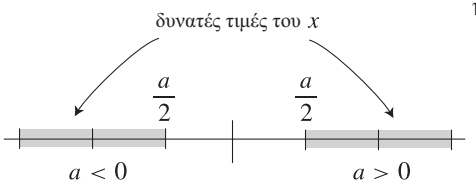
Αν αντί για αυτό θέλαμε να δείξουμε ότι η f τείνει στο $-1/3$ κοντά στο -3, θα ξεκινούσαμε καθορίζοντας ότι $|x - (-3)| < 1$, το οποίο δίνει $-4 < x < -2$, απ' όπου προκύπτει ότι $|1/x| < 1/2$, έτσι ώστε όλα να δουλεύουν όπως πριν.

Για να δείξουμε γενικά ότι η f τείνει στο $1/a$ κοντά στο a για οποιοδήποτε a προχωρούμε κατά βάση με τον ίδιο τρόπο, με τη διαφορά, και πάλι, ότι πρέπει να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί όταν διαμορφώνουμε την αρχική μας προϋπόθεση. Δεν αρκεί να απαιτήσουμε απλώς ότι το $|x - a|$ πρέπει να είναι μικρότερο από 1, ή από οποιονδήποτε

άλλο συγκεκριμένο αριθμό, διότι αν το a είναι κοντά στο 0 αυτό θα επέτρεπε αρνητικές τιμές για το x (για να μην αναφέρουμε τη δυσάρεστη πιθανότητα να έχουμε $x = 0$, ώστε η $f(x)$ να μην ορίζεται καν!).

Το τέχνασμα σε αυτήν την περίπτωση είναι να απαιτήσουμε πρώτα ότι

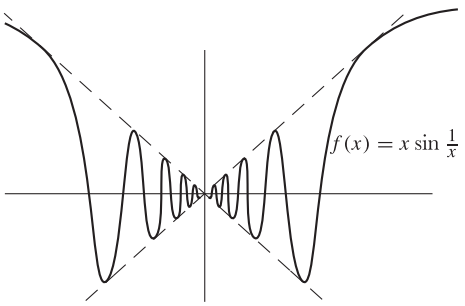
$$|x - a| < \frac{|a|}{2}.$$



ΣΧΗΜΑ 7

Με άλλα λόγια, απαιτούμε το x να απέχει από το a λιγότερο από το μισό της απόστασης του a από το 0 (Σχήμα 7). Θα πρέπει να είστε σε θέση να ελέγξετε πρώτα ότι $x \neq 0$ και $1/|x| < 2/|a|$, και στη συνέχεια να αναπτύξετε το υπόλοιπο μέρος του συλλογισμού.

Με όλη την εργασία που απαιτήθηκε για τα απλά αυτά παραδείγματα, ίσως να έχετε αρχίζει να τρομάζετε με την προοπτική να καταπιαστείτε με πιο πολύπλοκες συναρτήσεις. Αυτό όμως δεν θα είναι πραγματικά απαραίτητο, αφού τελικά θα έχουμε στη διάθεσή μας μερικά βασικά θεωρήματα στα οποία θα μπορούμε να βασιζόμαστε. Αντί να ανησυχήσουμε για τις δυσάρεστες πράξεις που πιθανόν να εμπλέκονται σε συναρτήσεις όπως η $f(x) = x^3$ ή η $f(x) = 1/x^3$, θα στρέψουμε την προσοχή μας σε ορισμένα παραδείγματα που ίσως φαίνονται ακόμα πιο τρομακτικά.



ΣΧΗΜΑ 8

Θεωρήστε πρώτα τη συνάρτηση $f(x) = x \sin 1/x$ (Σχήμα 8). Παρ' όλο που η συμπεριφορά αυτής της συνάρτησης κοντά στο 0 είναι αλλόκοτη, είναι φανερό, τουλάχιστον διαισθητικά, ότι η f τείνει στο $l = 0$ κοντά στο $a = 0$ (θυμηθείτε ότι ο δοκιμαστικός ορισμός εξαιρεί από τη μελέτη ειδικά το $x = a$, και άρα δεν πειράζει που η συνάρτηση αυτή δεν είναι καν ορισμένη στο 0. Θέλουμε να δείξουμε ότι μπορούμε να κάνουμε το $f(x) = x \sin 1/x$ να έρθει όσο κοντά θέλουμε στο 0 αν απαιτήσουμε το x να είναι αρκετά κοντά στο 0, αλλά $\neq 0$. Με άλλα λόγια, για οποιονδήποτε αριθμό $\varepsilon > 0$, θέλουμε να δείξουμε πως μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι

$$|f(x) - 0| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$$

απαιτώντας το $|x| = |x - 0|$ να είναι ικανοποιητικά μικρό (αλλά $\neq 0$). Αυτό είναι όμως εύκολο. Αφού

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \qquad \text{για κάθε } x \neq 0,$$

έχουμε

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|, \qquad \text{για κάθε } x \neq 0,$$

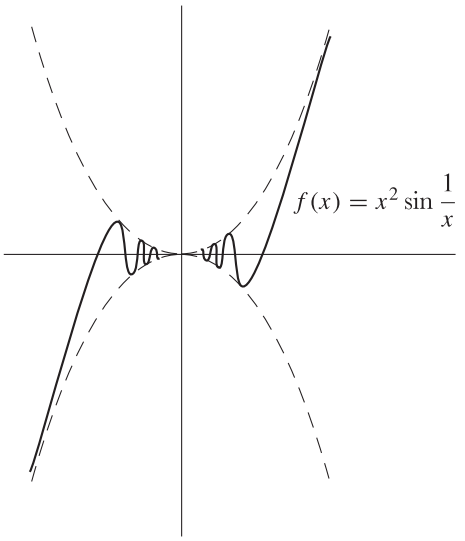
οπότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|x \sin 1/x| < \varepsilon$ απαιτώντας απλώς $|x| < \varepsilon$ και $\neq 0$.

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin 1/x$ (Σχήμα 9) μοιάζει ακόμα πιο φανερό ότι η f τείνει στο 0 κοντά στο 0. Αν, για παράδειγμα, θέλουμε

$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| < \frac{1}{10},$$

τότε σίγουρα αρκεί να απαιτήσουμε $|x| < \dfrac{1}{10}$ και $x \neq 0$, γιατί από αυτό έπεται ότι $|x^2| < \frac{1}{100}$ και επομένως

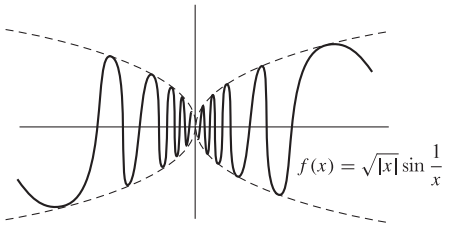
$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^2| < \frac{1}{100} < \frac{1}{10}.$$



ΣΧΗΜΑ 9

(Θα μπορούσαμε να πετύχουμε κάτι ακόμα καλύτερο, και να επιτρέψουμε $|x| < 1/\sqrt{10}$ και $x \neq 0$, αλλά δεν υπάρχει κάποιο συγκεκριμένο όφελος από το να είμαστε όσο γίνεται οικονομικότεροι.) Γενικά, αν $\varepsilon > 0$, για να βεβαιωθούμε ότι

$$\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| < \varepsilon,$$



ΣΧΗΜΑ 10

αρκεί να απαιτήσουμε ότι

$$|x| < \varepsilon \quad \text{και} \quad x \neq 0,$$

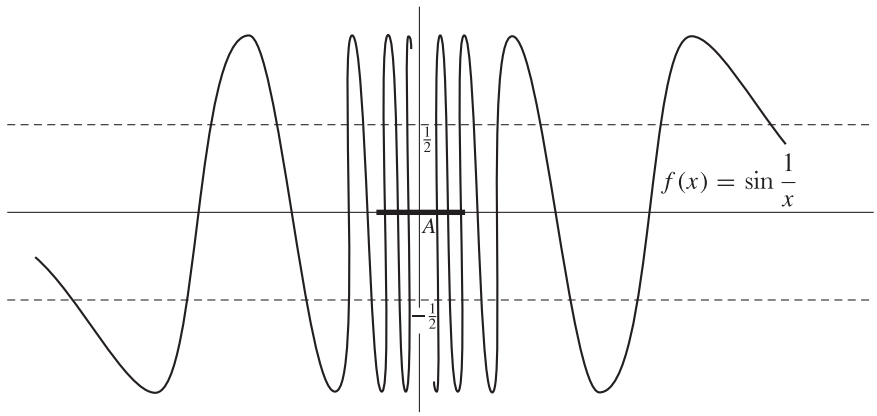
με την προϋπόθεση ότι $\varepsilon \leq 1$. Αν μας δοθεί ένα ε που είναι μεγαλύτερο από 1 (θα μπορούσε, αν και τα «μικρά» ε είναι αυτά που μας ενδιαφέρουν), τότε δεν αρκεί να ζητήσουμε $|x| < \varepsilon$, σίγουρα όμως αρκεί να ζητήσουμε $|x| < 1$ και $x \neq 0$.

Ως τρίτο παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}\sin 1/x$ (Σχήμα 10). Προκειμένου να κάνουμε το $|\sqrt{|x|}\sin 1/x| < \varepsilon$ μπορούμε να απαιτήσουμε

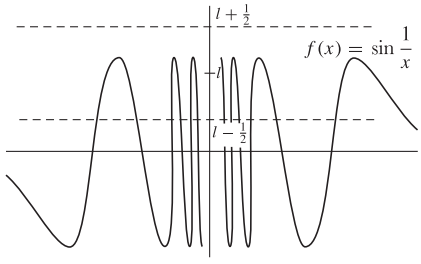
$$|x| < \varepsilon^2 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

(οι πράξεις αφήνονται σε σας).

Τέλος, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \sin 1/x$ (Σχήμα 11). Για αυτήν τη συνάρτηση *δεν ισχύει* ότι η f τείνει στο 0 κοντά στο 0. Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι δεν ισχύει για κάθε αριθμό $\varepsilon > 0$, ότι μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - 0| < \varepsilon$ διαλέγοντας x αρκετά μικρά και $\neq 0$. Για να το αποδείξουμε αυτό, δεν έχουμε παρά να βρούμε *ένα* $\varepsilon > 0$ για το οποίο η συνθήκη $|f(x) - 0| < \varepsilon$ να μην εξασφαλίζεται, όσο μικρό και αν απαιτήσουμε να είναι το $|x|$. Και το $\varepsilon = \frac{1}{2}$ μας κάνει: δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι $|f(x)| < \frac{1}{2}$ όσο μικρό και αν ζητήσουμε να είναι το $|x|$. Διότι, αν A είναι οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το 0, υπάρχει κάποιος αριθμός $x = 1/(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi)$ που βρίσκεται σε αυτό το διάστημα και για αυτό το x έχουμε $f(x) = 1$.



ΣΧΗΜΑ 11



ΣΧΗΜΑ 12

Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί (Σχήμα 12) για να δείξουμε ότι η f δεν τείνει σε *κανέναν* αριθμό κοντά στο 0. Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να βρούμε, για οποιοδήποτε τώρα δοθέν l, κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$ τέτοιον ώστε η $|f(x) - l| < \varepsilon$ να *μην* ισχύει, όσο μικρό και αν απαιτήσουμε να είναι το x. Η επιλογή $\varepsilon = \frac{1}{2}$ δουλεύει για οποιονδήποτε αριθμό l· δηλαδή, όσο μικρό και αν ζητήσουμε να είναι το $|x|$, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $|f(x) - l| < \frac{1}{2}$. Ο λόγος είναι ότι, σε κάθε διάστημα A που περιέχει το 0, μπορούμε να βρούμε x_1 και x_2, τέτοια ώστε

$$f(x_1) = 1 \qquad \text{και} \qquad f(x_2) = -1,$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2n\pi} \qquad \text{και} \qquad x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2m\pi}$$

για αρκετά μεγάλα n και m. Αλλά το διάστημα από το $l - \frac{1}{2}$ μέχρι το $l + \frac{1}{2}$ δεν μπορεί να περιέχει και το -1 και το 1, αφού το συνολικό του μήκος είναι μόνο 1· άρα δεν μπορούμε να έχουμε

$$|1 - l| < \tfrac{1}{2} \text{ και επίσης } |-1 - l| < \tfrac{1}{2},$$

όποιο και αν είναι το l.

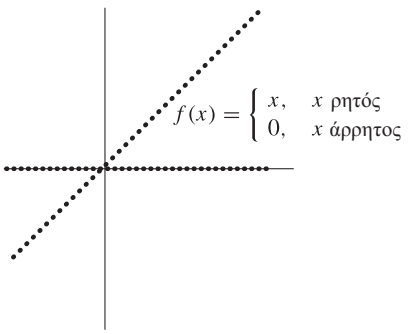
Το φαινόμενο που παρουσιάζει η $f(x) = \sin 1/x$ κοντά στο 0 μπορεί να εμφανιστεί με πολλούς τρόπους. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1, & x \text{ ρητός,} \end{cases}$$

τότε, όποιο και αν είναι το a, η f δεν τείνει σε κανέναν αριθμό l κοντά στο a. Πράγματι, δεν μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - l| < \frac{1}{4}$ όσο κοντά και αν φέρουμε το x στο a, γιατί σε κάθε διάστημα γύρω από το a υπάρχουν αριθμοί x με $f(x) = 0$, καθώς και αριθμοί x με $f(x) = 1$, οπότε θα χρειαζόμαστε $|0 - l| < \frac{1}{4}$ και ταυτόχρονα $|1 - l| < \frac{1}{4}$.

Μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή αυτής της συμπεριφοράς παρουσιάζει η συνάρτηση που βλέπετε στο Σχήμα 13:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

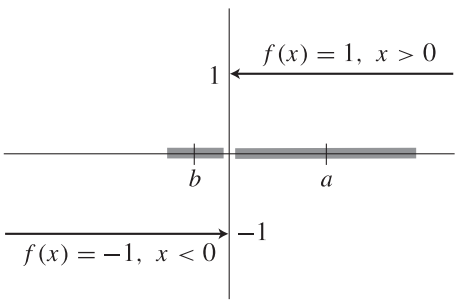


ΣΧΗΜΑ 13

Η συμπεριφορά αυτής της συνάρτησης είναι «αντίθετη» από αυτήν της $g(x) = \sin 1/x$. Τείνει στο 0 κοντά στο 0, αλλά δεν τείνει σε κανέναν αριθμό a, αν $a \neq 0$. Με ό,τι έχετε δει, δεν θα πρέπει να δυσκολευτείτε να πειστείτε ότι αυτό είναι αλήθεια.

Θα ολοκληρώσουμε με ένα πολύ απλό παράδειγμα (Σχήμα 14):

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 14

Αν $a > 0$, τότε η f τείνει στο 1 κοντά στο a: πράγματι, για να εξασφαλίσουμε ότι $|f(x) - 1| < \varepsilon$ αρκεί να απαιτήσουμε ότι $|x - a| < a$, αφού αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} -a &< x - a \\ \text{ή} \qquad 0 &< x \end{aligned}$$

έτσι ώστε $f(x) = 1$. Με όμοιο τρόπο, αν $b < 0$, τότε η f τείνει στο -1 κοντά στο b: για να εξασφαλίσουμε ότι $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ αρκεί να απαιτήσουμε ότι $|x - b| < -b$. Τέλος, όπως εύκολα μπορείτε να ελέγξετε, η f δεν τείνει σε κανέναν αριθμό κοντά στο 0.

Ήρθε η στιγμή να υπογραμμίσουμε ότι από τις πολλές «αποδείξεις» που δώσαμε για διάφορα όρια, ούτε μία δεν ήταν πραγματική απόδειξη. Το λάθος δεν βρίσκεται στους συλλογισμούς μας, αλλά στον ορισμό μας. Αν ο δοκιμαστικός ορισμός που δώσαμε για τη συνάρτηση ήταν ανοιχτός σε επικρίσεις, ο δοκιμαστικός μας ορισμός για τα όρια είναι πολύ περισσότερο τρωτός. Αυτός ο ορισμός, απλούστατα, δεν είναι αρκετά ακριβής για να χρησιμοποιηθεί σε αποδείξεις. Δεν είναι καθόλου σαφές πώς μπορεί κανείς να «φέρει» το $f(x)$ κοντά στο l (οτιδήποτε και αν σημαίνει το «κοντά») «απαιτώντας» το x να είναι αρκετά κοντά στο a (όσο κοντά και αν υποτίθεται ότι είναι το «αρκετά» κοντά). Παρά τις επικρίσεις στον ορισμό μας, θα πρέπει να αισθάνεστε (ελπίζουμε) ότι οι «αποδείξεις» μας ήταν τουλάχιστον αρκετά πειστικές. Για να δώσουμε κάποιου τύπου απόδειξη, αναγκαστήκαμε στην πράξη να επινοήσουμε τον πραγματικό ορισμό. Είναι δυνατόν να φτάσουμε σε αυτόν τον ορισμό σε διάφορα βήματα, που το καθένα να διευκρινίζει κάποια ασαφή φράση που παραμένει. Ας αρχίσουμε, για μια ακόμα φορά, με τον δοκιμαστικό ορισμό:

> Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να φέρουμε το $f(x)$ όσο κοντά θέλουμε στο l απαιτώντας το x να είναι αρκετά κοντά στο, αλλά όχι ίσο με το, a.

Η πρώτη-πρώτη αλλαγή που κάναμε σε αυτόν τον ορισμό, ήταν να σημειώσουμε ότι το να φέρουμε το $f(x)$ κοντά στο l σημαίνει να κάνουμε το $|f(x) - l|$ μικρό, και όμοια για το x και το a:

> Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν μπορούμε να κάνουμε το $|f(x) - l|$ όσο μικρό θέλουμε απαιτώντας το $|x - a|$ να είναι αρκετά μικρό, και $x \neq a$.

Η δεύτερη, πιο ουσιαστική, αλλαγή ήταν να σημειώσουμε ότι το να κάνουμε το $|f(x)-l|$ «όσο μικρό θέλουμε» σημαίνει να κάνουμε το $|f(x)-l|<\varepsilon$ για οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ που μπορεί να μας δοθεί:

> Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν για κάθε αριθμό $\varepsilon>0$ μπορούμε να κάνουμε το $|f(x)-l|<\varepsilon$ απαιτώντας το $|x-a|$ να είναι αρκετά μικρό, και $x\neq a$.

Υπάρχει κάτι το κοινό σε όλες τις αποδείξεις για όρια που δώσαμε. Για κάθε αριθμό $\varepsilon>0$ βρήκαμε κάποιον άλλο θετικό αριθμό, ας πούμε δ, με την ιδιότητα ότι αν $x\neq a$ και $|x-a|<\delta$, τότε $|f(x)-l|<\varepsilon$. Για τη συνάρτηση $f(x)=x\sin 1/x$ (με $a=0$, $l=0$), ο αριθμός δ ήταν ακριβώς το $\varepsilon\cdot$ για την $f(x)=\sqrt{|x|}\sin 1/x$, ήταν το $\varepsilon^2\cdot$ για την $f(x)=x^2$ ήταν ο μικρότερος από τους 1 και $\varepsilon/(2|a|+1)$. Γενικά, μπορεί να μην είναι καθόλου φανερό πώς να βρούμε τον αριθμό δ, για δοθέν ε, αλλά είναι η συνθήκη $|x-a|<\delta$ που εκφράζει πόσο μικρό πρέπει να είναι το «αρκετά» μικρό:

> Η συνάρτηση f τείνει στο όριο l κοντά στο a, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, αν $|x-a|<\delta$ και $x\neq a$, τότε $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Αυτός είναι τελικά ο ορισμός που θα υιοθετήσουμε. Θα κάνουμε μόνο μια τετριμμένη αλλαγή, σημειώνοντας ότι μπορούμε να εκφράσουμε το «$|x-a|<\delta$ και $x\neq a$» εξίσου καλά με το «$0<|x-a|<\delta$».

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Η συνάρτηση ***f* τείνει στο όριο *l* κοντά στο *a*** αν: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, αν $0<|x-a|<\delta$, τότε $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Αυτός ο ορισμός είναι τόσο σημαντικός (*οτιδήποτε* θα κάνουμε από δω και πέρα βασίζεται σε αυτόν) που δεν έχετε καμία ελπίδα να προχωρήσετε πιο πέρα αν δεν τον ξέρετε. Εν ανάγκη αποστηθίστε τον, σαν ποίημα! Αυτό, τουλάχιστον, είναι καλύτερο από το να τον διατυπώνετε λανθασμένα· αν το κάνετε αυτό, είστε καταδικασμένοι να δίνετε λανθασμένες αποδείξεις. Μια καλή άσκηση στο να δίνετε σωστές αποδείξεις είναι να επαναλάβετε όλες τις «αποδείξεις» για όρια που δώσαμε έως τώρα, δίνοντας πραγματικές αποδείξεις για το καθένα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτό θα απαιτήσει να γράψετε τον σωστό ορισμό του τι ακριβώς αποδεικνύεται, και τίποτα παραπάνω —όλη η αλγεβρική εργασία έχει ήδη γίνει. Όταν αποδεικνύετε ότι η f *δεν* τείνει στο l κοντά στο a, βεβαιωθείτε ότι γράφετε σωστά την άρνηση του ορισμού:

Αν *δεν* είναι αλήθεια ότι

> για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιο $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, αν $0<|x-a|<\delta$, τότε $|f(x)-l|<\varepsilon$,

τότε

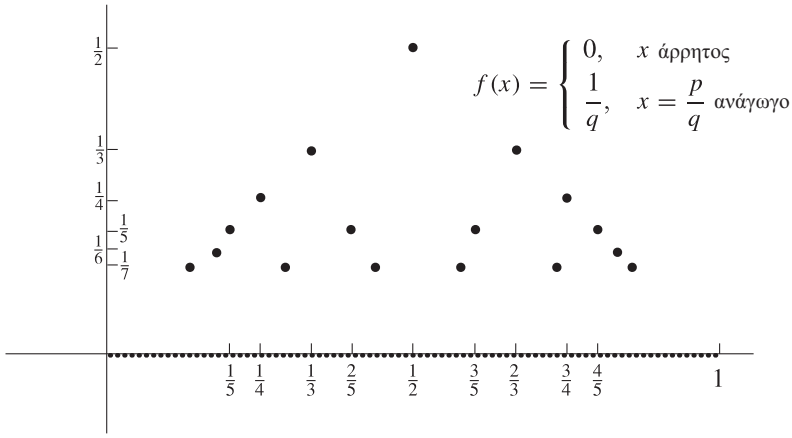
> υπάρχει *κάποιο* $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε για *κάθε* $\delta>0$ υπάρχει *κάποιο* x που ικανοποιεί την $0<|x-a|<\delta$ αλλά όχι την $|f(x)-l|<\varepsilon$.

Έτσι, για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sin 1/x$ δεν τείνει στο 0 κοντά στο 0, παίρνουμε $\varepsilon=\frac{1}{2}$ και βλέπουμε ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει κάποιο x με $0<|x-0|<\delta$ αλλά όχι $|\sin 1/x-0|<\frac{1}{2}$ —συγκεκριμένα, ένα x της μορφής $1/(\pi/2+2n\pi)$, όπου το n είναι τόσο μεγάλο ώστε $1/(\pi/2+2n\pi)<\delta$.

Για να υπογραμμίσουμε τη χρήση του ορισμού του ορίου μιας συνάρτησης, αφήσαμε τελευταία τη συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 15 —ένα γνωστό παράδειγμα αλλά από τα πιο πολύπλοκα:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ άρρητος}, 0<x<1\\ 1/q, & x=p/q \text{ ανάγωγο}, 0<x<1.\end{cases}$$

(Θυμηθείτε ότι το p/q λέγεται ανάγωγο αν οι p και q είναι ακέραιοι που δεν έχουν κοινό διαιρέτη και $q>0$.)



ΣΧΗΜΑ 15

Για κάθε αριθμό a, με $0 < a < 1$, η συνάρτηση f τείνει στο 0 στο a. Για να το αποδείξουμε, παίρνουμε έναν τυχαίο αριθμό $\varepsilon > 0$. Έστω n ένας φυσικός αριθμός τόσο μεγάλος ώστε $1/n \leq \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι οι μόνοι αριθμοί x για τους οποίους θα μπορούσε να μην ισχύει η $|f(x) - 0| < \varepsilon$, είναι οι:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

(Αν ο a είναι ρητός, τότε ο a θα μπορούσε να είναι ένας από αυτούς τους αριθμούς.) Όσο πολλοί και αν είναι αυτοί οι αριθμοί, το πλήθος τους θα είναι οπωσδήποτε πεπερασμένο. Επομένως, από όλους αυτούς τους αριθμούς, κάποιος είναι ο πλησιέστερος στον a. Δηλαδή, το $|p/q - a|$ γίνεται ελάχιστο για κάποιο p/q ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς. (Αν ο a συμβαίνει να είναι ένας από αυτούς τους αριθμούς, τότε θεωρούμε μόνο τις τιμές $|p/q - a|$ για $p/q \neq a$.) Αυτήν τη μικρότερη απόσταση διαλέγουμε ως δ. Γιατί, αν $0 < |x - a| < \delta$, τότε ο x *δεν* είναι ένας από τους

$$\frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

και επομένως η $|f(x) - 0| < \varepsilon$ *ισχύει*. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. Παρατηρήστε ότι η περιγραφή που δώσαμε για το δ που λειτουργεί για δοθέν ε είναι πλήρως επαρκής —δεν υπάρχει κανένας λόγος που να μας αναγκάζει να δώσουμε έναν τύπο για το δ ως συνάρτηση του ε.

Εφοδιασμένοι με τον ορισμό μας, είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το πρώτο μας θεώρημα. Είναι πολύ πιθανό να έχετε ήδη υποθέσει το αποτέλεσμα, κάτι που είναι απόλυτα φυσιολογικό. Αυτό το θεώρημα είναι στην πραγματικότητα ένας έλεγχος του ορισμού μας: αν δεν μπορούσαμε να αποδείξουμε το θεώρημα, ο ορισμός μας θα ήταν άχρηστος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Μια συνάρτηση δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια κοντά στο a. Με άλλα λόγια, αν η f τείνει στο l κοντά στο a, και η f τείνει στο m κοντά στο a, τότε $l = m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Επειδή αυτό είναι το πρώτο μας θεώρημα για τα όρια, είναι απαραίτητο να μεταφράσουμε τις υποθέσεις σύμφωνα με τον ορισμό.

Αφού η f τείνει στο l κοντά στο a, ξέρουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιος αριθμός $\delta_1 > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x - a| < \delta_1, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ξέρουμε ακόμα, ότι αφού η f τείνει στο m κοντά στο a, υπάρχει κάποιο $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x - a| < \delta_2, \text{ τότε } |f(x) - m| < \varepsilon.$$

Είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε δύο αριθμούς, δ_1 και δ_2, γιατί τίποτα δεν μας εγγυάται ότι το δ που δουλεύει στον έναν ορισμό θα δουλεύει και στον άλλο. Όμως, είναι τώρα εύκολο να συμπεράνουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |f(x)-l| < \varepsilon \text{ και } |f(x)-m| < \varepsilon.$$

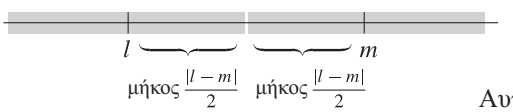
δεν έχουμε παρά να διαλέξουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να βρούμε ένα συγκεκριμένο $\varepsilon > 0$ για το οποίο οι δύο συνθήκες

$$|f(x)-l| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |f(x)-m| < \varepsilon$$

να μην μπορούν να ισχύουν και οι δύο, αν $l \neq m$. Η κατάλληλη επιλογή υποδεικνύεται στο Σχήμα 16. Αν $l \neq m$, οπότε $|l-m| > 0$, μπορούμε να διαλέξουμε ως ε το $|l-m|/2$. Έπεται ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |f(x)-l| < \frac{|l-m|}{2}$$
$$\text{και } |f(x)-m| < \frac{|l-m|}{2}.$$



ΣΧΗΜΑ 16

Αυτό σημαίνει ότι για $0 < |x-a| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |l-m| = |l-f(x)+f(x)-m| &\leq |l-f(x)| + |f(x)-m| \\ &< \frac{|l-m|}{2} + \frac{|l-m|}{2} \\ &= |l-m|, \end{aligned}$$

που είναι άτοπο. ∎

Ο αριθμός l στον οποίο τείνει η f κοντά στο a συμβολίζεται με $\lim_{x\to a} f(x)$ (διαβάζεται: το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο a). Ο ορισμός αυτός είναι δυνατός μόνο λόγω του Θεωρήματος 1, το οποίο εξασφαλίζει ότι το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν μπορεί ποτέ να παριστάνει δύο διαφορετικούς αριθμούς. Η ισότητα

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

έχει ακριβώς το ίδιο νόημα με τη φράση

$$\text{η } f \text{ τείνει στο } l \text{ κοντά στο } a.$$

Δεν αποκλείεται το ενδεχόμενο η f να μην τείνει στο l κοντά στο a, για κανένα l, οπότε η $\lim_{x\to a} f(x) = l$ να είναι ψευδής για κάθε αριθμό l. Συνήθως εκφράζουμε μια τέτοια κατάσταση λέγοντας ότι «το $\lim_{x\to a} f(x)$» δεν υπάρχει».

Παρατηρήστε ότι ο καινούργιος συμβολισμός μας εισάγει ένα πρόσθετο, τελείως άσχετο γράμμα x, που μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με t, y, ή οποιοδήποτε άλλο γράμμα που δεν έχει ήδη εμφανιστεί —τα σύμβολα

$$\lim_{x\to a} f(x), \qquad \lim_{t\to a} f(t), \qquad \lim_{y\to a} f(y),$$

όλα συμβολίζουν τον ίδιο ακριβώς αριθμό, που εξαρτάται από την f και το a, και δεν έχει τίποτα να κάνει με το x, το t ή το y (αυτά τα γράμματα στην πραγματικότητα δεν συμβολίζουν τίποτα απολύτως). Ένα πιο λογικό σύμβολο θα ήταν κάτι σαν $\lim_{a} f$ αλλά αυτός ο συμβολισμός, παρ' όλη τη συντομία του, είναι τόσο εξοργιστικά αυστηρός που σχεδόν κανείς δεν προσπάθησε σοβαρά να τον χρησιμοποιήσει. Ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x)$ είναι

πολύ πιο χρήσιμος γιατί μια συνάρτηση f συχνά δεν έχει κάποιο απλό όνομα, ακόμα και αν θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το $f(x)$ με έναν απλό τύπο που να περιέχει το x. Έτσι, το σύντομο σύμβολο

$$\lim_{x\to a}(x^2+\sin x)$$

θα μπορούσε να παραφραστεί μόνο με την αδέξια έκφραση

$$\lim_{a} f, \text{ όπου } f(x)=x^2+\sin x.$$

Ένα άλλο πλεονέκτημα του καθιερωμένου συμβολισμού μάς υποδεικνύουν οι εκφράσεις

$$\lim_{x\to a} x+t^3,$$
$$\lim_{t\to a} x+t^3.$$

Η πρώτη σημαίνει τον αριθμό στον οποίο τείνει η f κοντά στο a, όταν

$$f(x)=x+t^3, \quad \text{για κάθε } x\cdot,$$

ενώ η δεύτερη σημαίνει τον αριθμό στον οποίο τείνει η f κοντά στο a, όταν

$$f(t)=x+t^3, \quad \text{για κάθε } t.$$

Δεν θα πρέπει να συναντήσετε δυσκολίες (ειδικά αν συμβουλευτείτε το Θεώρημα 2) στο να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to a} x+t^3=a+t^3,$$
$$\lim_{t\to a} x+t^3=x+a^3.$$

Αυτά τα παραδείγματα υπογραμμίζουν το βασικό πλεονέκτημα του συμβολισμού μας, που είναι η ευελιξία του. Και μάλιστα ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x)$ είναι τόσο ευέλικτος που υπάρχει κίνδυνος να ξεχάσουμε τι στ' αλήθεια σημαίνει. Να μια απλή άσκηση πάνω στη χρήση αυτού του συμβολισμού, που θα είναι πολύ σημαντική αργότερα: πρώτα ερμηνεύστε ακριβώς, και μετά αποδείξτε την ισότητα των εκφράσεων

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0} f(a+h).$$

Ένα σημαντικό μέρος αυτού του κεφαλαίου αφιερώνεται στην απόδειξη ενός θεωρήματος που θα μας διευκολύνει να βρίσκουμε διάφορα όρια, όπως υποσχεθήκαμε πολύ νωρίτερα. Η απόδειξη βασίζεται σε κάποιες ιδιότητες των ανισοτήτων και των απολύτων τιμών, που δεν προκαλούν καμία έκπληξη σε κάποιον που μελέτησε τον ορισμό του ορίου. Αν και αυτά τα στοιχεία έχουν ήδη διατυπωθεί στα Προβλήματα 1-20, 1-21 και 1-22, λόγω της σημασίας τους θα παρουσιαστούν για άλλη μια φορά με τη μορφή ενός λήμματος (λήμμα είναι ένα βοηθητικό θεώρημα, ένα αποτέλεσμα που δικαιολογεί την ύπαρξή του μόνο χάρη στον εξέχοντα ρόλο που παίζει στην απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος). Το λήμμα λέει, πάνω-κάτω, ότι αν το x είναι κοντά στο x_0, και το y είναι κοντά στο y_0, τότε το $x+y$ θα βρίσκεται κοντά στο x_0+y_0, το xy κοντά στο x_0y_0 και το $1/y$ κοντά στο $1/y_0$. Μπορεί κανείς πολύ πιο εύκολα να θυμάται αυτήν τη διαισθητική διατύπωση παρά τις ακριβείς εκτιμήσεις του λήμματος, και δεν θα ήταν παράλογο να διαβάσετε πρώτα την απόδειξη του Θεωρήματος 2, για να δείτε πώς ακριβώς χρησιμοποιούνται αυτές οι εκτιμήσεις.

ΛΗΜΜΑ (1) Αν

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ και } |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2},$$

τότε

$$|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon.$$

(2) Αν

$$|x - x_0| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}\right) \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

τότε

$$|xy - x_0 y_0| < \varepsilon.$$

(3) Αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right),$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| < \varepsilon.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (1)

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 + y_0)| &= |(x - x_0) + (y - y_0)| \\ &\leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) Αφού $|x - x_0| < 1$ έχουμε

$$|x| - |x_0| \leq |x - x_0| < 1,$$

οπότε

$$|x| < 1 + |x_0|.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |xy - x_0 y_0| &= |x(y - y_0) + y_0(x - x_0)| \\ &\leq |x| \cdot |y - y_0| + |y_0| \cdot |x - x_0| \\ &< (1 + |x_0|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)} + |y_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Έχουμε

$$|y_0| - |y| \leq |y - y_0| < \frac{|y_0|}{2},$$

άρα $|y| > |y_0|/2$. Ειδικότερα, $y \neq 0$, και

$$\frac{1}{|y|} < \frac{2}{|y_0|}.$$

Άρα

$$\left| \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_0 - y|}{|y| \cdot |y_0|} < \frac{2}{|y_0|} \cdot \frac{1}{|y_0|} \cdot \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν $\lim_{x \to a} f(x) = l$ και $\lim_{x \to a} g(x) = m$, τότε

(1) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = l + m,$

(2) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = l \cdot m.$

Ακόμα, αν $m \neq 0$, τότε

(3) $\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{m}.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η υπόθεση σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε x,

$$\begin{aligned} &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ τότε } |f(x)-l| < \varepsilon, \\ \text{και} \quad &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ τότε } |g(x)-m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει (αφού, σαφώς, και ο $\varepsilon/2$ είναι θετικός αριθμός) ότι υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε x,

$$\begin{aligned} &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ τότε } |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \text{και} \quad &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ τότε } |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Τώρα θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε η $0 < |x-a| < \delta_1$ και η $0 < |x-a| < \delta_2$ ισχύουν και οι δύο, άρα οι

$$|f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ισχύουν και οι δύο. Αλλά από το μέρος (1) του λήμματος αυτό σημαίνει ότι $|(f+g)(x) - (l+m)| < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει το (1).

Για να αποδείξουμε το (2) εργαζόμαστε όμοια, αφού πρώτα συμβουλευτούμε το μέρος (2) του λήμματος. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε x,

$$\begin{aligned} &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ τότε } |f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right), \\ \text{και} \quad &\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ τότε } |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}. \end{aligned}$$

Πάλι θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε

$$|f(x)-l| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right) \quad \text{και} \quad |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}.$$

Άρα, από το λήμμα, $|(f \cdot g)(x) - l \cdot m| < \varepsilon$, και αυτό αποδεικνύει το (2).

Τέλος, αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |g(x)-m| < \min\left(\frac{|m|}{2}, \frac{\varepsilon |m|^2}{2}\right).$$

Αλλά σύμφωνα με το μέρος (3) του λήμματος αυτό σημαίνει, πρώτα, ότι $g(x) \neq 0$, άρα ότι το $(1/g)(x)$ έχει έννοια, και έπειτα ότι

$$\left| \left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το (3). ∎

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 μπορούμε να αποδείξουμε, τετριμμένα, κάτι σαν το

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 + 7x^5}{x^2 + 1} = \frac{a^3 + 7a^5}{a^2 + 1},$$

χωρίς να περάσουμε από την επίπονη διαδικασία να βρούμε ένα δ, για δοθέν ε. Πρέπει να αρχίσουμε με τα

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} 7 &= 7, \\ \lim_{x \to a} 1 &= 1, \\ \lim_{x \to a} x &= a, \end{aligned}$$

αλλά αυτά είναι εύκολο να αποδειχθούν απευθείας. Αν όμως *θέλουμε* να βρούμε το δ, η απόδειξη του Θεωρήματος 2 μας δίνει τη συνταγή για να το κάνουμε. Ας υποθέσουμε, για να πάρουμε ένα απλούστερο παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε ένα δ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |x^2 + x - (a^2 + a)| < \varepsilon.$$

Συμβουλευόμενοι την απόδειξη του Θεωρήματος 2(1), βλέπουμε ότι πρέπει πρώτα να βρούμε δ_1 και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta_1, \text{ τότε } |x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\text{και} \quad \text{αν } 0 < |x-a| < \delta_2, \text{ τότε } |x-a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού έχουμε ήδη δώσει αποδείξεις των $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ και $\lim_{x\to a} x = a$, ξέρουμε πώς να το κάνουμε αυτό:

$$\delta_1 = \min\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2|a|+1}\right),$$
$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έτσι, μπορούμε να πάρουμε

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) = \min\left(\min\left(1, \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{2|a|+1}\right), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Αν $a \neq 0$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο για να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}\right| < \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2(3) δείχνει ότι η δεύτερη συνθήκη έπεται αν βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |x^2 - a^2| < \min\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right).$$

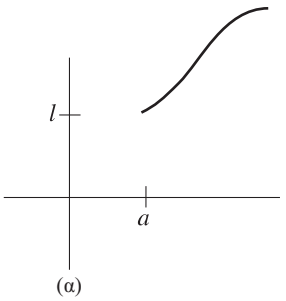
Έτσι, μπορούμε να πάρουμε

$$\delta = \min\left(1, \frac{\min\left(\frac{|a|^2}{2}, \frac{\varepsilon|a|^4}{2}\right)}{2|a|+1}\right).$$

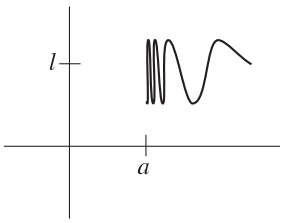
Φυσικά, μπορούμε να απλουστεύσουμε αρκετά τέτοιες πολύπλοκες εκφράσεις του δ, αφού πρώτα τις βρούμε.

Μια τεχνική λεπτομέρεια στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 αξίζει κάποια συζήτηση. Για να οριστεί το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν είναι, όπως ξέρουμε, αναγκαίο να ορίζεται η f στο a, ούτε είναι αναγκαίο να ορίζεται η f σε όλα τα σημεία $x \neq a$. Όμως, πρέπει να υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το $f(x)$ να ορίζεται για x που ικανοποιούν την $0 < |x-a| < \delta$· αλλιώς η πρόταση

$$\text{«αν } 0 < |x-a| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon\text{»}$$

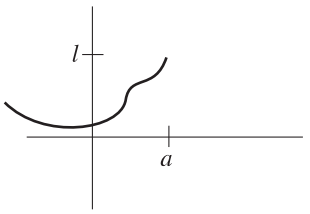


(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 17



ΣΧΗΜΑ 18

δεν θα είχε κανένα νόημα, αφού το σύμβολο $f(x)$ δεν θα είχε έννοια για κάποια x. Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ο ορισμός έχει έννοια, είναι εύκολο να δούμε ότι το ίδιο ισχύει και για τις $f+g$ και $f\cdot g$. Αλλά αυτό δεν είναι και τόσο φανερό για την $1/g$, αφού η $1/g$ δεν ορίζεται για x με $g(x)=0$. Όμως, αυτό εξασφαλίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2(3).

Υπάρχουν φορές που θα θέλαμε να μιλάμε για το όριο στο οποίο τείνει η f στο a, αν και δεν υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε το $f(x)$ να ορίζεται για όλα τα x που ικανοποιούν την $0<|x-a|<\delta$. Για παράδειγμα, θέλουμε να εξετάσουμε τη συμπεριφορά των δύο συναρτήσεων που φαίνονται στο Σχήμα 17, αν και δεν ορίζονται για αριθμούς μικρότερους από a. Για τη συνάρτηση του Σχήματος 17(α) γράφουμε

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=l \quad \text{ή} \quad \lim_{x\downarrow a} f(x)=l.$$

(Τα σύμβολα στα αριστερά διαβάζονται: το όριο του $f(x)$ καθώς το x τείνει στο a από πάνω). Αυτά τα «όρια από πάνω» προφανώς συνδέονται στενά με τα συνηθισμένα όρια, και ο ορισμός μοιάζει πολύ: $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0<x-a<\delta, \text{ τότε } |f(x)-l|<\varepsilon.$$

(Η συνθήκη «$0<x-a<\delta$» είναι ισοδύναμη με την «$0<|x-a|<\delta$ και $x>a$»).

«Τα όρια από κάτω» (Σχήμα 18) ορίζονται όμοια: $\lim_{x\to a^-} f(x)=l$ (ή $\lim_{x\uparrow a} f(x)=l$) σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0<a-x<\delta, \text{ τότε } |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Μπορούμε κάλλιστα να θεωρήσουμε όρια από πάνω και από κάτω, ακόμα και αν η f ορίζεται για αριθμούς και μικρότερους και μεγαλύτερους από τον a. Έτσι, για τη συνάρτηση f του Σχήματος 14, έχουμε

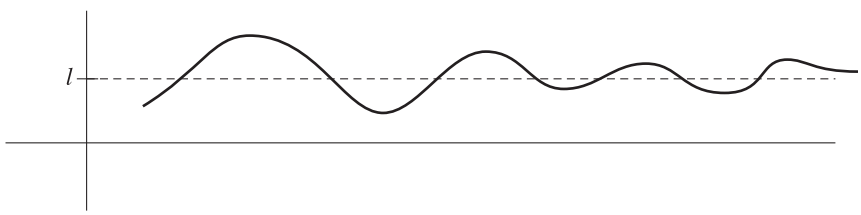
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1.$$

Είναι μια εύκολη άσκηση (Πρόβλημα 29) να δείξετε ότι το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to a^-} f(x)$ υπάρχουν και τα δύο, και είναι ίσα.

Σαν τους ορισμούς των ορίων από πάνω και από κάτω, που πέρασαν μέσα στο κείμενο λαθραία και χωρίς αυστηρότητα, υπάρχουν και άλλες παραλλαγές της έννοιας του ορίου που θα φανούν χρήσιμες. Στο Κεφάλαιο 4 ισχυριστήκαμε ότι όταν το x είναι μεγάλο, τότε το $\sin 1/x$ είναι κοντά στο 0. Αυτός ο ισχυρισμός συνήθως γράφεται

$$\lim_{x\to\infty} \sin 1/x = 0.$$

Το σύμβολο $\lim_{x\to\infty} f(x)$ διαβάζεται «το όριο του $f(x)$ καθώς το x τείνει στο ∞», ή «καθώς το x γίνεται άπειρο», και κάθε όριο της μορφής $\lim_{x\to\infty} f(x)$ συχνά λέγεται όριο στο άπειρο.



ΣΧΗΜΑ 19

Στο Σχήμα 19 περιγράφεται μια γενική περίπτωση όπου $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$. Τυπικά, $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } x>N, \text{ τότε } |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Η αναλογία με τον ορισμό των συνηθισμένων ορίων πρέπει να είναι φανερή: ενώ η συνθήκη «$0 < |x - a| < \delta$» εκφράζει το γεγονός ότι το x είναι κοντά στο a, η συνθήκη «$x > N$» εκφράζει το γεγονός ότι το x είναι μεγάλο.

Αφιερώσαμε λίγο μόνο χρόνο στα όρια από πάνω και από κάτω, και στο άπειρο, γιατί η γενική φιλοσοφία πίσω από τους ορισμούς γίνεται φανερή αν καταλάβετε τον ορισμό των συνηθισμένων ορίων (που είναι ασύγκριτα πιο σημαντικά). Πολλές ασκήσεις πάνω σε αυτούς τους ορισμούς δίνονται στα Προβλήματα, όπου περιέχονται και διάφοροι άλλοι τύποι ορίων που μερικές φορές είναι χρήσιμοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε τα εξής όρια. (Όλα αυτά τα όρια έπονται, μετά από κάποιους αλγεβρικούς χειρισμούς, από τα διάφορα μέρη του Θεωρήματος 2· βεβαιωθείτε ότι ξέρετε ποια χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση, μη μπείτε όμως στον κόπο να τα αναφέρετε.)

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

(ii) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iii) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$.

(iv) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

(v) $\lim_{y\to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$.

(vi) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$.

2. Βρείτε τα εξής όρια.

(i) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$.

3. Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις, προσδιορίστε το όριο l για το δοθέν a, και αποδείξετε ότι αυτό είναι το όριο δείχνοντας πώς μπορεί να βρεθεί ένα δ τέτοιο ώστε $|f(x) - l| < \varepsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - a| < \delta$.

(i) $f(x) = x\big[3 - \cos(x^2)\big]$, $a = 0$.

(ii) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, $a = 2$.

(iii) $f(x) = \dfrac{100}{x}$, $a = 1$.

(iv) $f(x) = x^4$, τυχαίο a.

(v) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{2 - \sin^2 x}$, $a = 0$.

(vii) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$.

(viii) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; a = 1.$

4. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-17, εξετάστε για ποιους αριθμούς a υπάρχει το όριο $\lim_{x \to a} f(x)$.

∗**5.** (α) Κάντε το ίδιο για όλες τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-19.

(β) Το ίδιο πρόβλημα, αν χρησιμοποιήσουμε άπειρα δεκαδικά ψηφία που καταλήγουν σε μια αλυσίδα από 0 αντί για αυτές που καταλήγουν σε μια αλυσίδα από 9.

6. Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x-2| < \sin^2\left(\frac{\varepsilon^2}{9}\right) + \varepsilon, \text{ τότε } |f(x)-2| < \varepsilon,$$
$$\text{αν } 0 < |x-2| < \varepsilon^2, \text{ τότε } |g(x)-4| < \varepsilon.$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ βρείτε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

(i) αν $0 < |x-2| < \delta$, τότε $|f(x)+g(x)-6| < \varepsilon$.

(ii) αν $0 < |x-2| < \delta$, τότε $|f(x)g(x)-8| < \varepsilon$.

(iii) αν $0 < |x-2| < \delta$, τότε $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{4}\right| < \varepsilon$.

(iv) αν $0 < |x-2| < \delta$, τότε $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

7. Δώστε παράδειγμα μιας συνάρτησης f για την οποία ο ακόλουθος ισχυρισμός να είναι *ψευδής*: Αν $|f(x)-l| < \varepsilon$ όταν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x)-l| < \varepsilon/2$ όταν $0 < |x-a| < \delta/2$.

8. (α) Αν το $\lim_{x \to a} f(x)$ και το $\lim_{x \to a} g(x)$ δεν υπάρχουν, είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)]$ ή το $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$;

(β) Αν το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει, πρέπει να υπάρχει και το $\lim_{x \to a} g(x)$;

(γ) Αν το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x \to a} g(x)$ δεν υπάρχει, μπορεί να υπάρχει το $\lim_{x \to a}[f(x)+g(x)]$;

(δ) Αν το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$ υπάρχει, έπεται ότι υπάρχει και το $\lim_{x \to a} g(x)$;

9. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$. (Αυτή είναι μια άσκηση που ελέγχει κυρίως αν έχετε καταλάβει καλά την ορολογία.)

10. (α) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = l$ αν και μόνο αν $\lim_{x \to a}[f(x)-l] = 0$. (Δείτε πρώτα γιατί αυτός ο ισχυρισμός είναι προφανής· δώστε μετά μια αυστηρή απόδειξη. Σε αυτό το κεφάλαιο, τα πιο πολλά προβλήματα που ζητούν αποδείξεις πρέπει να τα χειριστείτε με αυτόν τον τρόπο.)

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x-a)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x^3)$.

(δ) Δώστε ένα παράδειγμα όπου το $\lim_{x \to 0} f(x^2)$ να υπάρχει, αλλά το $\lim_{x \to 0} f(x)$ όχι.

11. Έστω ότι υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) = g(x)$ όταν $0 < |x - a| < \delta$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Με άλλα λόγια, το $\lim_{x\to a} f(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του $f(x)$ για x κοντά στο a —συχνά εκφράζουμε αυτό το γεγονός λέγοντας ότι τα όρια είναι «τοπική ιδιότητα». (Θα σας βοηθήσει οπωσδήποτε να χρησιμοποιήσετε το δ', ή κάποιο άλλο γράμμα, αντί για το δ, στον ορισμό των ορίων.)

12. (α) Έστω ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$, αρκεί βέβαια να υπάρχουν αυτά τα όρια.

(β) Πώς μπορούμε να κάνουμε την υπόθεση ασθενέστερη;

(γ) Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε x, έπεται αναγκαστικά ότι $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$;

13. Έστω ότι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ και ότι $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to a} g(x)$ υπάρχει, και ότι $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$. (Κάντε ένα σχήμα!)

∗**14.** (α) Αποδείξτε ότι αν $\lim_{x\to 0} f(x)/x = l$ και $b \neq 0$, τότε $\lim_{x\to 0} f(bx)/x = bl$. Υπόδειξη: Γράψτε $f(bx)/x = b[f(bx)/bx]$.

(β) Τί συμβαίνει αν $b = 0$;

(γ) Το μέρος (α) μας επιτρέπει να βρούμε το $\lim_{x\to 0}(\sin 2x)/x$ ως συνάρτηση του $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x$. Βρείτε αυτό το όριο με έναν άλλο τρόπο.

15. Υπολογίστε τα εξής όρια συναρτήσει του αριθμού $\alpha = \lim_{x\to 0}(\sin x)/x$.

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x + 2x}{x + x^2}$.

(vii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

(viii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$.

(ix) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}$.

(x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(3 + \sin x)}{(x + \sin x)^2}$.

(xi) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 1)^3 \sin\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)^3$.

16. (α) Αποδείξτε ότι, αν $\lim_{x\to a} f(x) = l$, τότε $\lim_{x\to a} |f|(x) = |l|$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $\lim_{x\to a} f(x) = l$ και $\lim_{x\to a} g(x) = m$, τότε $\lim_{x\to a} \max(f, g)(x) = \max(l, m)$ και όμοια για το min.

17. (α) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to 0} 1/x$ δεν υπάρχει, δηλαδή, δείξτε ότι για κάθε αριθμό l δεν ισχύει $\lim_{x\to 0} 1/x = l$.

(β) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x\to 1} 1/(x-1)$ δεν υπάρχει.

18. Αποδείξτε ότι, αν $\lim_{x\to a} f(x) = l$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ και ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $|f(x)| < M$ αν $0 < |x - a| < \delta$. (Τί σημαίνει αυτό σε ένα σχήμα;) Υπόδειξη: Γιατί είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $l - 1 < f(x) < l + 1$ για $0 < |x - a| < \delta$;

19. Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = 0$ για x άρρητο, και $f(x) = 1$ για x ρητό, τότε το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει για κανένα a.

∗**20.** Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = x$ για x ρητό, και $f(x) = -x$ για x άρρητο, τότε το $\lim_{x\to a} f(x)$ δεν υπάρχει αν $a \neq 0$.

21. (α) Αποδείξτε ότι, αν $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x\to 0} g(x) \sin 1/x = 0$.

(β) Γενικεύστε το παραπάνω ως εξής: Αν $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ και $|h(x)| \leq M$ για κάθε x, τότε $\lim_{x\to 0} g(x)h(x) = 0$. (Φυσικά δεν υπάρχει λόγος να κάνετε το μέρος (α) αν κατορθώσετε να κάνετε το μέρος (β)· στην πραγματικότητα η διατύπωση του μέρους (β) μπορεί να το κάνει ευκολότερο από το (α) —αυτή είναι μια από τις αρετές της γενίκευσης.)

22. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με την εξής ιδιότητα: αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία το $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει, τότε και το $\lim_{x\to 0}[f(x) + g(x)]$ δεν υπάρχει. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν το $\lim_{x\to 0} f(x)$ *υπάρχει*. Υπόδειξη: Αυτό στην πραγματικότητα είναι πολύ εύκολο: η υπόθεση ότι το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει οδηγεί αμέσως σε αντίφαση αν πάρετε την κατάλληλη g.

∗∗**23.** Αυτό το πρόβλημα είναι το ανάλογο του Προβλήματος 22 αν αντικαταστήσουμε την $f + g$ με $f \cdot g$. Σε αυτήν την περίπτωση η κατάσταση είναι πολύ πιο σύνθετη, και η ανάλυση απαιτεί αρκετά βήματα (αυτοί που ψάχνουν για ένα εξαιρετικά προκλητικό πρόβλημα, ας επιχειρήσουν μια ανεξάρτητη λύση).

(α) Έστω ότι το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και είναι $\neq 0$. Αποδείξτε ότι αν το $\lim_{x\to 0} g(x)$ δεν υπάρχει, τότε και το $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ δεν υπάρχει.

(β) Αποδείξτε το ίδιο αποτέλεσμα αν $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \infty$. (Ο ακριβής ορισμός αυτού του ορίου δίνεται στο Πρόβλημα 37.)

(γ) Αποδείξτε ότι, αν δεν ισχύει καμία από αυτές τις δύο συνθήκες, τότε υπάρχει μια συνάρτηση g τέτοια ώστε το $\lim_{x\to 0} g(x)$ να μην υπάρχει, αλλά το $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ να υπάρχει.
Υπόδειξη: Εξετάστε χωριστά τις εξής δύο περιπτώσεις: (1) Για κάποιο $\varepsilon > 0$ έχουμε $|f(x)| > \varepsilon$ για όλα τα αρκετά μικρά x. (2) Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν οσοδήποτε μικρά x με $|f(x)| < \varepsilon$. Στη δεύτερη περίπτωση, αρχίστε διαλέγοντας σημεία x_n με $|x_n| < 1/n$ και $|f(x_n)| < 1/n$.

∗**24.** Έστω ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, το A_n είναι ένα *πεπερασμένο* σύνολο από αριθμούς στο $[0, 1]$, και ότι τα A_n και A_m δεν έχουν κοινά στοιχεία αν $m \neq n$.

Ορίζουμε μια f ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & x \text{ στο } A_n \\ 0, & x \text{ δεν ανήκει στο } A_n \text{ για κανένα } n. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ για κάθε a στο $[0, 1]$.

25. Εξηγήστε γιατί οι ακόλουθοι ορισμοί του $\lim_{x \to a} f(x) = l$ είναι όλοι σωστοί:
Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

(i) αν $0 < |x - a| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - l| < \delta$.

(ii) αν $0 < |x - a| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - l| \leq \delta$.

(iii) αν $0 < |x - a| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - l| < 5\delta$.

(iv) αν $0 < |x - a| < \varepsilon/10$, τότε $|f(x) - l| < \delta$.

∗**26.** Δώστε παραδείγματα για να δείξετε ότι οι ακόλουθοι ορισμοί του $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *δεν* είναι σωστοί.

(α) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < |x - a| < \delta$, τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|f(x) - l| < \varepsilon$, τότε $0 < |x - a| < \delta$.

27. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις στο Πρόβλημα 4-17 βρείτε για ποιους αριθμούς a υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim_{x \to a^-} f(x)$.

∗**28.** (α) Κάντε το ίδιο για τις συναρτήσεις του Προβλήματος 4-19.

(β) Εξετάστε ακόμα τι συμβαίνει αν χρησιμοποιήσουμε δεκαδικά μέρη που λήγουν σε 0 αντί για δεκαδικά μέρη που λήγουν σε 9.

29. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει αν $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

30. Αποδείξτε ότι

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(-x)$.

(ii) $\lim_{x \to 0} f(|x|) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(iii) $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(Αυτές οι εξισώσεις, και άλλες σαν και αυτές, είναι ανοιχτές σε διάφορες ερμηνείες. Μπορεί να σημαίνουν απλώς ότι τα δύο όρια είναι ίσα αν υπάρχουν και τα δύο· ή ότι, αν κάποιο από τα δύο όρια υπάρχει, τότε υπάρχει και το άλλο και είναι ίσο με αυτό· ή ότι, αν οποιοδήποτε από τα δύο όρια υπάρχει, τότε υπάρχει και το άλλο και είναι ίσο με αυτό. Αποφασίστε μόνοι σας κάθε φορά ποια ερμηνεία είναι η κατάλληλη.)

31. Έστω ότι $\lim_{x \to a^-} f(x) < \lim_{x \to a^+} f(x)$. (Κάντε ένα σχήμα για να περιγράψετε αυτήν την κατάσταση.) Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(y)$ όποτε $x < a < y$ και $|x - a| < \delta$ και $|y - a| < \delta$. Ισχύει το αντίστροφο;

32. Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to \infty} (a_n x^n + \cdots + a_0)/(b_m x^m + \cdots + b_0)$ (με $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$) υπάρχει αν και μόνο αν $m \geq n$. Ποιο είναι το όριο αν $m = n$; Αν $m > n$; Υπόδειξη: Ένα εύκολο όριο είναι το $\lim_{x \to \infty} 1/x^k = 0$· κάντε λίγες αλγεβρικές πράξεις ώστε αυτή να είναι η μόνη πληροφορία που χρειάζεστε.

33. Βρείτε τα εξής όρια.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin^3 x}{5x+6}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+5}$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1+\sin^2 x)}{(x+\sin x)^2}$.

34. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$.

35. Βρείτε τα εξής όρια συναρτήσει του αριθμού $\alpha = \lim_{x\to 0}(\sin x)/x$.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

36. (α) Ορίστε το «$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$».

(β) Βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}(a_n x^n+\cdots+a_0)/(b_m x^m+\cdots+b_0)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$.

(δ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(1/x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

37. Ορίζουμε το $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ να σημαίνει ότι για κάθε N υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $f(x) > N$. (Ζωγραφίστε ένα σχήμα που να ταιριάζει!) (Φυσικά, παρ' όλα αυτά μπορούμε να πούμε ότι το «$\lim_{x\to a} f(x)$» δεν υπάρχει κατά τη συνήθη έννοια.)

(α) Δείξτε ότι $\lim_{x\to 3} 1/(x-3)^2 = \infty$.

(β) Αποδείξτε ότι αν $f(x) > \varepsilon > 0$ για κάθε x, και $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, τότε

$$\lim_{x\to a} f(x)/|g(x)| = \infty.$$

38. (α) Ορίστε τα $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$ και $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$. (Η τουλάχιστον πεισθείτε ότι θα μπορούσατε να γράψετε τους ορισμούς αν δεν βαριόσασταν. Πόσα άλλα τέτοια σύμβολα μπορείτε να ορίσετε;)

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to\infty} f(1/x) = \infty$.

39. Βρείτε τα εξής όρια, όταν υπάρχουν.

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-x+1}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} x(1+\sin^2 x)$.

(iii) $\lim_{x\to\infty} x\sin^2 x$.

(iv) $\lim_{x\to\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

(v) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x$.

(vi) $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}\,)$.

(vii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.

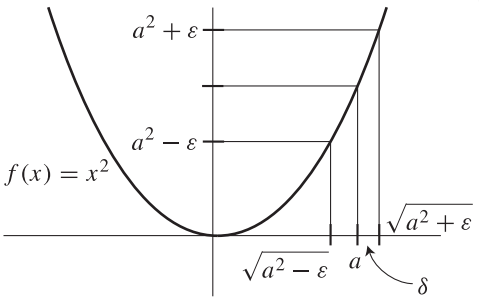
40. (α) Βρείτε την περίμετρο ενός κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας r. [Απάντηση: $2rn\sin(\pi/n)$.]

(β) Σε ποια τιμή τείνει η περίμετρος αυτή όταν το n γίνεται πολύ μεγάλο;

(γ) Ποιο όριο μπορείτε να μαντέψετε από αυτό;

41. (α) Για $c > 1$, δείξτε ότι το $c^{1/n} = \sqrt[n]{c}$ τείνει στο 1 καθώς το n γίνεται πολύ μεγάλο. Υπόδειξη: Δείξτε ότι για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ δεν μπορούμε να έχουμε $c^{1/n} > 1 + \varepsilon$ για μεγάλο n.

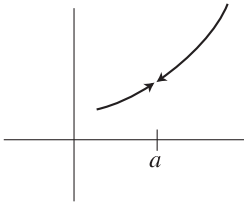
(β) Πιο γενικά, αν $c > 0$, τότε το $c^{1/n}$ τείνει στο 1 καθώς το n γίνεται πολύ μεγάλο.



ΣΧΗΜΑ 20

∗**42.** Αφού είχα στείλει τα κείμενα της πρώτης έκδοσης αυτού του βιβλίου στον εκδότη, σκέφτηκα έναν πολύ πιο απλό τρόπο να δείξουμε ότι $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ και $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$ χωρίς να περάσουμε από όλα τα τεχνάσματα παραγοντοποίησης της σελίδας 83. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα πως θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, όπου $a > 0$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, απλώς διαλέγουμε για δ τον μικρότερο των $\sqrt{a^2+\varepsilon} - a$ και $a - \sqrt{a^2-\varepsilon}$ (βλ. Σχήμα 20): τότε το $|x-a| < \delta$ συνεπάγεται ότι $\sqrt{a^2-\varepsilon} < x < \sqrt{a^2+\varepsilon}$, δηλαδή, $a^2-\varepsilon < x^2 < a^2+\varepsilon$, ή $|x^2-a^2| < \varepsilon$. Ευτυχώς που οι πρώτες σελίδες είχαν ήδη σταλεί και δεν μπορούσαμε να κάνουμε αυτήν την αλλαγή, μια και η «απόδειξη» είναι εντελώς εσφαλμένη. Πού βρίσκεται το λάθος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



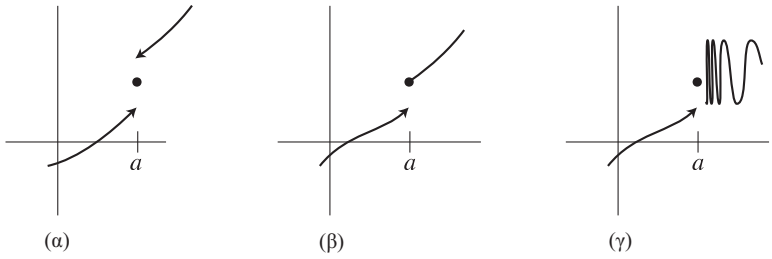
ΣΧΗΜΑ 1

Αν f είναι μια τυχαία συνάρτηση, δεν ισχύει αναγκαστικά ότι

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Πράγματι, το παραπάνω μπορεί να μην ισχύει για πολλούς λόγους. Για παράδειγμα, η f μπορεί να μην ορίζεται καν στο a, οπότε σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση δεν έχει νόημα (Σχήμα 1).

Μπορεί πάλι να μην υπάρχει το $\lim_{x \to a} f(x)$ (Σχήμα 2). Τέλος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, ακόμα και αν η f ορίζεται στο a και το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει, το όριο μπορεί να μην είναι ίσο με $f(a)$.



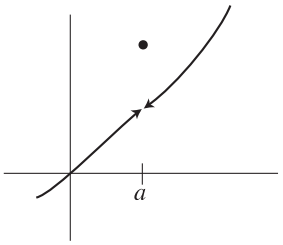
ΣΧΗΜΑ 2

Θα θέλαμε να χαρακτηρίσουμε αφύσικη κάθε συμπεριφορά αυτού του τύπου και να τιμήσουμε, με έναν τίτλο ευγενείας, εκείνες τις συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν τέτοιες ιδιαιτερότητες. Ο όρος που έχει γίνει αποδεκτός είναι «συνεχής». Διαισθητικά, μια συνάρτηση f είναι συνεχής αν η γραφική της παράσταση δεν παρουσιάζει χάσματα, άλματα ή απότομες ταλαντώσεις. Αν και αυτή η περιγραφή συνήθως επιτρέπει στον καθένα να αποφανθεί για το αν μια συνάρτηση είναι συνεχής κοιτάζοντας απλώς τη γραφική της παράσταση (μια ικανότητα που αξίζει να καλλιεργήσει κανείς), μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε πλάνη, για αυτό ο ακριβής ορισμός είναι *πολύ* σημαντικός.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση f είναι **συνεχής στο *a*** αν

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$



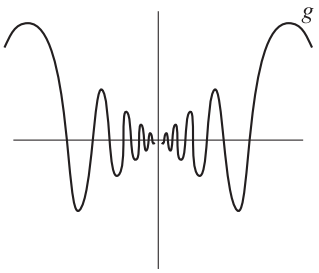
ΣΧΗΜΑ 3

Δεν υπάρχει καμία δυσκολία στο να βρούμε πολλά παραδείγματα συναρτήσεων που είναι, ή δεν είναι, συνεχείς σε κάποιο σημείο a —κάθε παράδειγμα που έχει να κάνει με όρια μας παρέχει ένα παράδειγμα σχετικό με τη συνέχεια, και το Κεφάλαιο 5 μας δίνει αρκετά τέτοια.

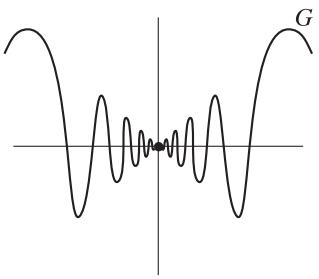
Η συνάρτηση $f(x) = \sin 1/x$ δεν είναι συνεχής στο 0, γιατί δεν ορίζεται καν στο 0, και το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $g(x) = x \sin 1/x$. Εξ άλλου, αν έχει κανείς τη διάθεση να επεκτείνει τη δεύτερη από αυτές τις συναρτήσεις, που σημαίνει, αν θέλει να

ορίσει μια καινούργια συνάρτηση G με

$$G(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 4

τότε η εκλογή του $a = G(0)$ μπορεί να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε η G να είναι συνεχής στο 0 —για να το πετύχουμε αυτό μπορούμε (στην πραγματικότητα πρέπει) να ορίσουμε $G(0) = 0$ (Σχήμα 4). Αυτού του είδους η επέκταση δεν είναι δυνατή για την $f \cdot$ αν ορίσουμε

$$F(x) = \begin{cases} \sin 1/x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

τότε η F δεν θα είναι συνεχής στο 0, ανεξάρτητα από το a, γιατί το $\lim_{x \to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο a, αν $a \neq 0$, αφού το $\lim_{x \to a} f(x)$ δεν υπάρχει. Όμως $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής σε ένα ακριβώς σημείο, το 0.

Οι συναρτήσεις $f(x) = c$, $g(x) = x$ και $h(x) = x^2$ είναι συνεχείς σε κάθε αριθμό a, επειδή

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a),$$
$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} x = a = g(a),$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = h(a).$$

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ όπου } p/q \text{ ανάγωγο.} \end{cases}$$

Στο Κεφάλαιο 5 αποδείξαμε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ για κάθε a (στην πραγματικότητα μόνο για $0 < a < 1$, αλλά μπορείτε εύκολα να δείτε ότι ισχύει για κάθε a). Αφού $0 = f(a)$ μόνο όταν ο a είναι άρρητος, αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο a αν ο a είναι άρρητος, αλλά δεν είναι συνεχής αν ο a είναι ρητός.

Είναι ακόμα ευκολότερο να δώσουμε παραδείγματα συνέχειας αν αποδείξουμε δύο απλά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν οι f είναι g είναι συνεχείς στο a, τότε

(1) η $f + g$ είναι συνεχής στο a,
(2) η $f \cdot g$ είναι συνεχής στο a.

Επιπλέον, αν $g(a) \neq 0$, τότε

(3) η $1/g$ είναι συνεχής στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού οι f και g είναι συνεχείς στο a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Από το Θεώρημα 2(1) του Κεφαλαίου 5, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός ότι η $f+g$ είναι συνεχής στο a. Αφήνουμε τις αποδείξεις των (2) και (3) σε σας. ∎

Ξεκινώντας με τις συναρτήσεις $f(x) = c$ και $f(x) = x$, που είναι συνεχείς στο a, για κάθε a, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1 για να συμπεράνουμε ότι μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \frac{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}{c_m x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Αλλά είναι πιο δύσκολο να πετύχουμε κάτι περισσότερο από αυτό. Όταν θα εξετάσουμε τη συνάρτηση ημιτόνου με λεπτομέρειες, θα είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η $\sin$ είναι συνεχής στο a για κάθε a· ας το υποθέσουμε εν τω μεταξύ. Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \frac{\sin^2 x + x^2 + x^4 \sin x}{\sin^{27} x + 4x^2 \sin^2 x}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Αλλά δεν είμαστε ακόμα σε θέση να αποδείξουμε τη συνέχεια μιας συνάρτησης σαν την $f(x) = \sin(x^2)$· προφανώς χρειαζόμαστε ένα θεώρημα για τη σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Πριν να διατυπώσουμε αυτό το θεώρημα, αξίζει να παρατηρήσουμε το εξής για τον ορισμό της συνέχειας. Αν μεταφράσουμε την εξίσωση $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, παίρνουμε ότι

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,
αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Αλλά σε αυτήν την περίπτωση, όπου το όριο είναι $f(a)$, η φράση

$$0 < |x-a| < \delta$$

μπορεί να μετατραπεί στην απλούστερη συνθήκη

$$|x-a| < \delta,$$

αφού για $x = a$ είναι βέβαια σωστό ότι $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η g είναι συνεχής στο a, και η f είναι συνεχής στο $g(a)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο a. (Παρατηρούμε ότι απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο $g(a)$, όχι στο a.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

αν $|x-a| < \delta$, τότε $|(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)| < \varepsilon$,
δηλαδή $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.

Χρησιμοποιούμε πρώτα τη συνέχεια της f για να εκτιμήσουμε πόσο κοντά πρέπει να βρίσκεται το $g(x)$ στο $g(a)$ ώστε να ισχύει η ανισότητα. Αφού η f είναι συνεχής στο $g(a)$, υπάρχει ένα $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε y,

$$(1) \qquad \text{αν } |y - g(a)| < \delta', \text{ τότε } |f(y) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι

$$(2) \qquad \text{αν } |g(x) - g(a)| < \delta', \text{ τότε } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon.$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη συνέχεια της g για να εκτιμήσουμε πόσο κοντά πρέπει να βρίσκεται το x στο a για να ισχύει η ανισότητα $|g(x) - g(a)| < \delta'$. Ο αριθμός δ' είναι ένας θετικός αριθμός σαν όλους τους άλλους θετικούς αριθμούς· επομένως μπορούμε να

πάρουμε το δ' ως το ε (!) στον ορισμό της συνέχειας της g στο a. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$(3) \qquad \text{αν } |x-a| < \delta, \text{ τότε } |g(x) - g(a)| < \delta'.$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) βλέπουμε ότι για κάθε x,

$$\text{αν } |x-a| < \delta, \text{ τότε } |f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon. \blacksquare$$

Μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ξανά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η f είναι συνεχής στο 0. Μερικές εφαρμογές των Θεωρημάτων 1 και 2, μαζί με τη συνέχεια της sin, δείχνουν ότι η f είναι συνεχής και σε κάθε a, με $a \neq 0$. Μπορεί κανείς να αναλύσει εξίσου εύκολα συναρτήσεις σαν την $f(x) = \sin(x^2 + \sin(x + \sin^2(x^3)))$.

Τα λίγα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου σχετίζονται όλα με τη συνέχεια συναρτήσεων σε ένα μόνο σημείο, αλλά η έννοια της συνέχειας θα αρχίσει να γίνεται πραγματικά ενδιαφέρουσα μόνο όταν συγκεντρώσουμε την προσοχή μας σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε όλα τα σημεία κάποιου διαστήματος. Αν η f είναι συνεχής στο x για κάθε x στο (a, b), τότε η f λέγεται **συνεχής στο** (a, b)· ως μια «ειδική περίπτωση», η f είναι **συνεχής στο** $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ [βλ. σελίδα 52] αν είναι συνεχής στο x για κάθε x στο $\mathbf{R}$. Η συνέχεια σε ένα κλειστό διάστημα πρέπει να οριστεί λίγο διαφορετικά· μια συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο** $[a, b]$ αν

$$(1) \quad \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x \text{ για κάθε } x \text{ στο } (a, b),$$
$$(2) \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

(Συχνά λέμε επίσης απλώς ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής αν είναι συνεχής στο x για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.)

Θεωρούμε συνήθως ότι οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα συμπεριφέρονται εξαιρετικά καλά· πραγματικά, η συνέχεια θα μπορούσε να θεωρηθεί η πρώτη συνθήκη που μια «λογική» συνάρτηση πρέπει να ικανοποιεί. Μια συνεχής συνάρτηση περιγράφεται μερικές φορές, διαισθητικά, ως μια συνάρτηση της οποίας τη γραφική παράσταση μπορεί κανείς να σχεδιάσει χωρίς να σηκώσει το μολύβι του από το χαρτί. Αν φέρουμε στο μυαλό μας τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι αυτή η περιγραφή είναι υπερβολικά αισιόδοξη. Παρ' όλα αυτά, είναι αλήθεια ότι υπάρχουν πολλά σημαντικά αποτελέσματα που αφορούν συναρτήσεις συνεχείς σε ένα διάστημα. Αυτά τα θεωρήματα είναι γενικά πολύ δυσκολότερα από τα θεωρήματα του παρόντος κεφαλαίου, αλλά υπάρχει ένα απλό θεώρημα που σχηματίζει τη γέφυρα ανάμεσα στα δύο είδη αποτελεσμάτων. Η υπόθεση αυτού του θεωρήματος απαιτεί τη συνέχεια σε ένα μόνο σημείο, ενώ το συμπέρασμα περιγράφει τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε κάποιο διάστημα που περιέχει το σημείο. Αν και το θεώρημα αυτό είναι στην ουσία ένα λήμμα για μεταγενέστερα θεωρήματα, το συμπεριλαμβάνουμε εδώ ως εισαγωγή σε αυτά που θα ακολουθήσουν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο a, και $f(a) > 0$. Τότε $f(x) > 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a· πιο συγκεκριμένα υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) > 0$ για κάθε x που ικανοποιεί την $|x-a| < \delta$. Ομοίως, αν $f(a) < 0$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) < 0$ για κάθε x που ικανοποιεί την $|x-a| < \delta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε την περίπτωση $f(a) > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο a, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

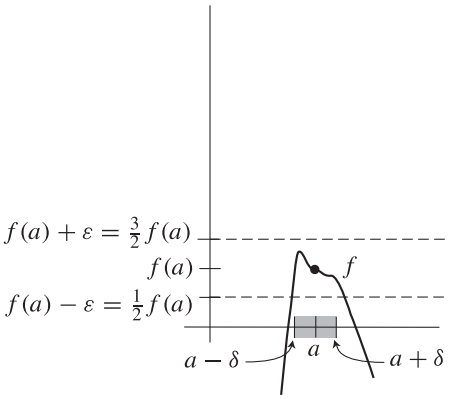
$$\text{αν } |x-a| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$
$$\text{δηλαδή } -\varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

Συγκεκριμένα, αυτό πρέπει να ισχύει για $\varepsilon = \dfrac{1}{2}f(a)$, αφού $\dfrac{1}{2}f(a) > 0$ (Σχήμα 5). Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

$$\text{αν } |x-a| < \delta, \text{ τότε } -\tfrac{1}{2}f(a) < f(x) - f(a) < \tfrac{1}{2}f(a),$$

και από αυτό έπεται ότι $f(x) > \dfrac{1}{2}f(a) > 0$. (Θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει ως ε ακόμα και το ίδιο το $f(a)$, κάτι το οποίο θα μας οδηγούσε σε μια απόδειξη που θα ήταν πιο κομψή, αλλά με λιγότερο ξεκάθαρη νοητή εικόνα.)

Μια όμοια απόδειξη μπορεί να δοθεί για την περίπτωση όπου $f(a) < 0$· παίρνουμε $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(a)$. Θα μπορούσε επίσης να εφαρμόσει κανείς την πρώτη περίπτωση στη συνάρτηση $-f$. ∎



ΣΧΗΜΑ 5

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις f υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση F με πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε $F(x) = f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f;

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

(ii) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(iii) $f(x) = 0$, x άρρητος.

(iv) $f(x) = 1/q$, $x = p/q$ ρητός όπου p/q ανάγωγο.

2. Σε ποια σημεία είναι συνεχείς οι συναρτήσεις των Προβλημάτων 4-17 και 4-19;

3. (α) Έστω ότι f είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| \le |x|$ για κάθε x. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0. (Παρατηρήστε ότι το $f(0)$ πρέπει να είναι ίσο με 0.)

(β) Δώστε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης f που να μην είναι συνεχής σε κανένα $a \neq 0$.

(γ) Έστω ότι η g είναι συνεχής στο 0 και $g(0) = 0$, και $|f(x)| \le |g(x)|$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

4. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f που να μην είναι πουθενά συνεχής, αλλά η $|f|$ να είναι παντού συνεχής.

5. Για κάθε αριθμό a, βρείτε μια συνάρτηση που να είναι συνεχής στο a, αλλά σε κανένα άλλο σημείο.

6. (α) Βρείτε μια συνάρτηση f που να είναι ασυνεχής στα $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ αλλά συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(β) Βρείτε μια συνάρτηση f που να είναι ασυνεχής στα $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ και στο 0, αλλά συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

7. Έστω ότι η f ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$, και ότι η f είναι συνεχής στο 0. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο a για κάθε a.

8. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο a και $f(a) = 0$. Αποδείξτε ότι αν $\lambda \neq 0$, τότε η $f + \lambda$ είναι μη μηδενική σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a.

9. (α) Έστω ότι η f ορίζεται στο a αλλά δεν είναι συνεχής στο a. Αποδείξτε ότι για κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$ υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Εξηγήστε με ένα σχήμα.

(β) Συμπεράνετε ότι για κάποιον αριθμό $\varepsilon > 0$, *είτε* υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $f(x) < f(a) - \varepsilon$ *είτε* υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο a με $f(x) > f(a) + \varepsilon$.

10. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο a, τότε το ίδιο ισχύει και για την $|f|$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbf{R}$ γράφεται $f = E + O$, όπου η E είναι άρτια και συνεχής και η O είναι περιττή και συνεχής.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι συνεχείς, τότε είναι συνεχείς και οι $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$.

(δ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής f γράφεται $f = g - h$, όπου η g και η h είναι μη αρνητικές και συνεχείς.

11. Αποδείξτε το Θεώρημα 1(3) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2 και τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = 1/x$.

∗**12.** (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο l και $\lim_{x \to a} g(x) = l$, τότε $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(l)$. (Μπορείτε να ανατρέξετε στους ορισμούς, αλλά είναι ευκολότερο να πάρετε τη συνάρτηση G με $G(x) = g(x)$ για $x \neq a$, και $G(a) = l$.)

(β) Δείξτε ότι, αν δεν υποτεθεί η συνέχεια της f στο l, τότε δεν ισχύει γενικά ότι $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x))$. Υπόδειξη: Δοκιμάστε $f(x) = 0$ για $x \neq l$, και $f(l) = 1$.

13. (α) Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbf{R}$, τέτοια ώστε $g(x) = f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Υπόδειξη: Αφού είναι φανερό ότι έχετε πλήθος επιλογών, προσπαθήστε να κάνετε τη g σταθερή στα $(-\infty, a]$ και $[b, \infty)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι σωστός αν αντικαταστήσουμε το $[a, b]$ με (a, b).

14. (α) Έστω ότι η g και η h είναι συνεχείς στο a, και ότι $g(a) = h(a)$. Ορίζουμε το $f(x)$ να είναι $g(x)$ αν $x \geq a$ και $h(x)$ αν $x \leq a$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο a.

(β) Έστω ότι η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η h συνεχής στο $[b, c]$ και $g(b) = h(b)$. Θέτουμε $f(x)$ να είναι $g(x)$ για x στο $[a, b]$ και $h(x)$ για x στο $[b, c]$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, c]$. (Έτσι, δύο συνεχείς συναρτήσεις μπορούν να «συγκολληθούν».)

15. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο a, τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε όποτε $|x - a| < \delta$ και $|y - a| < \delta$, να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

16. (α) Αποδείξτε την ακόλουθη παραλλαγή του Θεωρήματος 3 για την «συνέχεια από τα δεξιά»: Έστω ότι $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, και $f(a) > 0$. Τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) > 0$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 \leq x - a < \delta$. Ομοίως, αν $f(a) < 0$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) < 0$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 \leq x - a < \delta$.

(β) Αποδείξτε την αντίστοιχη παραλλαγή του Θεωρήματος 3 όταν $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

17. Αν το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει, αλλά είναι $\neq f(a)$, τότε λέμε ότι η f έχει **«αιρόμενη ασυνέχεια»** στο a.

(α) Αν $f(x) = \sin 1/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 1$, έχει η f αιρόμενη ασυνέχεια στο 0; Το ίδιο ερώτημα αν $f(x) = x \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 1$.

(β) Έστω ότι η f έχει αιρόμενη ασυνέχεια στο a. Θέτουμε $g(x) = f(x)$ για $x \neq a$, και $g(a) = \lim_{x\to a} f(x)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στο a. (Μην κουραστείτε πολύ· αυτό είναι μάλλον εύκολο.)

(γ) Θέτουμε $f(x) = 0$ αν ο x είναι άρρητος, και $f(p/q) = 1/q$ αν το p/q είναι ανάγωγο. Ποια είναι η συνάρτηση g που ορίζεται από την $g(x) = \lim_{y\to x} f(y)$;

∗(δ) Έστω f μια συνάρτηση με την ιδιότητα ότι σε κάθε σημείο ασυνέχειας έχουμε αιρόμενη ασυνέχεια. Αυτό σημαίνει ότι το $\lim_{y\to x} f(y)$ υπάρχει για κάθε x, αλλά η f μπορεί να είναι ασυνεχής για κάποιους (ίσως άπειρους το πλήθος) αριθμούς x. Ορίζουμε $g(x) = \lim_{y\to x} f(y)$. Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής. (Αυτό δεν είναι τόσο εύκολο όπως το μέρος (β).)

∗∗(ε) Υπάρχει συνάρτηση f που να είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο, και να έχει μόνο αιρόμενες ασυνέχειες; (Αξίζει να ασχοληθείτε τώρα με αυτό το πρόβλημα, αλλά κυρίως σαν μια δοκιμή για τη διαίσθησή σας· ακόμα και αν υποψιάζεστε τη σωστή απάντηση, είναι σχεδόν βέβαιο ότι δεν θα μπορείτε να τη δικαιολογήσετε αυτήν τη στιγμή. Βλ. Πρόβλημα 22-33.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΤΡΙΑ ΔΥΣΚΟΛΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε τρία θεωρήματα σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις και σε κάποιες από τις συνέπειές τους. Δεν θα δώσουμε τις αποδείξεις αυτών των τριών θεωρημάτων τώρα, παρά μόνο στο επόμενο κεφάλαιο, για λόγους που εξηγούμε στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

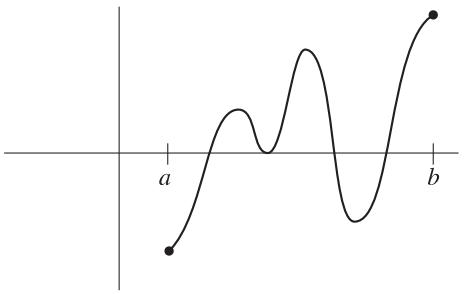
ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < 0 < f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο x στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$.

(Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης που ξεκινά κάτω από τον οριζόντιο άξονα και τελειώνει πάνω από αυτόν, πρέπει να τέμνει αυτόν τον άξονα σε κάποιο σημείο, όπως στο Σχήμα 1.)

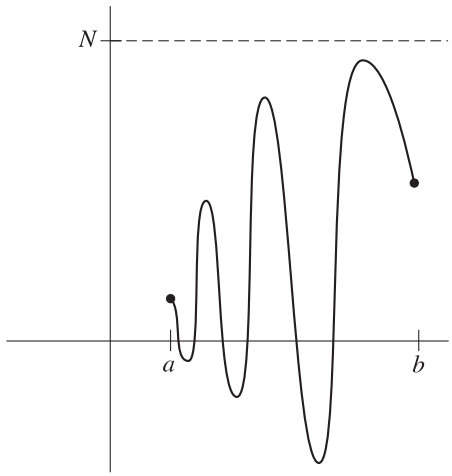
ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$, δηλαδή, υπάρχει κάποιος αριθμός N τέτοιος ώστε $f(x) \leq N$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(Γεωμετρικά, αυτό το θεώρημα σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από κάποια ευθεία παράλληλη στον οριζόντιο άξονα, όπως στο Σχήμα 2.)

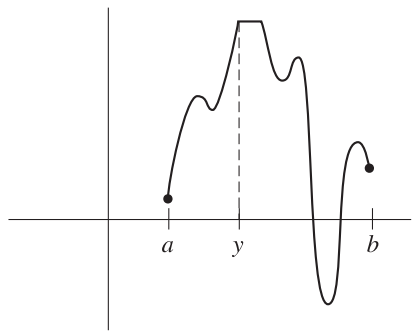
ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός y στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε $f(y) \geq f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$ (Σχήμα 3).



ΣΧΗΜΑ 1

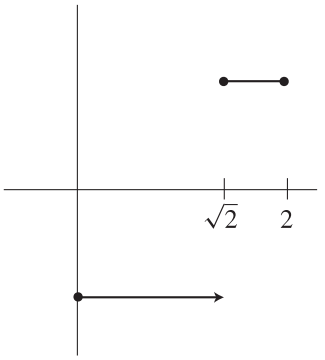


ΣΧΗΜΑ 2



ΣΧΗΜΑ 3

Αυτά τα τρία θεωρήματα διαφέρουν σαφώς από τα θεωρήματα του Κεφαλαίου 6. Οι υποθέσεις εκείνων των θεωρημάτων πάντοτε αφορούσαν τη συνέχεια σε ένα μόνο σημείο, ενώ οι υποθέσεις των τωρινών θεωρημάτων απαιτούν τη συνέχεια σε ένα ολόκληρο διάστημα $[a, b]$ —αν η συνέχεια, έστω και σε ένα σημείο, δεν εξασφαλίζεται, τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν. Για παράδειγμα, έστω f η συνάρτηση που φαίνεται στο



ΣΧΗΜΑ 4

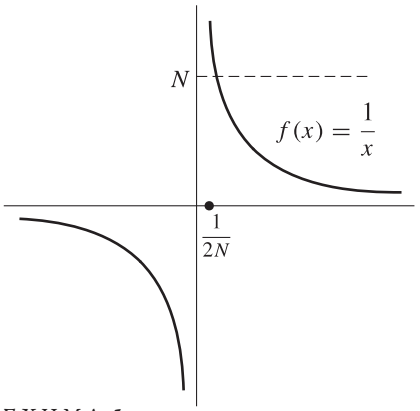
Σχήμα 4,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} \le x \le 2. \end{cases}$$

Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 2]$ εκτός από το $\sqrt{2}$, και $f(0) < 0 < f(2)$, αλλά δεν υπάρχει σημείο x στο $[0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$· η ασυνέχεια στο σημείο $\sqrt{2}$ και μόνο είναι ικανή να καταστρέψει το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.

Ομοίως, έστω ότι f είναι η συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 5,

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



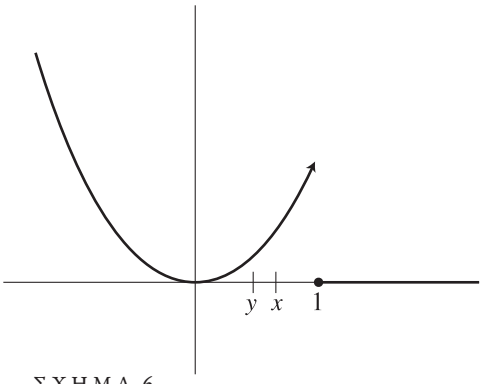
ΣΧΗΜΑ 5

Τότε, η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[0, 1]$ εκτός από το 0, αλλά η f δεν είναι άνω φραγμένη στο $[0, 1]$. Πράγματι, για κάθε αριθμό $N > 0$, έχουμε $f(1/2N) = 2N > N$.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει επίσης ότι το κλειστό διάστημα $[a, b]$ στο Θεώρημα 2 δεν μπορεί να αντικατασταθεί από το ανοικτό διάστημα (a, b), γιατί η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 1)$, αλλά δεν είναι φραγμένη σε αυτό.

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 6,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \ge 1. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 6

Στο διάστημα $[0, 1]$ η συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη, άρα η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2, αν και η f δεν είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Αλλά η f δεν ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3 —δεν υπάρχει y στο $[0, 1]$, τέτοιο ώστε $f(y) \ge f(x)$ για κάθε x στο $[0, 1]$· πράγματι, πρώτα απ' όλα σίγουρα δεν είναι αλήθεια ότι $f(1) \ge f(x)$ για κάθε x στο $[0, 1]$, οπότε δεν μπορούμε να διαλέξουμε $y = 1$, ούτε μπορούμε να διαλέξουμε $0 \le y < 1$ γιατί $f(y) < f(x)$ αν x είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $y < x < 1$.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι το Θεώρημα 3 είναι σημαντικά πιο ισχυρό από το Θεώρημα 2. Συχνά παραφράζουμε το Θεώρημα 3 λέγοντας ότι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα «παίρνει τη μέγιστη τιμή της» σε αυτό το διάστημα.

Ως αμοιβή για την αυστηρότητα των υποθέσεων των τριών θεωρημάτων μας, τα συμπεράσματα είναι τελείως διαφορετικής φύσης από αυτά των προηγούμενων θεωρημάτων. Περιγράφουν τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης όχι μόνο κοντά σε ένα σημείο, αλλά σε ένα ολόκληρο διάστημα· τέτοιες «καθολικές» ιδιότητες μιας συνάρτησης είναι πάντοτε πολύ πιο δύσκολο να αποδειχθούν από τις «τοπικές» ιδιότητες, κατά συνέπεια είναι πολύ πιο ισχυρές. Για να σκιαγραφήσουμε τη χρησιμότητα των Θεωρημάτων 1, 2 και 3, θα εξαγάγουμε σύντομα κάποια σπουδαία συμπεράσματα, αλλά θα βοηθήσει να αναφέρουμε πρώτα κάποιες απλές γενικεύσεις αυτών των θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < c < f(b)$ τότε υπάρχει κάποιο x στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $g = f - c$. Τότε η g είναι συνεχής, και $g(a) < 0 < g(b)$. Από το Θεώρημα 1 υπάρχει x στο $[a, b]$, τέτοιο ώστε $g(x) = 0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $f(x) = c$. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) > c > f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο x στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η συνάρτηση $-f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $-f(a) < -c < -f(b)$. Από το Θεώρημα 4 έπεται ότι υπάρχει κάποιο x στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $-f(x) = -c$, που σημαίνει ότι $f(x) = c$. ∎

Τα Θεωρήματα 4 και 5 μαζί δείχνουν ότι η f παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στο $f(a)$ και το $f(b)$. Μπορούμε να πετύχουμε κάτι ακόμα καλύτερο από αυτό: αν τα c και d

ανήκουν στο $[a, b]$, τότε η f παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στο $f(c)$ και το $f(d)$. Η απόδειξη είναι απλή· αν, για παράδειγμα, $c < d$, τότε απλώς εφαρμόζουμε τα Θεωρήματα 4 και 5 στο διάστημα $[c, d]$. Ανακεφαλαιώνοντας, αν μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα παίρνει δύο τιμές, παίρνει και κάθε τιμή ανάμεσά τους· αυτή η μικρή γενίκευση του Θεωρήματος 1 συχνά αποκαλείται Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι κάτω φραγμένη στο $[a, b]$, δηλαδή, υπάρχει κάποιος αριθμός N τέτοιος ώστε $f(x) \geq N$ για κάθε x στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η συνάρτηση $-f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα από το Θεώρημα 2 υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $-f(x) \leq M$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $f(x) \geq -M$ για κάθε x στο $[a, b]$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $N = -M$. ∎

Τα Θεωρήματα 2 και 6 μαζί δείχνουν ότι μια συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ είναι φραγμένη στο $[a, b]$, δηλαδή, υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε $|f(x)| \leq N$ για κάθε x στο $[a, b]$. Πράγματι, αφού το Θεώρημα 2 βεβαιώνει την ύπαρξη ενός αριθμού N_1, τέτοιου ώστε $f(x) \leq N_1$ για κάθε x στο $[a, b]$, το δε Θεώρημα 6 βεβαιώνει την ύπαρξη ενός αριθμού N_2 τέτοιου ώστε $f(x) \geq N_2$ για κάθε x στο $[a, b]$, μπορούμε να πάρουμε $N = \max(|N_1|, |N_2|)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει κάποιο y στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(y) \leq f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$.
(Μια συνάρτηση συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα παίρνει την ελάχιστη τιμή της σε αυτό το διάστημα.)

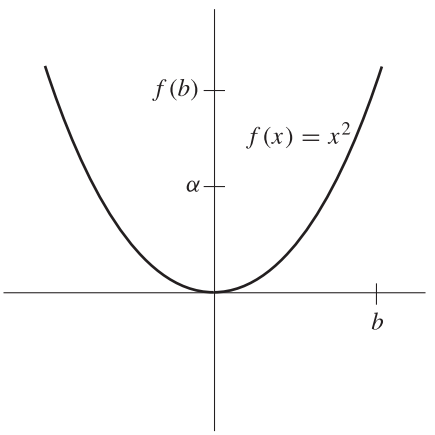
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η συνάρτηση $-f$ είναι συνεχής στο $[a, b]$· από το Θεώρημα 3 υπάρχει κάποιο y στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $-f(y) \geq -f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$, που σημαίνει ότι $f(y) \leq f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. ∎

Τώρα που έχουμε στη διάθεσή μας τις τετριμμένες συνέπειες των Θεωρημάτων 1, 2 και 3, μπορούμε να αρχίσουμε να αποδεικνύουμε μερικά ενδιαφέροντα πράγματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 Κάθε θετικός αριθμός έχει μια τετραγωνική ρίζα. Με άλλα λόγια, αν $\alpha > 0$, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός x τέτοιος ώστε $x^2 = \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, που είναι βέβαια συνεχής. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο του θεωρήματος μπορεί να εκφραστεί μέσω της f: «ο αριθμός α έχει μια τετραγωνική ρίζα» σημαίνει ότι η f παίρνει την τιμή α. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος για την f είναι μια απλή συνέπεια του Θεωρήματος 4.

Υπάρχει προφανώς ένας αριθμός $b > 0$ τέτοιος ώστε $f(b) > \alpha$ (όπως φαίνεται στο Σχήμα 7)· πράγματι, αν $\alpha > 1$ μπορούμε να πάρουμε $b = \alpha$, ενώ αν $\alpha < 1$ μπορούμε να πάρουμε $b = 1$. Αφού $f(0) < \alpha < f(b)$, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4 στο $[0, b]$ συμπεραίνουμε ότι για κάποιο x (στο $[0, b]$), έχουμε $f(x) = \alpha$, δηλαδή $x^2 = \alpha$. ∎



ΣΧΗΜΑ 7

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι ένας θετικός αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα, για κάθε φυσικό αριθμό n. Αν ο n συμβαίνει να είναι περιττός, μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο: *κάθε* αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε απλώς ότι, αν ο θετικός αριθμός α έχει τη n-οστή ρίζα x, δηλαδή, αν $x^n = \alpha$, τότε $(-x)^n = -\alpha$ (επειδή ο n είναι περιττός), άρα ο $-\alpha$ έχει τη n-οστή ρίζα $-x$. Ο ισχυρισμός, ότι για περιττό n κάθε αριθμός α έχει μια n-οστή ρίζα, είναι ισοδύναμος με την πρόταση ότι η εξίσωση

$$x^n - \alpha = 0$$

έχει μια ρίζα αν n είναι περιττός. Αν διατυπωθεί με αυτόν τον τρόπο το αποτέλεσμα επιδέχεται μεγάλη γενίκευση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 Αν ο n είναι περιττός, τότε κάθε εξίσωση

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

έχει μια ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προφανώς θέλουμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Θα θέλαμε να αποδείξουμε ότι η f είναι μερικές φορές θετική και μερικές φορές αρνητική. Η διαισθητική ιδέα είναι ότι για μεγάλα $|x|$, η συνάρτηση μοιάζει πολύ με την $g(x) = x^n$ και, αφού ο n είναι περιττός, αυτή η συνάρτηση είναι θετική για μεγάλα θετικά x και αρνητική για μεγάλα αρνητικά x. Το μόνο που χρειαζόμαστε για να θέσουμε αυτήν τη διαισθητική ιδέα σε εφαρμογή είναι λίγες αλγεβρικές πράξεις.

Η κατάλληλη ανάλυση της συνάρτησης f είναι να γράψουμε

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \le \frac{|a_{n-1}|}{|x|} + \cdots + \frac{|a_0|}{|x^n|}.$$

Συνεπώς, αν διαλέξουμε το x να ικανοποιεί την

$$(*) \qquad |x| > 1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|,$$

τότε $|x^k| > |x|$ και

$$\frac{|a_{n-k}|}{|x^k|} < \frac{|a_{n-k}|}{|x|} < \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

επομένως

$$\left|\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right| \le \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ όροι}} = \frac{1}{2}.$$

Με άλλα λόγια,

$$-\frac{1}{2} \le \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n} \le \frac{1}{2},$$

που συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2} \le 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Άρα, αν διαλέξουμε ένα $x_1 > 0$ που ικανοποιεί την $(*)$, τότε

$$\frac{(x_1)^n}{2} \le (x_1)^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \cdots + \frac{a_0}{(x_1)^n}\right) = f(x_1),$$

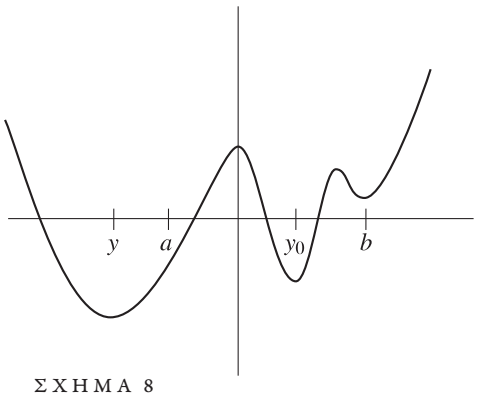
οπότε $f(x_1) > 0$. Από την άλλη μεριά, αν το $x_2 < 0$ ικανοποιεί την $(*)$, τότε $(x_2)^n < 0$ και

$$\frac{(x_2)^n}{2} \ge (x_2)^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \cdots + \frac{a_0}{(x_2)^n}\right) = f(x_2),$$

οπότε $f(x_2) < 0$.

Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 στο διάστημα $[x_2, x_1]$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα x στο $[x_2, x_1]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$. ∎

Το Θεώρημα 9 μας απαλλάσσει από το πρόβλημα των εξισώσεων περιττού βαθμού τόσο επιτυχημένα, που θα ήταν απογοητευτικό να αφήσουμε το πρόβλημα των εξισώσεων άρτιου βαθμού χωρίς να το συζητήσουμε καθόλου. Με την πρώτη ματιά, πάντως, το



ΣΧΗΜΑ 8

πρόβλημα μοιάζει αξεπέραστο. Κάποιες εξισώσεις, όπως η $x^2 - 1 = 0$, έχουν μια λύση, ενώ κάποιες, όπως η $x^2 + 1 = 0$, δεν έχουν —τί περισσότερο μπορεί να πει κανείς; Αν όμως έχουμε τη διάθεση να θεωρήσουμε ένα πιο γενικό πρόβλημα, *μπορούμε* να πούμε κάτι ενδιαφέρον. Αντί να προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

ας δούμε αν έχουμε τη δυνατότητα να λύσουμε τις εξισώσεις

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c$$

για όλους τους πιθανούς αριθμούς c. Είναι σαν να επιτρέπουμε στον σταθερό όρο a_0 να ποικίλλει. Η πληροφορία που μπορεί να δοθεί όσον αφορά στη λύση τέτοιων εξισώσεων βασίζεται σε ένα στοιχείο που φαίνεται στο Σχήμα 8.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, με n άρτιο, περιέχει, τουλάχιστον, όπως την έχουμε σχεδιάσει, ένα «χαμηλότατο» σημείο. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας αριθμός y τέτοιος ώστε $f(y) \leq f(x)$ για όλους τους αριθμούς x —η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή, όχι απλώς σε κάθε κλειστό διάστημα, μα σε ολόκληρη την ευθεία. (Παρατηρούμε ότι αυτό είναι λάθος αν ο n είναι περιττός.) Η απόδειξη βασίζεται στο Θεώρημα 7, αλλά θα χρειαστεί μια περίπλοκη εφαρμογή του. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7 σε κάθε διάστημα $[a, b]$, και να πάρουμε ένα σημείο y_0 τέτοιο ώστε το $f(y_0)$ να είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $[a, b]$· αλλά αν το $[a, b]$ συμβαίνει να είναι το διάστημα που φαίνεται στο Σχήμα 8, για παράδειγμα, τότε το σημείο y_0 δεν θα είναι αυτό όπου η f έχει την ελάχιστη τιμή της σε ολόκληρη την ευθεία. Στο επόμενο θεώρημα, όλη η ουσία της απόδειξης είναι να διαλέξουμε ένα διάστημα $[a, b]$ με τέτοιο τρόπο ώστε αυτό να μην μπορεί να συμβαίνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10 Αν ο n είναι άρτιος και $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, τότε υπάρχει ένας αριθμός y τέτοιος ώστε $f(y) \leq f(x)$ για κάθε x.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 9, αν

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|),$$

τότε για κάθε x με $|x| \geq M$, έχουμε

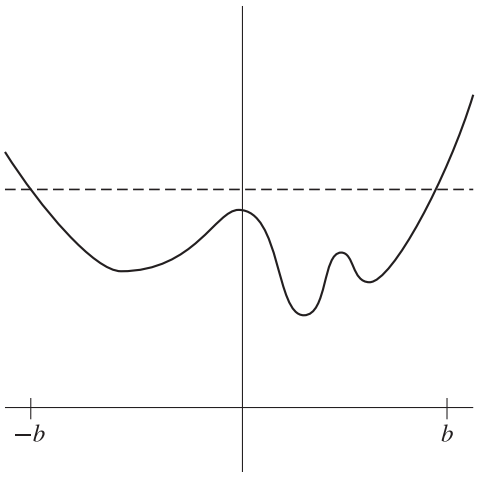
$$\frac{1}{2} \leq 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Αφού ο n είναι άρτιος, $x^n \geq 0$ για όλα τα x, άρα

$$\frac{x^n}{2} \leq x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) = f(x),$$

με τον όρο ότι $|x| \geq M$. Θεωρούμε τώρα τον αριθμό $f(0)$. Έστω $b > 0$ ένας αριθμός τέτοιος ώστε $b^n \geq 2f(0)$ και ακόμα $b > M$ Τότε, αν $x \geq b$, έχουμε (Σχήμα 9)

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$



ΣΧΗΜΑ 9

Ομοίως, αν $x \leq -b$, τότε

$$f(x) \geq \frac{x^n}{2} \geq \frac{(-b)^n}{2} = \frac{b^n}{2} \geq f(0).$$

Ανακεφαλαιώνοντας:

$$\text{αν } x \geq b \text{ ή } x \leq -b, \text{ τότε } f(x) \geq f(0).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το Θεώρημα 7 για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[-b, b]$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός y τέτοιος ώστε

$$(1) \qquad \text{αν } -b \leq x \leq b, \text{ τότε } f(y) \leq f(x).$$

Ειδικότερα, $f(y) \leq f(0)$. Έτσι,

$$(2) \qquad \text{αν } x \leq -b \text{ ή } x \geq b, \text{ τότε } f(x) \geq f(0) \geq f(y).$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι $f(y) \leq f(x)$ για κάθε x. ∎

Το Θεώρημα 10 μας επιτρέπει τώρα να αποδείξουμε το ακόλουθο συμπέρασμα.

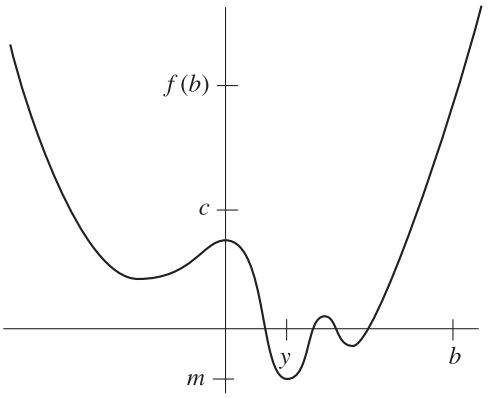
ΘΕΩΡΗΜΑ 11 Θεωρούμε την εξίσωση

$$(*) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = c,$$

και υποθέτουμε ότι ο n είναι άρτιος. Τότε υπάρχει ένας αριθμός m τέτοιος ώστε η $(*)$ να έχει λύση για $c \geq m$ και καμία λύση για $c < m$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ (Σχήμα 10).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 10 υπάρχει ένας αριθμός y τέτοιος ώστε $f(y) \leq f(x)$ για κάθε x. Έστω $m = f(y)$. Αν $c < m$, τότε η εξίσωση $(*)$ προφανώς δεν έχει λύση, αφού η αριστερή πλευρά έχει πάντοτε τιμή $\geq m$. Αν $c = m$, τότε η $(*)$ έχει τον y ως λύση. Τέλος, έστω ότι $c > m$. Έστω b ένας αριθμός τέτοιος ώστε $b > y$ και $f(b) > c$. Τότε $f(y) = m < c < f(b)$. Επομένως, από το Θεώρημα 4, υπάρχει κάποιος αριθμός x στο $[y, b]$ τέτοιος ώστε $f(x) = c$, έτσι ο x είναι μια λύση της $(*)$. ∎

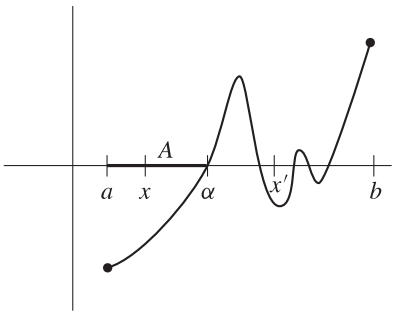


ΣΧΗΜΑ 10

Αυτές οι συνέπειες των Θεωρημάτων 1, 2 και 3 είναι οι μόνες που θα αποκομίσουμε εδώ (αν και αυτά τα θεωρήματα θα διαδραματίσουν έναν θεμελιώδη ρόλο σε οτιδήποτε σχεδόν κάνουμε αργότερα). Μόνο μία δουλειά απομένει —να αποδείξουμε τα Θεωρήματα 1, 2 και 3. Δυστυχώς, δεν έχουμε καμία ελπίδα να τα καταφέρουμε —με βάση τη γνώση που έχουμε μέχρι τώρα για τους πραγματικούς αριθμούς (δηλαδή τις I1–I12) μια απόδειξη είναι *αδύνατη*. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να πειστούμε ότι αυτό το μελαγχολικό συμπέρασμα είναι μοιραίο. Για παράδειγμα, η απόδειξη του Θεωρήματος 8 στηρίζεται μόνο στην απόδειξη του Θεωρήματος 1· αν μπορούσαμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 1, τότε η απόδειξη του Θεωρήματος 8 θα ήταν πλήρης, και θα είχαμε μια απόδειξη ότι κάθε θετικός αριθμός έχει μια τετραγωνική ρίζα. Όπως σημειώσαμε στο 1ο Μέρος, είναι αδύνατο να αποδείξουμε κάτι τέτοιο βασισμένοι στις I1–I12. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

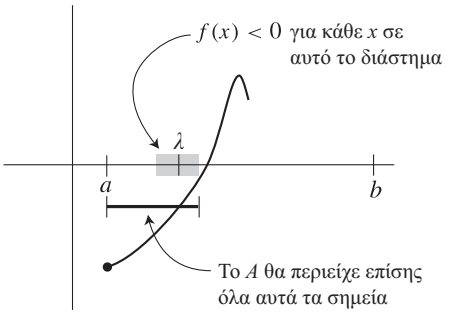
Αν δεν υπήρχε αριθμός x τέτοιος ώστε $x^2 = 2$, τότε η f θα ήταν συνεχής, αφού ο παρονομαστής δεν θα ήταν ποτέ $= 0$. Αλλά η f δεν είναι φραγμένη στο $[0, 2]$. Άρα το Θεώρημα 2 στηρίζεται ουσιαστικά στην ύπαρξη αριθμών άλλων από τους ρητούς αριθμούς, επομένως σε κάποια ιδιότητα των πραγματικών άλλη από τις I1–I12.



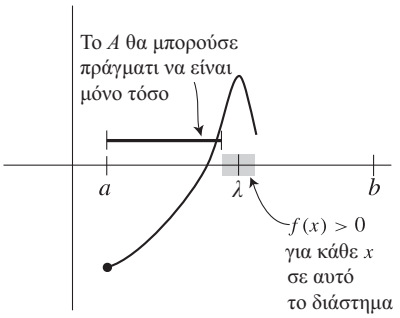
ΣΧΗΜΑ 11

Παρά την αδυναμία μας να αποδείξουμε τα Θεωρήματα 1, 2 και 3, το βέβαιο είναι ότι πρόκειται για αποτελέσματα που θέλουμε να είναι αληθή. Αν οι εικόνες που σχεδιάσαμε έχουν κάποια σχέση με τα μαθηματικά που κάνουμε, αν η έννοια της συνεχούς συνάρτησης που δεχθήκαμε αντιστοιχεί, σε κάποιο βαθμό, στη διαισθητική μας ιδέα, τα Θεωρήματα 1, 2 και 3 πρέπει να είναι αληθή. Αφού μια απόδειξη οποιουδήποτε από αυτά τα θεωρήματα πρέπει να απαιτεί μια καινούργια ιδιότητα του $\mathbf{R}$ που έως τώρα την έχουμε παραβλέψει, οι τωρινές μας δυσκολίες προτείνουν ένα δρόμο για να ανακαλύψουμε αυτήν την ιδιότητα: ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 1, για παράδειγμα, και να δούμε τι πηγαίνει στραβά.

Μια ιδέα που φαίνεται να υπόσχεται κάτι είναι να εντοπίσουμε το πρώτο σημείο για το οποίο $f(x) = 0$, δηλαδή, το μικρότερο x στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) = 0$. Για να βρούμε αυτό το σημείο, θεωρούμε πρώτα το σύνολο A που περιέχει όλους τους αριθμούς x στο $[a, b]$ για τους οποίους η f είναι αρνητική στο $[a, x]$. Στο Σχήμα 11, το x είναι ένα τέτοιο σημείο, ενώ το x' όχι. Το ίδιο το σύνολο A σημειώνεται με μια παχειά γραμμή. Αφού η f είναι αρνητική στο a και θετική στο b, το σύνολο A περιέχει κάποια σημεία μεγαλύτερα



ΣΧΗΜΑ 12



ΣΧΗΜΑ 13

από το a, ενώ όλα τα σημεία που βρίσκονται αρκετά κοντά στο b δεν ανήκουν στο A. (Εδώ χρησιμοποιούμε τη συνέχεια της f στο $[a, b]$, καθώς και το Πρόβλημα 6-16.)

Έστω τώρα ότι ο λ είναι ο μικρότερος αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του A· προφανώς $a < \lambda < b$. Ισχυριζόμαστε ότι $f(\lambda) = 0$, και για να το αποδείξουμε πρέπει απλώς να αποκλείσουμε τις εκδοχές $f(\lambda) < 0$ και $f(\lambda) > 0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(\lambda) < 0$. Τότε, από το Θεώρημα 6-3, το $f(x)$ θα ήταν μικρότερο από 0 για κάθε x σε ένα μικρό διάστημα που περιέχει το λ, ειδικότερα για κάποιους αριθμούς μεγαλύτερους από τον λ (Σχήμα 12)· αλλά αυτό αντιτίθεται στο γεγονός ότι ο λ είναι μεγαλύτερος από κάθε στοιχείο του A, αφού οι μεγαλύτεροί του αριθμοί θα ήταν επίσης στο A. Επομένως, δεν ισχύει η $f(\lambda) < 0$.

Από την άλλη μεριά, έστω ότι $f(\lambda) > 0$. Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα 6-3, βλέπουμε ότι το $f(x)$ θα ήταν θετικό για κάθε x σε ένα μικρό διάστημα που περιέχει το λ, ειδικότερα για κάποιους αριθμούς μικρότερους από τον λ (Σχήμα 13). Αυτό σημαίνει ότι όλοι αυτοί οι μικρότεροι αριθμοί *δεν* είναι στο A. Επομένως, θα μπορούσαμε να έχουμε διαλέξει ένα ακόμα πιο μικρό λ που να είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του A. Έχουμε πάλι αντίφαση· δεν ισχύει λοιπόν ούτε η $f(\lambda) > 0$. Άρα $f(\lambda) = 0$ και μπαίνουμε στον πειρασμό να πούμε Ο.Ε.Δ.

Ξέρουμε όμως ότι κάτι πρέπει να πηγαίνει στραβά, αφού δεν χρησιμοποιήσαμε καμία καινούργια ιδιότητα του $\mathbf{R}$, και δεν χρειάζεται μεγάλος έλεγχος για να βρούμε το αμφισβητήσιμο σημείο. Είναι φανερό ότι μπορούμε να διαλέξουμε έναν αριθμό λ που να είναι μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του A (για παράδειγμα, μπορούμε να διαλέξουμε $\lambda = b$), αλλά δεν είναι και τόσο φανερό ότι μπορούμε να διαλέξουμε έναν *ελάχιστο*. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το A αποτελείται από όλους τους αριθμούς $x \geq 0$ για τους οποίους $x^2 < 2$. Αν ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν υπήρχε, δεν θα υπήρχε ένας ελάχιστος αριθμός μεγαλύτερος από όλα τα στοιχεία του A· για κάθε $y > \sqrt{2}$ που θα παίρναμε, θα μπορούσαμε πάντοτε να βρούμε ένα ακόμα μικρότερο.

Τώρα που έχουμε ανακαλύψει την πλάνη μας είναι σχεδόν φανερό ποια πρόσθετη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών χρειαζόμαστε. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε, είναι να τη διατυπώσουμε καθαρά και να τη χρησιμοποιήσουμε. Με αυτά ασχολούμαστε στο επόμενο κεφάλαιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις που ακολουθούν, ελέγξτε ποιες είναι άνω ή κάτω φραγμένες στο διάστημα που σας υποδεικνύουμε, και ποιες παίρνουν τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή τους. (Παρατηρήστε ότι μια f *θα μπορούσε* να έχει αυτές τις ιδιότητες ακόμα και αν δεν είναι συνεχής, και ακόμα και αν το διάστημα δεν είναι κλειστό.)

(i) $f(x) = x^2$ στο $(-1, 1)$.

(ii) $f(x) = x^3$ στο $(-1, 1)$.

(iii) $f(x) = x^2$ στο $\mathbf{R}$.

(iv) $f(x) = x^2$ στο $[0, \infty)$.

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq a \\ a + 2, & x > a \end{cases}$ στο $(-a - 1, a + 1)$. (Υποθέτουμε ότι $a > -1$, έτσι ώστε $-a - 1 < a + 1$· θα χρειαστεί να διακρίνετε διάφορες περιπτώσεις για το a.)

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < a \\ a + 2, & x \geq a \end{cases}$ στο $[-a - 1, a + 1]$. (Υποθέστε και πάλι ότι $a > -1$.)

(vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.

(viii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.

(ix) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ άρρητος} \\ -1/q, & x = p/q \text{ και } p/q \text{ ανάγωγο} \end{cases}$ στο $[0, 1]$.

(x) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$ στο $[0, a]$.

(xi) $f(x) = \sin^2(\cos x + \sqrt{a + a^2})$ στο $[0, a^3]$.

(xii) $f(x) = [x]$ στο $[0, a]$.

2. Για κάθε μία από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις f που ακολουθούν, βρείτε έναν ακέραιο n τέτοιον ώστε $f(x) = 0$ για κάποιο x ανάμεσα στα n και $n + 1$.

(i) $f(x) = x^3 - x + 3$.

(ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$.

(iii) $f(x) = x^5 + x + 1$.

(iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

3. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός x τέτοιος ώστε

(i) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 119$.

(ii) $\sin x = x - 1$.

4. Αυτό το πρόβλημα είναι συνέχεια του Προβλήματος 3-7.

(α) Αν ο $n - k$ είναι άρτιος και ≥ 0, βρείτε μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n με k ρίζες ακριβώς.

(β) Λέμε ότι η ρίζα a της πολυωνυμικής συνάρτησης f έχει **πολλαπλότητα** m αν $f(x) = (x - a)^m g(x)$, όπου η g είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση που *δεν* έχει τον a ως ρίζα. Έστω f μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n. Έστω ότι η f έχει k ρίζες, συνυπολογίζοντας τις πολλαπλότητες, υποθέτουμε δηλαδή ότι k είναι το άθροισμα των πολλαπλοτήτων όλων των ριζών. Δείξτε ότι ο $n - k$ είναι άρτιος.

5. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι το $f(x)$ είναι πάντοτε ρητός αριθμός. Τί μπορείτε να πείτε για την f;

6. Έστω ότι f είναι μια *συνεχής* συνάρτηση στο $[-1, 1]$ τέτοια ώστε $x^2 + (f(x))^2 = 1$ για κάθε x. (Αυτό σημαίνει ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται πάντα πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.) Δείξτε ότι είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε x, ή αλλιώς $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε x.

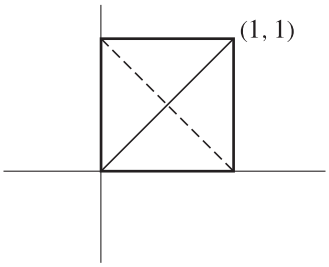
7. Πόσες συνεχείς συναρτήσεις f υπάρχουν που να ικανοποιούν την $(f(x))^2 = x^2$ για κάθε x;

8. Έστω ότι η f και η g είναι συνεχείς, ότι $f^2 = g^2$, και ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι, είτε $f(x) = g(x)$ για κάθε x, ή αλλιώς $f(x) = -g(x)$ για κάθε x.

9. (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής, ότι $f(x) = 0$ μόνο για $x = a$, και ότι $f(x) > 0$ για κάποιο $x > a$ καθώς και για κάποιο $x < a$. Τί μπορούμε να πούμε για το $f(x)$ για όλα τα $x \neq a$;

(β) Έστω και πάλι ότι η f είναι συνεχής και ότι $f(x) = 0$ μόνο για $x = a$, αλλά υποθέτουμε, αντίθετα, ότι $f(x) > 0$ για κάποιο $x > a$ και $f(x) < 0$ για κάποιο $x < a$. Τί μπορούμε να πούμε τώρα για το $f(x)$ για $x \neq a$;

*(γ) Εξετάστε το πρόσημο του $x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3$ όταν το x και το y δεν είναι και τα δύο 0.



ΣΧΗΜΑ 14

10. Έστω ότι η f και η g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και ότι $f(a) < g(a)$, αλλά $f(b) > g(b)$. Αποδείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάποιο x στο $[a, b]$. (Αν η απόδειξή σας δεν είναι πολύ σύντομη, τότε δεν είναι αυτή που θα έπρεπε.)

11. Έστω ότι f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ και ότι το $f(x)$ ανήκει στο $[0, 1]$ για κάθε x (κάντε ένα σχήμα). Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάποιον αριθμό x.

12. (α) Το Πρόβλημα 11 δείχνει ότι η f τέμνει τη διαγώνιο του τετραγώνου στο Σχήμα 14 (τη συνεχή γραμμή). Δείξτε ότι η f πρέπει να τέμνει και την άλλη (τη διακεκομμένη) διαγώνιο.

(β) Αποδείξτε το εξής γενικότερο αποτέλεσμα: Αν η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ ή $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, τότε $f(x) = g(x)$ για κάποιο x.

13. (α) Έστω $f(x) = \sin 1/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 0$. Είναι η f συνεχής στο $[-1, 1]$; Δείξτε ότι η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής στο $[-1, 1]$· με άλλα λόγια, αν η f παίρνει δύο τιμές κάπου στο $[-1, 1]$, παίρνει και κάθε τιμή ανάμεσά τους.

∗(β) Έστω ότι η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, και ότι η f παίρνει κάθε τιμή *μόνο μια φορά*. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

∗(γ) Γενικεύστε στην περίπτωση που η f παίρνει κάθε τιμή πεπερασμένες μόνο φορές.

14. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$, θέτουμε $\|f\|$ τη μέγιστη τιμή της $|f|$ στο $[0, 1]$.

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε αριθμό c έχουμε $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$.

∗(β) Αποδείξτε ότι $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο $\|f + g\| \neq \|f\| + \|g\|$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\|h - f\| \leq \|h - g\| + \|g - f\|$.

∗**15.** Έστω ότι η ϕ είναι συνεχής και $\lim_{x\to\infty} \phi(x)/x^n = 0 = \lim_{x\to-\infty} \phi(x)/x^n$.

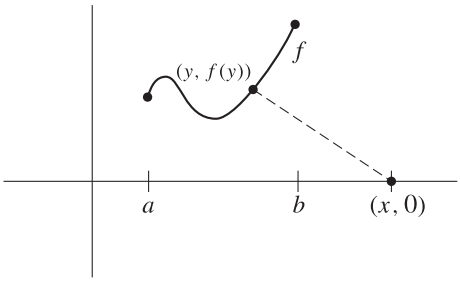
(α) Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι περιττός, τότε υπάρχει αριθμός x τέτοιος ώστε $x^n + \phi(x) = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)$ για κάθε x.

Υπόδειξη: Αυτό το πρόβλημα ελέγχει αν έχετε κατανοήσει κάποιες αποδείξεις. Ποιες;

∗**16.** (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο (a, b) και $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Αποδείξτε ότι η f έχει ένα ελάχιστο σε όλο το (a, b).

(β) Αποδείξτε το αντίστοιχο αποτέλεσμα όταν $a = -\infty$ και/ή $b = \infty$.



ΣΧΗΜΑ 15

∗**17.** Έστω f μια πολυωνυμική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός y τέτοιος ώστε $|f(y)| \leq |f(x)|$ για κάθε x.

∗**18.** Έστω ότι f είναι συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε x, και $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$. (Κάντε ένα σχήμα.) Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός y τέτοιος ώστε $f(y) \geq f(x)$ για κάθε x.

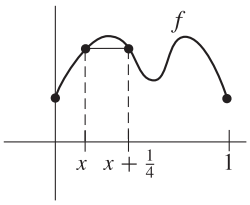
∗**19.** (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, και έστω x οποιοσδήποτε αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο στη γραφική παράσταση της f που είναι το πλησιέστερο στο $(x, 0)$· με άλλα λόγια, υπάρχει κάποιο y στο $[a, b]$ τέτοιο ώστε η απόσταση του $(x, 0)$ από το $(y, f(y))$ να είναι $\leq$ από την απόσταση του $(x, 0)$ από το $(z, f(z))$ για κάθε z στο $[a, b]$. (Βλ. Σχήμα 15.)

(β) Δείξτε ότι, ο ίδιος αυτός ισχυρισμός δεν είναι αναγκαστικά σωστός αν το $[a, b]$ αντικατασταθεί με το (a, b).

(γ) Δείξτε ότι η πρόταση *ισχύει* αν το $[a, b]$ αντικατασταθεί με το $\mathbf{R}$.

(δ) Στις περιπτώσεις (α) και (γ), θέτουμε $g(x)$ την ελάχιστη απόσταση του $(x, 0)$ από σημείο της γραφικής παράστασης της f. Αποδείξτε ότι $g(y) \leq g(x) + |x - y|$, και συμπεράνετε ότι η g είναι συνεχής.

(ε) Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί x_0 και x_1 στο $[a, b]$ τέτοιοι ώστε η απόσταση του $(x_0, 0)$ από το $(x_1, f(x_1))$ να είναι $\leq$ από την απόσταση του $(x_0{}', 0)$ από το $(x_1{}', f(x_1{}'))$ για κάθε $x_0{}', x_1{}'$ στο $[a, b]$.



ΣΧΗΜΑ 16

20. (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω n τυχαίος φυσικός αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός x τέτοιος ώστε $f(x) = f(x + 1/n)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16 για $n = 4$. Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$· τί θα ίσχυε αν $g(x) \neq 0$ για κάθε x;

∗(β) Έστω ότι $0 < a < 1$, αλλά ότι ο a δεν είναι ίσος με $1/n$ για κανέναν φυσικό αριθμό n. Βρείτε μια συνάρτηση f που να είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και να ικανοποιεί την $f(0) = f(1)$, αλλά να μην ικανοποιεί την $f(x) = f(x + a)$ για κανένα x.

∗**21.** (α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbf{R}$ που να παίρνει κάθε τιμή ακριβώς δυο φορές. Υπόδειξη: Αν $f(a) = f(b)$ για $a < b$, τότε είτε $f(x) > f(a)$ για κάθε x στο (a, b), ή $f(x) < f(a)$ για κάθε x στο (a, b). Γιατί; Στην πρώτη περίπτωση, όλες οι τιμές που είναι κοντά στο $f(a)$, αλλά είναι λίγο μεγαλύτερες από το $f(a)$, παίρνονται κάπου στο (a, b)· αυτό σημαίνει ότι $f(x) < f(a)$ για $x < a$ και $x > b$.

(β) Ισχυροποιήστε το μέρος (α) αποδεικνύοντας ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση f που να παίρνει κάθε τιμή 0 ή 2 φορές, δηλαδή που να παίρνει ακριβώς δύο φορές κάθε τιμή της. Υπόδειξη: Στην προηγούμενη υπόδειξη περιέχεται η πληροφορία ότι η f έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή (που πρέπει να την παίρνει δύο φορές). Τί μπορούμε να πούμε για τις τιμές που βρίσκονται κοντά στη μέγιστη τιμή;

(γ) Βρείτε μια συνεχή συνάρτηση f που να παίρνει κάθε τιμή ακριβώς 3 φορές. Πιο γενικά, βρείτε μία που να παίρνει κάθε τιμή ακριβώς n φορές, αν ο n είναι περιττός.

(δ) Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε δεν υπάρχει συνεχής f που να παίρνει κάθε τιμή ακριβώς n φορές. Υπόδειξη: Στην περίπτωση $n = 4$, για παράδειγμα, έστω $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$. Τότε, ή θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε x σε δύο από τα τρία διαστήματα (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), ή $f(x) < 0$ για όλα τα x σε δύο από αυτά τα τρία διαστήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑΤΑ

Αυτό το κεφάλαιο αποκαλύπτει την πιο σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών. Όμως είναι απλώς και μόνο η συνέχεια του Κεφαλαίου 7· το μονοπάτι που πρέπει να ακολουθήσουμε έχει ήδη υποδειχθεί, οποιαδήποτε λοιπόν περαιτέρω συζήτηση θα ήταν άσκοπη καθυστέρηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο A από πραγματικούς αριθμούς είναι **άνω φραγμένο** αν υπάρχει αριθμός x τέτοιος ώστε

$$x \geq a \quad \text{για κάθε } a \text{ στο } A.$$

Κάθε τέτοιος αριθμός x λέγεται **άνω φράγμα** του A.

Προφανώς, το A είναι άνω φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει ένας αριθμός x που είναι άνω φράγμα για το A (και σε αυτήν την περίπτωση θα υπάρχουν πολλά άνω φράγματα για το A)· λέμε συχνά, ότι το «A έχει ένα άνω φράγμα» με το οποίο εννοούμε ότι υπάρχει ένας αριθμός που είναι άνω φράγμα για το A.

Πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι ο όρος «άνω φραγμένο» έχει μέχρι τώρα χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους —πρώτα, στο Κεφάλαιο 7, αναφερόμενος σε συναρτήσεις, και τώρα αναφερόμενος σε σύνολα. Αυτή η διπλή χρήση δεν θα πρέπει να προξενεί σύγχυση, αφού θα γίνεται πάντοτε σαφές το αν μιλάμε για ένα σύνολο από αριθμούς ή για μια συνάρτηση. Επιπλέον, οι δύο ορισμοί είναι στενά συνδεδεμένοι: αν A είναι το σύνολο $\{f(x) : a \leq x \leq b\}$, τότε η συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$, αν και μόνο αν το σύνολο A είναι άνω φραγμένο.

Ολόκληρο το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών και οι φυσικοί αριθμοί $\mathbf{N}$ είναι δύο παραδείγματα συνόλων που *δεν* είναι άνω φραγμένα. Ένα παράδειγμα συνόλου που είναι *άνω* φραγμένο, είναι το

$$A = \{x : 0 \leq x < 1\}.$$

Για να δείξουμε ότι το A είναι άνω φραγμένο χρειάζεται μόνο να ονομάσουμε κάποιο άνω φράγμα του A, πράγμα που είναι αρκετά εύκολο. Για παράδειγμα, το 138 είναι ένα άνω φράγμα του A, και το ίδιο συμβαίνει με τους 2, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$ και 1. Προφανώς, ο 1 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A· αν και η φράση που μόλις τώρα εισάγουμε εξηγεί η ίδια το νόημά της, προκειμένου να αποφύγουμε κάθε πιθανή σύγχυση (ειδικότερα, για να βεβαιωθούμε ότι όλοι ξέρουμε τι σημαίνει ο υπερθετικός του «μικρό»), την ορίζουμε αναλυτικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας αριθμός x είναι ένα **ελάχιστο άνω φράγμα** του A αν

(1) ο x είναι άνω φράγμα του A,

και (2) αν ο y είναι άνω φράγμα του A, τότε $x \leq y$.

Η χρήση του αορίστου άρθρου «ένα» σε αυτόν τον ορισμό, ήταν απλώς μια παραχώρηση στην προσωρινή άγνοια. Τώρα που έχουμε δώσει έναν ακριβή ορισμό, μπορεί

κανείς να δει εύκολα ότι, αν οι x και y είναι και οι δύο ελάχιστα άνω φράγματα του A, τότε $x = y$. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση

$$\begin{aligned} x \leq y, &\quad \text{αφού ο } y \text{ είναι άνω φράγμα και ο } x \text{ είναι ελάχιστο άνω φράγμα,} \\ \text{και } y \leq x, &\quad \text{αφού ο } x \text{ είναι άνω φράγμα και ο } y \text{ είναι ελάχιστο άνω φράγμα·} \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x = y$. Για αυτόν το λόγο μιλάμε για *το* ελάχιστο άνω φράγμα του A. Ο όρος **supremum** του A είναι συνώνυμος και έχει ένα πλεονέκτημα. Συντομεύεται πολύ όμορφα στο

$$\sup A \qquad (\text{προφέρεται «σουπ } A»)$$

και μας σώζει από τη σύντμηση

$$\text{lub } A \text{ (least upper bound)}$$

(που πάντως χρησιμοποιείται από μερικούς συγγραφείς).

Υπάρχει μια σειρά από σημαντικούς ορισμούς, ανάλογους με αυτούς που μόλις δώσαμε, που τώρα μπορούμε να χειριστούμε πιο συνοπτικά. Ένα σύνολο A από πραγματικούς αριθμούς είναι **κάτω φραγμένο**, αν υπάρχει ένας αριθμός x τέτοιος ώστε

$$x \leq a \qquad \text{για κάθε } a \text{ στο } A.$$

Ένας τέτοιος αριθμός x λέγεται **κάτω φράγμα** για το A. Ένας αριθμός x είναι το **μέγιστο κάτω φράγμα** του A αν

$$\begin{aligned} &(1) \quad \text{ο } x \text{ είναι κάτω φράγμα του } A, \\ \text{και } &(2) \quad \text{αν ο } y \text{ είναι κάτω φράγμα του } A, \text{ τότε } x \geq y. \end{aligned}$$

Το μέγιστο κάτω φράγμα του A λέγεται επίσης **infimum** του A, συντετμημένα

$$\inf A.$$

Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν τη σύντμηση

$$\text{glb } A \text{ (greatest lower bound).}$$

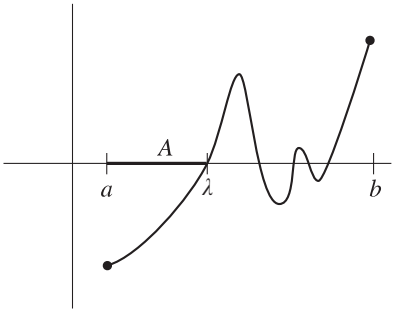
Από την έως τώρα συζήτηση μας λείπει μια λεπτομέρεια —το πρόβλημα «ποια σύνολα έχουν τουλάχιστον ένα, επομένως ακριβώς ένα, ελάχιστο άνω φράγμα ή μέγιστο κάτω φράγμα». Θα εξετάσουμε μόνο τα ελάχιστα άνω φράγματα, μια και το πρόβλημα για τα μέγιστα κάτω φράγματα μπορεί μετά να απαντηθεί εύκολα (Πρόβλημα 2).

Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο, τότε το A δεν έχει ούτε ένα άνω φράγμα, επομένως είναι βέβαιο ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε το A να έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Είναι δελεαστικό να πει κανείς ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα αν έχει *κάποιο* άνω φράγμα, αλλά, όπως συμβαίνει και με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να μην είναι σωστός για έναν μάλλον ειδικό λόγο. Αν $A = \emptyset$, τότε το A είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, κάθε αριθμός x είναι άνω φράγμα του $\emptyset$:

$$x \geq y \quad \text{για κάθε } y \text{ στο } \emptyset$$

απλώς γιατί δεν υπάρχει y στο $\emptyset$. Αφού *κάθε* αριθμός είναι άνω φράγμα του $\emptyset$, σίγουρα δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα του $\emptyset$. Με αυτήν την τετριμμένη εξαίρεση πάντως, ο ισχυρισμός μας είναι σωστός —και πολύ σημαντικός, οπωσδήποτε αρκετά σημαντικός για να ασχολούμαστε με τέτοιες λεπτομέρειες. Είμαστε επιτέλους έτοιμοι να διατυπώσουμε την τελευταία ιδιότητα των πραγματικών αριθμών που χρειαζόμαστε:

(I13) (Η ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος) Αν A είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, $A \neq \emptyset$, και το A είναι άνω φραγμένο, τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα.



ΣΧΗΜΑ 1

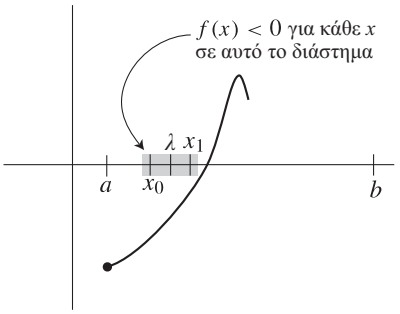
Η ιδιότητα I13 ίσως παραξενεύει σαν εκτός κλίματος, αλλά αυτή είναι στην πραγματικότητα μια από τις αρετές της. Για να ολοκληρώσουμε τον κατάλογό μας με τις βασικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών δεν απαιτούμε κάποια εξαιρετικά δυσνόητη πρόταση, παρά μόνο μια ιδιότητα τόσο απλή που θα έπρεπε να αισθανθούμε αφελείς που την είχαμε παραβλέψει. Βέβαια, η ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος δεν είναι στ' αλήθεια τόσο αθώα όσο την περιγράφουμε· στο κάτω-κάτω *δεν* ισχύει για τους ρητούς αριθμούς $\mathbf{Q}$. Για παράδειγμα, αν A είναι το σύνολο όλων των ρητών αριθμών x που ικανοποιούν την $x^2 < 2$, τότε δεν υπάρχει *ρητός* αριθμός y που να είναι άνω φράγμα του A και μικρότερος ή ίσος από οποιονδήποτε άλλο *ρητό* αριθμό που είναι άνω φράγμα του A. Μόνο σταδιακά θα γίνει καθαρό το πόσο σπουδαία είναι η I13, αλλά ήδη βρισκόμαστε σε θέση να αποδείξουμε τη δύναμή της, συμπληρώνοντας τις αποδείξεις που είχαμε παραλείψει στο Κεφάλαιο 7.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7-1 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < 0 < f(b)$, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός x στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε $f(x) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξή μας είναι απλώς μια αυστηρή έκδοση του περιγράμματος που αναπτύξαμε στο τέλος του Κεφαλαίου 7 —θα εντοπίσουμε τον μικρότερο αριθμό x στο $[a, b]$ με $f(x) = 0$.

Ορίζουμε το σύνολο A, που φαίνεται στο Σχήμα 1, ως εξής:

$$A = \{x : a \le x \le b, \text{ και η } f \text{ είναι αρνητική στο διάστημα } [a, x]\}.$$

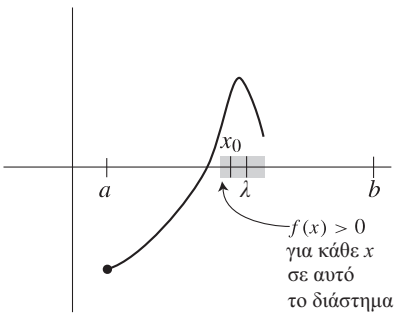


ΣΧΗΜΑ 2

Προφανώς $A \neq \emptyset$, αφού το a ανήκει στο A· στην πραγματικότητα, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το A να περιέχει όλα τα σημεία x που ικανοποιούν την $a \le x < a + \delta$· αυτό προκύπτει από το Πρόβλημα 6-16, αφού η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < 0$. Ομοίως, το b είναι ένα άνω φράγμα για το A και, στην ουσία, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε όλα τα σημεία x που ικανοποιούν την $b - \delta < x \le b$ να είναι άνω φράγματα του A· αυτό προκύπτει επίσης από το Πρόβλημα 6-16, αφού $f(b) > 0$.

Από αυτές τις παρατηρήσεις έπεται ότι το A έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα λ και ότι $a < \lambda < b$. Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι $f(\lambda) = 0$, αποκλείοντας την εκδοχή να ισχύει $f(\lambda) < 0$ ή $f(\lambda) > 0$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $f(\lambda) < 0$. Από το Θεώρημα 6-3, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < 0$ για $\lambda - \delta < x < \lambda + \delta$ (Σχήμα 2). Τώρα, υπάρχει κάποιος αριθμός x_0 στο A που ικανοποιεί την $\lambda - \delta < x_0 < \lambda$ (γιατί αλλιώς το λ δεν θα ήταν το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A). Αυτό σημαίνει ότι η f είναι αρνητική σε ολόκληρο το διάστημα $[a, x_0]$. Αλλά, αν x_1 είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο λ και στο $\lambda + \delta$, τότε η f είναι επίσης αρνητική σε ολόκληρο το διάστημα $[x_0, x_1]$. Επομένως η f είναι αρνητική στο διάστημα $[a, x_1]$, οπότε το x_1 ανήκει στο A. Αλλά αυτό αντίκειται στο γεγονός ότι το λ είναι ένα άνω φράγμα του A· η αρχική μας υπόθεση ότι $f(\lambda) < 0$ πρέπει να είναι λανθασμένη.



ΣΧΗΜΑ 3

Ας υποθέσουμε, από την άλλη μεριά, ότι $f(\lambda) > 0$. Τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $f(x) > 0$ για $\lambda - \delta < x < \lambda + \delta$ (Σχήμα 3). Για μια ακόμα φορά ξέρουμε ότι υπάρχει ένα x_0 στο A που ικανοποιεί την $\lambda - \delta < x_0 < \lambda$· αλλά αυτό σημαίνει ότι η f είναι αρνητική στο $[a, x_0]$, το οποίο είναι αδύνατο, αφού $f(x_0) > 0$. Άρα η υπόθεση $f(\lambda) > 0$ οδηγεί επίσης σε αντίφαση, αφήνοντας μόνη δυνατότητα την $f(\lambda) = 0$. ∎

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 2 και 3 του Κεφαλαίου 7 απαιτούν ένα απλό προκαταρκτικό αποτέλεσμα, που θα παίξει περίπου τον ίδιο ρόλο με αυτόν που το Θεώρημα 6-3 έπαιξε στην προηγούμενη απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η f είναι συνεχής στο a, τότε υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε η f να είναι άνω φραγμένη στο διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$ (βλ. Σχήμα 4).

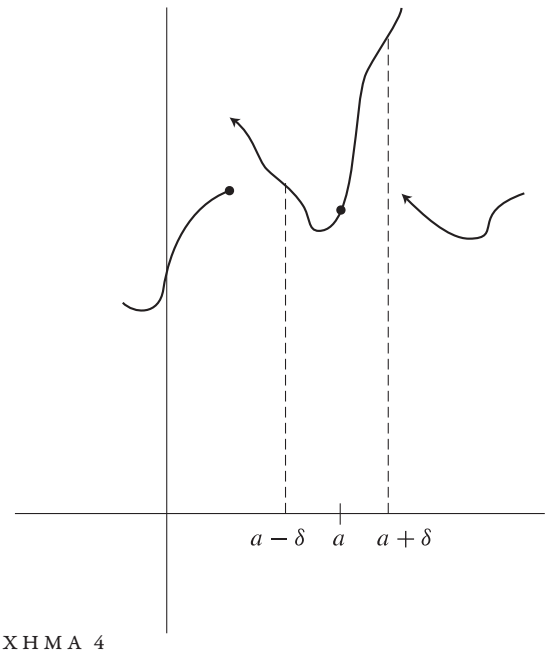
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, υπάρχει, για κάθε $\varepsilon > 0$, ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } |x - a| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Το μόνο που χρειάζεται είναι να εφαρμόσουμε αυτήν την πρόταση για κάποιο συγκεκριμένο ε (οποιοδήποτε μας κάνει), για παράδειγμα, $\varepsilon = 1$. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } |x - a| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(a)| < 1.$$

Έπεται, ειδικότερα, ότι αν $|x - a| < \delta$, τότε $f(x) - f(a) < 1$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη: στο διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$ η συνάρτηση f είναι άνω φραγμένη από το $f(a) + 1$. ∎



ΣΧΗΜΑ 4

Δεν χρειάζεται καν να προσθέσουμε ότι μπορούμε επίσης να αποδείξουμε πως η f είναι κάτω φραγμένη σε κάποιο διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$, και, τελικά, πως η f είναι φραγμένη σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a.

Ένα πιο σημαντικό σημείο είναι η παρατήρηση ότι αν $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο σύνολο $\{x : a \leq x < a + \delta\}$, και μια παρόμοια παρατήρηση ισχύει αν $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Έχοντας κάνει αυτές τις παρατηρήσεις (και υποθέτοντας ότι θα δώσετε τις αποδείξεις), καταπιανόμαστε με το δεύτερο κύριο θεώρημά μας.

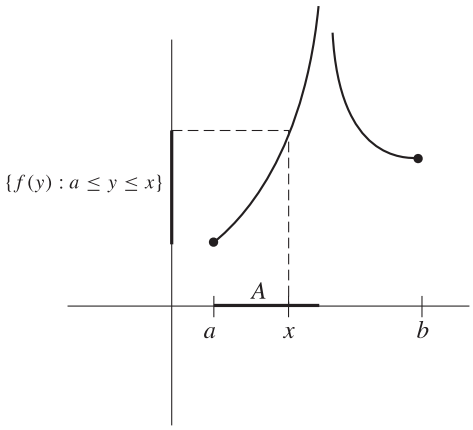
ΘΕΩΡΗΜΑ 7-2 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ και η } f \text{ είναι άνω φραγμένη στο } [a, x]\}.$$

Προφανώς $A \neq \emptyset$ (αφού a ανήκει στο A), και το A είναι άνω φραγμένο (από το b), άρα το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα το λ. Πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο «άνω φράγμα» τόσο για το σύνολο A, που μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται πάνω στον οριζόντιο άξονα, όσο και για την f, δηλαδή τα σύνολα $\{f(y) : a \leq y \leq x\}$, που μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκονται πάνω στον κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 5).

Το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα έχουμε $\lambda = b$. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι $\lambda < b$. Από το Θεώρημα 1 υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$. Αφού λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A υπάρχει κάποιο x_0 στο A που ικανοποιεί την $\lambda - \delta < x_0 < \lambda$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, x_0]$. Αλλά, αν x_1 είναι οποιοσδήποτε αριθμός με $\lambda < x_1 < \lambda + \delta$,



ΣΧΗΜΑ 5

τότε η f είναι φραγμένη και στο $[x_0, x_1]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, x_1]$, άρα ο x_1 ανήκει στο A, πράγμα που αντιτίθεται στο γεγονός ότι το λ είναι άνω φράγμα του A. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι $\lambda = b$. Πρέπει να αναφέρουμε μια λεπτομέρεια: η απόδειξή μας σιωπηλά υποθέτει ότι $a < \lambda$ [ώστε η f να μπορεί να οριστεί σε κάποιο διάστημα $(\lambda - \delta, \lambda + \delta)$]· η πιθανότητα $a = \lambda$ μπορεί να αποκλειστεί όμοια, αν χρησιμοποιήσουμε την ύπαρξη ενός $\delta > 0$ τέτοιου ώστε η f να είναι φραγμένη στο $\{x : a \le x < a + \delta\}$.

Η απόδειξη δεν είναι τελείως πλήρης —ξέρουμε μόνο ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, x]$ για κάθε $x < b$, όχι αναγκαστικά ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Παρ' όλα αυτά, μόνο ένα μικρό επιχείρημα χρειάζεται να προστεθεί.

Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο $\{x : b - \delta < x \le b\}$. Υπάρχει ένα x_0 στο A τέτοιο ώστε $b - \delta < x_0 < b$. Έτσι η f είναι φραγμένη στο $[a, x_0]$ και ακόμα στο $[x_0, b]$, άρα η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$. ∎

Για να αποδείξουμε το τρίτο σπουδαίο θεώρημα, καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7-3 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει ένας αριθμός y στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε $f(y) \ge f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ξέρουμε ήδη ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, που σημαίνει ότι το σύνολο

$$\{f(x) : x \text{ στο } [a, b]\}$$

είναι φραγμένο. Αυτό το σύνολο είναι εμφανώς όχι Ø, άρα έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα λ. Αφού $\lambda \ge f(x)$ για x στο $[a, b]$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda = f(y)$ για κάποιο y στο $[a, b]$.

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $\alpha \ne f(y)$ για κάθε y στο $[a, b]$. Τότε η συνάρτηση g που ορίζεται από την

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}, \quad x \text{ στο } [a, b]$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$, αφού ο παρονομαστής του δεξιού μέλους δεν είναι ποτέ 0. Από την άλλη πλευρά, λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\{f(x) : x \text{ στο } [a, b]\}$· αυτό σημαίνει ότι

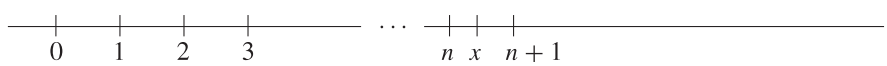
$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } x \text{ στο } [a, b] \text{ με } \lambda - f(x) < \varepsilon.$$

Αυτό, με τη σειρά του σημαίνει ότι

$$\text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } x \text{ στο } [a, b] \text{ με } g(x) > 1/\varepsilon.$$

Αλλά *αυτό* σημαίνει ότι η g δεν είναι φραγμένη στο $[a, b]$, που αντιφάσκει στο προηγούμενο θεώρημα. ∎

Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, δώσαμε το σύνολο των φυσικών αριθμών **N** ως παράδειγμα μη φραγμένου συνόλου. Πρόκειται τώρα να *αποδείξουμε* ότι το **N** είναι μη φραγμένο. Μετά τα δύσκολα θεωρήματα που αποδείξαμε σε αυτό το κεφάλαιο, μπορεί να εκπλαγεί κανείς βρίσκοντας ένα τόσο «προφανές» θεώρημα να τερματίζει τη συζήτησή μας. Αν όμως συμβαίνει αυτό, ίσως να είναι επειδή αφήνει τη γεωμετρική εικόνα του **R** να τον επηρεάζει πολύ ισχυρά. «Κοίτα», μπορεί να πει, «οι πραγματικοί αριθμοί είναι κάπως έτσι



άρα κάθε αριθμός x είναι ανάμεσα σε δύο ακέραιους n, $n + 1$ (εκτός αν το x είναι ο ίδιος ακέραιος)». Το να βασίζει όμως κανείς τον ισχυρισμό του σε μια γεωμετρική εικόνα δεν είναι απόδειξη, και ακόμα και αυτή η εικόνα περιέχει μια παραδοχή: ότι, αν τοποθετείς μοναδιαία διαστήματα το ένα δίπλα στο άλλο, στο τέλος θα πάρεις ένα διάστημα μεγαλύτερο από οποιοδήποτε δοθέν διάστημα. Αυτό το αξίωμα, που συχνά παραλείπεται από μια πρώτη εισαγωγή στη Γεωμετρία, συνήθως αποδίδεται (όχι τελείως δίκαια) στον Αρχιμήδη, και η αντίστοιχη ιδιότητα για αριθμούς, ότι το **N** δεν είναι φραγμένο, λέγεται

η *Αρχιμήδεια ιδιότητα* των πραγματικών. Αυτή η ιδιότητα *δεν* είναι συνέπεια των I1–I12 (βλ. την παραπομπή [14] στη Προτεινόμενη Βιβλιογραφία), αν και ισχύει βέβαια για το **Q**. Αφού όμως έχουμε την I13, δεν υπάρχουν πια προβλήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Το **N** δεν είναι άνω φραγμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε ότι το **N** είναι άνω φραγμένο. Αφού $\mathbf{N} \neq \emptyset$, θα υπήρχε ένα ελάχιστο άνω φράγμα λ για το **N**. Τότε

$$\lambda \geq n \qquad \text{για κάθε } n \text{ στο } \mathbf{N}.$$

Συνεπώς,

$$\lambda \geq n + 1 \quad \text{για κάθε } n \text{ στο } \mathbf{N},$$

αφού το $n + 1$ ανήκει στο **N** αν το n ανήκει στο **N**. Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$\lambda - 1 \geq n \quad \text{για κάθε } n \text{ στο } \mathbf{N},$$

και *αυτό* σημαίνει ότι το $\lambda - 1$ είναι επίσης άνω φράγμα για το **N**, αντιφάσκοντας με ότι το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. ∎

Υπάρχει μια συνέπεια του Θεωρήματος 2 (στην πραγματικότητα μια ισοδύναμη διατύπωση) που έχουμε σιωπηρά υποθέσει πολύ συχνά.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n με $1/n < \varepsilon$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε πως όχι· τότε $1/n \geq \varepsilon$ για κάθε n στο **N**. Άρα $n \leq 1/\varepsilon$ για κάθε n στο **N**. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το $1/\varepsilon$ είναι άνω φράγμα για το **N**, που αντιφάσκει στο Θεώρημα 2. ∎

Μια σύντομη ματιά στο Κεφάλαιο 6 θα δείξει ότι το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3 χρησιμοποιήθηκε πολλές φορές στη συζήτηση. Βέβαια, το Θεώρημα 3 δεν ήταν διαθέσιμο εκείνη τη στιγμή, αλλά τα παραδείγματα ήταν τόσο σημαντικά ώστε, προκειμένου να τα δώσουμε, κάποια ατασθαλία επιτρεπόταν. Ως μερική δικαιολογία για αυτήν την ατιμία μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτό το αποτέλεσμα δεν χρησιμοποιήθηκε ποτέ στην απόδειξη κάποιου *θεωρήματος*, αλλά αν η πίστη οποιουδήποτε έχει κλονιστεί, μια αναδρομή σε όλες τις αποδείξεις που έχουν γίνει έως τώρα, επιβάλλεται. Ευτυχώς, τέτοια ατασθαλία δεν θα χρειαστεί ξανά. Έχουμε πια διατυπώσει όλες τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών που μπορεί να χρειαστούμε. Από εδώ και πέρα, όχι άλλα ψέματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα (αν υπάρχουν) των ακόλουθων συνόλων. Εξετάστε ακόμα ποια σύνολα έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο (δηλαδή εξετάστε αν το ελάχιστο άνω φράγμα ή το μέγιστο κάτω φράγμα συμβαίνει να ανήκει στο σύνολο).

(i) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ στο } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ στο } \mathbf{Z} \text{ και } n \neq 0\right\}$.

(iii) $\{x : x = 0 \text{ ή } x = 1/n \text{ για κάποιο } n \text{ στο } \mathbf{N}\}$.

(iv) $\{x : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \text{ και ο } x \text{ είναι ρητός}\}$.

(v) $\{x : x^2 + x + 1 \geq 0\}$.

(vi) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$.

(vii) $\{x : x < 0 \text{ και } x^2 + x - 1 < 0\}$.

(viii) $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n : n \text{ στο } \mathbf{N}\right\}$.

2. (α) Έστω ότι το $A \neq \emptyset$ είναι κάτω φραγμένο. Ας συμβολίσουμε με $-A$ το σύνολο όλων των $-x$ για x στο A. Αποδείξτε ότι $-A \neq \emptyset$, ότι το $-A$ είναι άνω φραγμένο, και ότι το $-\sup(-A)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

(β) Αν το $A \neq \emptyset$ είναι κάτω φραγμένο, έστω B το σύνολο όλων των κάτω φραγμάτων του A. Δείξτε ότι $B \neq \emptyset$, ότι το B είναι άνω φραγμένο, και ότι το $\sup B$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

3. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ με $f(a) < 0 < f(b)$.

(α) Η απόδειξη του Θεωρήματος 7-1 έδειξε ότι υπάρχει ένα ελάχιστο x στο $[a, b]$ με $f(x) = 0$. Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα x στο $[a, b]$ με $f(x) = 0$, υπάρχει αναγκαστικά ένα δεύτερο ελάχιστο; Δείξτε ότι υπάρχει ένα μέγιστο x στο $[a, b]$ με $f(x) = 0$. (Προσπαθήστε να δώσετε μια εύκολη απόδειξη θεωρώντας μια καινούργια συνάρτηση που έχει στενή σχέση με την f.)

(β) Η απόδειξη του Θεωρήματος 7-1 βασίστηκε στο σύνολο $A = \{x : a \leq x \leq b \text{ και η } f \text{ είναι αρνητική στο } [a, x]\}$. Δώστε μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 7-1, με βάση το σύνολο $B = \{x : a \leq x \leq b \text{ και } f(x) < 0\}$. Ποιο σημείο x του $[a, b]$ με $f(x) = 0$ εντοπίζει αυτή η απόδειξη; Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο τα σύνολα A και B να μην είναι ίσα.

∗**4.** (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι $f(a) = f(b) = 0$. Έστω ακόμα ότι $f(x_0) > 0$ για κάποιο x_0 στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί c και d με $a \leq c < x_0 < d \leq b$ τέτοιοι ώστε $f(c) = f(d) = 0$, αλλά $f(x) > 0$ για κάθε x στο (c, d). Υπόδειξη: Το προηγούμενο πρόβλημα σας δίνει μεγάλη βοήθεια.

(β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι $f(a) < f(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί c και d με $a \leq c < d \leq b$ τέτοιοι ώστε $f(c) = f(a)$ και $f(d) = f(b)$ και $f(a) < f(x) < f(d)$ για κάθε x στο (c, d).

5. (α) Έστω ότι $y - x > 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας ακέραιος k τέτοιος ώστε $x < k < y$. Υπόδειξη: Έστω l ο μεγαλύτερος ακέραιος που ικανοποιεί την $l \leq x$, και πάρτε τον $l + 1$.

(β) Υποθέτουμε ότι $x < y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε $x < r < y$. Υπόδειξη: Αν $1/n < y - x$, τότε $ny - nx > 1$. (Ερώτημα: Γιατί τα (α) και (β) είχαν αναβληθεί μέχρι αυτό το σύνολο των προβλημάτων;)

(γ) Έστω ότι $r < s$ είναι ρητοί αριθμοί. Δείξτε ότι υπάρχει ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα στον r και στον s. Υπόδειξη: Ως αρχή, ξέρετε ότι υπάρχει ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα στον 0 και τον 1.

(δ) Έστω ότι $x < y$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας άρρητος αριθμός ανάμεσα στον x και τον y. Υπόδειξη: Δεν χρειάζεται να κάνετε πρόσθετη δουλειά· αυτό έπεται από τα (β) και (γ).

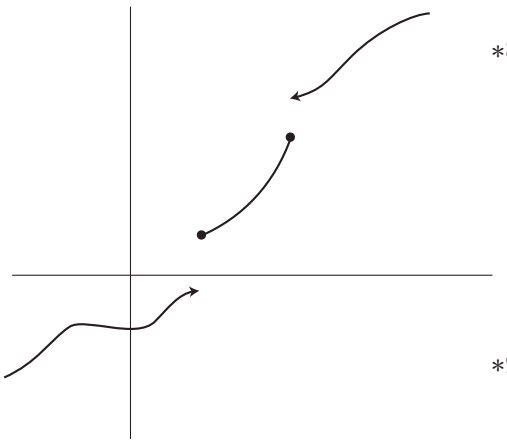
∗**6.** Ένα σύνολο A πραγματικών αριθμών λέγεται **πυκνό** αν κάθε ανοικτό διάστημα περιέχει ένα σημείο του A. Για παράδειγμα, το Πρόβλημα 5 δείχνει ότι το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των άρρητων αριθμών είναι το καθένα πυκνό.

(α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής και $f(x) = 0$ για όλους τους αριθμούς x σε ένα πυκνό σύνολο A, τότε $f(x) = 0$ για κάθε x.

(β) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι συνεχείς και $f(x) = g(x)$ για κάθε x σε ένα πυκνό σύνολο A, τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε x.

(γ) Αν αντί για αυτό υποθέσουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x στο A, δείξτε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε παντού το $\geq$ με $>$;

7. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής και $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x και y, τότε υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε $f(x) = cx$ για κάθε x. (Η απόδειξη είναι άμεση αν συνδυάσετε τα αποτελέσματα δύο προηγουμένων προβλημάτων). Μια πληροφορία: *υπάρχουν μη συνεχείς* συναρτήσεις f που ικανοποιούν την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x και y, αλλά δεν μπορούμε να το αποδείξουμε τώρα· πράγματι, αυτό το απλό ερώτημα απαιτεί έννοιες που συνήθως δεν συναντώνται ποτέ σε ένα προπτυχιακό μάθημα (βλ. την αναφορά [7] στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία).



ΣΧΗΜΑ 6

∗**8.** Έστω ότι f είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $f(a) \leq f(b)$ όποτε $a < b$ (Σχήμα 6).

(α) Αποδείξτε ότι το $\lim_{x \to a^-} f(x)$ και το $\lim_{x \to a^+} f(x)$ υπάρχουν και τα δύο. Υπόδειξη: Γιατί αυτό το πρόβλημα βρίσκεται σε αυτό το κεφάλαιο;

(β) Αποδείξτε ότι η f δεν έχει ποτέ αιρόμενη ασυνέχεια (η ορολογία προέρχεται από το Πρόβλημα 6-17).

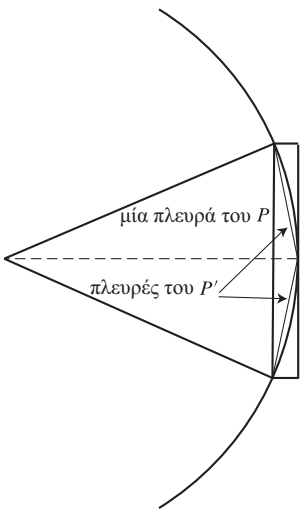
(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f ικανοποιεί τα συμπεράσματα του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, τότε η f είναι συνεχής.

∗**9.** Αν f είναι συνάρτηση φραγμένη στο $[0,1]$, θέτουμε $|||f||| = \sup\{|f(x)| : x \text{ στο } [0,1]\}$. Αποδείξτε ιδιότητες της $\| \ \|$ ανάλογες με αυτές του Προβλήματος 7-14.

10. Έστω ότι $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι κάθε αριθμός x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $x = k\alpha + x'$, όπου k είναι ακέραιος, και $0 \leq x' < \alpha$.

11. (α) Έστω ότι $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι ακολουθία θετικών αριθμών με $a_{n+1} \leq a_n/2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο n με $a_n < \varepsilon$.

(β) Έστω ότι P είναι κανονικό πολύγωνο εγγεγραμμένο μέσα σε ένα κύκλο. Αν P' είναι το εγγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο με διπλάσιο αριθμό πλευρών, δείξτε ότι η διαφορά ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και το εμβαδόν του P' είναι λιγότερη από το μισό της διαφοράς ανάμεσα στο εμβαδόν του κύκλου και το εμβαδόν του P (χρησιμοποιήστε το Σχήμα 7).



ΣΧΗΜΑ 7

(γ) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα κανονικό πολύγωνο P εγγεγραμμένο σε έναν κύκλο με εμβαδόν όσο κοντά θέλουμε στο εμβαδόν του κύκλου. Για να κάνετε το μέρος (γ) θα χρειαστείτε το μέρος (α). Αυτό ήταν σαφές για τους αρχαίους Έλληνες, που χρησιμοποιούσαν το μέρος (α) ως τη βάση για τις έρευνές τους γύρω από τις αναλογίες και τα εμβαδά. Με υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνων, αυτή η μέθοδος («η μέθοδος της εξάντλησης») επιτρέπει υπολογισμούς του π με όση ακρίβεια θέλουμε· ο Αρχιμήδης τη χρησιμοποίησε για να δείξει ότι $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Αλλά έχει πολύ μεγαλύτερη θεωρητική σημασία:

∗(δ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα εμβαδά δύο κανονικών πολυγώνων με το ίδιο πλήθος πλευρών έχουν τον ίδιο λόγο με τα τετράγωνα των πλευρών τους, αποδείξτε ότι τα εμβαδά δύο κύκλων έχουν τον ίδιο λόγο με τα τετράγωνα των ακτίνων τους. Υπόδειξη: Καταλήξτε σε αντίφαση, κάνοντας την υπόθεση ότι ο λόγος των εμβαδών είναι μεγαλύτερος, ή μικρότερος, από το λόγο των τετραγώνων των ακτίνων, και εγγράφοντας κατάλληλα πολύγωνα.

12. Έστω ότι A και B είναι δύο μη κενά σύνολα αριθμών τέτοια ώστε $x \leq y$ για κάθε x στο A και κάθε y στο B.

(α) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq y$ για κάθε y στο B.

(β) Αποδείξτε ότι $\sup A \leq \inf B$.

13. Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα αριθμών που είναι άνω φραγμένα, και ας συμβολίσουμε με $A + B$ το σύνολο όλων των αριθμών $x + y$ με x στο A και

y στο B. Αποδείξτε ότι $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. Υπόδειξη: Η ανισότητα $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$ είναι εύκολη. Γιατί; Για να αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B) + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$· ξεκινήστε διαλέγοντας x στο A και y στο B με $\sup A - x < \varepsilon/2$ και $\sup B - y < \varepsilon/2$.

ΣΧΗΜΑ 8

14. (α) Θεωρούμε μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων

$$I_1 = [a_1, b_1],\ I_2 = [a_2, b_2],\ \ldots$$

Έστω ότι $a_n \leq a_{n+1}$ και $b_{n+1} \leq b_n$ για κάθε n (Σχήμα 8). Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα σημείο x που ανήκει σε κάθε I_n.

(β) Αποδείξτε ότι αυτό το συμπέρασμα δεν ισχύει αν πάρουμε ανοικτά διαστήματα αντί για κλειστά.

Το απλό αποτέλεσμα του Προβλήματος 14(α) λέγεται «Θεώρημα των Κιβωτισμένων Διαστημάτων». Μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να δώσουμε εναλλακτικές αποδείξεις των Θεωρημάτων 1 και 2. Οι συλλογισμοί που χρειάζονται, και που περιγράφονται στα επόμενα δύο προβλήματα, μας δίνουν μια ιδέα μιας γενικής μεθόδου που λέγεται «επιχείρημα της διχοτόμησης».

∗**15.** Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a) < 0 < f(b)$. Τότε, ή $f((a + b)/2) = 0$, ή η f έχει διαφορετικά πρόσημα στα άκρα του διαστήματος $[a, (a + b)/2]$, ή η f έχει διαφορετικά πρόσημα στα άκρα του $[(a + b)/2, b]$. Γιατί; Αν $f((a+b)/2) \neq 0$, έστω I_1 το διαστήματα στο οποίο η f αλλάζει πρόσημο. Τώρα διχοτομούμε το I_1. Ή η f είναι 0 στο μέσον, ή η f αλλάζει πρόσημο σε ένα από τα δύο διαστήματα. Έστω I_2 αυτό το διάστημα. Συνεχίστε με αυτόν τον τρόπο, ορίζοντας το I_n για κάθε n (εκτός αν η f είναι 0 σε κάποιο μέσον). Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα των Κιβωτισμένων Διαστημάτων για να βρείτε ένα σημείο x στο οποίο $f(x) = 0$.

∗**16.** Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ αλλά όχι φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε η f δεν θα ήταν φραγμένη είτε στο $[a, (a + b)/2]$ είτε στο $[(a + b)/2, b]$. Γιατί; Έστω I_1 ένα από αυτά τα διαστήματα στο οποίο η f δεν είναι φραγμένη. Συνεχίστε όπως στο Πρόβλημα 15 για να καταλήξετε σε άτοπο.

17. (α) Έστω $A = \{x : x < \alpha\}$. Αποδείξτε τα ακόλουθα (όλα είναι εύκολα):

(i) Αν το x ανήκει στο A και $y < x$, τότε το y ανήκει στο A.

(ii) $A \neq \emptyset$.

(iii) $A \neq \mathbf{R}$.

(iv) Αν το x ανήκει στο A, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός x' στο A τέτοιος ώστε $x < x'$.

(β) Έστω, αντίστροφα, ότι το A ικανοποιεί τα (i)-(iv). Αποδείξτε ότι $A = \{x : x < \sup A\}$.

∗**18.** Ένας αριθμός x λέγεται **σχεδόν άνω φράγμα** του A αν υπάρχουν πεπερασμένοι μόνο το πλήθος αριθμοί y στο A με $y \geq x$. Ένα **σχεδόν κάτω φράγμα** ορίζεται όμοια.

(α) Βρείτε όλα τα σχεδόν άνω και τα σχεδόν κάτω φράγματα των συνόλων του Προβλήματος 1.

(β) Έστω ότι A είναι ένα φραγμένο άπειρο σύνολο. Αποδείξτε ότι το σύνολο B όλων των σχεδόν άνω φραγμάτων του A είναι μη κενό, και κάτω φραγμένο.

(γ) Από το μέρος (β) έπεται ότι το $\inf B$ υπάρχει· αυτός ο αριθμός λέγεται το **άνω όριο** του A, και συμβολίζεται με $\overline{\lim}\, A$ ή $\limsup A$ (limit superior). Βρείτε το $\overline{\lim}\, A$ για κάθε σύνολο A στο Πρόβλημα 1.

(δ) Ορίστε το $\underline{\lim}\, A$, και βρείτε το για κάθε A στο Πρόβλημα 1.

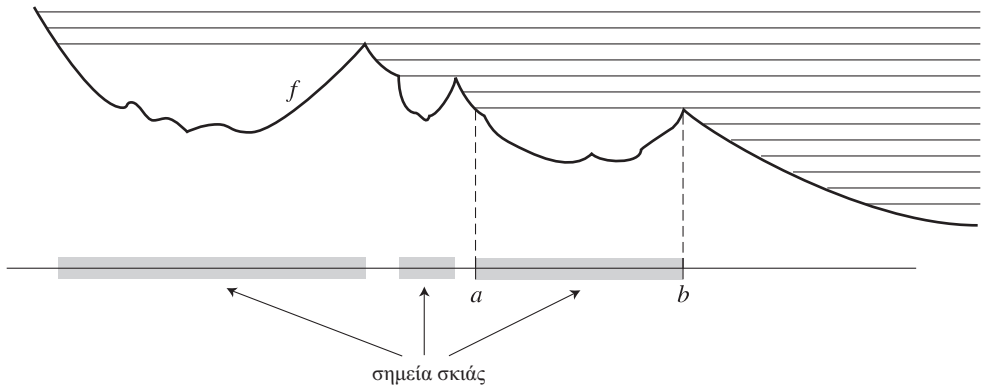
∗**19.** Αν A είναι ένα άπειρο φραγμένο σύνολο αποδείξτε ότι

(α) $\underline{\lim}\, A \leq \overline{\lim}\, A$.

(β) $\overline{\lim}\, A \leq \sup A$.

(γ) Αν $\overline{\lim}\, A < \sup A$, τότε το A περιέχει ένα μέγιστο στοιχείο.

(δ) Τα ανάλογα των (β) και (γ) για το $\underline{\lim}$.



ΣΧΗΜΑ 9

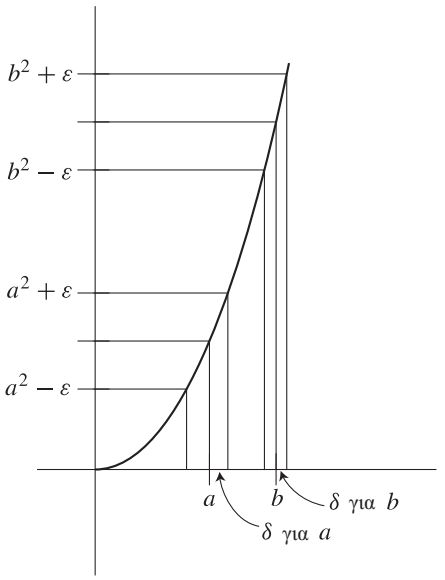
20. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbf{R}$. Ένα σημείο x λέγεται **σημείο σκιάς** της f αν υπάρχει ένας αριθμός $y > x$ με $f(y) > f(x)$. Η εξήγηση για αυτήν την ορολογία φαίνεται στο Σχήμα 9· οι παράλληλες γραμμές είναι οι ακτίνες του ήλιου που ανατέλλει (κοιτάξτε προς τον βορρά). Ας υποθέσουμε ότι όλα τα σημεία του (a, b) είναι σημεία σκιάς, αλλά ότι το a και το b δεν είναι σημεία σκιάς. Προφανώς, $f(a) \geq f(b)$.

(α) Έστω ότι $f(a) > f(b)$. Δείξετε ότι το σημείο στο οποίο η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $[a, b]$ πρέπει να είναι το a.

(β) Στη συνέχεια δείξτε ότι αυτό οδηγεί σε αντίφαση, έτσι ώστε τελικά να πρέπει να ισχύει $f(a) = f(b)$.

Αυτό το μικρό αποτέλεσμα, γνωστό ως Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου, είναι πολύ λειτουργικό στην απόδειξη διαφόρων όμορφων θεωρημάτων που δεν εμφανίζονται σε αυτό το βιβλίο· βλ. σελίδα 409.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ



ΣΧΗΜΑ 1

Τώρα που φτάσαμε στο τέλος των «θεμελίων», ίσως είναι η κατάλληλη στιγμή να παρεμβάλλουμε μία ακόμη θεμελιώδη έννοια. Η έννοια αυτή δεν είναι σε μεγάλη χρήση στο υπόλοιπο του βιβλίου, αλλά μπορεί να βοηθήσει τη διευκρίνιση πολλών σημείων αργότερα.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι συνεχής στο a για κάθε a. Με άλλα λόγια,

> αν ο a είναι τυχαίος αριθμός, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για όλα τα x, αν $|x-a| < \delta$, τότε $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

Φυσικά, το δ εξαρτάται από το ε. Αλλά το δ *εξαρτάται επίσης* και από το a —το δ που κάνει για το a μπορεί να μην κάνει για το b (Σχήμα 1). Πράγματι, είναι φανερό ότι αν δοθεί το $\varepsilon > 0$, δεν υπάρχει κανένα $\delta > 0$ που να κάνει για όλα τα a, ή ακόμα για όλα τα θετικά a. Όντως, ο αριθμός $a + \delta/2$ σίγουρα ικανοποιεί την $|x-a| < \delta$, αλλά αν $a > 0$, τότε

$$\left| \left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2 - a^2 \right| = \left| a\delta + \frac{\delta^2}{4} \right| \geq a\delta,$$

και αυτό δεν θα είναι $< \varepsilon$ όταν $a > \varepsilon/\delta$. (Αυτός είναι ένας, κατά τεκμήριο συγκεχυμένος, υπολογιστικός τρόπος να πούμε ότι η f μεγαλώνει όλο και πιο γρήγορα!).

Από την άλλη, για κάθε $\varepsilon > 0$ *θα* υπάρχει ένα $\delta > 0$ το οποίο να κάνει για όλα τα a σε κάθε διάστημα $[-N, N]$. Στην πράξη, το δ που κάνει για N ή $-N$ θα κάνει επίσης για οποιαδήποτε άλλη τιμή στο διάστημα.

Ως τελευταίο παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = \sin 1/x$, ή τη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση εμφανίζεται στο Σχήμα 18 της σελίδας 57. Είναι εύκολο να δούμε ότι, όσο έχουμε $\varepsilon < 1$, δεν θα υπάρχει ούτε ένα $\delta > 0$, το οποίο να κάνει για αυτές τις συναρτήσεις σε όλα τα σημεία a του ανοικτού διαστήματος $(0, 1)$.

Αυτά τα παραδείγματα περιγράφουν σημαντικές διαφορές στη συμπεριφορά διαφόρων συνεχών συναρτήσεων πάνω σε συγκεκριμένα διαστήματα, και υπάρχει ένας ειδικός όρος που σηματοδοτεί αυτήν τη διάκριση.

ΟΡΙΣΜΟΣ Η συνάρτηση f είναι **ομοιόμορφα συνεχής σε ένα διάστημα** A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε, για όλα τα x και y στο A,

$$\text{αν } |x-y| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

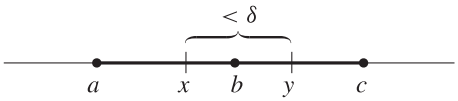
Είδαμε ότι μια συνάρτηση μπορεί να είναι συνεχής σε όλη την ευθεία, ή σε ένα ανοικτό διάστημα, χωρίς να είναι ομοιόμορφα συνεχής εκεί. Από την άλλη, η συνάρτηση $f(x) = x^2$ προέκυψε ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα. Αυτό δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει πολύ —είναι το ίδιο πράγμα που εμφανίζεται όταν ρωτάμε αν μια συνάρτηση είναι φραγμένη πάνω σε ένα διάστημα— και θα έπρεπε να οδηγηθούμε στην υποψία ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα είναι επίσης και ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. Για να το αποδείξουμε, πρέπει πρώτα να αντιμετωπίσουμε ένα λεπτό σημείο.

Έστω πως έχουμε δύο διαστήματα $[a, b]$ και $[b, c]$ με κοινό το άκρο b, και μια συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, c]$. Έστω $\varepsilon > 0$ και ας υποθέσουμε ότι οι εξής δύο προτάσεις ισχύουν:

(i) αν τα x και y είναι στο $[a, b]$ και $|x-y| < \delta_1$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$,

(ii) αν τα x και y είναι στο $[b, c]$ και $|x-y| < \delta_2$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ όποτε τα x και y είναι σημεία του $[a, c]$ με $|x-y| < \delta$. Το πρώτο πράγμα που μας έρχεται στο μυαλό είναι να διαλέξουμε το δ ως το μικρότερο των δ_1 και δ_2. Αλλά εύκολα βλέπουμε



ΣΧΗΜΑ 2

τι μπορεί να πάει στραβά (Σχήμα 2): Μπορεί να έχουμε το x στο $[a, b]$ και το y στο $[b, c]$ και τότε ούτε το (i) ούτε το (ii) μας λένε τίποτε για το $|f(x) - f(y)|$. Έτσι, πρέπει να είμαστε λίγο πιο πονηροί, και να χρησιμοποιήσουμε επίσης τη συνέχεια της f στο b.

ΛΗΜΜΑ Έστω $a < b < c$ και f συνεχής στο διάστημα $[a, c]$. Έστω $\varepsilon > 0$, και υποθέτουμε ότι οι προτάσεις (i) και (ii) ισχύουν. Τότε υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε,

$$\text{αν τα } x \text{ και } y \text{ είναι στο } [a, c] \text{ και } |x - y| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Επειδή η f είναι συνεχής στο b, υπάρχει ένα $\delta_3 > 0$, τέτοιο ώστε

$$\text{αν } |x - b| < \delta_3, \text{ τότε } |f(x) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\text{(iii)} \quad \text{αν } |x - b| < \delta_3 \text{ και } |y - b| < \delta_3, \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Διαλέγουμε για δ το μικρότερο από τα δ_1, δ_2 και δ_3. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το δ είναι το κατάλληλο. Πράγματι, υποθέτουμε ότι τα x, y είναι οποιαδήποτε δύο σημεία του $[a, c]$ με $|x - y| < \delta$. Αν τα x και y είναι και τα δύο στο $[a, b]$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ λόγω της (i). Αν τα x και y είναι και τα δύο στο $[b, c]$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, λόγω της (ii). Η μόνη άλλη δυνατότητα είναι ότι

$$x < b < y \qquad \text{ή} \qquad y < b < x.$$

Και στις δύο περιπτώσεις, αφού υποθέσαμε ότι $|x - y| < \delta$, έχουμε επίσης $|x - b| < \delta$ και $|y - b| < \delta$. Άρα $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, λόγω της (iii). ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα κάνουμε το συνηθισμένο τέχνασμα, πρέπει όμως να είμαστε λίγο πιο προσεκτικοί στον μηχανισμό της απόδειξης. Για $\varepsilon > 0$ θα λέμε ότι η f είναι *ε-καλή* στο $[a, b]$ αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ έτσι ώστε, για όλα τα y και z στο $[a, b]$,

$$\text{αν } |y - z| < \delta, \text{ τότε } |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Τότε, προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, b]$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Θεωρήστε ένα οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$. Έστω

$$A = \{x : a \le x \le b \text{ και η } f \text{ είναι } \varepsilon\text{-καλή στο } [a, x]\}.$$

Τότε, $A \neq \emptyset$ (αφού το a είναι στο A), και το A είναι άνω φραγμένο (από το b), οπότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα λ. Στην πραγματικότητα θα έπρεπε να γράψουμε λ_ε, μια και το A και το λ μπορεί να εξαρτώνται από το ε. Αλλά δεν θα το κάνουμε, αφού σκοπεύουμε να αποδείξουμε ότι $\lambda = b$, ανεξάρτητα από το ποιο είναι το ε.

Ας υποθέσουμε ότι είχαμε $\lambda < b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο λ, υπάρχει κάποιο $\delta_0 > 0$, τέτοιο ώστε, αν $|y - \lambda| < \delta_0$, τότε $|f(y) - f(\lambda)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς, αν $|y - \lambda| < \delta_0$ και $|z - \lambda| < \delta_0$, τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Έτσι, η f είναι σίγουρα ε-καλή στο διάστημα $[\lambda - \delta_0, \lambda + \delta_0]$. Από την άλλη, αφού το λ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, είναι επίσης φανερό ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, \lambda - \delta_0]$. Επομένως, από το Λήμμα προκύπτει ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, \lambda + \delta_0]$, άρα το $\lambda + \delta_0$ είναι στο A, σε αντίφαση με το γεγονός ότι το λ είναι ένα άνω φράγμα.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη μένει ακόμη να δείξουμε ότι το $\lambda = b$ είναι πράγματι στο A. Ο συλλογισμός και σε αυτήν την περίπτωση είναι στην πράξη ο ίδιος: Αφού η f είναι συνεχής στο b, υπάρχει κάποιο $\delta_0 > 0$, έτσι ώστε, αν $b - \delta_0 < y < b$, τότε $|f(y) - f(b)| < \varepsilon/2$. Επομένως, η f είναι ε-καλή στο $[b - \delta_0, b]$. Αλλά η f είναι

επίσης ε-καλή στο $[a, b - \delta_0]$, έτσι ώστε από το Λήμμα να έχουμε ότι η f είναι ε-καλή στο $[a, b]$. ∎

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Για ποιες από τις ακόλουθες τιμές του λ είναι η συνάρτηση $f(x) = x^\lambda$ ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$: $\lambda = 1/3, 1/2, 2, 3$;

(β) Βρείτε μια συνάρτηση f που να είναι συνεχής και φραγμένη στο $(0, 1]$, αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1]$.

(γ) Βρείτε μια συνάρτηση f που να είναι συνεχής και φραγμένη στο $[0, \infty)$ αλλά να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$.

2. (α) Αποδείξτε ότι, αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο A, τότε είναι και η $f + g$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες στο g, τότε η fg είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

(γ) Δείξτε ότι αυτό το συμπέρασμα δεν ισχύει αν μία από αυτές δεν είναι φραγμένη.

(δ) Υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο B, και ότι η $f(x)$ είναι στο B για όλα τα x στο A. Αποδείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

3. Χρησιμοποιήστε ένα «επιχείρημα διχοτόμησης» (σελίδα 128) για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 1.

4. Συνάγετε το Θεώρημα 7-2 ως συνέπεια του Θεωρήματος 1.

ΜΕΡΟΣ 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Στα 1604, στο απόγειο της
επιστημονικής του καριέρας, ο Γαλιλαίος
ισχυρίστηκε ότι για μια ευθύγραμμη
κίνηση στην οποία η ταχύτητα αυξάνει
ανάλογα με την απόσταση που έχει
διανυθεί, ο νόμος της κίνησης θα έπρεπε
να είναι ο εξής ($x = ct^2$),
κάτι που είχε ανακαλύψει
μελετώντας σώματα που πέφτουν.
Ανάμεσα στα 1695 και 1700
ούτε ένα από τα μηνιαία τεύχη
των Acta Eruditorum της Λειψίας
δεν εκδόθηκε χωρίς άρθρα του Leibniz,
των αδελφών Bernoulli
ή του Marquis de l'Hôpital, που μελετούσαν,
με έναν συμβολισμό ελάχιστα διαφορετικό
από αυτόν που χρησιμοποιούμε σήμερα,
τα πιο ποικίλα προβλήματα του
διαφορικού λογισμού, του ολοκληρωτικού λογισμού
και του λογισμού μεταβολών.
Έτσι, σε διάστημα ενός σχεδόν
αιώνα, ο Απειροστικός Λογισμός ή
Λογισμός, όπως τον λέμε τώρα,
το κατ' εξοχήν υπολογιστικό εργαλείο,
είχε σφυρηλατηθεί·
και τρεις σχεδόν αιώνες συνεχούς
χρήσης δεν έχουν ξεθωριάσει εντελώς
αυτό το ασύγκριτο όργανο.

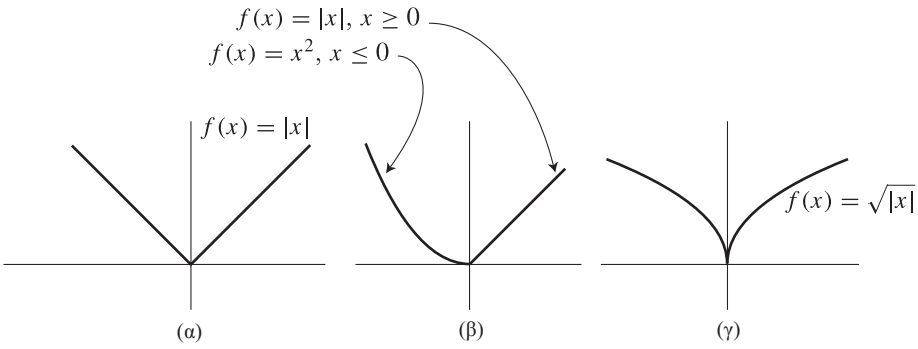
NICHOLAS BOURBAKI

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

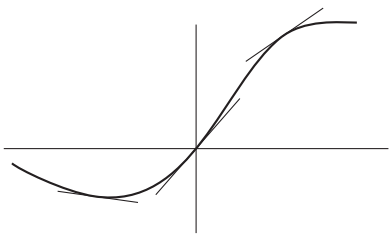
Η παράγωγος μιας συνάρτησης είναι η πρώτη από τις δύο κύριες έννοιες αυτού του μέρους. Μαζί με το ολοκλήρωμα, αποτελούν την πηγή από όπου αντλεί την ιδιαίτερη γοητεία του ο Απειροστικός Λογισμός. Όσο και αν είναι αλήθεια ότι η έννοια της συνάρτησης είναι θεμελιώδης, ότι είναι αδύνατο να εργαστεί κανείς χωρίς τα όρια και τη συνέχεια, και ότι τα ελάχιστα άνω φράγματα είναι απαραίτητα, όσα έχουμε κάνει έως τώρα ήταν η προπαρασκευή —και αν ήταν αρκετή, αυτό το τμήμα θα είναι ευκολότερο από τα προηγούμενα— για τις συναρπαστικές ιδέες που θα ακολουθήσουν, δηλαδή τις σημαντικές έννοιες που χαρακτηρίζουν τον Απειροστικό Λογισμό.

Ίσως (μερικοί θα έλεγαν «ασφαλώς») το ενδιαφέρον των ιδεών που εισάγονται σε αυτό το κεφάλαιο να οφείλεται στη στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες και κάποιες ιδέες από τη Φυσική. Πολλοί ορισμοί, ακόμα και μερικά θεωρήματα, μπορούν να περιγραφούν με τη βοήθεια φυσικών προβλημάτων, με έναν συχνά αποκαλυπτικό τρόπο. Πράγματι, οι απαιτήσεις της Φυσικής ήταν η αρχική πηγή έμπνευσης για αυτές τις θεμελιώδεις έννοιες του Απειροστικού Λογισμού, και θα αναφέρουμε συχνά τις φυσικές ερμηνείες. Θα ορίζουμε όμως πάντα τις έννοιες πρώτα σε αυστηρή μαθηματική μορφή, και θα μελετάμε τη σημασία τους όσον αφορά στα μαθηματικά προβλήματα.

Το σύνολο όλων των συναρτήσεων παρουσιάζει τέτοια ποικιλία που δεν υπάρχει σχεδόν καμία ελπίδα να ανακαλύψουμε κάποιες ενδιαφέρουσες γενικές ιδιότητες που να τις αφορούν όλες. Επειδή οι συνεχείς συναρτήσεις απαρτίζουν μια αρκετά περιορισμένη κλάση, θα μπορούσε να περιμένει κανείς κάποια μη τετριμμένα θεωρήματα σχετικά με αυτές, και η ξαφνική αφθονία θεωρημάτων μετά το Κεφάλαιο 6 δείχνει ότι αυτή η προσδοκία ήταν δικαιολογημένη. Αλλά τα πιο ενδιαφέροντα και ισχυρά αποτελέσματα για τις συναρτήσεις θα έρθουν μόνο αν περιορίσουμε την προσοχή μας ακόμα περισσότερο σε συναρτήσεις που έχουν ένα λόγο παραπάνω να λέγονται «λογικές», και που συμπεριφέρονται ακόμα καλύτερα από τις περισσότερες συνεχείς συναρτήσεις.

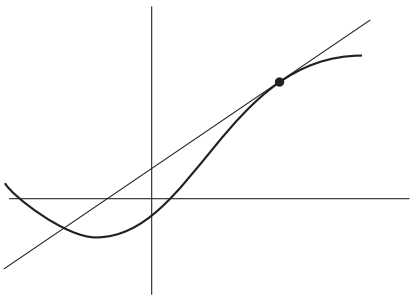


ΣΧΗΜΑ 1

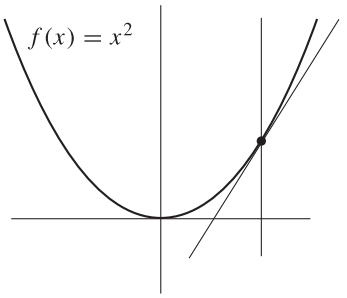


ΣΧΗΜΑ 2

Το Σχήμα 1 παρουσιάζει είδη κακής συμπεριφοράς που μπορούν να εμφανίσουν οι συνεχείς συναρτήσεις. Οι γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων «λυγίζουν» στο $(0, 0)$, σε αντίθεση με τη γραφική παράσταση του Σχήματος 2, όπου είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε μια «εφαπτομένη» σε κάθε σημείο. Χρησιμοποιήσαμε τα εισαγωγικά για να μη νομισθεί ότι έχουμε ορίσει τι είναι «λύγισμα» και τι «εφαπτομένη», αν και υπονοούμε ότι η γραφική παράσταση «λυγίζει» σε ένα σημείο όπου δεν μπορούμε να φέρουμε

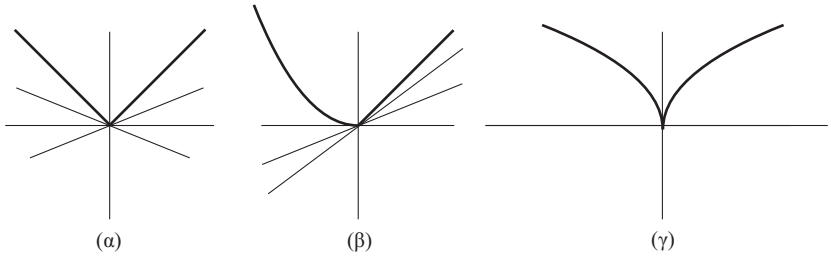


ΣΧΗΜΑ 3



ΣΧΗΜΑ 4

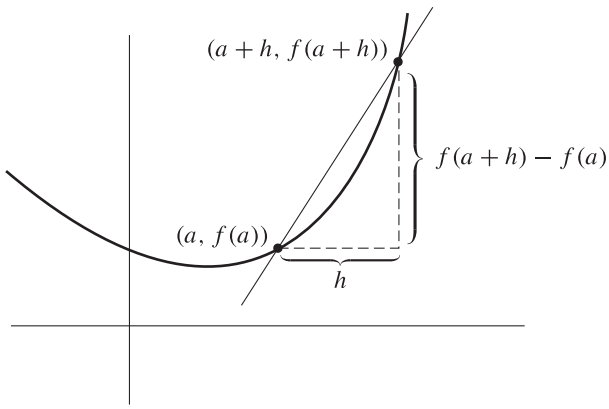
«εφαπτομένη». Ίσως έχετε ήδη παρατηρήσει ότι η εφαπτομένη δεν μπορεί να οριστεί ως ευθεία που τέμνει τη γραφική παράσταση μόνο μία φορά —ένας τέτοιος ορισμός θα ήταν ταυτόχρονα πολύ περιοριστικός και πολύ ανεκτικός. Με έναν τέτοιον ορισμό, η ευθεία που δείχνουμε στο Σχήμα 3 δεν θα ήταν εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στην ίδια εικόνα, ενώ η παραβολή θα είχε δύο εφαπτόμενες σε κάθε σημείο (Σχήμα 4), και οι τρεις συναρτήσεις στο Σχήμα 5 θα είχαν περισσότερες από μία εφαπτόμενες στα σημεία όπου «λυγίζουν».



ΣΧΗΜΑ 5

Μια προσέγγιση στον ορισμό της εφαπτομένης που υπόσχεται περισσότερα πράγματα ξεκινά με «τέμνουσες» και χρησιμοποιεί την έννοια του ορίου. Αν $h \neq 0$, τότε τα δύο διακεκριμένα σημεία $(a, f(a))$ και $(a + h, f(a + h))$ καθορίζουν, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6, μια ευθεία με κλίση

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



ΣΧΗΜΑ 6

Όπως δείχνει το Σχήμα 7, η «εφαπτομένη» στο $(a, f(a))$ μοιάζει να είναι το όριο, με κάποια έννοια, αυτών των «τεμνουσών», καθώς το h τείνει στο 0. Δεν έχουμε μιλήσει ποτέ έως τώρα για το «όριο» ευθειών, αλλά *μπορούμε* να μιλήσουμε για το όριο των κλίσεών τους: η κλίση της εφαπτομένης στο $(a, f(a))$ θα πρέπει να είναι ίση με

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

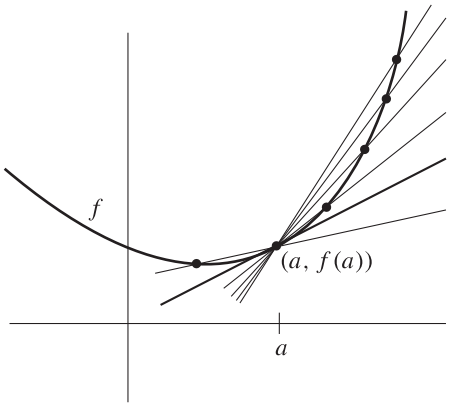
Είμαστε τώρα έτοιμοι για έναν ορισμό και κάποια σχόλια.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο a** αν το

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ υπάρχει.}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το όριο συμβολίζεται με $\boldsymbol{f'(a)}$ και λέγεται η **παράγωγος της f στο a**. (Λέμε ακόμα ότι η f είναι **παραγωγίσιμη**, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a για κάθε a στο πεδίο ορισμού της f.)



ΣΧΗΜΑ 7

Το πρώτο σχόλιο πάνω στον ορισμό μας είναι στην πραγματικότητα μια προσθήκη: ορίζουμε την **εφαπτομένη** στη γραφική παράσταση της f στο $(a, f(a))$ να είναι η ευθεία που περνά από το $(a, f(a))$ και έχει κλίση $f'(a)$. Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο $(a, f(a))$ ορίζεται μόνο αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a.

Το δεύτερο σχόλιο αναφέρεται στον συμβολισμό. Το σύμβολο $f'(a)$ θυμίζει βέβαια συνάρτηση. Πραγματικά, για κάθε συνάρτηση f, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{f'}$ τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των αριθμών a για τους οποίους η f είναι παραγωγίσιμη στο a, και τιμή σε κάθε τέτοιον αριθμό a το

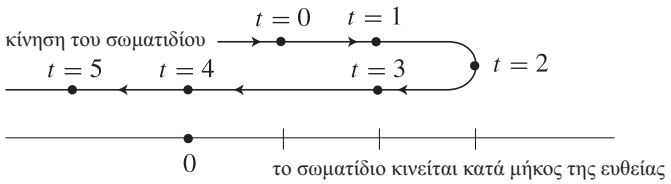
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

(Για να γίνουμε πολύ ακριβείς: η f' είναι το σύνολο των ζευγών

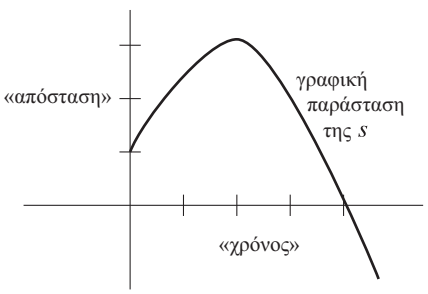
$$\left(a, \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

για τα οποία υπάρχει το $\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)]/h$.) Η συνάρτηση f' λέγεται η **παράγωγος** της f.

Το τρίτο μας σχόλιο, κατά τι μακρύτερο από τα προηγούμενα δύο, αναφέρεται στη φυσική ερμηνεία της παραγώγου. Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος μιας ευθείας (Σχήμα 8(α)), πάνω στην οποία έχουμε επιλέξει ένα «αρχικό» σημείο O, και μια κατεύθυνση στην οποία οι αποστάσεις από το O θα γράφονται ως θετικοί αριθμοί, ενώ η απόσταση από το O ενός σημείου στην άλλη κατεύθυνση θα γράφεται ως αρνητικός αριθμός. Ας συμβολίσουμε με $s(t)$ την απόσταση του σώματος από το O, τη χρονική στιγμή t. Διαλέξαμε επίτηδες τον συμβολισμό $s(t)$· αφού σε κάθε αριθμό t αντιστοιχεί μια απόσταση $s(t)$, η φυσική πραγματικότητα μας εφοδιάζει αυτομάτως με κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση s. Η γραφική παράσταση της s εμφανίζει την απόσταση του σώματος από το O, στον κατακόρυφο άξονα, συναρτήσει του χρόνου στον οποίο διατρέχει τον οριζόντιο άξονα (Σχήμα 8(β)).



ΣΧΗΜΑ 8(α)



ΣΧΗΜΑ 8(β)

Το πηλίκο

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

έχει μια φυσική ερμηνεία. Είναι η «μέση ταχύτητα» του σώματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ a και $a+h$. Για κάθε συγκεκριμένο a, αυτή η μέση ταχύτητα εξαρτάται βέβαια από το h. Από την άλλη πλευρά, το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

εξαρτάται μόνο από το a (καθώς και από τη συγκεκριμένη συνάρτηση s) και υπάρχουν σημαντικοί, από πλευράς Φυσικής, λόγοι για να εξετάσουμε αυτό το όριο. Θα θέλαμε να μιλάμε για «την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή a», αλλά ο συνηθισμένος ορισμός της ταχύτητας είναι στην πραγματικότητα ένας ορισμός μέσης ταχύτητας· ο μόνος εύλογος ορισμός της «ταχύτητας τη στιγμή a» (της λεγόμενης «στιγμιαίας ταχύτητας») είναι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

Έτσι, *ορίζουμε* ως (**στιγμιαία**) **ταχύτητα** του σώματος τη στιγμή a, την παράγωγο $s'(a)$. Παρατηρήστε ότι το $s'(a)$ θα μπορούσε κάλλιστα να είναι αρνητικό.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα είναι μια θεωρητική έννοια, μια αφαίρεση που δεν αντιστοιχεί ακριβώς σε κάποια παρατηρήσιμη ποσότητα. Αν και θα ήταν άδικο να υποστηρίξουμε ότι η στιγμιαία ταχύτητα δεν έχει καμία σχέση με τη μέση ταχύτητα, πρέπει να θυμόμαστε ότι η $s'(t)$ δεν είναι

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

για κάποιο συγκεκριμένο h, αλλά απλώς το όριο αυτών των μέσων ταχυτήτων καθώς το h τείνει στο 0. Έτσι, όταν μετρώνται ταχύτητες στη Φυσική, αυτό που μετρά στην πραγματικότητα ένας φυσικός είναι μια μέση ταχύτητα πάνω σε ένα (πολύ μικρό) χρονικό διάστημα· μια τέτοια διαδικασία δεν αναμένεται να δώσει ακριβές αποτέλεσμα, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι είναι ελαττωματική, διότιοι φυσικές μετρήσεις έτσι και αλλιώς δεν μπορούν ποτέ να είναι ακριβείς.

Η ταχύτητα ενός σώματος λέγεται συχνά και «ρυθμός μεταβολής της θέσης του». Αυτή η έννοια της παραγώγου, ως ρυθμός δηλαδή μεταβολής, εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση όπου κάποιο φυσικό μέγεθος μεταβάλλεται με τον χρόνο. Για παράδειγμα, ως «ρυθμό μεταβολής της μάζας» ενός αντικειμένου που μεγαλώνει, θεωρούμε την παράγωγο της συνάρτησης m, όπου $m(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t.

Για να εξοικειωθούμε με τους βασικούς ορισμούς αυτού του κεφαλαίου, θα αφιερώσουμε αρκετό χρόνο εξετάζοντας τις παραγώγους συγκεκριμένων συναρτήσεων. Πριν να αποδείξουμε τα σπουδαία θεωρητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου 11, θέλουμε να είναι κατανοητό το πώς μοιάζει η παράγωγος μιας συνάρτησης. Το επόμενο κεφάλαιο αφιερώνεται αποκλειστικά σε μια πλευρά αυτού του προβλήματος —στον υπολογισμό της παραγώγου πολύπλοκων συναρτήσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε βάρος περισσότερο στις έννοιες παρά στους υπολογισμούς, μελετώντας μερικά απλά παραδείγματα. Το απλούστερο από όλα είναι μια σταθερή συνάρτηση, $f(x) = c$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο a για κάθε αριθμό a, και $f'(a) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f έχει πάντα κλίση 0, άρα η εφαπτομένη πάντα συμπίπτει με τη γραφική παράσταση.

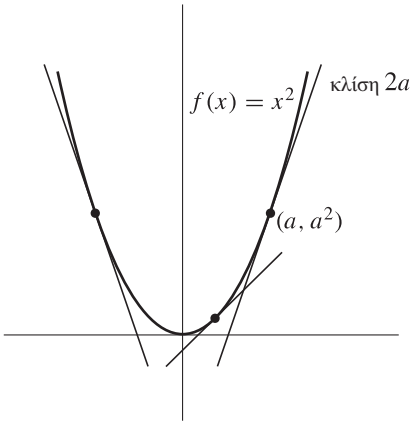
Οι σταθερές συναρτήσεις δεν είναι οι μόνες για τις οποίες η γραφική παράσταση συμπίπτει με την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο —αυτό συμβαίνει για κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = cx + d$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c(a+h)+d-[ca+d]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{ch}{h} = c\cdot \end{aligned}$$

η κλίση της εφαπτομένης είναι c, η ίδια με την κλίση της γραφικής παράστασης της f.

Η κατάσταση είναι διαφορετική αν $f(x) = x^2$. Τότε,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2a + h) \\ &= 2a. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 9

Μερικές από τις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της f φαίνονται στο Σχήμα 9. Σε αυτήν την εικόνα κάθε εφαπτομένη φαίνεται να τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα μόνο σημείο, και αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε πολύ εύκολα: Αφού η εφαπτομένη στο (a, a^2) έχει κλίση $2a$, είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\begin{aligned} g(x) &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2. \end{aligned}$$

Τώρα, αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα σημείο $(x, f(x)) = (x, g(x))$, τότε

$$\begin{aligned} & x^2 = 2ax - a^2 \\ \text{ή} \quad & x^2 - 2ax + a^2 = 0 \cdot \\ \text{άρα} \quad & (x-a)^2 = 0 \\ \text{ή} \quad & x = a. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, το (a, a^2) είναι το μοναδικό σημείο τομής.

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ μοιάζει να αποτελεί εξαίρεση από αυτήν την άποψη· συνήθως μια εφαπτομένη τέμνει τη γραφική παράσταση περισσότερο από μία φορές. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x) = x^3$. Σε αυτήν την περίπτωση

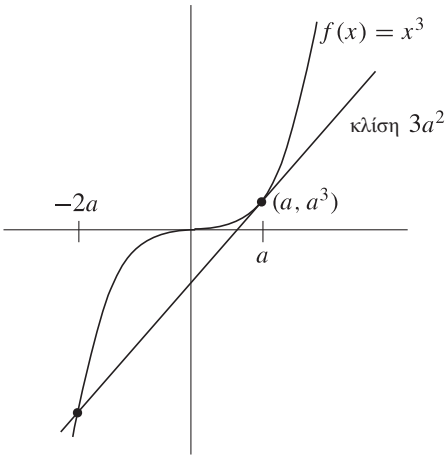
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3a^2 + 3ah + h^2) \\ &= 3a^2. \end{aligned}$$

Άρα, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (a, a^3) έχει κλίση $3a^2$. Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη είναι η γραφική παράσταση της

$$\begin{aligned} g(x) &= 3a^2(x-a) + a^3 \\ &= 3a^2x - 2a^3. \end{aligned}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται στο σημείο $(x, f(x)) = (x, g(x))$ όταν

$$\begin{aligned} & x^3 = 3a^2x - 2a^3 \\ \text{ή} \quad & x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 10

Αυτή η εξίσωση λύνεται εύκολα αν θυμηθούμε ότι μια λύση της πρέπει να είναι το $x = a$, άρα το $(x - a)$ πρέπει να είναι παράγοντας του αριστερού μέλους· τότε, ο άλλος παράγοντας μπορεί να βρεθεί με διαίρεση. Παίρνουμε

$$(x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0.$$

Τυχαίνει το $x - a$ να είναι παράγοντας και του $x^2 + ax - 2a^2$· τελικά παίρνουμε

$$(x - a)(x - a)(x + 2a) = 0.$$

Έτσι, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10, η εφαπτομένη στο (a, a^3) τέμνει τη γραφική παράσταση και στο σημείο $(-2a, -8a^3)$. Αυτά τα δύο σημεία είναι πάντα διαφορετικά, εκτός αν $a = 0$.

Έχουμε ήδη βρει την παράγωγο αρκετών συναρτήσεων για να παρουσιάσουμε τον κλασικό, και πολύ δημοφιλή ακόμα και σήμερα, συμβολισμό για τις παραγώγους. Για δοθείσα συνάρτηση f, η παράγωγος f' συμβολίζεται συχνά με

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Για παράδειγμα, το σύμβολο

$$\frac{dx^2}{dx}$$

συμβολίζει την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Είναι περιττό να πούμε ότι τα διάφορα σύμβολα στην παράσταση

$$\frac{df(x)}{dx}$$

δεν έχουν κάποια ανεξάρτητη σημασία το καθένα —τα d *δεν* είναι αριθμοί, *δεν μπορούν* να διαγραφούν, και αυτή καθ' αυτή η παράσταση *δεν* είναι το πηλίκο δύο άλλων αριθμών «$df(x)$» και «dx». Αυτός ο συμβολισμός οφείλεται στον Leibniz (που γενικά θεωρείται ότι συν-ανακάλυψε τον Απειροστικό Λογισμό μαζί με τον Newton, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον), και για συναισθηματικούς λόγους αναφέρεται ως ο συμβολισμός του Leibniz.* Αν και ο συμβολισμός $df(x)/dx$ μοιάζει πολύπλοκος, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ίσως είναι συντομότερος· στο κάτω-κάτω, το σύμβολο dx^2/dx είναι σαφώς συντομότερο από τη φράση «η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$».

Οι παρακάτω τύποι δίνουν, με τον συμβολισμό του Leibniz, τα αποτελέσματα στα οποία έχουμε καταλήξει έως τώρα:

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dx} &= 0,\\
\frac{d(ax + b)}{dx} &= a,\\
\frac{dx^2}{dx} &= 2x,\\
\frac{dx^3}{dx} &= 3x^2.
\end{aligned}$$

Αν και η σημασία αυτών των τύπων είναι αρκετά σαφής, η προσπάθεια για μια κατά λέξη ερμηνεία τους σκοντάφτει στην εύλογη αντίρρηση ότι μια εξίσωση δεν μπορεί να περιέχει μια συνάρτηση στη μια πλευρά και έναν αριθμό στην άλλη. Για παράδειγμα, αν θέλουμε η τρίτη εξίσωση να είναι σωστή, τότε ή το $df(x)/dx$ πρέπει να συμβολίζει τον αριθμό $f'(x)$, και όχι τη συνάρτηση f', ή, αλλιώς, το $2x$ πρέπει να συμβολίζει όχι έναν

*Ο Leibniz οδηγήθηκε σε αυτό το σύμβολο από τη διαισθητική του αντίληψη για την παράγωγο, την οποία θεωρούσε, όχι το όριο των πηλίκων $[f(x + h) - f(x)]/h$, αλλά την «τιμή» αυτού του πηλίκου όταν ο h είναι ένας «απειροστός» αριθμός. Αυτή η «απειροστή» ποσότητα συμβολιζόταν με dx και η αντίστοιχη «απειροστή» διαφορά $f(x + dx) - f(x)$ με $df(x)$. Αν και αυτή η άποψη είναι ασυμβίβαστη με τις ιδιότητες (I1)–(I13) των πραγματικών αριθμών, μερικοί άνθρωποι βρίσκουν αυτήν την έννοια της παραγώγου βολική.

αριθμό, αλλά τη συνάρτηση που η τιμή της στο x είναι $2x$. Είναι πραγματικά αδύνατο να ισχυριστεί κανείς ότι υπάρχει κάποια ένδειξη υπέρ της μιας ή της άλλης λύσης· στην πράξη, το $df(x)/dx$ μερικές φορές συμβολίζει την f' και μερικές φορές το $f'(x)$, ενώ το $2x$ μπορεί να σημαίνει είτε κάποιον αριθμό είτε μια συνάρτηση. Εξ αιτίας αυτής της ασάφειας, οι περισσότεροι συγγραφείς είναι απρόθυμοι να χρησιμοποιήσουν τον συμβολισμό $f'(a)$ για το

$$\frac{df(x)}{dx}(a)\cdot$$

αντί για αυτό, το $f'(a)$ συμβολίζεται συνήθως με το βάρβαρο, αλλά σαφές, σύμβολο

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}.$$

Πέρα από αυτές τις δυσκολίες, ο συμβολισμός του Leibniz εμπλέκεται σε μια ακόμα ασάφεια. Αν και ο συμβολισμός dx^2/dx είναι τελείως αποδεκτός, το σύμβολο $df(x)/dx$ αντικαθίσταται συχνά με το df/dx. Αυτό βέβαια, οδηγεί στην πρακτική τού να συγχέει κανείς μια συνάρτηση με την τιμή της στο x. Είναι τόσο ισχυρή αυτή η τάση, που πολλές φορές οι συναρτήσεις συνοδεύονται με μια φράση του τύπου: «θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^2$». Θα ακολουθήσουμε και εμείς καμιά φορά την κλασική πρακτική τού να επεκτείνουμε τη χρήση του y και ως όνομα συνάρτησης, αλλά θα είμαστε προσεκτικοί στη διάκριση μιας συνάρτησης από τις τιμές της —θα λέμε δηλαδή πάντοτε κάτι σαν «θεωρούμε τη συνάρτηση (που ορίζεται από την) $y(x) = x^2$.»

Ο συμβολισμός του Leibniz, παρά τις πολλές του ασάφειες, χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά στα παλαιότερα μαθηματικά κείμενα, και χρησιμοποιείται πολύ συχνά ακόμα και σήμερα. Οι πιο εμπαθείς αντίπαλοι του συμβολισμού του Leibniz παραδέχονται ότι θα χρησιμοποιείται για αρκετό καιρό ακόμα, ενώ οι πιο φλογεροί θαυμαστές του θα έλεγαν ότι θα ζει για πάντα, και ότι είναι ευχής έργον! Όπως και να έχει το πράγμα, ο συμβολισμός του Leibniz δεν μπορεί να αγνοηθεί εντελώς.

Η πολιτική που υιοθετούμε σε αυτό το βιβλίο είναι να αποκλείσουμε τον συμβολισμό του Leibniz από το κείμενο, αλλά να τον συμπεριλάβουμε στα Προβλήματα· αρκετά κεφάλαια περιέχουν μερικά (αμέσως αναγνωρίσιμα) προβλήματα που έχουν σχεδιαστεί ακριβώς για να τονίσουν τις ιδιοτροπίες του συμβολισμού του Leibniz. Όντας πεπεισμένοι ότι αυτά τα προβλήματα προσφέρουν αρκετή εξάσκηση σε αυτόν τον συμβολισμό, επιστρέφουμε στο κύριο έργο μας, να εξετάσουμε δηλαδή μερικά απλά παραδείγματα παραγώγων.

Οι λιγοστές συναρτήσεις που έχουμε εξετάσει έως τώρα ήταν όλες παραγωγίσιμες. Για να εκτιμήσουμε πλήρως τη σημασία της παραγώγου, είναι εξίσου σημαντικό να γνωρίζουμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων που *δεν* είναι παραγωγίσιμες. Οι προφανείς υποψήφιοι είναι οι τρεις συναρτήσεις που πρώτες συζητήθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, και απεικονίζονται στο Σχήμα 1· αν τελικά αποδειχθούν παραγωγίσιμες στο 0, κάτι θα έχει σίγουρα πάει στραβά.

Ας δούμε πρώτα την $f(x) = |x|$. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

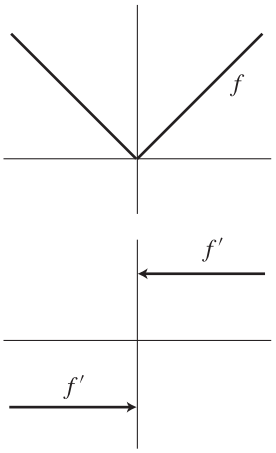
Τώρα $|h|/h = 1$ για $h > 0$, και $|h|/h = -1$ για $h < 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι το

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \text{ δεν υπάρχει.}$$

Στην πραγματικότητα,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1$$

$$\text{και} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$



ΣΧΗΜΑ 11

(Αυτά τα δύο όρια λέγονται μερικές φορές η **δεξιά παράγωγος** και η **αριστερή παράγωγος**, αντίστοιχα, της f στο 0.)

Αν $a \neq 0$, τότε η $f'(a)$ υπάρχει. Και μάλιστα,

$$f'(x) = 1 \qquad \text{αν } x > 0,$$
$$f'(x) = -1 \qquad \text{αν } x < 0.$$

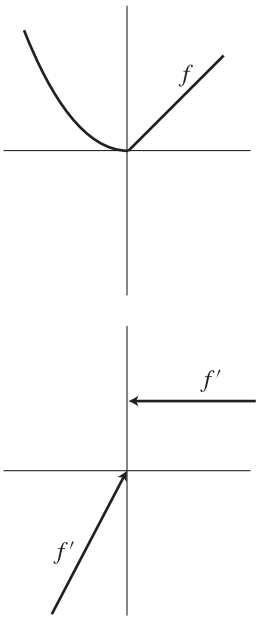
Η απόδειξη αυτού του πράγματος αφήνεται σε σας (είναι εύκολη αν θυμάστε την παράγωγο μιας γραμμικής συνάρτησης). Οι γραφικές παραστάσεις των f και f' φαίνονται στο Σχήμα 11.

Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

εμφανίζεται μια παρόμοια δυσκολία όσον αφορά στην $f'(0)$. Έχουμε

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h^2}{h} = h, & h < 0 \\ \dfrac{h}{h} = 1, & h > 0. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 12

Επομένως,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$
$$\text{αλλά} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$

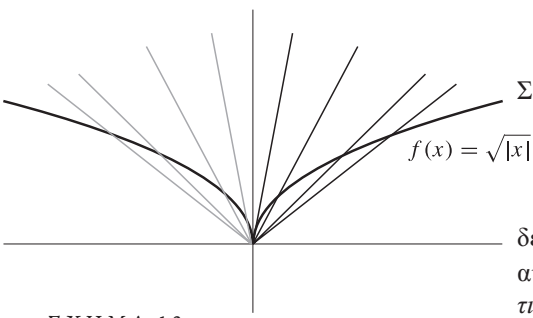
Άρα η $f'(0)$ δεν υπάρχει· η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Και πάλι, όμως, η $f'(x)$ υπάρχει για $x \neq 0$ —είναι εύκολο να δούμε ότι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f' φαίνονται στο Σχήμα 12.

Τα πράγματα είναι ακόμα χειρότερα με την $f(x) = \sqrt{|x|}$. Για αυτήν τη συνάρτηση

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}, & h > 0 \\ \dfrac{\sqrt{-h}}{h} = -\dfrac{1}{\sqrt{-h}}, & h < 0. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 13

Σε αυτήν την περίπτωση, το από δεξιά όριο

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

δεν υπάρχει· αντίθετα, το $1/\sqrt{h}$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το h τείνει στο 0. Και, ακόμα χειρότερα, το $-1/\sqrt{-h}$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο κατ' απόλυτη τιμή, αλλά *αρνητικό* (Σχήμα 13).

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$, αν και δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, συμπεριφέρεται τουλάχιστον κάπως καλύτερα από την προηγούμενη. Το πηλίκο

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{h}\right)^2}$$

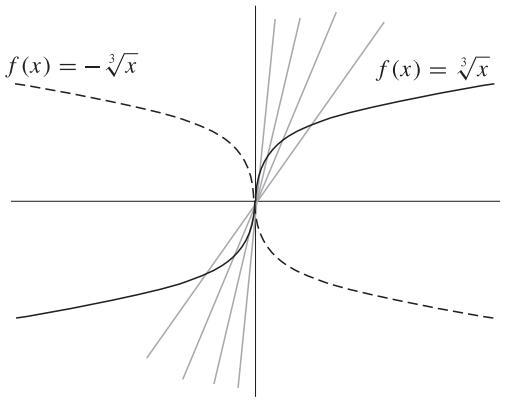
απλώς γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το h τείνει στο 0. Λέμε μερικές φορές ότι η f έχει «άπειρη» παράγωγο στο 0. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση

της f έχει μια «εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα» (Σχήμα 14). Φυσικά, η $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ έχει την ίδια γεωμετρική ιδιότητα, αλλά θα λέγαμε ότι η f έχει παράγωγο «αρνητικά άπειρη» στο 0.

Θυμηθείτε ότι η παραγωγισιμότητα υποτίθεται ότι είναι μια βελτίωση σε σχέση με την απλή συνέχεια. Αυτή η άποψη ενισχύεται από τα τόσα παραδείγματα συναρτήσεων που είναι συνεχείς αλλά όχι παραγωγίσιμες· μένει όμως ένα σημαντικό σημείο που πρέπει να αναφερθεί:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η f είναι συνεχής στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

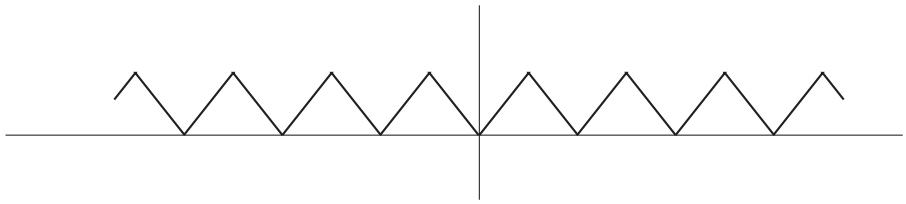


ΣΧΗΜΑ 14

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a)\cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

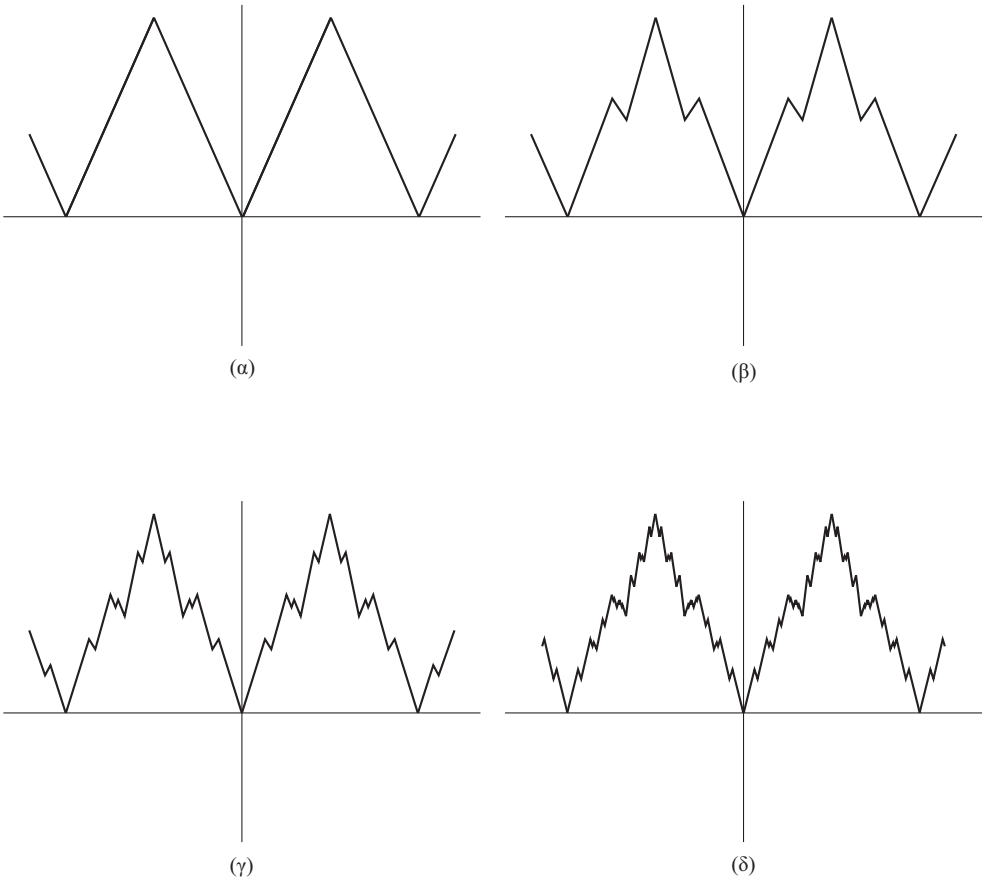
Όπως σημειώσαμε στο Κεφάλαιο 5, η ισότητα $\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$· άρα η f είναι συνεχής στο a. ∎

Είναι πολύ σημαντικό να θυμάται κανείς το Θεώρημα 1, και εξίσου σημαντικό να θυμάται ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής, αλλά μια συνεχής συνάρτηση μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη (έχετε στο νου σας τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, και δεν θα ξεχάσετε ποτέ ποια από τις δύο προτάσεις είναι αληθής και ποια όχι).

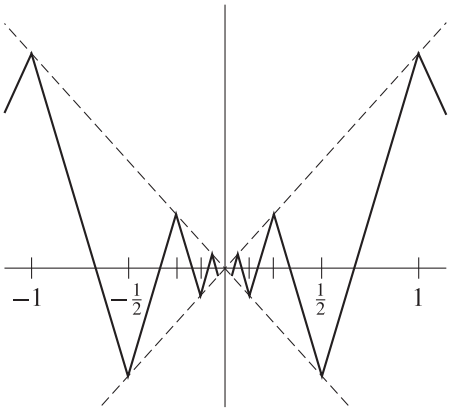


ΣΧΗΜΑ 15

Οι συνεχείς συναρτήσεις που εξετάσαμε μέχρι τώρα ήταν παραγωγίσιμες σε όλα τα σημεία με μία το πολύ εξαίρεση, αλλά είναι εύκολο να δώσουμε παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων που δεν παραγωγίζονται σε πολλά σημεία, ακόμα και απείρου πλήθους (Σχήμα 15). Στην πραγματικότητα, μπορεί κανείς να πετύχει κάτι ακόμα χειρότερο από αυτό. Υπάρχει μια συνάρτηση που είναι *παντού συνεχής* και *πουθενά παραγωγίσιμη!* Δυστυχώς, δεν είναι δυνατόν να δώσουμε τον ορισμό αυτής της συνάρτησης πριν να φτάσουμε στο Κεφάλαιο 24, και δεν τα κατάφερα να πείσω τον σχεδιαστή να τη ζωγραφίσει (σκεφτείτε προσεκτικά πώς θα έπρεπε να είναι η γραφική παράσταση και θα συμμεριστείτε την άποψή του). Είναι όμως δυνατόν να σχεδιάσουμε κάποιες αδρές προσεγγίσεις της γραφικής της παράστασης· οι πρώτες, όλο και πιο ολοκληρωμένες προσεγγίσεις, φαίνονται στο Σχήμα 16.



ΣΧΗΜΑ 16



ΣΧΗΜΑ 17

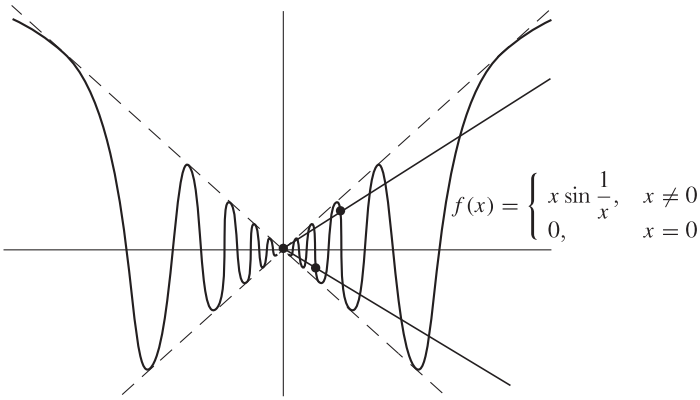
Παρ' όλο που πρέπει να αναβάλουμε αυτά τα θεαματικά παραδείγματα μη παραγωγισιμότητας, μπορούμε, με κάποια ευστροφία, να βρούμε μια συνεχή συνάρτηση που δεν είναι παραγωγίσιμη σε άπειρα σημεία, *που όλα βρίσκονται στο* $[0, 1]$. Μια τέτοια συνάρτηση φαίνεται στο Σχήμα 17. Αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη τον ακριβή της ορισμό· είναι μια «γραμμική» εκδοχή της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αυτή η συγκεκριμένη συνάρτηση f είναι από μόνη της αρκετά χαρακτηριστική όσον αφορά στο πρόβλημα της παραγωγισιμότητας. Πράγματι, για $h \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \dfrac{1}{h} - 0}{h} = \sin \frac{1}{h}.$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι το $\lim\limits_{h \to 0} \sin 1/h$ δεν υπάρχει, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Γεωμετρικά, μπορεί να δει κανείς ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει εφαπτομένη, παρατηρώντας ότι η τέμνουσα που περνά από τα $(0, 0)$ και $(h, f(h))$ στο Σχήμα 18 μπορεί να έχει οποιαδήποτε κλίση μεταξύ του -1 και του 1, οσοδήποτε μικρό και αν απαιτήσουμε να είναι το h.



ΣΧΗΜΑ 18

Αυτή η ανακάλυψη αποτελεί θρίαμβο κατά κάποιον τρόπο: αν και συνεχής, η συνάρτηση f φαίνεται αρκετά περίεργη, και μπορούμε τώρα να αναφέρουμε ένα από μαθηματική άποψη ανεπιθύμητο χαρακτηριστικό της —δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Δεν θα έπρεπε όμως να γίνουμε θαυμαστές του κριτηρίου της παραγωγισιμότητας. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

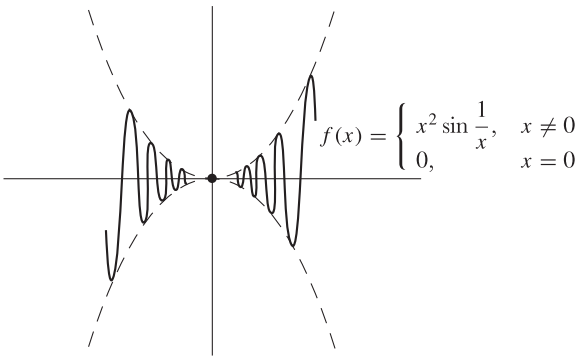
$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0· πράγματι $g'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της g από το $(0, 0)$ είναι επομένως ο οριζόντιος άξονας (Σχήμα 19).

Από αυτό το παράδειγμα φαίνεται ότι θα έπρεπε να ζητάμε ακόμα πιο περιοριστικές συνθήκες για μια συνάρτηση από την απλή παραγωγισιμότητα. Μπορούμε πράγματι να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο για να διατυπώσουμε τέτοιες συνθήκες, αν εισάγουμε μερικούς ορισμούς ακόμα, τους τελευταίους αυτού του κεφαλαίου.



ΣΧΗΜΑ 19

Για κάθε συνάρτηση f, παίρνουμε, με την παράγωγο, μια νέα συνάρτηση f' (που το πεδίο ορισμού της ίσως είναι αρκετά μικρότερο από αυτό της f). Η έννοια της παραγωγισιμότητας μπορεί βέβαια να εφαρμοστεί στη συνάρτηση f', δίνοντας μια άλλη συνάρτηση $(f')'$, που το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλα τα σημεία a για τα οποία η f' είναι παραγωγίσιμη στο a. Η συνάρτηση $(f')'$ γράφεται συνήθως πιο απλά f'' και

λέγεται η **δεύτερη παράγωγος** της f. Αν υπάρχει το $f''(a)$, τότε λέμε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο a, και ο αριθμός $f''(a)$ λέγεται η **δεύτερη παράγωγος της f στο a**.

Στη Φυσική η δεύτερη παράγωγος είναι πολύ σημαντική. Αν $s(t)$ είναι η θέση, τη χρονική στιγμή t, ενός σώματος που κινείται πάνω σε μια ευθεία γραμμή, τότε η $s''(t)$ είναι η **επιτάχυνση** τη χρονική στιγμή t. Η επιτάχυνση παίζει έναν ειδικό ρόλο στη Φυσική, γιατί, όπως διατυπώνεται στους νόμους του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο είναι το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνσή του. Επομένως, όταν κάθεται κάποιος σε ένα αυτοκίνητο που επιταχύνει, αισθάνεται τη δεύτερη παράγωγο.

Δεν υπάρχει κανένας λόγος να σταματήσουμε στη δεύτερη παράγωγο —μπορούμε να ορίσουμε τις $f''' = (f'')'$, $f'''' = (f''')'$, κτλ. Αυτός ο συμβολισμός σύντομα γίνεται δύσχρηστος, για αυτό συνήθως υιοθετούμε την ακόλουθη σύντμηση (στην πραγματικότητα είναι ένας αναδρομικός ορισμός).

$$f^{(1)} = f',$$
$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})'.$$

Άρα

$$f^{(1)} = f'$$
$$f^{(2)} = f'' = (f')',$$
$$f^{(3)} = f''' = (f'')',$$
$$f^{(4)} = f'''' = (f''')',$$
κτλ.

Οι διάφορες συναρτήσεις $f^{(k)}$, για $k \geq 2$, λέγονται μερικές φορές οι **μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι** της f.

Συνήθως, καταφεύγουμε στο σύμβολο $f^{(k)}$ μόνο για $k \geq 4$, αλλά είναι βολικό να ορίσουμε την $f^{(k)}$ και για μικρότερα k. Μπορούμε να δώσουμε έναν λογικό ορισμό και για την $f^{(0)}$, συγκεκριμένα,

$$f^{(0)} = f.$$

Πρέπει να αναφέρουμε και τον συμβολισμό του Leibniz για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους. Το φυσιολογικό σύμβολο του Leibniz για το $f''(x)$, δηλαδή

$$\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx},$$

συντομεύεται σε

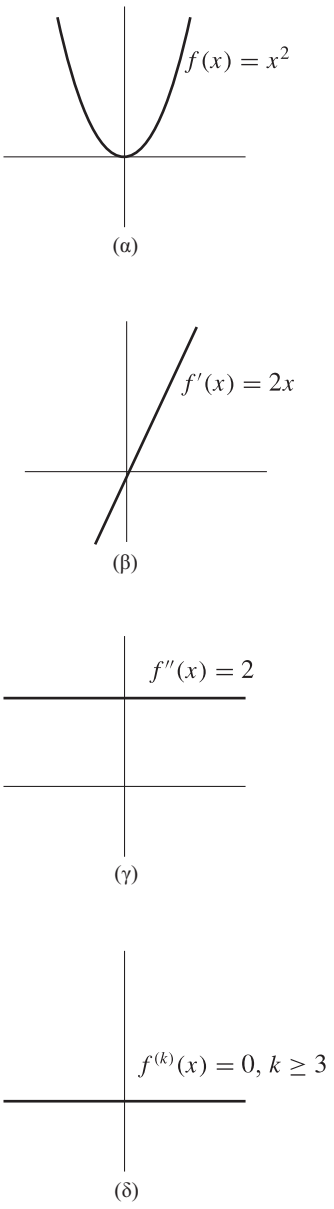
$$\frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}, \qquad \text{ή πιο συχνά σε} \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Παρόμοιος συμβολισμός χρησιμοποιείται για το $f^{(k)}(x)$.

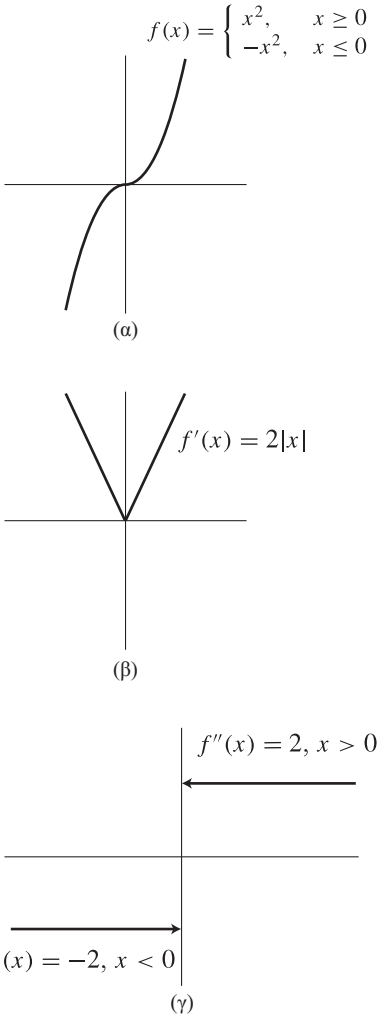
Το επόμενο παράδειγμα παρουσιάζει τον συμβολισμό $f^{(k)}$ και δείχνει, σε μια πολύ απλή περίπτωση, τον τρόπο με τον οποίο οι διάφορες μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι σχετίζονται με την αρχική συνάρτηση. Έστω $f(x) = x^2$. Τότε, όπως έχουμε ήδη επαληθεύσει,

$$f'(x) = 2x,$$
$$f''(x) = 2,$$
$$f'''(x) = 0,$$
$$f^{(k)}(x) = 0, \quad \text{αν } k \geq 3.$$

Το Σχήμα 20 δείχνει τη συνάρτηση f, μαζί με τις διάφορες παραγώγους της.



ΣΧΗΜΑ 20



ΣΧΗΜΑ 21

Ένα μάλλον πιο διαφωτιστικό παράδειγμα δίνεται από την ακόλουθη συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο Σχήμα 21(α):

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2a \quad \text{αν } a > 0, \\ f'(a) &= -2a \quad \text{αν } a < 0. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}. \end{aligned}$$

Τώρα

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$\text{και} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2}{h} = 0,$$

άρα

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Όλες οι παραπάνω πληροφορίες μπορούν να συνοψιστούν στην ακόλουθη:

$$f'(x) = 2|x|.$$

Έπεται ότι η $f''(0)$ δεν υπάρχει! Άρα η ύπαρξη της δεύτερης παραγώγου είναι από τα ισχυρά κριτήρια που μπορεί να ικανοποιεί μια συνάρτηση. Ακόμα και μια «ομαλή στην όψη» συνάρτηση f μπορεί να εμφανίσει ανωμαλίες αν την εξετάσουμε ως προς τη δεύτερη παράγωγο. Αυτό μας δίνει την ιδέα να αναζητήσουμε τυχόν ανώμαλη συμπεριφορά της συνάρτησης

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

στη δεύτερη παράγωγο. Προς το παρόν, ξέρουμε ότι $g'(0) = 0$, αλλά δεν ξέρουμε την $g'(a)$ για κανένα $a \neq 0$, άρα δεν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την $g''(0)$. Θα επιστρέψουμε σε αυτό το πρόβλημα προς το τέλος του επομένου κεφαλαίου, όταν θα έχουμε τελειοποιήσει την τεχνική μας για τον υπολογισμό παραγώγων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Αποδείξτε, δουλεύοντας με βάση τον ίδιο τον ορισμό, ότι, αν $f(x) = 1/x$, τότε $f'(a) = -1/a^2$, για $a \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(a, 1/a)$ δεν τέμνει τη γραφική παράσταση της f, παρά μόνο στο $(a, 1/a)$.

2. (α) Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = 1/x^2$, τότε $f'(a) = -2/a^3$ για $a \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη στην f στο $(a, 1/a^2)$ τέμνει την f και σε ένα άλλο σημείο, που βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά του κατακόρυφου άξονα.

3. Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(a) = 1/(2\sqrt{a})$, για $a > 0$. (Η παράσταση που θα πάρετε για το $[f(a+h) - f(a)]/h$ ίσως χρειαστεί κάποια αλγεβρική περιποίηση, αλλά η απάντηση θα πρέπει να σας οδηγήσει στο κατάλληλο τέχνασμα.)

4. Για κάθε φυσικό αριθμό n, θέτουμε $S_n(x) = x^n$. Φέρνοντας στο μυαλό σας ότι $S_1'(x) = 1$, $S_2'(x) = 2x$ και $S_3'(x) = 3x^2$, μαντέψτε τον τύπο για την $S_n'(x)$. Αποδείξτε την εικασία σας. (Μπορείτε να αναπτύξετε την παράσταση $(x+h)^n$ από το διωνυμικό θεώρημα.)

5. Βρείτε την f' αν $f(x) = [x]$.

6. Αποδείξτε, ξεκινώντας από τον ορισμό (και κάνοντας ένα σχήμα για να εξηγήσετε), ότι:

(α) αν $g(x) = f(x) + c$, τότε $g'(x) = f'(x)$·

(β) αν $g(x) = cf(x)$, τότε $g'(x) = cf'(x)$.

7. Υποθέτουμε ότι $f(x) = x^3$.

(α) Ποια είναι η $f'(9)$, $f'(25)$, $f'(36)$;

(β) Ποια είναι η $f'(3^2)$, $f'(5^2)$, $f'(6^2)$;

(γ) Ποια είναι η $f'(a^2)$, $f'(x^2)$;

Αν δεν βρείτε αυτό το πρόβλημα ανόητο, σας λείπει ένα πολύ σημαντικό σημείο: η $f'(x^2)$ είναι η παράγωγος της f στον αριθμό που τυχαίνει να αποκαλούμε x^2· *δεν* είναι η παράγωγος στο x της συνάρτησης $g(x) = f(x^2)$. Για να ξεκαθαρίσουν τα πράγματα:

(δ) Για την $f(x) = x^3$, συγκρίνετε την $f'(x^2)$ με την $g'(x)$ όπου $g(x) = f(x^2)$.

8. (α) Έστω ότι $g(x) = f(x + c)$. Αποδείξτε (αρχίζοντας από τον ορισμό) ότι $g'(x) = f'(x + c)$. Σχεδιάστε ένα σχήμα για να εξηγήσετε. Για να λύσετε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να γράψετε σωστά τους ορισμούς των $g'(x)$ και $f'(x + c)$. Ο σκοπός του Προβλήματος 7 ήταν να σας πείσει πως, αν και αυτό το πρόβλημα είναι εύκολο, δεν είναι τελείως τετριμμένο, και υπάρχει κάτι για να αποδείξετε: δεν μπορείτε απλώς να βάλετε τόνους στην ισότητα $g(x) = f(x + c)$. Για να τονίσουμε αυτό το σημείο:

(β) Αποδείξτε ότι αν $g(x) = f(cx)$, τότε $g'(x) = c \cdot f'(cx)$. Προσπαθήστε να δείτε τι σημαίνει αυτό σε ένα σχήμα.

(γ) Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και περιοδική, με περίοδο a (δηλαδή, $f(x + a) = f(x)$ για κάθε x). Αποδείξτε ότι η f' είναι επίσης περιοδική.

9. Βρείτε την $f'(x)$ καθώς και την $f'(x + 3)$ στις παρακάτω περιπτώσεις. Να είστε πολύ μεθοδικοί, αλλιώς ενδέχεται να κάνετε λάθος. Συμβουλευτείτε τις απαντήσεις (αφού, βέβαια, λύσετε το πρόβλημα).

(i) $f(x) = (x + 3)^5$.

(ii) $f(x + 3) = x^5$.

(iii) $f(x + 3) = (x + 5)^7$.

10. Βρείτε την $f'(x)$ όταν $f(x) = g(t + x)$, και όταν $f(t) = g(t + x)$. Οι απαντήσεις *δεν* θα είναι ίδιες.

11. (α) Αποδείξτε ότι ο Γαλιλαίος έκανε λάθος: αν ένα σώμα πέφτει σε απόσταση $s(t)$ σε t δευτερόλεπτα, και η s' είναι ανάλογη με την s, τότε η s δεν μπορεί να είναι συνάρτηση της μορφής $s(t) = ct^2$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $s(t) = (a/2)t^2$, τότε για την s ισχύουν τα ακόλουθα: (το πρώτο θα δείξει γιατί αλλάξαμε το c σε $a/2$):

(i) $s''(t) = a$ (η επιτάχυνση είναι σταθερή).

(ii) $[s'(t)]^2 = 2as(t)$.

(γ) Όταν μετράμε το s σε πόδια, η τιμή του a είναι 32. Πόσα δευτερόλεπτα έχετε στη διάθεσή σας για να φύγετε από τον δρόμο ενός πολυελαίου που πέφτει από ένα ταβάνι ύψους 400 ποδιών; Αν δεν τα καταφέρετε, πόσο γρήγορα θα κινείται ο πολυέλαιος όταν θα σας χτυπήσει; Σε ποιο σημείο βρισκόταν ο πολυέλαιος όταν είχε τη μισή από αυτήν την ταχύτητα;

12. Φανταστείτε έναν δρόμο στον οποίο το όριο ταχύτητας καθορίζεται σε κάθε σημείο. Με άλλα λόγια, υπάρχει κάποια συνάρτηση L τέτοια ώστε το όριο ταχύτητας στα x μίλια από την αρχή του δρόμου να είναι $L(x)$. Δύο αυτοκίνητα, A και B, κινούνται σε αυτόν τον δρόμο· τη χρονική στιγμή t η θέση του A είναι $a(t)$ και η θέση του B είναι $b(t)$.

(α) Ποια εξίσωση περιγράφει το γεγονός ότι το αυτοκίνητο A κινείται συνεχώς με το όριο ταχύτητας; (Η απάντηση *δεν* είναι $a'(t) = L(t)$.)

(β) Έστω ότι το A πηγαίνει συνεχώς με το όριο ταχύτητας, και ότι η θέση του B τη χρονική στιγμή t είναι η θέση του A τη χρονική στιγμή $t - 1$. Δείξτε ότι και το B κινείται διαρκώς με το όριο ταχύτητας.

(γ) Έστω ότι το B βρίσκεται συνέχεια πίσω από το A σε σταθερή απόσταση από αυτό. Κάτω από ποιες συνθήκες το B θα κινείται και τώρα με το όριο ταχύτητας;

13. Έστω ότι $f(a) = g(a)$ και ότι η αριστερή παράγωγος της f στο a είναι ίση με τη δεξιά παράγωγο της g στο a. Ορίζουμε $h(x) = f(x)$ για $x \leq a$, και $h(x) = g(x)$ για $x \geq a$. Αποδείξτε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο a.

14. Θέτουμε $f(x) = x^2$ αν ο x είναι ρητός, και $f(x) = 0$ αν ο x είναι άρρητος. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μη σας τρομάζει αυτή η συνάρτηση. Απλώς γράψτε τον ορισμό της $f'(0)$.)

15. (α) Έστω f μια συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| \leq x^2$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Αν έχετε λύσει το Πρόβλημα 14 θα πρέπει να μπορείτε να λύσετε και αυτό.)

(β) Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται αν αντικαταστήσουμε τη x^2 με $|g(x)|$, όπου η g πρέπει να έχει ποια ιδιότητα;

16. Έστω $\alpha > 1$. Αν η f ικανοποιεί την $|f(x)| \leq |x|^\alpha$, αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο 0.

17. Έστω $0 < \beta < 1$. Αποδείξτε ότι αν η f ικανοποιεί την $|f(x)| \geq |x|^\beta$ και $f(0) = 0$, τότε η f δεν παραγωγίζεται στο 0.

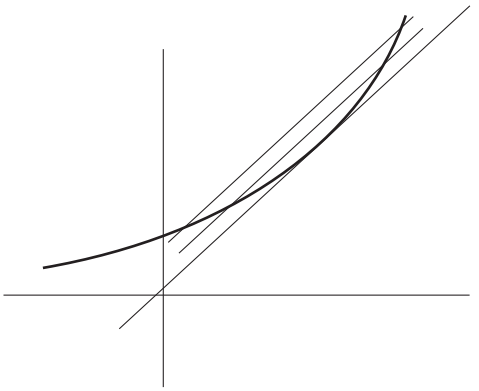
∗**18.** Θέτουμε $f(x) = 0$ για άρρητο x, και $1/q$ για $x = p/q$ όπου το p/q είναι ανάγωγο. Αποδείξτε ότι η f δεν παραγωγίζεται στο a για κανένα a. Υπόδειξη: Προφανώς αρκεί να το αποδείξουμε για άρρητο a. Γιατί; Αν $a = m, a_1a_2a_3\ldots$ είναι το δεκαδικό ανάπτυγμα του a, θεωρήστε το $[f(a + h) - f(a)]/h$ για h ρητό, καθώς και για

$$h = -0,00\ldots0a_{n+1}a_{n+2}\ldots.$$

19. (α) Έστω ότι $f(a) = g(a) = h(a)$, ότι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε x, και ότι $f'(a) = h'(a)$. Αποδείξτε ότι η g παραγωγίζεται στο a, και ότι $f'(a) = g'(a) = h'(a)$. (Ξεκινήστε με τον ορισμό της $g'(a)$.)

(β) Δείξτε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει αν παραλείψουμε την υπόθεση $f(a) = g(a) = h(a)$.

20. Έστω f μια πολυωνυμική συνάρτηση· θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Η εφαπτομένη στην f στο $(a, f(a))$ είναι η γραφική παράσταση της $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Έτσι η $f(x) - g(x)$ είναι η πολυωνυμική συνάρτηση $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Έχουμε ήδη δει ότι αν $f(x) = x^2$, τότε $d(x) = (x-a)^2$, και αν $f(x) = x^3$, τότε $d(x) = (x-a)^2(x+2a)$.



ΣΧΗΜΑ 22

(α) Βρείτε την $d(x)$ όταν $f(x) = x^4$ και δείξτε ότι διαιρείται με $(x-a)^2$.

(β) Από ό,τι φαίνεται υπάρχουν αρκετές ενδείξεις ότι η $d(x)$ διαιρείται πάντοτε με $(x-a)^2$. Το Σχήμα 22 μας δίνει μια διαισθητική απόδειξη: συνήθως, οι ευθείες οι παράλληλες με την εφαπτόμενη θα τέμνουν τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία· η εφαπτομένη τέμνει τη γραφική παράσταση μόνο μία φορά κοντά στο σημείο, άρα αυτή η τομή θα πρέπει να είναι «διπλή τομή». Για να δώσετε μια αυστηρή απόδειξη, σημειώστε πρώτα ότι

$$\frac{d(x)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Τώρα απαντήστε στις εξής ερωτήσεις. Γιατί το $f(x) - f(a)$ διαιρείται με $(x-a)$; Γιατί υπάρχει μια πολυωνυμική συνάρτηση h τέτοια ώστε $h(x) = d(x)/(x-a)$ για $x \neq a$; Γιατί είναι $\lim_{x\to a} h(x) = 0$; Γιατί είναι $h(a) = 0$; Γιατί αυτό λύνει το πρόβλημα;

21. (α) Δείξτε ότι $f'(a) = \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)]/(x-a)$. (Δεν υπάρχει τίποτα το βαθύ εδώ.)

(β) Αποδείξτε ότι η παράγωγος είναι «τοπική ιδιότητα»: αν $f(x) = g(x)$ για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a, τότε $f'(a) = g'(a)$. (Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό της $f'(a)$, μπορείτε να αγνοήσετε το $f(x)$ για κάθε συγκεκριμένο $x \neq a$. Φυσικά δεν μπορείτε να αγνοήσετε το $f(x)$ για όλα αυτά τα x ταυτόχρονα!)

22. (α) Έστω ότι η f παραγωγίζεται στο x. Αποδείξτε ότι

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Υπόδειξη: Θυμηθείτε ένα παλιό αλγεβρικό τέχνασμα —ένας αριθμός δεν μεταβάλλεται αν του προσθέσουμε και του αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα.

∗∗(β) Αποδείξτε, πιο γενικά, ότι

$$f'(x) = \lim_{h,k\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}.$$

Παρ' όλο που δεν έχουμε συναντήσει κάτι σαν το $\lim_{h,k\to 0}$ μέχρι τώρα, θα πρέπει να είναι ξεκάθαρο τι σημαίνει και θα πρέπει να είστε σε θέση να φτιάξετε έναν κατάλληλο ε-δ ορισμό. Το σημαντικό εδώ είναι πως έχουμε $\lim_{h,k\to 0^+}$, επομένως θεωρούμε μόνο θετικά h και k.

23. Αποδείξτε ότι αν η f είναι άρτια, τότε $f'(x) = -f'(-x)$. (Για να περιορίσετε τη σύγχυση, θέστε $g(x) = f(-x)$· βρείτε την $g'(x)$ και *μετά* θυμηθείτε τι άλλο πράγμα είναι η g.) Κάντε ένα σχήμα!

24. Αποδείξτε ότι αν η f είναι περιττή, τότε $f'(x) = f'(-x)$. Και πάλι, κάντε ένα σχήμα.

25. Τα Προβλήματα 23 και 24 λένε ότι η f' είναι άρτια αν η f είναι περιττή, και περιττή αν η f είναι άρτια. Τί μπορούμε λοιπόν να πούμε για την $f^{(k)}$;

26. Βρείτε την $f''(x)$ αν

(i) $f(x) = x^3$.

(ii) $f(x) = x^5$.

(iii) $f'(x) = x^4$.

(iv) $f(x+3) = x^5$.

27. Αν $S_n(x) = x^n$, και $0 \leq k \leq n$, αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned} S_n{}^{(k)}(x) &= \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \\ &= k!\binom{n}{k}x^{n-k}. \end{aligned}$$

28. (α) Βρείτε την $f'(x)$ αν $f(x) = |x|^3$. Βρείτε την $f''(x)$. Υπάρχει η $f'''(x)$ για κάθε x;

(β) Αναλύστε όμοια την f αν $f(x) = x^4$ για $x \geq 0$ και $f(x) = -x^4$ για $x \leq 0$.

29. Θέτουμε $f(x) = x^n$ για $x \geq 0$ και $f(x) = 0$ για $x \leq 0$. Αποδείξτε ότι η $f^{(n-1)}$ υπάρχει (και βρείτε έναν τύπο για αυτήν), αλλά ότι η $f^{(n)}(0)$ δεν υπάρχει.

30. Ερμηνεύστε τα παρακάτω δείγματα συμβολισμού του Leibniz· καθένα είναι μια αναδιατύπωση κάποιου στοιχείου που εμφανίστηκε σε προηγούμενο πρόβλημα.

(i) $\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$.

(ii) $\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{1}{y^2}$ αν $z = \dfrac{1}{y}$.

(iii) $\dfrac{d[f(x)+c]}{dx} = \dfrac{df(x)}{dx}$.

(iv) $\dfrac{d[cf(x)]}{dx} = c\dfrac{df(x)}{dx}$.

(v) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx}$ αν $z = y + c$.

(vi) $\left.\dfrac{dx^3}{dx}\right|_{x=a^2} = 3a^4$.

(vii) $\left.\dfrac{df(x+a)}{dx}\right|_{x=b} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=b+a}$.

(viii) $\left.\dfrac{df(cx)}{dx}\right|_{x=b} = c \cdot \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=cb}$.

(ix) $\dfrac{df(cx)}{dx} = c \cdot \left.\dfrac{df(y)}{dy}\right|_{y=cx}$.

(x) $\dfrac{d^k x^n}{dx^k} = k!\binom{n}{k}x^{n-k}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

Η διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης λέγεται *παραγώγιση*. Ίσως από το προηγούμενο κεφάλαιο να δημιουργήθηκε η εντύπωση ότι αυτή η διαδικασία συνήθως είναι επίπονη, ότι πρέπει κάθε φορά να επικαλεστούμε τον ορισμό της παραγώγου και να καταφέρουμε να υπολογίσουμε κάποιο όριο. Είναι αλήθεια ότι μερικές φορές αυτή είναι η μόνη δυνατή προσέγγιση —αν ξεχάσει κανείς τον ορισμό της παραγώγου είναι πολύ πιθανό να πελαγοδρομήσει. Παρ' όλα αυτά, σε αυτό το κεφάλαιο θα μάθουμε να παραγωγίζουμε έναν μεγάλο αριθμό συναρτήσεων, χωρίς να χρειαστεί καν να ανατρέξουμε στον ορισμό. Μερικά θεωρήματα θα μας εφοδιάσουν με μια μηχανική διαδικασία για να παραγωγίζουμε μια μεγάλη κλάση συναρτήσεων, που προκύπτουν από λίγες απλές συναρτήσεις με τις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης και της σύνθεσης. Αυτή η περιγραφή δείχνει ποια περίπου είναι τα θεωρήματα που θα αποδείξουμε. Πρώτα θα βρούμε την παράγωγο μερικών απλών συναρτήσεων, και μετά θα αποδείξουμε θεωρήματα για το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και τη σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Το πρώτο θεώρημα είναι απλώς μια τυπική επανάληψη ενός υπολογισμού που κάναμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν f είναι μια σταθερή συνάρτηση, $f(x) = c$, τότε

$$f'(a) = 0 \quad \text{για κάθε αριθμό } a.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0. \blacksquare$$

Το δεύτερο θεώρημα είναι και αυτό μια ειδική περίπτωση ενός υπολογισμού από το προηγούμενο κεφάλαιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν f είναι η ταυτοτική συνάρτηση, $f(x) = x$, τότε

$$f'(a) = 1 \quad \text{για κάθε αριθμό } a.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1. \blacksquare \end{aligned}$$

Η παράγωγος του αθροίσματος δύο συναρτήσεων είναι ακριβώς αυτό που θα ήλπιζε κανείς —το άθροισμα των παραγώγων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a, τότε η $f + g$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο a, και

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-[f(a)+g(a)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= f'(a)+g'(a). \blacksquare\end{aligned}$$

Ο τύπος για την παράγωγο γινομένου δεν είναι τόσο απλός όσο θα ευχόταν κανείς, είναι όμως εξαιρετικά συμμετρικός, και η απόδειξη απαιτεί μόνο ένα απλό αλγεβρικό τέχνασμα, που μας έχει και σε άλλη περίπτωση φανεί χρήσιμο —ένας αριθμός δεν μεταβάλλεται αν η ίδια ποσότητα προστεθεί και αφαιρεθεί από αυτόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a, τότε η $f\cdot g$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο a, και
$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)[g(a+h)-g(a)]}{h}+\frac{[f(a+h)-f(a)]g(a)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}f(a+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(a)\\ &= f(a)\cdot g'(a)+f'(a)\cdot g(a).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 9-1 για να συμπεράνουμε ότι
$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a). \blacksquare$$

Σε μια ειδική περίπτωση, το Θεώρημα 4 απλοποιείται σημαντικά:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Αν $g(x) = cf(x)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο a, και
$$g'(a) = c\cdot f'(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν $h(x) = c$, οπότε $g = h\cdot f$, τότε από το Θεώρημα 4,
$$\begin{aligned}g'(a) &= (h\cdot f)'(a)\\ &= h(a)\cdot f'(a)+h'(a)\cdot f(a)\\ &= c\cdot f'(a)+0\cdot f(a)\\ &= c\cdot f'(a). \blacksquare\end{aligned}$$

Παρατηρήστε, ειδικότερα, ότι $(-f)'(a) = -f'(a)$, επομένως $(f-g)'(a) = (f+[-g])'(a) = f'(a)-g'(a)$.

Για να δείξουμε τη χρησιμότητα των όσων έχουμε καταφέρει έως τώρα, θα υπολογίσουμε την παράγωγο μερικών ακόμα ειδικών συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Αν $f(x) = x^n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n, τότε
$$f'(a) = na^{n-1} \qquad \text{για κάθε } a.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στο n. Για $n = 1$ παίρνουμε απλώς το Θεώρημα 2. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για n, δηλαδή ότι, αν $f(x) = x^n$, τότε

$$f'(a) = na^{n-1} \qquad \text{για κάθε } a.$$

Έστω $g(x) = x^{n+1}$. Αν $I(x) = x$, η ισότητα $x^{n+1} = x^n \cdot x$ μπορεί να γραφεί

$$g(x) = f(x) \cdot I(x) \qquad \text{για κάθε } x\cdot$$

άρα $g = f \cdot I$. Από το Θεώρημα 4 έπεται ότι

$$\begin{aligned} g'(a) = (f \cdot I)'(a) &= f'(a) \cdot I(a) + f(a) \cdot I'(a) \\ &= na^{n-1} \cdot a + a^n \cdot 1 \\ &= na^n + a^n \\ &= (n+1)a^n, \qquad \text{για κάθε } a. \end{aligned}$$

Αυτή είναι ακριβώς η περίπτωση $n + 1$ που θέλαμε να αποδείξουμε. ∎

Αν εφαρμόσουμε μαζί τα θεωρήματα που έχουμε ήδη αποδείξει, μπορούμε να βρούμε τώρα την f' για f της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Παίρνουμε

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε την f'':

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2.$$

Αυτή η διαδικασία μπορεί εύκολα να συνεχιστεί. Κάθε παραγώγιση μειώνει τη μέγιστη δύναμη του x κατά 1, και εξαφανίζει ένα ακόμα a_i. Είναι καλή ιδέα να δουλέψει κανείς με λεπτομέρειες τις παραγώγους f''', $f^{(4)}$, ίσως και την $f^{(5)}$, μέχρις ότου η διαδικασία γίνει καθαρή. Η τελευταία ενδιαφέρουσα παράγωγος είναι η

$$f^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Για $k > n$ έχουμε

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

Προφανώς, το επόμενο βήμα στο πρόγραμμά μας θα είναι να βρούμε την παράγωγο ενός πηλίκου f/g. Είναι κάπως πιο απλό και, λόγω του Θεωρήματος 4, αρκετό να βρούμε την παράγωγο της $1/g$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο a και $g(a) \neq 0$, τότε η $1/g$ είναι παραγωγίσιμη στο a, και

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πριν καν γράψουμε το

$$\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h}$$

πρέπει να σιγουρευτούμε ότι αυτή η παράσταση έχει νόημα —είναι απαραίτητο να ελέγξουμε ότι η $(1/g)(a + h)$ ορίζεται για αρκετά μικρό h. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε δύο μόνο πράγματα. Αφού η g είναι, από την υπόθεση, παραγωγίσιμη στο a, συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 9-1 ότι η g είναι συνεχής στο a. Αφού $g(a) \neq 0$,

από το Θεώρημα 6-3 έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(a+h) \neq 0$ για $|h| < \delta$. Επομένως, το $(1/g)(a+h)$ *έχει* νόημα για αρκετά μικρό h, και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(a) - g(a+h)}{h[g(a)\cdot g(a+h)]} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \frac{1}{g(a)g(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-[g(a+h) - g(a)]}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(a)\cdot g(a+h)} \\
&= -g'(a) \cdot \frac{1}{[g(a)]^2}.
\end{aligned}$$

(Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιήσαμε άλλη μια φορά τη συνέχεια της g στο a.) ∎

Μπορούμε τώρα εύκολα να βρούμε τον γενικό τύπο για την παράγωγο πηλίκου. Αν και δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικός, είναι σημαντικός, και θα πρέπει να τον απομνημονεύσουμε. (Χρησιμοποιώ πάντα το ξόρκι: «το κάτω επί την παράγωγο του επάνω, μείον το επάνω επί την παράγωγο του κάτω, δια το τετράγωνο του κάτω»).

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο a και $g(a) \neq 0$, τότε η f/g είναι παραγωγίσιμη στο a, και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)\cdot f'(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $f/g = f\cdot(1/g)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a)(-g'(a))}{[g(a)]^2} \\
&= \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{[g(a)]^2}. \quad ∎
\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να παραγωγίσουμε μερικές ακόμα συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$\text{αν } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \text{ τότε } f'(x) = \frac{(x^2+1)(2x) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

$$\text{αν } f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \text{ τότε } f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$\text{αν } f(x) = \frac{1}{x}, \qquad \text{τότε } f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}.$$

Παρατηρήστε ότι το τελευταίο παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί: αν

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{για κάποιον φυσικό αριθμό } n,$$

τότε

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}.$$

άρα το Θεώρημα 6 ισχύει τελικά και για θετικούς και για αρνητικούς ακέραιους. Αν ερμηνεύσουμε την $f(x) = x^0$ ως $f(x) = 1$, και την $f'(x) = 0 \cdot x^{-1}$ ως $f'(x) = 0$, τότε το Θεώρημα 6 ισχύει και για $n = 0$. (Η λέξη «ερμηνεύουμε» είναι αναγκαία γιατί δεν είναι σαφές το πώς θα πρέπει να οριστεί το 0^0 και, σε τελική ανάλυση, το $0 \cdot 0^{-1}$ δεν έχει έννοια.)

Για να προχωρήσουμε ακόμα πιο πέρα στην παραγώγιση, πρέπει να γνωρίζουμε τις παραγώγους κάποιων ειδικών συναρτήσεων που θα μελετήσουμε αργότερα. Μια από αυτές είναι η συνάρτηση ημιτόνου. Για την ώρα θα αποκαλύψουμε, και θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη, τα εξής:

$$\begin{aligned} \sin'(a) &= \cos a \qquad \text{για κάθε } a, \\ \cos'(a) &= -\sin a \qquad \text{για κάθε } a, \end{aligned}$$

Αυτή η πληροφορία μάς επιτρέπει να παραγωγίσουμε πολλές άλλες συναρτήσεις. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = x \sin x,$$

τότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cos x + \sin x, \\ f''(x) &= -x \sin x + \cos x + \cos x \\ &= -x \sin x + 2 \cos x\cdot \end{aligned}$$

αν

$$g(x) = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x,$$

τότε

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos x, \\ g''(x) &= 2[(\sin x)(-\sin x) + \cos x \cos x] \\ &= 2[\cos^2 x - \sin^2 x]\cdot \end{aligned}$$

αν

$$h(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x,$$

τότε

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\cos x)(-\sin x) + (-\sin x)\cos x \\ &= -2 \sin x \cos x, \\ h''(x) &= -2[\cos^2 x - \sin^2 x]. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$g'(x) + h'(x) = 0,$$

κάτι που ελάχιστα μας εκπλήσσει, μια και $(g + h)(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Όπως θα περίμενε κανείς, ισχύει επίσης $g''(x) + h''(x) = 0$.

Στα παραδείγματα που είδαμε πιο πάνω, είχαμε να κάνουμε μόνο με γινόμενα δύο συναρτήσεων. Με βάση το Θεώρημα 4 μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και συναρτήσεις που περιέχουν τριπλά γινόμενα· στην πράξη αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Θυμηθείτε ότι το $f \cdot g \cdot h$ είναι μια σύντμηση του

$$(f \cdot g) \cdot h \quad \text{ή} \quad f \cdot (g \cdot h).$$

Αν διαλέξουμε, για παράδειγμα, την πρώτη από τις δύο μορφές, έχουμε

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)'(x) &= (f \cdot g)'(x) \cdot h(x) + (f \cdot g)(x)h'(x) \\ &= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).\end{aligned}$$

Αν διαλέγαμε την $f \cdot (g \cdot h)$ θα καταλήγαμε, φυσικά, στο ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετικό το ενδιάμεσο βήμα. Το τελικό συμπέρασμα είναι απόλυτα συμμετρικό και εύκολο να αποστηθιστεί:

> Η $(f \cdot g \cdot h)'$ είναι το άθροισμα των τριών όρων που παίρνουμε αν παραγωγίσουμε κάθε μία από τις f, g και h και την πολλαπλασιάσουμε με τις άλλες δύο.

Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = x^3 \sin x \cos x,$$

τότε

$$f'(x) = 3x^2 \sin x \cos x + x^3 \cos x \cos x + x^3 (\sin x)(-\sin x).$$

Γινόμενα περισσοτέρων των τριών συναρτήσεων αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Για παράδειγμα, δεν θα πρέπει να συναντήσετε δυσκολίες για να δείξετε τον τύπο

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h \cdot k)'(x) = {} & f'(x)g(x)h(x)k(x) + f(x)g'(x)h(x)k(x) \\ & + f(x)g(x)h'(x)k(x) + f(x)g(x)h(x)k'(x).\end{aligned}$$

Μπορείτε ακόμα, να προσπαθήσετε να αποδείξετε (με επαγωγή) τον γενικό τύπο:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(x) f_i'(x) f_{i+1}(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$

Για να είμαστε σε θέση να παραγωγίζουμε τις πραγματικά ενδιαφέρουσες συναρτήσεις, πρέπει οπωσδήποτε να έχουμε έναν τύπο για την $(f \circ g)'(x)$ συναρτήσει των f' και g'. Για να βεβαιωθούμε ότι η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο a, φαίνεται αρχικά λογικό να υποθέσουμε την παραγωγισιμότητα της g στο a. Αφού η συμπεριφορά της $f \circ g$ κοντά στο a εξαρτάται από τη συμπεριφορά της f κοντά στο $g(a)$ (όχι κοντά στο a), φαίνεται επίσης λογικό να υποθέσουμε ότι η f παραγωγίζεται στο $g(a)$. Πραγματικά, θα αποδείξουμε ότι, αν η g παραγωγίζεται στο a και η f παραγωγίζεται στο $g(a)$, τότε η $f \circ g$ παραγωγίζεται στο a, και

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Αυτός ο εξαιρετικά σημαντικός τύπος λέγεται *Κανόνας της Αλυσίδας*, πιθανόν γιατί μια σύνθεση συναρτήσεων θα μπορούσε να λέγεται και «αλυσίδα» συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι η $(f \circ g)'$ είναι στην πράξη το γινόμενο των f' και g', αλλά όχι ακριβώς αυτό: η f' πρέπει να υπολογιστεί στο $g(a)$ και η g' στο a. Πριν επιχειρήσουμε να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα, θα ασχοληθούμε με μερικές εφαρμογές. Ας υποθέσουμε ότι

$$f(x) = \sin x^2.$$

Ας χρησιμοποιήσουμε, προσωρινά, το σύμβολο S για τη συνάρτηση («τετραγωνισμού») $S(x) = x^2$. Τότε,

$$f = \sin \circ S.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sin'(S(x)) \cdot S'(x) \\ &= \cos x^2 \cdot 2x.\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα είναι τελείως διαφορετικό αν

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Σε αυτήν την περίπτωση

$$f = S \circ \sin,$$

άρα

$$\begin{aligned} f'(x) &= S'(\sin x) \cdot \sin'(x) \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι αυτό βρίσκεται σε συμφωνία (όπως πρέπει) με το αποτέλεσμα που παίρνουμε αν γράψουμε $f = \sin \cdot \sin$ και χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του γινομένου.

Αν και επινοήσαμε ένα ειδικό σύμβολο, το S, για να ονομάσουμε τη συνάρτηση «τετραγωνισμού», δεν χρειάζεται και μεγάλη εξάσκηση για να μπορεί κανείς να λύνει προβλήματα σαν και αυτό χωρίς να γράφει ειδικά σύμβολα για συναρτήσεις, και ακόμα, χωρίς να γράφει την ακριβή σύνθεση που δίνει την f —σύντομα συνηθίζει κανείς να αναλύει την f μέσα στο μυαλό του. Οι επόμενες παραγωγίσεις δίνονται ως άσκηση για μια τέτοια διανοητική εξάσκηση —αν θεωρήσετε αναγκαίο να δουλέψετε λίγο και πάνω στο χαρτί, προς Θεού κάντε το, αλλά προσπαθήστε να αναπτύξετε την ευχέρεια του να γράφετε την f' αμέσως μόλις σας δοθεί ο ορισμός της f. Τα προβλήματα αυτού του είδους είναι τόσο εύκολα που, αν απλώς θυμάστε τον Κανόνα της Αλυσίδας, δεν χρειάζεται να σκεφτείτε καθόλου.

αν $f(x) = \sin x^3$	τότε $f'(x) = \cos x^3 \cdot 3x^2$
$f(x) = \sin^3 x$	$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$
$f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2} \right)$
$f(x) = \sin(\sin x)$	$f'(x) = \cos(\sin x) \cdot \cos x$
$f(x) = \sin(x^3 + 3x^2)$	$f'(x) = \cos(x^3 + 3x^2) \cdot (3x^2 + 6x)$
$f(x) = (x^3 + 3x^2)^{53}$	$f'(x) = 53(x^3 + 3x^2)^{52} \cdot (3x^2 + 6x).$

Μια συνάρτηση όπως η

$$f(x) = \sin^2 x^2 = [\sin x^2]^2,$$

που είναι η σύνθεση τριών συναρτήσεων

$$f = S \circ \sin \circ S,$$

μπορεί επίσης να παραγωγιστεί με εφαρμογή του Κανόνα της Αλυσίδας. Αρκεί να θυμηθεί κανείς ότι μια τριπλή σύνθεση $f \circ g \circ h$ σημαίνει $(f \circ g) \circ h$ ή $f \circ (g \circ h)$. Έτσι, αν

$$f(x) = \sin^2 x^2$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} f &= (S \circ \sin) \circ S, \\ f &= S \circ (\sin \circ S). \end{aligned}$$

Η παράγωγος της καθεμιάς από τις δύο εκφράσεις βρίσκεται με διπλή εφαρμογή του Κανόνα της Αλυσίδας· το μόνο συζητήσιμο σημείο είναι αν οι δύο εκφράσεις θα οδηγήσουν σε εξίσου απλούς υπολογισμούς. Βέβαια, όπως είναι γνωστό σε κάθε εξοικειωμένο με παραγωγίσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη:

$$\boxed{f = S \circ (\sin \circ S).}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε την $f'(x)$ με μια καίρια κίνηση. Για να ξεκινήσουμε, σημειώνουμε ότι η πρώτη συνάρτηση που πρέπει να παραγωγίσουμε είναι η S, άρα ο τύπος για την $f'(x)$ αρχίζει με

$$f'(x) = 2(\quad) \cdot \square.$$

Μέσα στην παρένθεση πρέπει να θέσουμε το $\sin x^2$, την τιμή της δεύτερης συνάρτησης, $\sin \circ S$, στο x. Έτσι αρχίζουμε γράφοντας

$$f'(x) = 2 \sin x^2 \cdot \square$$

(η παρένθεση δεν χρειαζόταν τελικά). Πρέπει τώρα να πολλαπλασιάσουμε αυτό το κομμάτι της απάντησης με την παράγωγο της $\sin \circ S$ στο x· αυτό το βήμα είναι εύκολο —έχουμε τη σύνθεση δύο συναρτήσεων, κάτι που μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε. Ως τελικό αποτέλεσμα, έχουμε

$$f'(x) = 2 \sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Στο επόμενο παράδειγμα, εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. Υποθέτουμε

$$\boxed{f(x) = \sin(\sin x^2).}$$

Χωρίς καν να χρειαστεί να γράψουμε την f ως σύνθεση $g \circ h \circ k$ τριών συναρτήσεων, βλέπουμε ότι η αριστερότερη θα είναι η sin, άρα η παράσταση που θα βρούμε για την $f'(x)$ αρχίζει με

$$f'(x) = \cos(\quad) \cdot \square.$$

Μέσα στην παρένθεση πρέπει να βάλουμε την τιμή του $h \circ k(x)$· αυτή δεν είναι άλλη από το $\sin x^2$ (αυτό που παίρνουμε από την $\sin(\sin x^2)$ αν απαλείψουμε το πρώτο sin). Άρα η παράσταση της $f'(x)$ αρχίζει με

$$f'(x) = \cos(\sin x^2) \cdot \square.$$

Μπορούμε τώρα να ξεχάσουμε το πρώτο sin στην $\sin(\sin x^2)$· θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε αυτό που έχουμε βρει έως τώρα με την παράγωγο της συνάρτησης που η τιμή της στο x είναι $\sin x^2$ —αλλά αυτό είναι πάλι ένα πρόβλημα που ήδη ξέρουμε να λύνουμε:

$$f'(x) = \cos(\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$

Τέλος, να οι παράγωγοι μερικών άλλων συναρτήσεων που είναι συνθέσεις των sin και S, καθώς και κάποιων άλλων τριπλών συνθέσεων. Πιθανόν να «βλέπετε» αμέσως ότι οι απαντήσεις είναι σωστές —αν όχι, προσπαθήστε να γράψετε την f ως σύνθεση:

$$\begin{aligned}
\text{αν } f(x) &= \sin((\sin x)^2) && \text{τότε } f'(x) = \cos((\sin x)^2) \cdot 2 \sin x \cdot \cos x \\
f(x) &= [\sin(\sin x)]^2 && f'(x) = 2 \sin(\sin x) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x \\
f(x) &= \sin(\sin(\sin x)) && f'(x) = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x \\
f(x) &= \sin^2(x \sin x) && f'(x) = 2 \sin(x \sin x) \cdot \cos(x \sin x) \\
& && \qquad \cdot [\sin x + x \cos x] \\
f(x) &= \sin(\sin(x^2 \sin x)) && f'(x) = \cos(\sin(x^2 \sin x)) \cdot \cos(x^2 \sin x) \\
& && \qquad \cdot [2x \sin x + x^2 \cos x].
\end{aligned}$$

Ο κανόνας για τις συνθέσεις τεσσάρων (ή και περισσότερων) συναρτήσεων είναι εύκολος —πάντα (νοερά) βάλτε παρενθέσεις αρχίζοντας από τα δεξιά

$$f \circ (g \circ (h \circ k)),$$

και αρχίστε να ανάγετε τον υπολογισμό στην παραγώγιση μιας σύνθεσης μικρότερου αριθμού συναρτήσεων:

$$f'(g(h(k(x)))) \cdot \square.$$

Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \sin^2(\sin^2(x)) \qquad [f = S \circ \sin \circ S \circ \sin = S \circ (\sin \circ (S \circ \sin))]$$

τότε

$$f'(x) = 2\sin(\sin^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x\cdot$$

αν

$$f(x) = \sin((\sin x^2)^2) \qquad [f = \sin \circ S \circ \sin \circ S = \sin \circ (S \circ (\sin \circ S))]$$

τότε

$$f'(x) = \cos((\sin x^2)^2) \cdot 2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x\cdot$$

αν

$$f(x) = \sin^2(\sin(\sin x)) \qquad \text{[συμπληρώστε το εσείς, αν χρειάζεται]}$$

τότε

$$f'(x) = 2\sin(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x.$$

Με αυτά τα παραδείγματα ως υπόβαθρο, χρειάζεστε ένα μόνο πράγμα για να γίνετε ένας τέλειος «παραγωγιστής» —εξάσκηση. Μπορείτε σίγουρα να τελειοποιηθείτε με τις ασκήσεις στο τέλος του κεφαλαίου, τώρα όμως ήρθε η μεγάλη στιγμή να αποδείξουμε τον Κανόνα της Αλυσίδας.

Οι επόμενοι συλλογισμοί, αν και δεν αποτελούν απόδειξη, υποδεικνύουν μερικά από τα τεχνάσματα που θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει κανείς, καθώς και μερικές από τις δυσκολίες που θα αντιμετώπιζε. Αρχίζουμε, βέβαια, με τον ορισμό:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h}.\end{aligned}$$

Κάπου εδώ θα θέλαμε να εμφανιστεί η παράσταση για την $g'(a)$. Μια άποψη είναι να το κάνουμε στα ίσα:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.$$

Αυτό δεν μοιάζει άσχημο, και φαίνεται ακόμα καλύτερο αν γράψουμε

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0} \frac{(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &\qquad = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a) + [g(a+h) - g(a)]) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.\end{aligned}$$

Το δεύτερο όριο είναι ο παράγοντας $g'(a)$ που θέλουμε. Αν θέσουμε $g(a+h) - g(a) = k$ (για να είμαστε ακριβείς θα έπρεπε να γράψουμε $k(h)$), τότε το πρώτο όριο είναι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k}.$$

Το όριο αυτό θα έπρεπε ίσως να είναι το $f'(g(a))$, γιατί από τη συνέχεια της g στο a, το k πηγαίνει στο 0 όταν πηγαίνει το h. Πραγματικά, μπορεί κανείς, και θα το κάνουμε και εμείς σε λίγο, να κάνει το συλλογισμό αυτό ακριβή. Υπάρχει ήδη, όμως, ένα πρόβλημα, που θα έχετε και εσείς παρατηρήσει αν είστε το είδος του ανθρώπου που δεν διαιρεί στα τυφλά. Ακόμα και για $h \neq 0$ θα μπορούσε να είναι $g(a+h) - g(a) = 0$, πράγμα που κάνει τη διαίρεση και τον πολλαπλασιασμό με $g(a+h) - g(a)$ να μην έχει έννοια. Είναι

αλήθεια ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για μικρό h, αλλά το $g(a+h)-g(a)$ θα μπορούσε να είναι 0 για οσοδήποτε μικρά h. Ο ευκολότερος τρόπος για να συμβεί κάτι τέτοιο είναι να έχουμε την g σταθερή συνάρτηση, $g(x)=c$. Τότε $g(a+h)-g(a)=0$ για κάθε h. Σε αυτήν την περίπτωση, η $f\circ g$ είναι επίσης σταθερή συνάρτηση, $(f\circ g)(x)=f(c)$, άρα ο Κανόνας της Αλυσίδας ισχύει στ' αλήθεια:

$$(f\circ g)'(a)=0=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Υπάρχουν όμως και μη σταθερές συναρτήσεις g για τις οποίες $g(a+h)-g(a)=0$ για οσοδήποτε μικρά h. Για παράδειγμα, αν $a=0$, η συνάρτηση g θα μπορούσε να είναι η

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, $g'(0)=0$ όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 9. Αν ο Κανόνας της Αλυσίδας είναι σωστός, θα πρέπει να έχουμε $(f\circ g)'(0)=0$ για κάθε παραγωγίσιμη f, και αυτό δεν είναι και τόσο προφανές. Μια απόδειξη του Κανόνα της Αλυσίδας μπορεί να γίνει αν μελετήσουμε αυτές τις ιδιότροπες συναρτήσεις χωριστά, αλλά είναι ευκολότερο να εγκαταλείψουμε απλώς αυτήν την προσέγγιση και να χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9
(Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)

Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο a, και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(a)$, τότε η $f\circ g$ παραγωγίζεται στο a, και

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))\cdot g'(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ορίζουμε μια συνάρτηση ϕ ως εξής.

$$\phi(h)=\begin{cases}\dfrac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}, & \text{αν } g(a+h)-g(a)\neq 0\\ f'(g(a)), & \text{αν } g(a+h)-g(a)=0.\end{cases}$$

Διαισθητικά, πρέπει να είναι καθαρό ότι η ϕ είναι συνεχής στο 0. Όταν το h είναι μικρό, το $g(a+h)-g(a)$ είναι επίσης μικρό, άρα αν το $g(a+h)-g(a)$ δεν είναι μηδέν, τότε το $\phi(h)$ θα βρίσκεται κοντά στο $f'(g(a))\cdot$ και αν είναι μηδέν, τότε το $\phi(h)$ ισούται με $f'(g(a))$, κάτι ακόμα καλύτερο. Μια και η συνέχεια της ϕ είναι η καρδιά όλης της απόδειξης, θα δώσουμε μια προσεκτική μετάφραση αυτού του διαισθητικού ισχυρισμού.

Γνωρίζουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(a)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}=f'(g(a)).$$

Έτσι, αν $\varepsilon>0$ υπάρχει κάποιος αριθμός $\delta'>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε k,

$$(1)\quad \text{αν } 0<|k|<\delta',\ \text{τότε } \left|\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}-f'(g(a))\right|<\varepsilon.$$

Τώρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο a, άρα συνεχής στο a, επομένως υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε, για κάθε h,

$$(2)\quad \text{αν } |h|<\delta,\ \text{τότε } |g(a+h)-g(a)|<\delta'.$$

Πάρτε τώρα οποιοδήποτε h με $|h|<\delta$. Αν $k=g(a+h)-g(a)\neq 0$, τότε

$$\phi(h)=\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f(g(a)+k)-f(g(a))}{k}.$$

από την (2) έπεται ότι $|k| < \delta'$, άρα από την (1)

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $g(a+h)-g(a) = 0$, τότε $\phi(h) = f'(g(a))$, άρα είναι σίγουρα σωστό ότι

$$|\phi(h) - f'(g(a))| < \varepsilon.$$

Έχουμε επομένως αποδείξει ότι

$$\lim_{h\to 0} \phi(h) = f'(g(a)),$$

άρα η ϕ είναι συνεχής στο 0. Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι εύκολο. Αν $h \neq 0$, τότε έχουμε

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \phi(h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

ακόμα και αν $g(a+h) - g(a) = 0$ (γιατί σε αυτήν την περίπτωση και οι δύο πλευρές είναι 0). Επομένως

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \phi(h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a). \blacksquare\end{aligned}$$

Τώρα που μπορούμε να παραγωγίζουμε τόσες πολλές συναρτήσεις με ευκολία, μπορούμε να ρίξουμε άλλη μια ματιά στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Στο Κεφάλαιο 9 αποδείξαμε ότι $f'(0) = 0$, δουλεύοντας απευθείας με τον ορισμό (ο μόνος δυνατός τρόπος). Για $x \neq 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις μεθόδους αυτού του κεφαλαίου. Έχουμε

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Όπως δείχνει αυτός ο τύπος, η πρώτη παράγωγος f' συμπεριφέρεται πραγματικά άσχημα στο 0 —δεν είναι ούτε καν συνεχής. Αν αντί για αυτή θεωρήσουμε την

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

τότε

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin \dfrac{1}{x} - x \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η f' είναι συνεχής στο 0, αλλά η $f''(0)$ δεν υπάρχει (γιατί η παράσταση $3x^2 \sin 1/x$ ορίζει μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0, αλλά η παράσταση $-x \cos 1/x$ όχι).

Όπως ίσως υποψιάζεστε, αν μεγαλώσουμε και άλλο τη δύναμη του x παίρνουμε ακόμα μια βελτίωση. Αν

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

τότε

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin\dfrac{1}{x} - x^2 \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε, απευθείας από τον ορισμό, ότι $(f')'(0) = 0$, και η $f''(x)$ βρίσκεται εύκολα για $x \neq 0$:

$$f''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin\dfrac{1}{x} - 4x \cos\dfrac{1}{x} - 2x \cos\dfrac{1}{x} - \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η *δεύτερη* παράγωγος f'' δεν είναι συνεχής στο 0. Έως τώρα θα έχετε μαντέψει το μοντέλο που δύο από τα προβλήματα σας ζητούν να αποδείξετε: αν

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

τότε οι $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ υπάρχουν, αλλά η $f^{(n)}$ δεν είναι συνεχής στο 0· αν

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n+1} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

τότε οι $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ υπάρχουν, και η $f^{(n)}$) είναι συνεχής στο 0, αλλά η $f^{(n)}$ δεν παραγωγίζεται στο 0. Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ίσως ότι οι «λογικές» συναρτήσεις χαρακτηρίζονται από το αν έχουν υψηλής τάξης παραγώγους —όσο και αν προσπαθήσουμε να μεταμφιέσουμε την άπειρη ταλάντωση της $f(x) = \sin 1/x$, μια παράγωγος αρκετά υψηλής τάξης είναι ικανή να αποκαλύψει την κρυμμένη ανωμαλία. Δυστυχώς, θα δούμε αργότερα ότι πολύ χειρότερα πράγματα μπορούν να συμβούν.

Μετά από όλους αυτούς τους πολύπλοκους υπολογισμούς, θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια μικρή παρατήρηση. Συχνά είναι δελεαστικό και φαίνεται κομψότερο να γράψουμε μερικά από τα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου ως ισότητες ανάμεσα σε συναρτήσεις, και όχι τις τιμές τους. Έτσι, το Θεώρημα 3 θα μπορούσε να γραφεί

$$(f + g)' = f' + g',$$

το Θεώρημα 4 θα μπορούσε να γραφεί

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g,$$

και το Θεώρημα 9 συχνά εμφανίζεται στη μορφή

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

Μιλώντας αυστηρά, αυτές οι ισότητες μπορεί να μην ισχύουν, γιατί οι συναρτήσεις στην αριστερή πλευρά μπορεί να έχουν μεγαλύτερο πεδίο ορισμού από αυτές στη δεξιά. Δεν αξίζει όμως να ανησυχούμε για αυτό. Αν οι f και η g είναι παραγωγίσιμες παντού στα πεδία ορισμού τους, τότε αυτές οι ισότητες, και άλλες σαν και αυτές, *ισχύουν*, και αυτή είναι η μόνη περίπτωση για την οποία ενδιαφερόμαστε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για προθέρμανση, βρείτε το $f'(x)$ για κάθε μία από τις f που ακολουθούν. (Μη σας νοιάζει το πεδίο ορισμού της f ή της f'· βρείτε μόνο έναν τύπο για το $f'(x)$, που να δίνει τη σωστή απάντηση όταν έχει νόημα.)

(i) $f(x) = \sin(x + x^2)$.

(ii) $f(x) = \sin x + \sin x^2$.

(iii) $f(x) = \sin(\cos x)$.

(iv) $f(x) = \sin(\sin x)$.

(v) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

(vi) $f(x) = \dfrac{\sin(\cos x)}{x}$.

(vii) $f(x) = \sin(x + \sin x)$.

(viii) $f(x) = \sin(\cos(\sin x))$.

2. Βρείτε το $f'(x)$ για κάθε μία από τις f που ακολουθούν. (Ο συγγραφέας έκανε 20 λεπτά για να υπολογίσει τις παραγώγους για το παράρτημα με τις απαντήσεις, και εσείς δεν θα πρέπει να κάνετε πολύ περισσότερο. Αν και ο στόχος των μαθηματικών δεν είναι η ταχύτητα στους υπολογισμούς, αν θέλετε να ελπίζετε ότι θα αντιμετωπίσετε τις θεωρητικές εφαρμογές του Κανόνα της Αλυσίδας, αυτές οι συγκεκριμένες εφαρμογές θα πρέπει να είναι παιχνίδι για σας —οι μαθηματικοί έχουν την τάση να υποκρίνονται ότι δεν μπορούν ούτε να προσθέσουν, αλλά οι περισσότεροι από αυτούς μπορούν όταν πρέπει.)

(i) $f(x) = \sin((x + 1)^2(x + 2))$.

(ii) $f(x) = \sin^3(x^2 + \sin x)$.

(iii) $f(x) = \sin^2((x + \sin x)^2)$.

(iv) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$.

(v) $f(x) = \sin(x \sin x) + \sin(\sin x^2)$.

(vi) $f(x) = (\cos x)^{3^{1^2}}$.

(vii) $f(x) = \sin^2 x \sin x^2 \sin^2 x^2$.

(viii) $f(x) = \sin^3(\sin^2(\sin x))$.

(ix) $f(x) = (x + \sin^5 x)^6$.

(x) $f(x) = \sin(\sin(\sin(\sin x)))$.

(xi) $f(x) = \sin((\sin^7 x^7 + 1)^7)$.

(xii) $f(x) = (((x^2 + x)^3 + x)^4 + x)^5$.

(xiii) $f(x) = \sin(x^2 + \sin(x^2 + \sin x^2))$.

(xiv) $f(x) = \sin(6\cos(6\sin(6\cos 6x)))$.

(xv) $f(x) = \dfrac{\sin x^2 \sin^2 x}{1 + \sin x}$.

(xvi) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{2}{x + \sin x}}$.

(xvii) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x^3}{\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}\right)$.

(xviii) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{x - \sin\left(\dfrac{x}{x - \sin x}\right)}\right)$.

3. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων $\tan$, cotan , $\sec$, cosec . (Δεν χρειάζεται να θυμάστε αυτούς τους τύπους, αν και θα τους χρειάζεστε κάθε τόσο· αν εκφράσετε τα αποτελέσματά σας με τον κατάλληλο τρόπο, θα είναι απλά και κατά κάποιον τρόπο συμμετρικά.)

4. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις f, βρείτε την $f'(f(x))$ (*όχι* την $(f \circ f)'(x)$).

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(ii) $f(x) = \sin x$.

(iii) $f(x) = x^2$.

(iv) $f(x) = 17$.

5. Για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις f, βρείτε την $f(f'(x))$.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(ii) $f(x) = x^2$.

(iii) $f(x) = 17$.

(iv) $f(x) = 17x$.

6. Βρείτε την f' συναρτήσει της g' αν

(i) $f(x) = g(x + g(a))$.

(ii) $f(x) = g(x \cdot g(a))$.

(iii) $f(x) = g(x + g(x))$.

(iv) $f(x) = g(x)(x - a)$.

(v) $f(x) = g(a)(x - a)$.

(vi) $f(x + 3) = g(x^2)$.

7. (α) Ένα στρογγυλό αντικείμενο αυξάνει σε μέγεθος με έναν απροσδιόριστο τρόπο, αλλά είναι γνωστό πως όταν η ακτίνα είναι 6, ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας είναι 4. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν η ακτίνα είναι 6. (Αν με $r(t)$ και $A(t)$ παριστάνουμε την ακτίνα και το εμβαδόν τη χρονική στιγμή t, τότε οι συναρτήσεις r και A συνδέονται με την $A = \pi r^2$· αυτό που ζητάμε είναι μια απευθείας εφαρμογή του Κανόνα της Αλυσίδας.)

(β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι πληροφορούμαστε πως το στρογγυλό αντικείμενο που παρατηρούσαμε είναι στην πραγματικότητα η κάθετη τομή ενός σφαιρικού αντικειμένου. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του *όγκου* όταν η ακτίνα είναι 6. (Προφανώς θα χρειαστεί να ξέρετε τον τύπο που δίνει τον όγκο της σφαίρας· αν το έχετε ξεχάσει, ο όγκος είναι $\frac{4}{3}\pi$ φορές τον κύβο της ακτίνας).

(γ) Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της στρογγυλής τομής είναι 5 όταν η ακτίνα είναι 3. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου όταν η ακτίνα είναι 3. Θα πρέπει να μπορείτε να κάνετε αυτό το πρόβλημα με δύο τρόπους: πρώτα, χρησιμοποιώντας τους τύπους που δίνουν το εμβαδόν και τον όγκο ως συνάρτηση της ακτίνας· και μετά εκφράζοντας τον όγκο ως συνάρτηση του εμβαδού (για να χρησιμοποιήσετε αυτήν τη μέθοδο θα χρειαστείτε το Πρόβλημα 9-3).

8. Το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους είναι πάντοτε 9π in^2. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του μεγαλύτερου κύκλου είναι 10π in^2/sec. Πόσο γρήγορα αλλάζει το μήκος της περιφέρειας του μικρότερου κύκλου όταν έχει εμβαδόν 16π in^2;

9. Ένα σωματίδιο A κινείται κατά μήκος του θετικού οριζόντιου άξονα, και ένα σωματίδιο B κατά μήκος της γραφικής παράστασης της $f(x) = -\sqrt{3}\,x$, $x \leq 0$. Κάποια χρονική στιγμή, το A είναι στο σημείο (5,0) και έχει ταχύτητα 3 μονάδες/sec και το B σε απόσταση 3 μονάδων από την αρχή των αξόνων κινούμενο με ταχύτητα 4 μονάδων/sec. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των A και B;

10. Έστω $f(x) = x^2 \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ακόμα ότι h και k είναι δύο συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$h'(x) = \sin^2(\sin(x+1)) \qquad k'(x) = f(x+1)$$
$$h(0) = 3 \qquad\qquad\qquad k(0) = 0.$$

Βρείτε τα

(i) $(f \circ h)'(0)$.

(ii) $(k \circ f)'(0)$.

(iii) $\alpha'(x^2)$, όπου $\alpha(x) = h(x^2)$. Δείξτε μεγάλη προσοχή.

11. Βρείτε την $f'(0)$ αν

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

και

$$g(0) = g'(0) = 0.$$

12. Χρησιμοποιώντας την παράγωγο της $f(x) = 1/x$ που βρήκατε στο Πρόβλημα 9-1, βρείτε την $(1/g)'(x)$ με τον Κανόνα της Αλυσίδας.

13. (α) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 9-3, βρείτε την $f'(x)$ για $-1 < x < 1$, αν $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(β) Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $(a, \sqrt{1-a^2}\,)$ τέμνει τη γραφική παράσταση μόνο σε αυτό το σημείο (και έτσι δείξτε ότι ο στοιχειώδης γεωμετρικός ορισμός της εφαπτομένης συμπίπτει με τον δικό μας).

14. Ομοίως αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες σε μια έλλειψη ή μια υπερβολή τέμνουν αυτά τα σημειοσύνολα μόνο μια φορά.

15. Αν η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο a, είναι αναγκαστικά οι f και g παραγωγίσιμες στο a; Αν η $f \cdot g$ και η f είναι παραγωγίσιμες στο a, ποιες συνθήκες για την f εξασφαλίζουν ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο a;

16. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε και η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a, αρκεί να ισχύει $f(a) \neq 0$.

(β) Δώστε ένα αντιπαράδειγμα αν $f(a) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι παραγωγίσιμες στο a, τότε οι συναρτήσεις $\max(f,g)$ και $\min(f,g)$ παραγωγίζονται στο a, αρκεί να είναι $f(a) \neq g(a)$.

(δ) Δώστε ένα αντιπαράδειγμα αν $f(a) = g(a)$.

17. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων f και g τέτοιο ώστε η g να παίρνει όλες τις τιμές, η $f \circ g$ και η g να είναι παραγωγίσιμες, αλλά η f να μην είναι παραγωγίσιμη. (Το πρόβλημα καταντά τετριμμένο αν δεν απαιτήσουμε η g να παίρνει όλες τις τιμές· η g θα μπορούσε να είναι απλώς μια σταθερή συνάρτηση, ή μια συνάρτηση που παίρνει τιμές μόνο σε κάποιο διάστημα (a, b), στην οποία περίπτωση η συμπεριφορά της f έξω από το (a, b) δεν μας ενδιαφέρει.)

18. (α) Αν $g = f^2$ βρείτε έναν τύπο για την g' (που να περιέχει την f').

(β) Αν $g = (f')^2$, βρείτε έναν τύπο για την g' (που να περιέχει την f'').

(γ) Έστω ότι η συνάρτηση $f > 0$ έχει την ιδιότητα

$$(f')^2 = f + \frac{1}{f^3}.$$

Βρείτε έναν τύπο για την f'' συναρτήσει της f. (Πέρα από τους απλούς υπολογισμούς, σε ένα σημείο απαιτείται λίγη προσοχή.)

19. Αν η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και $f'(x) \neq 0$, η *κατά Schwarz παράγωγος* της f στο x ορίζεται σαν

$$\mathscr{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

(α) Δείξτε ότι

$$\mathscr{D}(f \circ g) = [\mathscr{D}f \circ g] \cdot g'^2 + \mathscr{D}g.$$

(β) Δείξτε ότι αν $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, με $ad - bc \neq 0$, τότε $\mathscr{D}f = 0$. Επομένως, $\mathscr{D}(f \circ g) = \mathscr{D}g$.

20. Έστω ότι η $f^{(n)}(a)$ και η $g^{(n)}(a)$ υπάρχουν. Αποδείξτε τον *τύπο του Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a).$$

∗**21.** Αποδείξτε ότι αν η $f^{(n)}(g(a))$ και η $g^{(n)}(a)$ υπάρχουν και οι δύο, τότε υπάρχει η $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Αν πειραματιστείτε λίγο θα πεισθείτε ότι δεν είναι φρόνιμο να αναζητήσουμε έναν τύπο για την $(f \circ g)^{(n)}(a)$. Για να δείξετε επομένως ότι η $(f \circ g)^{(n)}(a)$ υπάρχει, θα πρέπει να σκεφτείτε κάποιον λογικό ισχυρισμό για την $(f \circ g)^{(n)}(a)$ που να μπορεί να αποδειχθεί με επαγωγή. Δοκιμάστε κάτι σαν: «η $(f \circ g)^{(n)}(a)$ υπάρχει και είναι ένα άθροισμα όρων, ο καθένας από τους οποίους είναι γινόμενο όρων της μορφής ...».

22. (α) Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ βρείτε μια συνάρτηση g τέτοια ώστε $g' = f$. Βρείτε και άλλη μία.

(β) Αν

$$f(x) = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots + \frac{b_m}{x^m},$$

βρείτε μια συνάρτηση g με $g' = f$.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}$$

τέτοια ώστε $f'(x) = 1/x$;

23. Δείξτε ότι υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού n τέτοια ώστε

(α) $f'(x) = 0$ για ακριβώς $n-1$ αριθμούς x.

(β) $f'(x) = 0$ για κανένα x, αν ο n είναι περιττός.

(γ) $f'(x) = 0$ για ακριβώς ένα x, αν ο n είναι άρτιος.

(δ) $f'(x) = 0$ για ακριβώς k αριθμούς x, αν ο $n-k$ είναι περιττός.

24. (α) Λέμε ότι ο αριθμός a είναι **διπλή ρίζα** της πολυωνυμικής συνάρτησης f αν $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ για κάποια πολυωνυμική συνάρτηση g. Αποδείξτε ότι ο a είναι διπλή ρίζα της f αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα ρίζα της f και της f'.

(β) Πότε έχει η $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ διπλή ρίζα; Τί λέει αυτή η συνθήκη γεωμετρικά;

25. Αν η f παραγωγίζεται στο a, έστω $d(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$. Βρείτε την $d'(a)$. Σε συνδυασμό με το Πρόβλημα 24, αυτό δίνει μια άλλη λύση για το Πρόβλημα 9-20.

∗**26.** Αυτό το πρόβλημα πάει μαζί με το Πρόβλημα 3-6. Έστω $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ δοθέντες αριθμοί.

(α) Αν οι $x_1, \ldots, x_n$ είναι διακεκριμένοι αριθμοί, αποδείξτε ότι υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $2n-1$, τέτοια ώστε $f(x_j) = f'(x_j) = 0$ για $j \neq i$, και $f(x_i) = a_i$ και $f'(x_i) = b_i$. Υπόδειξη: Θυμηθείτε το Πρόβλημα 24.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $2n-1$ με $f(x_i) = a_i$ και $f'(x_i) = b_i$ για κάθε i.

∗**27.** Έστω ότι a και b είναι δύο διαδοχικές ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f, αλλά ότι ο a και ο b δεν είναι διπλές ρίζες, οπότε μπορούμε να γράψουμε $f(x) = (x-a)(x-b)g(x)$ όπου $g(a) \neq 0$ και $g(b) \neq 0$.

(α) Αποδείξτε ότι το $g(a)$ και το $g(b)$ έχουν το ίδιο πρόσημο. (Θυμηθείτε ότι ο a και ο b είναι διαδοχικές ρίζες.)

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός x με $a < x < b$ και $f'(x) = 0$. (Σχεδιάστε και μια εικόνα για να τονίσετε το γεγονός.) Υπόδειξη: Συγκρίνετε τα πρόσημα των $f'(a)$ και $f'(b)$.

(γ) Αποδείξτε τώρα το ίδιο πράγμα, ακόμα και αν οι a και b είναι πολλαπλές ρίζες. Υπόδειξη: Αν $f(x) = (x-a)^m (x-b)^n g(x)$ όπου $g(a) \neq 0$ και $g(b) \neq 0$, θεωρήστε την πολυωνυμική συνάρτηση $h(x) = f'(x)/(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$.

Αυτό το θεώρημα αποδείχθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Rolle, σε σχέση με το πρόβλημα της προσέγγισης των ριζών πολυωνύμων, αλλά αρχικά το αποτέλεσμα δεν διατυπώθηκε μέσω των παραγώγων. Και μάλιστα ο Rolle ήταν ένας από τους μαθηματικούς που ποτέ δεν δέχθηκαν τις καινούργιες ιδέες του Απειροστικού Λογισμού. Δεν ήταν μια στενοκέφαλη στάση, αν σκεφτούμε ότι επί εκατό χρόνια κανένας δεν μπορούσε να ορίσει τα όρια χωρίς μια δόση μυστηρίου, αλλά η Ιστορία φάνηκε πολύ γενναιόδωρη στον Rolle· το όνομά του συνδέθηκε με ένα πολύ πιο γενικό αποτέλεσμα, που θα εμφανιστεί στο επόμενο κεφάλαιο, και το οποίο αποτελεί τη βάση για τα πιο σπουδαία θεωρητικά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού.

28. Έστω ότι $f(x) = xg(x)$ για κάποια συνάρτηση g που είναι συνεχής στο 0. Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο 0, και βρείτε την $f'(0)$ συναρτήσει της g.

29. Έστω ότι η f παραγωγίζεται στο 0, και ότι $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $f(x) = xg(x)$ για κάποια συνάρτηση g που είναι συνεχής στο 0. Υπόδειξη: Τί συμβαίνει αν προσπαθήσετε να γράψετε $g(x) = f(x)/x$;

30. Αν $f(x) = x^{-n}$ για n στο $\mathbf{N}$, αποδείξτε ότι

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} x^{-n-k}$$
$$= (-1)^k k! \binom{n+k-1}{k} x^{-n-k}, \quad \text{για } x \neq 0.$$

∗**31.** Αποδείξτε ότι είναι αδύνατο να γράψουμε $x = f(x)g(x)$ όπου η f και η g είναι παραγωγίσιμες και $f(0) = g(0) = 0$. Υπόδειξη: Παραγωγίστε.

32. Ποια είναι η $f^{(k)}(x)$ αν

(α) $f(x) = 1/(x-a)^n$;

∗(β) $f(x) = 1/(x^2-1)$;

∗**33.** Θέτουμε $f(x) = x^{2n} \sin 1/x$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι οι

$$f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$$

υπάρχουν, και ότι η $f^{(n)}$ δεν είναι συνεχής στο 0. (Θα συναντήσετε την ίδια βασική δυσκολία με αυτή στο Πρόβλημα 21.)

∗**34.** Θέτουμε $f(x) = x^{2n+1} \sin 1/x$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι οι $f'(0), \ldots, f^{(n)}(0)$ υπάρχουν, ότι η $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο 0, και ότι η $f^{(n)}$ δεν παραγωγίζεται στο 0.

35. Με τον συμβολισμό του Leibniz, ο Κανόνας της Αλυσίδας θα έπρεπε να διαβάζεται:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}.$$

Αντί για αυτό, συνήθως συναντάμε την εξής πρόταση: «Έστω $y = g(x)$ και $z = f(y)$. Τότε

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.»$$

Παρατηρήστε ότι το z στο dz/dx συμβολίζει τη σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$, ενώ το z στο dz/dy συμβολίζει τη συνάρτηση f· εννοείται ακόμα ότι το dz/dy θα είναι «μια παράσταση που περιέχει το y», και ότι στην τελική απάντηση θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το y με $g(x)$. Σε καθεμιά από τις περιπτώσεις που ακολουθούν, βρείτε το dz/dx χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο· μετά συγκρίνετε με το Πρόβλημα 1.

(i) $z = \sin y, \quad y = x + x^2.$

(ii) $z = \sin y, \quad y = \cos x.$

(iii) $z = \sin u, \quad u = \sin x.$

(iv) $z = \sin v, \quad v = \cos u, \quad u = \sin x.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Ένας στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να δικαιολογήσουμε τον χρόνο που αφιερώσαμε μαθαίνοντας να βρίσκουμε την παράγωγο μιας συνάρτησης. Όπως θα δούμε, αν κάποιος ξέρει λίγα πράγματα για την f', τότε έχει πολλές πληροφορίες για την f. Το να αποσπάσουμε όμως πληροφορίες για την f με βάση κάποιες πληροφορίες για την f' απαιτεί αρκετή και δύσκολη δουλειά, και θα ξεκινήσουμε με ένα θεώρημα που είναι πραγματικά εύκολο.

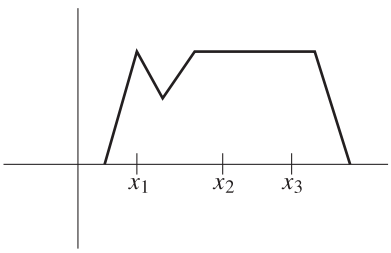
Το θεώρημα αυτό αφορά στη μέγιστη τιμή μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα. Αν και άτυπα χρησιμοποιήσαμε αυτόν τον όρο στο Κεφάλαιο 7, πρέπει τώρα να γίνουμε ακριβείς, και να γενικεύσουμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση και A ένα σύνολο αριθμών που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Ένα σημείο x στο A είναι **σημείο μεγίστου** της f στο A, αν

$$f(x) \geq f(y) \quad \text{για κάθε } y \text{ στο } A.$$

Ο αριθμός $f(x)$ λέγεται η **μέγιστη τιμή** της f στο A (λέμε ακόμα ότι η f «έχει τη μέγιστη της τιμή στο A στο σημείο x»).



ΣΧΗΜΑ 1

Παρατηρήστε ότι η μέγιστη τιμή της f στο A θα μπορούσε να είναι το $f(x)$ για πολλά διαφορετικά x (Σχήμα 1)· με άλλα λόγια, μια συνάρτηση f μπορεί να έχει πολλά διαφορετικά σημεία μεγίστου στο A, αν και η μέγιστη τιμή της είναι το πολύ μία. Ενδιαφερόμαστε συνήθως για την περίπτωση που το A είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$· αν η f είναι συνεχής, τότε το Θεώρημα 7-3 εγγυάται ότι η f έχει πραγματικά μια μέγιστη τιμή στο $[a, b]$.

Ο ορισμός του ελαχίστου της f στο A αφήνεται σε σας. (Ένας πιθανός ορισμός είναι ο ακόλουθος: η f έχει ελάχιστο στο A στο x, αν η $-f$ έχει μέγιστο στο A στο x.)

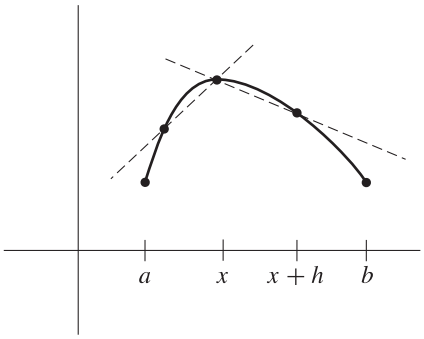
Είμαστε τώρα έτοιμοι για ένα θεώρημα που δεν βασίζεται καν στην ύπαρξη ελαχίστων άνω φραγμάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο (a, b). Αν x είναι σημείο μεγίστου (ή ελαχίστου) για την f στο (a, b), και η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε $f'(x) = 0$.
(Σημειώνουμε ότι δεν υποτίθεται η παραγωγισιμότητα, ούτε καν η συνέχεια της f σε άλλα σημεία.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία η f έχει μέγιστο στο x. (Το Σχήμα 2 παρουσιάζει την απλή ιδέα που κρύβεται πίσω από την όλη απόδειξη —οι τέμνουσες που περνούν από σημεία αριστερά του $(x, f(x))$ έχουν κλίσεις ≥ 0, και οι τέμνουσες που περνούν από σημεία δεξιά του $(x, f(x))$ έχουν κλίσεις ≤ 0. Αναλυτικά, ο συλλογισμός αυτός έχει ως εξής:

Αν h είναι οποιοσδήποτε αριθμός τέτοιος ώστε το $x + h$ να βρίσκεται στο (a, b), τότε

$$f(x) \geq f(x + h),$$



ΣΧΗΜΑ 2

αφού η f έχει μέγιστο στο (a, b) στο x. Αυτό σημαίνει ότι

$$f(x + h) - f(x) \leq 0.$$

Έτσι, αν $h > 0$ έχουμε

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

άρα και

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $h < 0$, έχουμε

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

άρα

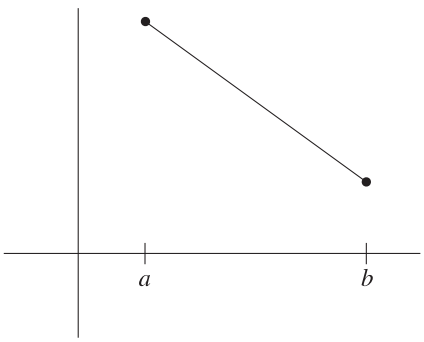
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Από την υπόθεση, η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα αυτά τα δύο όρια πρέπει να είναι ίσα, και ασφαλώς ίσα με την $f'(x)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad f'(x) \geq 0,$$

από όπου έπεται ότι $f'(x) = 0$.

Η περίπτωση στην οποία η f έχει ελάχιστο στο x αφήνεται σε σας (δώστε μια απόδειξη σε μια γραμμή). ∎



ΣΧΗΜΑ 3

Παρατηρήστε (Σχήμα 3) ότι δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το (a, b) με το $[a, b]$ στην εκφώνηση του θεωρήματος (εκτός αν προσθέσουμε στις υποθέσεις τον όρο ότι το x βρίσκεται στο (a, b)).

Επειδή η $f'(x)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f κοντά στο x, είναι σχεδόν προφανές το πώς μπορούμε να πάρουμε μια ισχυρότερη έκδοση του Θεωρήματος 1. Αρχίζουμε με έναν ορισμό που εξηγείται στο Σχήμα 4.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση, και A ένα σύνολο αριθμών που περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Ένα σημείο x στο A λέγεται **σημείο τοπικού μεγίστου** [**ελαχίστου**] για την f στο A, αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το x να είναι σημείο μεγίστου [ελαχίστου] για την f στο $A \cap (x - \delta, x + \delta)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν το x είναι ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο για την f στο (a, b) και η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε $f'(x) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα έπρεπε να είστε σε θέση να δείτε γιατί αυτή είναι μια απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 1. ∎

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 2 σαφώς δεν ισχύει —μπορεί η $f'(x)$ να είναι 0, ακόμα και αν το x δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου για την f. Το απλούστερο παράδειγμα δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^3$· Τότε $f'(0) = 0$, αλλά η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο πουθενά.

Τα περισσότερο ίσως διαδεδομένα σφάλματα στον Απειροστικό Λογισμό έχουν σχέση με τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης f κοντά σε ένα x στο οποίο $f'(x) = 0$. Το σχόλιο που κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο ξεχνιέται τόσο γρήγορα από αυτούς που θέλουν τον κόσμο απλούστερο από ό,τι είναι, που θα το επαναλάβουμε: το αντίστροφο του Θεωρήματος 2 *δεν* ισχύει —η συνθήκη $f'(x) = 0$ *δεν* αρκεί για να είναι

το x σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, υιοθετούμε κάποια επιπλέον ορολογία για να περιγράψουμε τους αριθμούς x που ικανοποιούν τη συνθήκη $f'(x) = 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

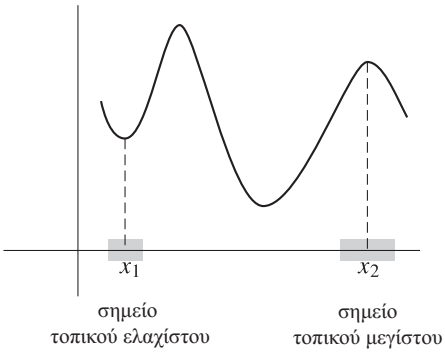
Κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f είναι ένας αριθμός x τέτοιος ώστε

$$f'(x) = 0.$$

Ο αριθμός $f(x)$ λέγεται τότε **κρίσιμη τιμή** της f.

Οι κρίσιμες τιμές της f, καθώς και λίγοι ακόμα αριθμοί, είναι τελικά αυτοί που πρέπει να μελετήσουμε για να βρούμε τα μέγιστα και τα ελάχιστα δοθείσας συνάρτησης f. Για τους αμύητους, η εύρεση της μεγίστης και της ελαχίστης τιμής μιας συνάρτησης είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα στον Απειροστικό Λογισμό και δεν υπάρχει καμία αντίρρηση ότι τα προβλήματα αυτού του είδους έχουν γούστο (μέχρι να λύσει κανείς τα πρώτα εκατό του, ή κάτι τέτοιο).

Ας εξετάσουμε πρώτα το πρόβλημα της εύρεσης του μεγίστου ή του ελαχίστου της f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. (Τότε, αν η f είναι συνεχής, μπορούμε τουλάχιστον να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.) Για να εντοπίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f πρέπει να εξετάσουμε τρία είδη σημείων:



ΣΧΗΜΑ 4

(1) Τα κρίσιμα σημεία της f στο $[a, b]$.

(2) Τα άκρα a και b.

(3) Τα σημεία x στο $[a, b]$ όπου η f δεν παραγωγίζεται.

Αν το x είναι σημείο μεγίστου ή σημείο ελαχίστου της f στο $[a, b]$, το x πρέπει να ανήκει σε μια από τις τρεις κλάσεις που μόλις αναφέραμε: γιατί, αν το x δεν ανήκει στη δεύτερη ή στην τρίτη ομάδα, τότε το x *βρίσκεται* στο (a, b) και η f είναι παραγωγίσιμη στο x· επομένως $f'(x) = 0$ από το Θεώρημα 1, και αυτό σημαίνει ότι το x ανήκει στην πρώτη ομάδα.

Αν υπάρχουν πολλά σημεία σε αυτές τις τρεις κατηγορίες, το να ψάξει κανείς το μέγιστο και το ελάχιστο της f ίσως είναι μάταιος κόπος· αν όμως υπάρχουν λίγα κρίσιμα σημεία, και λίγα σημεία στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη, η διαδικασία γίνεται τελείως άμεση: βρίσκει κανείς το $f(x)$ για κάθε x που ικανοποιεί την $f'(x) = 0$, και το $f(x)$ για κάθε x στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη, και τέλος τα $f(a)$ και $f(b)$. Ο μεγαλύτερος από αυτούς τους αριθμούς θα είναι η μέγιστη τιμή της f, και ο μικρότερος θα είναι η ελάχιστη. Να ένα απλό παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - x$$

στο διάστημα $[-1, 2]$. Για να αρχίσουμε κάπως, είναι

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

άρα $f'(x) = 0$ όταν $3x^2 - 1 = 0$, δηλαδή όταν

$$x = \sqrt{1/3} \quad \text{ή} \quad -\sqrt{1/3}.$$

Οι αριθμοί $\sqrt{1/3}$ και $-\sqrt{1/3}$ βρίσκονται και οι δύο στο $[-1, 2]$, άρα η πρώτη ομάδα των υποψηφίων για τη θέση του μεγίστου και του ελαχίστου είναι

$$(1) \quad \sqrt{1/3},\ -\sqrt{1/3}.$$

Η δεύτερη ομάδα περιέχει τα άκρα του διαστήματος

$$(2) \quad -1,\ 2.$$

Η τρίτη ομάδα είναι κενή, γιατί η f παραγωγίζεται παντού. Το τελικό βήμα είναι να υπολογίσουμε τα

$$\begin{aligned} f(\sqrt{1/3}) &= (\sqrt{1/3})^3 - \sqrt{1/3} = \tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} - \sqrt{1/3} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{1/3}, \\ f(-\sqrt{1/3}) &= (-\sqrt{1/3})^3 - (-\sqrt{1/3}) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{1/3} + \sqrt{1/3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1/3}, \\ f(-1) &= 0, \\ f(2) &= 6. \end{aligned}$$

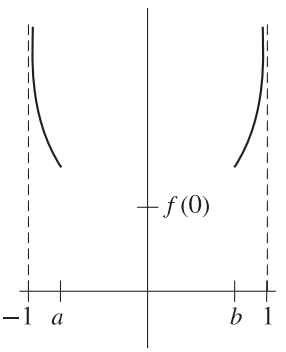
Είναι φανερό ότι η ελάχιστη τιμή είναι $-\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$ στο σημείο $\sqrt{1/3}$, και η μέγιστη τιμή 6 στο σημείο 2.

Αυτού του είδους η διαδικασία, όταν είναι εφικτή, εντοπίζει πάντοτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα. Αν όμως η συνάρτηση που εξετάζουμε δεν είναι συνεχής, ή αν ζητάμε το μέγιστο ή το ελάχιστο σε ένα ανοικτό διάστημα ή σε όλη την ευθεία, τότε δεν είμαστε βέβαιοι από πριν, ούτε για το αν υπάρχει η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή, οπότε όλες οι πληροφορίες που παίρνουμε με αυτήν τη διαδικασία μπορεί να μη σημαίνουν τίποτα. Και πάλι όμως, μια σχετική ευστροφία μπορεί συχνά να αποκαλύψει τη φύση των πραγμάτων. Στο Κεφάλαιο 7 λύσαμε ακριβώς ένα τέτοιο πρόβλημα, όταν αποδείξαμε ότι, αν ο n είναι άρτιος, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

έχει ελάχιστη τιμή σε ολόκληρη την ευθεία. Αυτό σημαίνει ότι η ελάχιστη τιμή παίρνεται για έναν αριθμό x που ικανοποιεί την

$$0 = f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$



ΣΧΗΜΑ 5

Αν καταφέρουμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, και συγκρίνουμε τις τιμές του $f(x)$ για αυτά τα x, βρίσκουμε όντως την ελάχιστη τιμή της f. Ίσως βοηθήσει ένα ακόμα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο και το ελάχιστο, αν υπάρχουν, της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

στο ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

άρα $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 0$. Βλέπουμε αμέσως ότι, για x κοντά στο 1 ή στο -1 οι τιμές του $f(x)$ γίνονται οσοδήποτε μεγάλες, οπότε η f σαφώς δεν έχει μέγιστο. Με αυτήν την παρατήρηση είναι εύκολο να δείξουμε ότι η f έχει ελάχιστο στο 0. Παρατηρούμε απλώς (Σχήμα 5) ότι θα υπάρχουν αριθμοί a και b, με

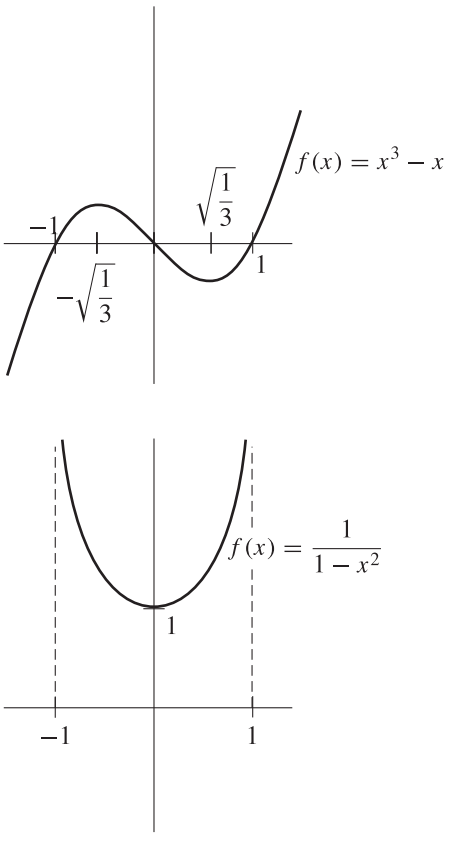
$$-1 < a < 0 \quad \text{και} \quad 0 < b < 1,$$

τέτοιοι ώστε $f(x) > f(0)$ για

$$-1 < x \le a \quad \text{και} \quad b \le x < 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το ελάχιστο της f στο $[a, b]$ είναι το ελάχιστο της f σε όλο το $(-1, 1)$. Τώρα, στο $[a, b]$ το ελάχιστο συμβαίνει είτε στο 0 (το μόνο σημείο όπου $f' = 0$), ή στο a ή το b, και αφού τα a και b έχουν ήδη αποκλειστεί, η ελάχιστη τιμή είναι το $f(0) = 1$.

Προσπαθώντας να λύσουμε τα προηγούμενα προβλήματα, σκόπιμα δεν σχεδιάσαμε τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^3 - x$ και $f(x) = 1/(1-x^2)$, δεν είναι όμως κλέψιμο το να σχεδιάσει κανείς τις γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 6), αρκεί να μη στηριχθεί στην εικόνα και μόνο για να αποδείξει κάτι. Και μάλιστα, θα αναπτύξουμε τώρα μια μέθοδο με την οποία μπορούμε να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που μας δίνει πραγματικά πολλές πληροφορίες για τα μέγιστα και τα ελάχιστα —που μας



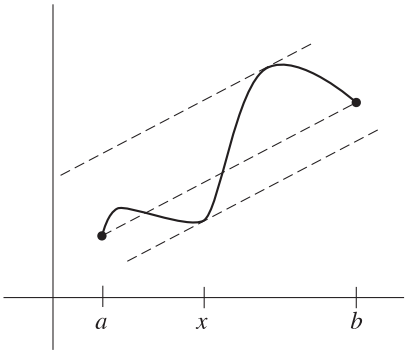
ΣΧΗΜΑ 6

επιτρέπει να εντοπίσουμε ακόμα και τα *τοπικά* μέγιστα και ελάχιστα. Αυτή η μέθοδος παίρνει υπόψη της το πρόσημο της $f'(x)$, και βασίζεται σε μερικά βαθιά θεωρήματα.

Τα θεωρήματα που έχουμε αποδείξει έως τώρα για τις παραγώγους πάντοτε δίνουν πληροφορίες για την f' με βάση ορισμένες πληροφορίες για την f. Αυτό ισχύει ακόμα και για το Θεώρημα 1, αν και αυτό το θεώρημα μπορούμε μερικές φορές να το χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε κάποια στοιχεία για την f, δηλαδή τη θέση των μεγίστων και ελαχίστων. Όταν αναφερθήκαμε για πρώτη φορά στην παράγωγο, τονίσαμε ότι η $f'(x)$ δεν είναι το $[f(x+h)-f(x)]/h$ για κάποιο ιδιαίτερο h, αλλά το όριο αυτών των αριθμών όταν το h τείνει στο 0· αυτό το γεγονός έχει οδυνηρές συνέπειες όταν κάποιος προσπαθεί να αποσπάσει πληροφορίες για την f από πληροφορίες για την f'. Η απλούστερη και πιο αποθαρρυντική προειδοποίηση για τις δυσκολίες που μπορούν να εμφανιστούν παρέχεται από το εξής πρόβλημα: αν $f'(x) = 0$ για κάθε x, είναι αναγκαστικά η f σταθερή συνάρτηση; Είναι αδύνατο να φανταστεί κανείς τι άλλο θα μπορούσε να είναι η f, και αυτή η πεποίθηση ενισχύεται αν καταφύγουμε στη φυσική ερμηνεία —αν η ταχύτητα ενός σώματος είναι διαρκώς 0, το σωματίδιο πρέπει αναγκαστικά να μένει ακίνητο! Παρ' όλα αυτά, είναι πολύ δύσκολο ακόμα και να επιχειρήσει κανείς να αποδείξει ότι μόνο οι σταθερές συναρτήσεις ικανοποιούν την $f'(x) = 0$ για κάθε x. Η υπόθεση $f'(x) = 0$ σημαίνει απλώς ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0,$$

και δεν είναι καθόλου φανερό πώς μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος την πληροφορία για αυτό το όριο για να εξαγάγει πληροφορίες για τη συνάρτηση.

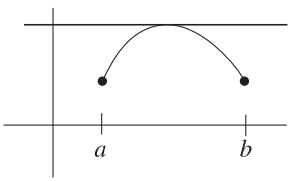


ΣΧΗΜΑ 7

Το γεγονός ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση αν $f'(x) = 0$ για κάθε x, και πολλά άλλα αποτελέσματα αυτού του είδους, όλα προκύπτουν από ένα θεμελιώδες θεώρημα, που λέγεται Θεώρημα Μέσης Τιμής, και το οποίο υποστηρίζει πολύ ισχυρότερα πράγματα. Το Σχήμα 7 μας προδιαθέτει να πιστέψουμε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, τότε υπάρχει κάποιο x στο (a, b) τέτοιο ώστε

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι κάποια εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία που περνά από τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής εξασφαλίζει ότι αυτό ισχύει —υπάρχει κάποιο x στο (a, b) τέτοιο ώστε η $f'(x)$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f στο x, ισούται ακριβώς με τη «μέση» μεταβολή της f στο $[a, b]$, η οποία μεταβολή είναι ίση με $[f(b) - f(a)]/[b - a]$. (Για παράδειγμα, αν ταξιδέψεις 60 χιλιόμετρα σε μια ώρα, τότε κάποια χρονική στιγμή πρέπει να ταξίδευες με ταχύτητα ακριβώς 60 χιλιομέτρων την ώρα.) Αυτό το θεώρημα είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρητικά εργαλεία του Απειροστικού Λογισμού —ίσως το βαθύτερο αποτέλεσμα όσον αφορά στις παραγώγους. Από αυτά τα λόγια ίσως βγάζετε το συμπέρασμα ότι η απόδειξη είναι δύσκολη, αλλά εδώ πέφτετε έξω —τα δύσκολα θεωρήματα αυτού του βιβλίου έχουν εξαντληθεί εδώ και καιρό, από το Κεφάλαιο 7. Είναι αλήθεια ότι, αν προσπαθήσετε να αποδείξετε μόνοι σας το Θεώρημα Μέσης Τιμής πιθανόν να αποτύχετε, αλλά αυτό δεν σημαίνει ούτε ότι το θεώρημα είναι δύσκολο, ούτε βέβαια ότι θα έπρεπε να ντρέπεστε. Η πρώτη απόδειξη του θεωρήματος ήταν ένα επίτευγμα, αλλά στις μέρες μας είμαστε σε θέση να δώσουμε μια απόδειξη πολύ απλή. Θα βοηθούσε να αρχίσουμε με μια πολύ ειδική περίπτωση.



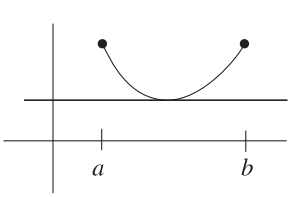
ΣΧΗΜΑ 8

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει ένας αριθμός x στο (a, b) τέτοιος ώστε $f'(x) = 0$.

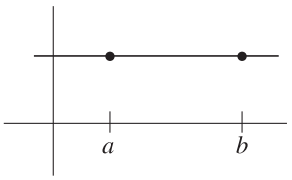
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τη συνέχεια της f στο $[a, b]$ συμπεραίνουμε ότι η f έχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η μέγιστη τιμή παίρνεται σε ένα σημείο x στο (a, b). Τότε $f'(x) = 0$ από το Θεώρημα 1, και τελειώσαμε (Σχήμα 8).

Ας υποθέσουμε πάλι ότι η ελάχιστη τιμή της f παίρνεται σε κάποιο σημείο x στο (a, b). Τότε, ομοίως, $f'(x) = 0$ από το Θεώρημα 1 (Σχήμα 9).

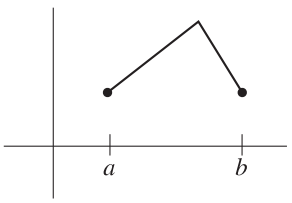


ΣΧΗΜΑ 9



ΣΧΗΜΑ 10

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή παίρνονται και οι δύο στα άκρα. Αφού $f(a) = f(b)$, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίσες, άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση (Σχήμα 10), και για μια σταθερή συνάρτηση μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε x στο (a, b). ∎



ΣΧΗΜΑ 11

Παρατηρήστε ότι χρειαστήκαμε ουσιαστικά την υπόθεση πως η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο (a, b) για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1. Χωρίς αυτήν την υπόθεση το θεώρημα δεν ισχύει (Σχήμα 11).

Ίσως αναρωτιέστε γιατί να έχει ένα ειδικό όνομα ένα θεώρημα με τόσο εύκολη απόδειξη σαν το Θεώρημα του Rolle. Ο λόγος είναι ότι, αν και το Θεώρημα του Rolle είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, δίνει όμως μια απλή απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Rolle στη συνάρτηση που δίνει το μήκος του κατακόρυφου τμήματος στο Σχήμα 12· αυτό είναι η διαφορά ανάμεσα στο $f(x)$, και το ύψος στο σημείο x της ευθείας L που περνά από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Αφού η L είναι η γραφική παράσταση της

$$g(x) = \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) + f(a),$$

θα μελετήσουμε την

$$f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) - f(a).$$

Η σταθερά $f(a)$ δεν παίζει κανένα ρόλο, όπως θα φανεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4
(ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε υπάρχει ένας αριθμός x στο (a, b) τέτοιος ώστε

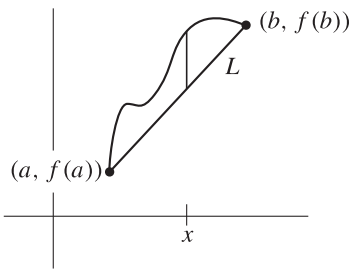
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a).$$

Η h είναι προφανώς συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), και

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a), \\ h(b) &= f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a) \\ &= f(a). \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 12

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Rolle στην h και να συμπεράνουμε ότι υπάρχει κάποιο x στο (a, b) τέτοιο ώστε

$$0 = h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

δηλαδή

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$ ∎

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής ταιριάζει και αυτό στο μοντέλο που διαμόρφωσαν τα προηγούμενα θεωρήματα —κάποιες πληροφορίες για την f, μας δίνουν πληροφορίες για την f'. Αυτή όμως η πληροφορία είναι τόσο ισχυρή, που μπορούμε τώρα πια να κινηθούμε και προς την αντίθετη κατεύθυνση.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 Αν η f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα και $f'(x) = 0$ για κάθε x στο διάστημα, τότε η f είναι σταθερή σε αυτό το διάστημα.

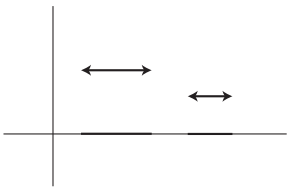
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω a και b δύο τυχαία σημεία στο διάστημα με $a \neq b$. Τότε υπάρχει κάποιο x στο (a, b) τέτοιο ώστε

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Αλλά $f'(x) = 0$ για όλα τα x στο διάστημα, άρα

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

και επομένως $f(a) = f(b)$. Έτσι, η τιμή της f σε δύο οποιαδήποτε σημεία του διαστήματος είναι η ίδια, δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα. ∎



ΣΧΗΜΑ 13

Φυσικά, το Πόρισμα 1 δεν ισχύει για συναρτήσεις ορισμένες σε δύο ή περισσότερα διαστήματα (Σχήμα 13).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 Αν οι f και g είναι ορισμένες στο ίδιο διάστημα, και $f'(x) = g'(x)$ για όλα τα x στο διάστημα, τότε υπάρχει κάποιος αριθμός c τέτοιος ώστε $f = g + c$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για κάθε x στο διάστημα έχουμε $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, άρα από το Πόρισμα 1, υπάρχει κάποιος αριθμός c τέτοιος ώστε $f - g = c$. ∎

Η διατύπωση του επομένου πορίσματος απαιτεί κάποια ορολογία, η οποία περιγράφεται στο Σχήμα 14.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f είναι **αύξουσα** σε ένα διάστημα αν $f(a) < f(b)$ όποτε a και b είναι δύο αριθμοί μέσα στο διάστημα με $a < b$. Η συνάρτηση f είναι **φθίνουσα** σε ένα διάστημα αν $f(a) > f(b)$ για κάθε a και b στο διάστημα με $a < b$. (Συχνά λέμε μόνο ότι η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα, οπότε ως διάστημα υποτίθεται ότι παίρνουμε το πεδίο ορισμού της f.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 3 Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x σε ένα διάστημα, τότε η f είναι αύξουσα στο διάστημα· αν $f'(x) < 0$ για όλα τα x σε ένα διάστημα, τότε η f είναι φθίνουσα στο διάστημα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε την περίπτωση $f'(x) > 0$. Έστω ότι a και b είναι δύο σημεία του διαστήματος με $a < b$. Τότε υπάρχει κάποιο x στο (a, b) με

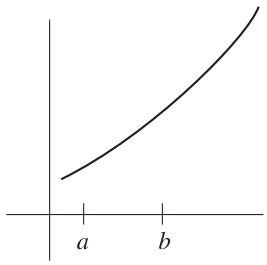
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Αλλά $f'(x) > 0$ για κάθε x στο (a, b), άρα

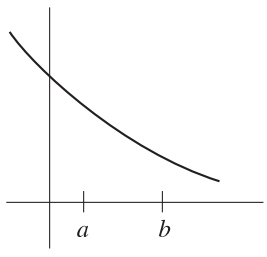
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Αφού $b - a > 0$, έπεται ότι $f(b) > f(a)$.

Η απόδειξη του πορίσματος, όταν $f'(x) < 0$ για κάθε x, αφήνεται σε σας. ∎



(α) αύξουσα συνάρτηση



(β) φθίνουσα συνάρτηση

ΣΧΗΜΑ 14

Παρατηρήστε ότι, ενώ τα αντίστροφα των Πορισμάτων 1 και 2 ισχύουν (και είναι προφανή), το αντίστροφο του Πορίσματος 3 δεν ισχύει. Αν η f είναι αύξουσα, είναι εύκολο να δούμε ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x, αλλά μπορεί να ισχύει και ισότητα για κάποια x (θεωρήστε την $f(x) = x^3$).

Το Πόρισμα 3 μας παρέχει αρκετές πληροφορίες για να πάρουμε μια καλή ιδέα για τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης χωρίς να σχεδιάσουμε πολλά σημεία. Ας πάρουμε, για μια ακόμα φορά, τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$. Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Έχουμε ήδη σημειώσει ότι $f'(x) = 0$ για $x = \sqrt{1/3}$ και $x = -\sqrt{1/3}$, και μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο του $f'(x)$ για όλα τα άλλα x. Παρατηρήστε ότι $3x^2 - 1 > 0$ ακριβώς όταν

$$\begin{aligned} 3x^2 &> 1 \\ x^2 &> \tfrac{1}{3}, \\ x > \sqrt{1/3} \quad &\text{ή} \quad x < -\sqrt{1/3}. \end{aligned}$$

άρα $3x^2 - 1 < 0$ ακριβώς όταν

$$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}.$$

Άρα η f είναι αύξουσα για $x < -\sqrt{1/3}$, φθίνουσα ανάμεσα στο $-\sqrt{1/3}$ και το $\sqrt{1/3}$, και πάλι αύξουσα για $x > \sqrt{1/3}$. Συνδυάζοντας αυτήν την πληροφορία με τα εξής στοιχεία

(1) $f(-\sqrt{1/3}) = \frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,

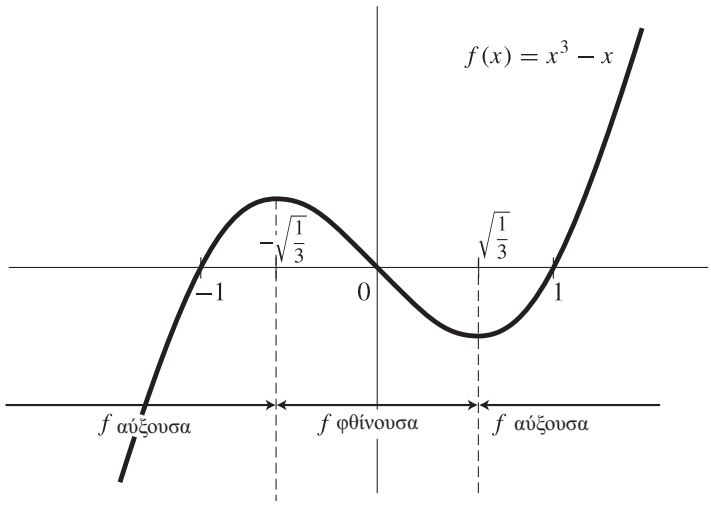
$f(\sqrt{1/3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,

(2) $f(x) = 0$ για $x = -1, 0, 1$,

(3) το $f(x)$ γίνεται μεγάλο όταν το x γίνεται μεγάλο, και πολύ αρνητικό όταν το x γίνεται πολύ αρνητικό,

είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε μια αρκετά καλή προσέγγιση της γραφικής παράστασης (Σχήμα 15).

Με την ευκαιρία, παρατηρήστε ότι θα μπορούσαμε να έχουμε βρει τα διαστήματα στα οποία η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα χωρίς να χρειαστεί να εξετάσουμε το πρόσημο της f'. Για παράδειγμα, αφού η f' είναι συνεχής, και μηδενίζεται μόνο στο $-\sqrt{1/3}$ και στο $\sqrt{1/3}$, ξέρουμε ότι η f' διατηρεί το ίδιο πρόσημο στο διάστημα $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$. Αφού $f(-\sqrt{1/3}) > f(\sqrt{1/3})$, έπεται ότι η f φθίνει σε αυτό το διάστημα. Ομοίως, η f' διατηρεί το πρόσημο στο $(\sqrt{1/3}, \infty)$ και το $f(x)$ είναι μεγάλο για μεγάλα x, άρα η f πρέπει να είναι αύξουσα στο $(\sqrt{1/3}, \infty)$. Αξίζει να σημειώσουμε κάτι ακόμα: Αν η f' είναι συνεχής, τότε το πρόσημο της f' στο διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά κρίσιμα σημεία προσδιορίζεται αν βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$ για *ένα* μόνο x σε αυτό το διάστημα.



ΣΧΗΜΑ 15

Το σκίτσο της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3 - x$ που κάναμε περιέχει αρκετές πληροφορίες ώστε να μας επιτρέπει να πούμε με αυτοπεποίθηση ότι το $-\sqrt{1/3}$ είναι

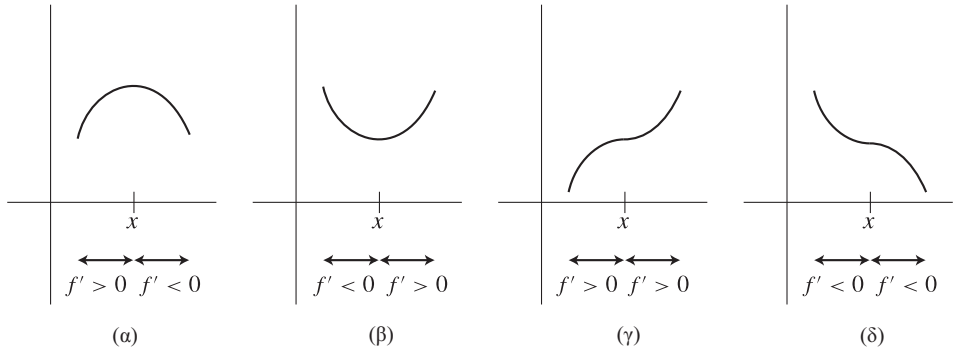
σημείο τοπικού μεγίστου, και το $\sqrt{1/3}$ σημείο τοπικού ελαχίστου. Και μάλιστα, είμαστε σε θέση να δώσουμε μια γενική αρχή για να διακρίνουμε αν ένα κρίσιμο σημείο είναι σημείο τοπικού μεγίστου, ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ή τίποτε από τα δύο (Σχήμα 16):

(1) αν $f' > 0$ σε κάποιο διάστημα αριστερά από το x και $f' < 0$ σε κάποιο διάστημα δεξιά από το x, τότε το x είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

(2) αν $f' < 0$ σε κάποιο διάστημα αριστερά από το x και $f' > 0$ σε κάποιο διάστημα δεξιά από το x, τότε το x είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

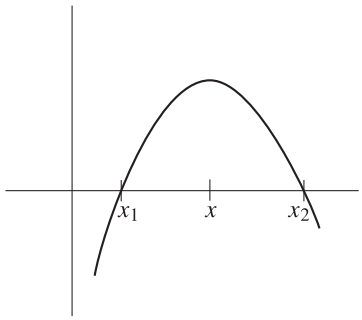
(3) αν η f' έχει το ίδιο πρόσημο σε κάποιο διάστημα αριστερά του x, όπως και σε ένα διάστημα δεξιά του, τότε το x δεν είναι ούτε σημείο τοπικού μεγίστου ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου.

(Δεν υπάρχει λόγος να απομνημονεύσετε αυτούς τους κανόνες —μπορείτε πάντα να σχεδιάσετε ένα σχήμα μόνοι σας.)



(α) (β) (γ) (δ)

ΣΧΗΜΑ 16



ΣΧΗΜΑ 17

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να αναλύσουμε όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, και επιπλέον μπορούμε να περιγράψουμε τη γενική μορφή της γραφικής παράστασης τέτοιων συναρτήσεων. Για να αρχίσουμε, χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα που έχουμε ήδη αναφέρει στο Πρόβλημα 3-7: Αν

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

τότε η f έχει το πολύ n «ρίζες», δηλαδή υπάρχουν το πολύ n αριθμοί x, τέτοιοι ώστε $f(x) = 0$. Αν και αυτό είναι ουσιαστικά ένα αλγεβρικό θεώρημα, με τη βοήθεια του Απειροστικού Λογισμού μπορούμε να δώσουμε μια εύκολη απόδειξη. Παρατηρήστε ότι, αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f (Σχήμα 17), οπότε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, τότε από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει ένας αριθμός x ανάμεσα στους x_1 και x_2 τέτοιος ώστε $f'(x) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η f έχει k διακεκριμένες ρίζες $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, τότε η f' έχει τουλάχιστον $k-1$ διακεκριμένες ρίζες: μια ανάμεσα στους x_1 και x_2, μια ανάμεσα στους x_2 και x_3, κτλ. Είναι τώρα εύκολο να αποδείξουμε με επαγωγή ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

έχει το πολύ n ρίζες: ο ισχυρισμός είναι οπωσδήποτε αληθής για $n = 1$, και αν υποθέσουμε ότι είναι σωστός για το n, τότε το πολυώνυμο

$$g(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \cdots + b_0$$

δεν μπορεί να έχει περισσότερες από $n+1$ ρίζες, γιατί αν είχε, η g' θα είχε περισσότερες από n ρίζες.

Με αυτήν την πληροφορία, δεν είναι δύσκολο να περιγράψουμε τη γραφική παράσταση της

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Η παράγωγος, ως πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n-1$, έχει το πολύ $n-1$ ρίζες. Άρα η f έχει το πολύ $n-1$ κρίσιμα σημεία. Φυσικά, ένα κρίσιμο σημείο δεν είναι απαραίτητα σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου, αλλά σε κάθε περίπτωση, αν a και b είναι διαδοχικά κρίσιμα σημεία της f, τότε η f' θα παραμένει είτε θετική είτε αρνητική στο (a,b), αφού η f' είναι συνεχής· επομένως, η f θα είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα στο (a,b). Άρα η f έχει το πολύ n περιοχές στις οποίες αυξάνει ή φθίνει.

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση

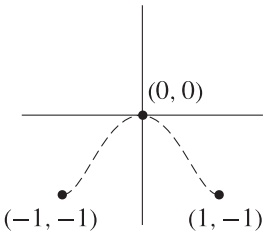
$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

Αφού

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1),$$

τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα -1, 0 και 1, και

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1, \\ f(0) &= 0, \\ f(1) &= -1. \end{aligned}$$



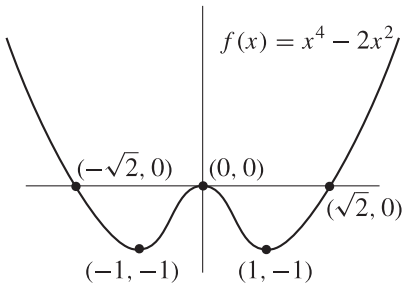
ΣΧΗΜΑ 18

Η συμπεριφορά της f στα διαστήματα ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία προσδιορίζεται με μία από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να αποφανθούμε για το πρόσημο της f' σε αυτά τα διαστήματα εξετάζοντας απλώς τον τύπο της $f'(x)$. Από την άλλη πλευρά, από τις τρεις κρίσιμες τιμές και μόνο μπορούμε να δούμε (Σχήμα 18) ότι η f είναι αύξουσα στο $(-1,0)$ και φθίνουσα στο $(0,1)$. Για να βρούμε το πρόσημο της f' στο $(-\infty,-1)$ και στο $(1,\infty)$ υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned} f'(-2) &= 4\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = -24, \\ f'(2) &= 4\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = 24, \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ και αύξουσα στο $(1,\infty)$. Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι το $f(x)$ είναι μεγάλο για μεγάλα x και για πολύ αρνητικά x.

Έχουμε ήδη στη διάθεσή μας ένα καλό σκίτσο της γραφικής παράστασης· δύο ακόμα πληροφορίες θα βάλουν την τελευταία πινελιά (Σχήμα 19). Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε ότι $f(x) = 0$ για $x = 0, \pm\sqrt{2}$· έπειτα, είναι φανερό ότι η f είναι άρτια, $f(x) = f(-x)$, άρα η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$, που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 15, είναι περιττή, $f(x) = -f(-x)$, και επομένως είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Παρατηρώντας αυτά τα πράγματα από την αρχή, γλιτώνουμε τη μισή δουλειά στη γραφική παράσταση.



ΣΧΗΜΑ 19

Πολλά προβλήματα, σε αυτό και σε επόμενα κεφάλαια, σας ζητούν να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να προσδιορίζετε

(1) τα κρίσιμα σημεία της f,

(2) την τιμή της f στα κρίσιμα σημεία,

(3) το πρόσημο της f' στις περιοχές ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία (αν αυτό δεν είναι ήδη καθαρό),

(4) τους αριθμούς x για τους οποίους $f(x) = 0$ (αν γίνεται),

(5) τη συμπεριφορά του $f(x)$ καθώς το x γίνεται μεγάλο ή πολύ αρνητικό (αν γίνεται).

Τέλος, έχετε κατά νου ότι ένας σύντομος έλεγχος για το αν η συνάρτηση είναι περιττή ή άρτια μπορεί να σας απαλλάξει από πολλή δουλειά.

Αυτού του τύπου η ανάλυση, αν εκτελεστεί με προσοχή, συνήθως αποκαλύπτει τον βασικό κορμό της γραφικής παράστασης, αλλά μερικές φορές υπάρχουν ειδικά χαρακτηριστικά που απαιτούν περισσότερη σκέψη. Είναι αδύνατο να τα προβλέψουμε όλα αυτά, αλλά υπάρχει μια ακόμα πληροφορία που είναι συχνά πολύ σημαντική. Αν η f δεν ορίζεται σε κάποια σημεία (για παράδειγμα, αν η f είναι μια ρητή συνάρτηση που ο παρονομαστής της μηδενίζεται σε κάποια σημεία), τότε θα πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της f κοντά σε αυτά τα σημεία.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1},$$

η οποία δεν ορίζεται στο 1. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-1)(2x-2) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Άρα

(1) τα κρίσιμα σημεία της f είναι το 0 και το 2.

Ακόμα,

$$\begin{aligned} &(2)\ f(0) = -2, \\ &\quad f(2) = 2. \end{aligned}$$

Επειδή η f δεν ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα $(0, 2)$, πρέπει να εξετάσουμε το πρόσημο της f' χωριστά στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, 2)$, καθώς και στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, \infty)$. Μπορούμε να το κάνουμε αυτό επιλέγοντας συγκεκριμένα σημεία σε καθένα από αυτά τα διαστήματα, ή απλώς κοιτώντας προσεκτικά τον τύπο που δίνει την f'. Με οποιονδήποτε από τους δύο τρόπους, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} &(3)\ f'(x) > 0 \quad \text{αν} \quad x < 0, \\ &\quad f'(x) < 0 \quad \text{αν} \quad 0 < x < 1, \\ &\quad f'(x) < 0 \quad \text{αν} \quad 1 < x < 2, \\ &\quad f'(x) > 0 \quad \text{αν} \quad 2 < x. \end{aligned}$$

Τέλος, πρέπει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν το x γίνεται μεγάλο ή πολύ αρνητικό, καθώς και όταν το x τείνει στο 1 (αυτές οι πληροφορίες θα μας δώσουν και έναν άλλο τρόπο για να προσδιορίσουμε τα διαστήματα στα οποία η f αυξάνει και φθίνει). Για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά καθώς το x γίνεται μεγάλο, γράφουμε

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

Είναι φανερό ότι το $f(x)$ βρίσκεται κοντά στο $x - 1$ (και είναι λίγο μεγαλύτερο) όταν το x είναι μεγάλο, και το $f(x)$ βρίσκεται κοντά στο $x - 1$ (αλλά είναι λίγο μικρότερο) όταν το x είναι πολύ αρνητικό. Η συμπεριφορά της f κοντά στο 1 εξακριβώνεται το ίδιο εύκολα· αφού

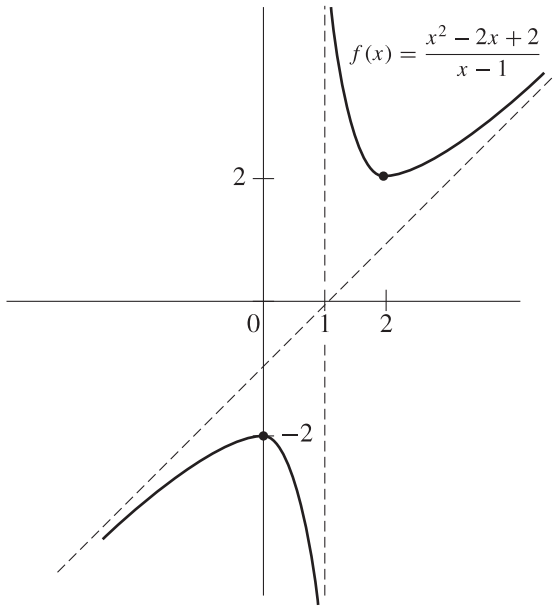
$$\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 2) = 1 \neq 0,$$

το κλάσμα

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

γίνεται μεγάλο καθώς το x τείνει στο 1 από δεξιά, και πολύ αρνητικό καθώς το x τείνει στο 1 από αριστερά.

Όλες αυτές οι πληροφορίες μοιάζουν συντριπτικές, αλλά υπάρχει μόνο ένας τρόπος με τον οποίο ταιριάζουν (Σχήμα 20)· βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να δικαιολογήσετε όλα τα σημεία στη γραφική παράσταση.



ΣΧΗΜΑ 20

Καθώς το σχέδιο έχει ολοκληρωθεί, θα μπορούσαμε να σημειώσουμε ότι μοιάζει με τη γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης μετατοπισμένης κατά μία μονάδα, και η παράσταση

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)^2 + 1}{x - 1}$$

δείχνει ότι στ' αλήθεια έτσι έχουν τα πράγματα. Όμως, τέτοιου είδους χαρακτηριστικά τα μελετάμε μόνο αφού έχουμε χρησιμοποιήσει τις άλλες πληροφορίες για να πάρουμε μια καλή γεύση από τη γραφική παράσταση.

Αν και η θέση των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων μιας συνάρτησης πάντοτε αποκαλύπτεται με ένα λεπτομερές σκίτσο της γραφικής της παράστασης, συνήθως δεν χρειάζεται να κάνουμε τόση πολλή δουλειά. Υπάρχει ένα δημοφιλές κριτήριο για τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα που βασίζεται στη συμπεριφορά της συνάρτησης στα κρίσιμα μόνο σημεία της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Έστω ότι $f'(a) = 0$. Αν $f''(a) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a· αν $f''(a) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τον ορισμό,

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}.$$

Αφού $f'(a) = 0$, μπορούμε να γράψουμε

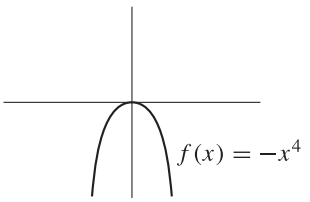
$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

Έστω τώρα ότι $f''(a) > 0$. Τότε το $f'(a+h)/h$ πρέπει να είναι θετικό για αρκετά μικρό h. Επομένως:

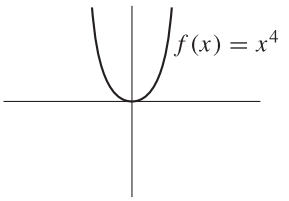
$$\text{η } f'(a+h) \text{ πρέπει να είναι θετική για αρκετά μικρό } h > 0$$
$$\text{και η } f'(a+h) \text{ πρέπει να είναι αρνητική για αρκετά μικρό } h < 0.$$

Αυτό σημαίνει (Πόρισμα 3) ότι η f είναι αύξουσα σε κάποιο διάστημα δεξιά του a και η f είναι φθίνουσα σε κάποιο διάστημα αριστερά του a. Επομένως, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a.

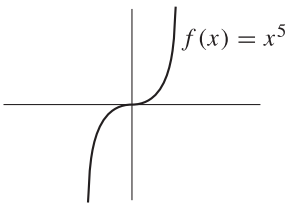
Η απόδειξη για την περίπτωση $f''(a) < 0$ είναι όμοια. ∎



(α)



(β)



(γ)

ΣΧΗΜΑ 21

Το Θεώρημα 5 εφαρμόζεται στη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$, που έχουμε ήδη μελετήσει. Έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$
$$f''(x) = 6x.$$

Στα κρίσιμα σημεία $-\sqrt{1/3}$ και $\sqrt{1/3}$, έχουμε

$$f''(-\sqrt{1/3}) = -6\sqrt{1/3} < 0,$$
$$f''(\sqrt{1/3}) = 6\sqrt{1/3} > 0.$$

Επομένως, το $-\sqrt{1/3}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου και το $\sqrt{1/3}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Αν και το Θεώρημα 5 αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο για πολυωνυμικές συναρτήσεις, η δεύτερη παράγωγος πολλών συναρτήσεων είναι τόσο πολύπλοκη που είναι ευκολότερο να εξετάζουμε το πρόσημο της πρώτης παραγώγου. Ακόμα, αν a είναι ένα κρίσιμο σημείο της f, μπορεί να συμβεί να ισχύει $f''(a) = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, το Θεώρημα 5 δεν μας δίνει καμία πληροφορία: είναι δυνατόν το a να είναι σημείο τοπικού μεγίστου, σημείο τοπικού ελαχίστου ή τίποτα από τα δύο, όπως φαίνεται (Σχήμα 21) από τις συναρτήσεις

$$f(x) = -x^4, \quad f(x) = x^4, \quad f(x) = x^5.$$

Σε όλες τις περιπτώσεις, $f'(0) = f''(0) = 0$, αλλά το 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου για την πρώτη, σημείο τοπικού ελαχίστου για τη δεύτερη, και τίποτα από τα δύο για την τρίτη. Αυτό το σημείο θα ξεκαθαρίσει αργότερα, στο 4ο Μέρος.

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα 5 αποδεικνύει αυτομάτως ένα μερικό αντίστροφο του εαυτού του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Έστω ότι η $f''(a)$ υπάρχει. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a, τότε $f''(a) \geq 0$· αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο a, τότε $f''(a) \leq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a. Αν $f''(a) < 0$, τότε η f θα είχε και τοπικό μέγιστο στο a, από το Θεώρημα 5. Άρα η f θα ήταν σταθερή σε κάποιο διάστημα γύρω από το a, άρα θα είχαμε $f''(a) = 0$, άτοπο. Άρα πρέπει να είναι $f''(a) \geq 0$.

Για την περίπτωση τοπικού μεγίστου εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. ∎

(Αυτό το μερικό αντίστροφο του Θεωρήματος 5 είναι ό,τι καλύτερο μπορούμε να ελπίζουμε: τα πρόσημα $\geq$ και $\leq$ δεν μπορούν να αντικατασταθούν με $>$ και $<$, όπως φαίνεται από τις συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $f(x) = -x^4$.)

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου ασχολείται όχι με γραφικές παραστάσεις, μέγιστα και ελάχιστα, αλλά με τρεις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Η πρώτη είναι ένα απλό, αλλά πολύ κομψό, θεώρημα που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στο Κεφάλαιο 15, και ακόμα φωτίζει πολλά παραδείγματα που συναντήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο a, και ότι η $f'(x)$ υπάρχει για όλα τα x σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a, εκτός ίσως από το $x = a$. Έστω ακόμα ότι το $\lim_{x\to a} f'(x)$ υπάρχει. Τότε, υπάρχει και η $f'(a)$, και

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από τον ορισμό,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

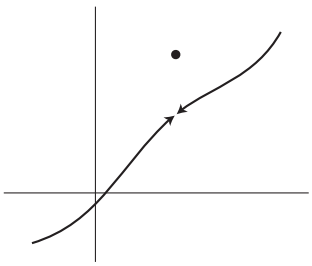
Για αρκετά μικρό $h > 0$, η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο $[a, a+h]$ και παραγωγίσιμη στο $(a, a+h)$ (ο αντίστοιχος ισχυρισμός αληθεύει για αρκετά μικρό $h < 0$). Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένας αριθμός α_h στο $(a, a+h)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(\alpha_h).$$

Τώρα το α_h τείνει στο a καθώς το h τείνει στο 0, γιατί το α_h ανήκει στο $(a, a+h)$· αφού το $\lim_{x\to a} f'(x)$ υπάρχει, έπεται ότι

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} f'(\alpha_h) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

(Είναι σκόπιμο να δώσετε μια αυστηρή ε-δ απόδειξη για αυτό το τελευταίο βήμα, που το παρουσιάσαμε κάπως άτυπα.) ∎



ΣΧΗΜΑ 22

Ακόμα και αν η f είναι παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση, είναι δυνατόν η f' να είναι ασυνεχής. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Σύμφωνα όμως με το Θεώρημα 7, στη γραφική παράσταση της f' δεν μπορεί ποτέ να εμφανιστεί ασυνέχεια σαν και αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 22. Το Πρόβλημα 61 σκιαγραφεί την απόδειξη ενός άλλου κομψού θεωρήματος που δίνει περισσότερες πληροφορίες για τη συνάρτηση f', και το Πρόβλημα 62 το χρησιμοποιεί για ενίσχυση του Θεωρήματος 7.

Το επόμενο θεώρημα, μια γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, παρουσιάζει ενδιαφέρον κυρίως λόγω των εφαρμογών του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ CAUCHY) Αν οι f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b), τότε υπάρχει ένας αριθμός x στο (a, b) τέτοιος ώστε

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).$$

(Αν $g(b) \neq g(a)$, και $g'(x) \neq 0$, αυτή η ισότητα γράφεται και

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $g(x) = x$ για κάθε x, τότε $g'(x) = 1$, και παίρνουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Από την άλλη πλευρά, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στις f και g χωριστά, βρίσκουμε ότι υπάρχουν x και y στο (a, b) με

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(y)}.$$

αλλά τίποτε δεν μας εγγυάται ότι τα x και y που βρίσκουμε με αυτόν τον τρόπο θα είναι ίσα. Αυτές οι παρατηρήσεις ίσως δημιουργούν την εντύπωση ότι το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy είναι μάλλον δύσκολο να αποδειχθεί, στην πραγματικότητα όμως αρκεί ένα πολύ απλό τέχνασμα.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)].$$

Τότε η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), και

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι $h'(x) = 0$ για κάποιο x στο (a, b), το οποίο σημαίνει ότι

$$0 = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]. \quad \blacksquare$$

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy είναι το βασικό εργαλείο που χρειαζόμαστε για να αποδείξουμε ένα θεώρημα που διευκολύνει τον υπολογισμό ορίων της μορφής

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

όταν

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το Θεώρημα 5-2 μας είναι άχρηστο. Κάθε παράγωγος είναι ένα όριο αυτής της μορφής και ο υπολογισμός των παραγώγων συχνά απαιτεί πολλή δουλειά. Αν όμως ξέρουμε κάποιες παραγώγους, πολλά όρια αυτής της μορφής μπορούν τώρα να υπολογιστούν εύκολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 (ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ L'HÔPITAL) Έστω ότι

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

επίσης έστω ότι το $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει. Τότε το $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$ υπάρχει, και

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 7 είναι μια ειδική περίπτωση.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η υπόθεση ότι το $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ υπάρχει περιέχει σιωπηρά δύο υποθέσεις:

(1) υπάρχει ένα διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$ τέτοιο ώστε οι $f'(x)$ και $g'(x)$ να υπάρχουν για κάθε x στο $(a - \delta, a + \delta)$ εκτός, ίσως, για $x = a$,

(2) σε αυτό το διάστημα $g'(x) \neq 0$ με την πιθανή εξαίρεση, και πάλι, του $x = a$.

Από την άλλη πλευρά, οι f και g δεν υποτίθενται καν ορισμένες στο a. Αν ορίσουμε $f(a) = g(a) = 0$ (αλλάζοντας, αν χρειαστεί, τις προηγούμενες τιμές των $f(a)$ και $g(a)$), τότε οι f και g είναι συνεχείς στο a. Αν $a < x < a + \delta$, τότε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy εφαρμόζονται για τις f και g στο διάστημα $[a, x]$ (και ένας αντίστοιχος ισχυρισμός είναι σωστός για $a - \delta < x < a$). Εφαρμόζοντας πρώτα το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην g, βλέπουμε ότι $g(x) \neq 0$, γιατί αν ήταν $g(x) = 0$ θα υπήρχε κάποιο x_1 στο (a, x) με $g'(x_1) = 0$, αντιφάσκοντας με την (2). Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για τις f και g, βλέπουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός α_x στο (a, x), τέτοιος ώστε

$$[f(x) - 0]g'(\alpha_x) = [g(x) - 0]f'(\alpha_x)$$

ή

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)}.$$

Αλλά το α_x τείνει στο a καθώς το x τείνει στο a, γιατί το α_x ανήκει στο (a, x)· αφού υποθέτουμε ότι το $\lim_{y\to a} f'(y)/g'(y)$ υπάρχει, έπεται ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\alpha_x)}{g'(\alpha_x)} = \lim_{y\to a} \frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

(Για μια ακόμα φορά, καλούμε τον αναγνώστη να συμπληρώσει τις λεπτομέρειες αυτού του τμήματος της απόδειξης.) ∎

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις που ακολουθούν, βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή στα διαστήματα που σας υποδεικνύουμε, βρίσκοντας τα σημεία του διαστήματος στα οποία η παράγωγος είναι 0, και συγκρίνοντας τις τιμές σε αυτά τα σημεία με τις τιμές στα άκρα.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$.

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$.

(iii) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ στο $[-\frac{1}{2}, 1]$.

(v) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ στο $[-1, \frac{1}{2}]$.

(vi) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ στο $[0, 5]$.

2. Τώρα σχεδιάστε τη γραφική παράσταση καθεμιάς από τις συναρτήσεις του Προβλήματος 1, και βρείτε όλα τα σημεία τοπικού μεγίστου και ελαχίστου.

3. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των εξής συναρτήσεων:

(i) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(ii) $f(x) = x + \dfrac{3}{x^2}$.

(iii) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

4. (α) Αν $a_1 < \cdots < a_n$, βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$.

∗(β) Τώρα βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$. Αυτό είναι ένα πρόβλημα στο οποίο ο Απειροστικός Λογισμός δεν θα βοηθήσει καθόλου: στα διαστήματα ανάμεσα στα a_i η συνάρτηση f είναι γραμμική, άρα το ελάχιστο προφανώς συμβαίνει σε κάποιο από τα a_i, και αυτά είναι ακριβώς τα σημεία όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Όμως, είναι εύκολο να βρείτε την απάντηση αν εξετάσετε πώς μεταβάλλεται το $f(x)$ καθώς μεταβαίνουμε από ένα τέτοιο διάστημα σε άλλο.

∗(γ) Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

είναι $(2+a)/(1+a)$. (Μπορείτε να βρείτε την παράγωγο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ και (a, ∞) χωριστά.)

5. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις που ακολουθούν, βρείτε όλα τα σημεία τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου.

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5, 7, 9 \\ 5, & x = 3 \\ -3, & x = 5 \\ 9, & x = 7 \\ 7, & x = 9. \end{cases}$

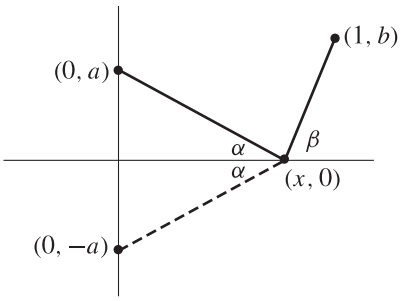
(ii) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1/q, & x = p/q \text{ που } p/q \text{ ανάγωγο.} \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος.} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1/n \text{ για κάποιο } n \text{ στο } \mathbf{N} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν το δεκαδικό ανάπτυγμα του } x \text{ περιέχει ένα 5} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

6. Αποδείξτε το εξής (το οποίο υπονοούμε συχνά): Αν η f είναι αύξουσα στο (a, b) και συνεχής στα a και b, τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$. Πιο συγκεκριμένα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f' > 0$ στο (a, b), τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.



ΣΧΗΜΑ 23

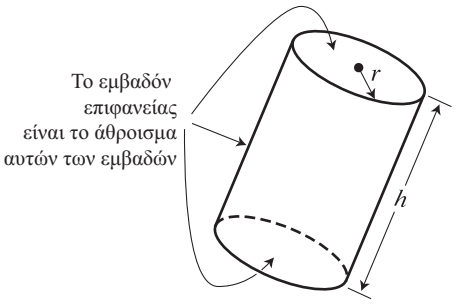
7. Φέρνουμε μια ευθεία από το σημείο $(0, a)$ στον οριζόντιο άξονα, και μετά πίσω στο $(1, b)$, όπως στο Σχήμα 23. Αποδείξτε ότι το συνολικό μήκος γίνεται ελάχιστο όταν οι γωνίες α και β είναι ίσες. (Φυσικά πρέπει να φέρετε μια συνάρτηση στο σκηνικό: εκφράστε το μήκος συναρτήσει του x, όπου $(x, 0)$ είναι το σημείο στον οριζόντιο άξονα. Η διακεκομμένη γραμμή στο Σχήμα 23 προτείνει μια εναλλακτική γεωμετρική απόδειξη· και στις δύο περιπτώσεις, το πρόβλημα λύνεται χωρίς να χρειαστεί να βρείτε το σημείο $(x, 0)$.)

8. (α) Έστω (x_0, y_0) ένα σημείο του επιπέδου και L η γραφική παράσταση της $f(x) = mx + b$. Βρείτε το $\bar{x}$ έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ του (x_0, y_0) και του $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ να είναι ελάχιστη. [Σημειώστε ότι η ελαχιστοποίηση αυτής της απόστασης είναι το ίδιο με την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου της. Αυτό κάπως απλοποιεί τους υπολογισμούς.]

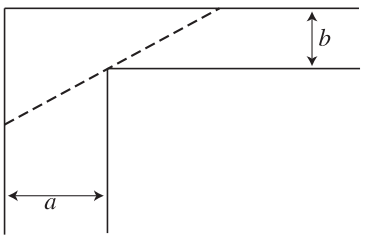
(β) Βρείτε επίσης το $\bar{x}$ λαμβάνοντας υπόψη ότι η ευθεία που διέρχεται από το (x_0, y_0) και το $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ είναι κάθετη στην L.

(γ) Βρείτε την απόσταση του (x_0, y_0) από την L, δηλαδή την απόσταση από το (x_0, y_0) έως το $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. [Οι υπολογισμοί θα γίνουν ευκολότεροι αν υποθέσετε πρώτα ότι $b = 0$· μετά εφαρμόστε το αποτέλεσμά σας στη γραφική παράσταση της $f(x) = mx$ και το σημείο $(x_0, y_0 - b)$.] Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 4-22.

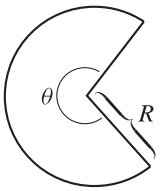
(δ) Θεωρήστε την ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$ (Πρόβλημα 4-7). Δείξτε ότι η απόσταση του (x_0, y_0) από την εν λόγω ευθεία είναι $(Ax_0 + By_0 + C)/\sqrt{A^2 + B^2}$.



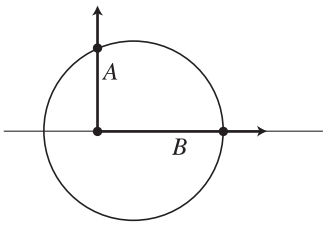
ΣΧΗΜΑ 24



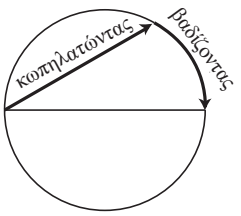
ΣΧΗΜΑ 25



ΣΧΗΜΑ 26



ΣΧΗΜΑ 27



ΣΧΗΜΑ 28

9. Το προηγούμενο πρόβλημα υπαινίσσεται την εξής ερώτηση: ποια είναι η σχέση μεταξύ των κρίσιμων σημείων της f και της f^2;

10. Αποδείξτε ότι, από όλα τα ορθογώνια με δοθείσα περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

11. Μεταξύ των ορθών κυλίνδρων με σταθερό όγκο V, βρείτε αυτόν με το μικρότερο εμβαδόν επιφανείας (συμπεριλαμβάνοντας και τα εμβαδά των δύο βάσεων, όπως στο Σχήμα 24).

12. Ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους a περιστρέφεται γύρω από μία από τις κάθετες πλευρές του και παράγει έναν ορθό κυκλικό κώνο. Βρείτε τον μέγιστο δυνατό όγκο αυτού του κώνου.

13. Δείξτε ότι το άθροισμα ενός θετικού αριθμού και αντίστροφού του είναι τουλάχιστον 2.

14. Βρείτε το τραπέζιο με το μεγαλύτερο εμβαδόν που μπορεί να εγγραφεί σε ημικύκλιο ακτίνας a, με τη μία βάση πάνω στη διάμετρο.

15. Δύο διάδρομοι πλάτους a και b αντίστοιχα τέμνονται κάθετα (Σχήμα 25). Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, μεταφερόμενη οριζόντια, να στρίψει τη γωνία;

16. Ένας κήπος πρόκειται να σχεδιασθεί στο σχήμα ενός κυκλικού τομέα (Σχήμα 26), ακτίνας R και βασικής γωνίας θ. Ο κήπος πρέπει να έχει ορισμένο εμβαδόν A. Για ποιες τιμές των R και θ (σε ακτίνια) το μήκος της περίφραξης θα είναι ελάχιστο;

17. Μια ορθή γωνία κινείται κατά μήκος της διαμέτρου ενός κύκλου ακτίνας a, όπως φαίνεται στο Σχήμα 27. Ποιο είναι το μεγαλύτερο δυνατό μήκος του $(A + B)$ που αποκόπτει από τη γωνία ο κύκλος;

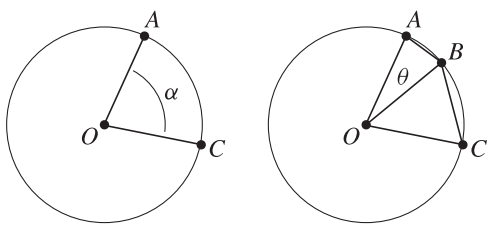
18. Ο οικολόγος Ed πρέπει να διασχίσει μια λίμνη κυκλικού σχήματος ακτίνας 1 km. Μπορεί να κωπηλατήσει μέχρι την απέναντι όχθη με ταχύτητα 2 km/h ή να περπατήσει γύρω-γύρω με 4 km/h ή να κωπηλατήσει κατά ένα μέρος και να περπατήσει την υπόλοιπη διαδρομή (Σχήμα 28). Ποια διαδρομή πρέπει να επιλέξει έτσι ώστε:

(i) Να δει όσο το δυνατόν περισσότερα από το τοπίο;

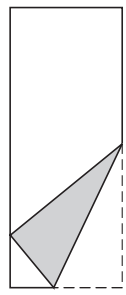
(ii) Να περάσει απέναντι όσο το δυνατόν πιο γρήγορα;

19. (α) Θεωρούμε τα σημεία A και B επάνω σε έναν κύκλο με κέντρο O, που βρίσκονται απέναντι από τη γωνία $\alpha = \angle AOC$ (Σχήμα 29). Πώς πρέπει να επιλέξουμε το B ώστε το άθροισμα των εμβαδών των $\triangle AOB$ και $\triangle BOC$ να είναι το μέγιστο; Υπόδειξη: Εκφράστε τις ποσότητες συναρτήσει της $\theta = \angle AOB$.

(β) Αποδείξτε ότι για $n \geq 3$, από όλα τα εγγεγραμμένα σε κύκλο n-άγωνα, το κανονικό n-άγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.



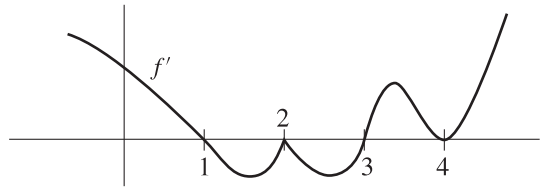
ΣΧΗΜΑ 29



ΣΧΗΜΑ 30

∗**20.** Η κάτω δεξιά γωνία μιας σελίδας διπλώνεται έτσι ώστε μόλις ακουμπά την αριστερή πλευρά της σελίδας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 30. Αν το πλάτος του χαρτιού είναι α και η σελίδα είναι πολύ επιμήκης, δείξτε ότι το ελάχιστο μήκος της (περιμέτρου της) αναδίπλωσης είναι $3\sqrt{3}\alpha/4$.

21. Το Σχήμα 31 δείχνει τη γραφική παράσταση της *παραγώγου* της f. Βρείτε όλα τα σημεία τοπικού μεγίστου και ελαχίστου της f.



ΣΧΗΜΑ 31

22. Έστω ότι f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση, $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, με κρίσιμα σημεία τα $-1, 1, 2, 3, 4$, και αντίστοιχες κρίσιμες τιμές τις 6, 1, 2, 4, 3. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f, ξεχωρίζοντας τις περιπτώσεις n άρτιος και n περιττός.

23. (α) Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ έχει κρίσιμα σημεία τα $-1, 1, 2, 3$, και $f''(-1) = 0$, $f''(1) > 0$, $f''(2) < 0$, $f''(3) = 0$. Σχεδιάστε, με όση ακρίβεια μπορείτε, τη γραφική παράσταση της f με βάση αυτές τις πληροφορίες.

(β) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση με τις ίδιες ιδιότητες, αν το 3 δεν είναι κρίσιμο σημείο;

24. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση μιας ρητής συνάρτησης (σε πολύ γενικές γραμμές, κατ' αναλογίαν προς την περιγραφή που έγινε στο κείμενο για τη γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων).

25. (α) Αποδείξτε ότι δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις με βαθμό m και n, αντίστοιχα, τέμνονται το πολύ σε $\max(m, n)$ σημεία.

(β) Για κάθε m και n δώστε δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμών m και n που τέμνονται $\max(m, n)$ φορές.

26. Έστω ότι η f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n με $f \geq 0$ (άρα το n πρέπει να είναι άρτιο). Αποδείξτε ότι $f + f' + f'' + \cdots + f^{(n)} \geq 0$.

∗**27.** (α) Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ έχει ακριβώς k κρίσιμα σημεία και $f''(x) \neq 0$ για όλα τα κρίσιμα σημεία x. Δείξτε ότι ο $n - k$ είναι περιττός.

(β) Για κάθε n, δείξτε ότι αν, ο $n-k$ είναι περιττός, τότε υπάρχει μια πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού n με k κρίσιμα σημεία, σε κάθε ένα από τα οποία η f'' δεν είναι μηδέν.

(γ) Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ έχει k_1 σημεία τοπικού μεγίστου και k_2 σημεία τοπικού ελαχίστου. Δείξτε ότι $k_2 = k_1 + 1$ αν ο n είναι άρτιος, και $k_2 = k_1$ αν ο n είναι περιττός.

(δ) Έστω n, k_1, k_2 τρεις ακέραιοι με $k_2 = k_1 + 1$ αν ο n είναι άρτιος, και $k_2 = k_1$ αν ο n είναι περιττός, και $k_1 + k_2 < n$. Δείξτε ότι υπάρχει μια πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού n, με k_1 σημεία τοπικού μεγίστου και k_2 σημεία τοπικού ελαχίστου. Υπόδειξη: Πάρτε $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k_1+k_2}$ και δοκιμάστε $f'(x) = \prod_{i=1}^{k_1+k_2} (x - a_i) \cdot (1 + x^2)^l$ για κατάλληλο αριθμό l.

28. (α) Αποδείξτε ότι, αν $f'(x) \geq M$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $f'(x) \leq M$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $f(b) \leq f(a) + M(b-a)$.

(γ) Διατυπώστε ανάλογο θεώρημα όταν $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x στο $[a, b]$.

29. Έστω ότι $f'(x) \geq M > 0$, για όλα τα x στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι υπάρχει ένα διάστημα μήκους $\frac{1}{4}$, στο οποίο ισχύει $|f| \geq M/4$.

30. Έστω ότι $f'(x) > g'(x)$ για κάθε x, και ότι $f(a) = g(a)$. Δείξτε ότι

(α) $f(x) > g(x)$ για $x > a$, και $f(x) < g(x)$ για $x < a$.

(β) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι αυτά τα συμπεράσματα δεν ισχύουν χωρίς την υπόθεση $f(a) = g(a)$.

(γ) Έστω ότι $f(a) = g(a)$, ότι $f'(x) \geq g'(x)$ για κάθε x, και ότι $f'(x_0) > g'(x_0)$ για κάποιο $x_0 > a$. Δείξτε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \geq x_0$.

31. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες

(α) $f'(x) = \sin x$.

(β) $f''(x) = x^3$.

(γ) $f'''(x) = x + x^2$.

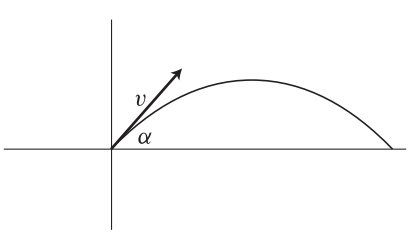
32. Ενώ ισχύει ότι, αν αφήσουμε ένα βάρος να πέσει ενώ ήταν ακίνητο, τότε θα έχει πέσει $s(t) = 16t^2$ πόδια μετά από t δευτερόλεπτα, αυτό το πειραματικό δεδομένο δεν περιγράφει τη συμπεριφορά βαρών που ρίχνονται προς τα πάνω ή προς τα κάτω. Από την άλλη πλευρά, ο νόμος $s''(t) = 32$ ισχύει πάντοτε και είναι πολύ ασαφής για να εξηγήσει τη συμπεριφορά ενός βάρους που αφήνεται από οποιοδήποτε ύψος, με οποιαδήποτε αρχική ταχύτητα. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, ας συμφωνήσουμε να μετράμε τα ύψη προς τα πάνω από την επιφάνεια του εδάφους· σε αυτήν την περίπτωση οι ταχύτητες είναι θετικές για σώματα που ανεβαίνουν και αρνητικές για σώματα που πέφτουν, και όλα τα σώματα πέφτουν σύμφωνα με το νόμο $s''(t) = -32$.

(α) Δείξτε ότι η s είναι της μορφής $s(t) = -16t^2 + \alpha t + \beta$.

(β) Θέτοντας $t = 0$ στον τύπο της s, και μετά στον τύπο της s', δείξτε ότι $s(t) = -16t^2 + v_0 t + s_0$, όπου s_0 είναι το ύψος από το οποίο αφήνεται το σώμα τη χρονική στιγμή 0, και v_0 είναι η ταχύτητα με την οποία αφήνεται.

(γ) Ένα βάρος βάλλεται προς τα πάνω με ταχύτητα v πόδια το δευτερόλεπτο, από την επιφάνεια του εδάφους. Πόσο ψηλά θα ανέβει; (Το «πόσο ψηλά» σημαίνει «ποιο είναι το μέγιστο ύψος»). Ποια είναι η ταχύτητά του τη χρονική στιγμή που φτάνει στο μέγιστο ύψος; Ποια είναι η επιτάχυνσή του εκείνη τη στιγμή; Πότε θα πέσει ξανά στο έδαφος; Πόση θα είναι η ταχύτητά του όταν θα ξαναπέσει στο έδαφος;

33. Ένα βλήμα βάλλεται από το έδαφος με ταχύτητα v και υπό γωνία α (Σχήμα 32), οπότε έχει μια κατακόρυφη συνιστώσα ταχύτητας $v \sin\alpha$ και μια οριζόντια συνιστώσα $v \cos\alpha$. Η απόσταση του $s(t)$ από το έδαφος υπακούει στο νόμο $s(t) = -16t^2 + (v \sin\alpha)t$, ενώ η οριζόντια ταχύτητα παραμένει σταθερά ίση με $v \cos\alpha$.



ΣΧΗΜΑ 32

(α) Αποδείξτε ότι η τροχιά του βλήματος είναι μια παραβολή (βρείτε τη θέση του σε κάθε χρονική στιγμή t, και δείξτε ότι αυτά τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια παραβολή).

(β) Βρείτε τη γωνία α που μεγιστοποιεί την οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα μέχρι να πέσει στο έδαφος.

34. (α) Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f για την οποία να υπάρχει το $\lim_{x\to\infty} f(x)$, όχι όμως το $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και το $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ υπάρχουν και τα δύο, τότε $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ υπάρχει και το $\lim_{x\to\infty} f''(x)$ υπάρχει, τότε $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$.)

(Βλ. επίσης το Πρόβλημα 20-22.)

35. Έστω ότι f και g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την $fg' - f'g = 0$. Αποδείξτε ότι, αν $f(a) = 0$ και $g(a) \neq 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα γύρω από το a. Υπόδειξη: Δείξτε ότι στα διαστήματα στα οποία ορίζεται, η f/g είναι σταθερή.

36. Έστω ότι $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$ με $n > 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή εξετάζοντας την f'. Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 3-20.

37. Μια συνάρτηση f είναι *Lipschitz τάξης* α στο x αν υπάρχει σταθερά C έτσι ώστε

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

για όλα τα y σε ένα διάστημα γύρω από το x. Η συνάρτηση f είναι *Lipschitz τάξης* α *σε ένα διάστημα* αν η $(*)$ ισχύει για όλα τα x και y στο διάστημα.

(α) Αν η f είναι Lipschitz τάξης $\alpha > 0$ στο x, δείξτε ότι είναι συνεχής στο x.

(β) Αν η f είναι Lipschitz τάξης $\alpha > 0$ σε ένα διάστημα, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό (βλ. Κεφάλαιο 8, Παράρτημα).

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x, τότε η f είναι Lipschitz τάξης 1 στο x. Ισχύει το αντίστροφο;

(δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, είναι Lipschitz τάξης 1 στο $[a, b]$;

(ε) Αν η f είναι Lipschitz τάξης $\alpha > 1$ στο $[a, b]$, τότε είναι σταθερά στο $[a, b]$.

38. Αποδείξτε ότι, αν

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0,$$

τότε

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

για κάποιο x στο $(0, 1)$.

39. Αποδείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $f_m(x) = x^3 - 3x + m$ δεν έχει ποτέ δύο ρίζες στο $[0, 1]$, ανεξάρτητα από την τιμή του m. (Αυτό προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα του Rolle. Είναι χρήσιμο, αφού δώσετε μια αναλυτική απόδειξη, να σχεδιάσετε την f_0 και την f_2, και να δείτε πού βρίσκεται η γραφική παράσταση της f_m σε σχέση με αυτές.)

40. Έστω ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, ότι το $f(x)$ ανήκει στο $[0, 1]$ για κάθε x, και ότι $f'(x) \neq 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x στο $[0, 1]$ τέτοιος ώστε $f(x) = x$. (Το μισό πρόβλημα έχει ήδη γίνει, στο Πρόβλημα 7-11.)

41. (α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \cos x$ ικανοποιεί την $f(x) = 0$ για δύο ακριβώς τιμές του x.

(β) Αποδείξτε το ίδιο για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$.

∗(γ) Αποδείξτε το ίδιο και για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x \sin x - \cos^2 x$. (Μερικοί προκαταρκτικοί υπολογισμοί θα είναι χρήσιμοι ώστε να περιορίσουν τις πιθανές περιοχές των ριζών της f.)

∗**42.** (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f'(0) = f'(1) = 0$, τότε $|f''(x)| \geq 4$ για κάποιο x στο $(0, 1)$. Για να γίνουμε πιο παραστατικοί: ένα σωματίδιο που ταξιδεύει μοναδιαία απόσταση σε μοναδιαίο χρόνο, και αρχίζει και τερματίζει με ταχύτητα 0, σε κάποια χρονική στιγμή έχει επιτάχυνση ≥ 4. Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι είτε $f''(x) \geq 4$ για κάποιο x στο $(0, \frac{1}{2})$, είτε διαφορετικά $f''(x) \leq -4$ για κάποιο x στο $(\frac{1}{2}, 1)$.

(β) Δείξτε ότι στην πραγματικότητα πρέπει να ισχύει $|f''(x)| > 4$ για κάποιο x στο $(0, 1)$.

43. Έστω ότι f είναι μια συνάρτηση με $f'(x) = 1/x$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$. Αποδείξτε ότι $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. Υπόδειξη: Βρείτε την $g'(x)$ όταν $g(x) = f(xy)$.

44. Έστω ότι η f ικανοποιεί την

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0$$

για κάποια συνάρτηση g. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι 0 σε δύο σημεία, τότε η f είναι 0 στο διάστημα ανάμεσά τους. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 6.

45. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, ότι είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, και ότι $f(x) = 0$ για $n + 1$ διαφορετικά x στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $f^{(n)}(x) = 0$ για κάποιο x στο (a, b).

46. Έστω $x_1, \ldots, x_{n+1}$ τυχαία σημεία στο $[a, b]$, και έστω

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i).$$

Έστω ότι η f είναι $(n + 1)$ φορές παραγωγίσιμη και ότι το P είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$, έτσι ώστε $P(x_i) = f(x_i)$ για $i = 1, \ldots, n + 1$ (βλ. Πρόβλημα 3-6). Δείξτε ότι για κάθε x στο $[a, b]$ υπάρχει c στο (a, b) έτσι ώστε

$$f(x) - P(x) = Q(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$F(t) = Q(x)[f(t) - P(t)] - Q(t)[f(x) - P(x)].$$

Δείξτε ότι η F μηδενίζεται σε $n + 2$ διαφορετικά σημεία του $[a, b]$ και χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 45.

47. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

(χωρίς να υπολογίσετε τη $\sqrt{66}$ μέχρι 2 δεκαδικά ψηφία!).

48. Αποδείξτε την εξής μικρή γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής: Αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (a, b) και τα $\lim_{y \to a^+} f(y)$ και $\lim_{y \to b^-} f(y)$ υπάρχουν, τότε υπάρχει κάποιο x στο (a, b) τέτοιο ώστε

$$f'(x) = \frac{\lim_{y \to b^-} f(y) - \lim_{y \to a^+} f(y)}{b - a}.$$

(Η απόδειξή σας θα πρέπει να αρχίζει κάπως έτσι: «Αυτή είναι μια τετριμμένη συνέπεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής γιατί ...».

49. Αποδείξτε ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

αν κάνουμε τις πρόσθετες υποθέσεις ότι $g(b)\neq g(a)$ και ότι η $f'(x)$ και η $g'(x)$ δεν είναι ποτέ ταυτόχρονα 0 στο (a,b).

50. Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b), και $g'(x)\neq 0$ για x στο (a,b), τότε υπάρχει κάποιο x στο (a,b) με

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(b)-g(x)}.$$

Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε πρώτα, για να δείτε τι πραγματικά λέει αυτό.

51. Τί δεν πάει καλά με την παρακάτω χρήση του Κανόνα του l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

(Το όριο στην πραγματικότητα είναι -4.)

52. Βρείτε τα όρια:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$.

53. Βρείτε την $f'(0)$, αν

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

και $g(0)=g'(0)=0$ και $g''(0)=17$.

54. Αποδείξτε τις ακόλουθες μορφές του Κανόνα του l'Hôpital (καμία δεν απαιτεί κάποιο ουσιαστικά καινούργιο συλλογισμό).

(α) Αν $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f'(x)/g'(x)=l$, τότε $\displaystyle\lim_{x\to a^+}f(x)/g(x)=l$ (ομοίως για τα όρια από τα αριστερά).

(β) Αν $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to a}f'(x)/g'(x)=\infty$, τότε $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)/g(x)=\infty$ (και ομοίως για $-\infty$ ή αν το $x\to a$ αντικατασταθεί με $x\to a^+$ ή $x\to a^-$).

(γ) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)/g'(x)=l$, τότε $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)/g(x)=l$ (και ομοίως για $-\infty$). Υπόδειξη: Θεωρήστε το $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(1/x)/g(1/x)$.

(δ) Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)/g'(x)=\infty$, τότε $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)/g(x)=\infty$.

55. Υπάρχει μια άλλη μορφή του Κανόνα του l'Hôpital που χρειάζεται κάτι παραπάνω από αλγεβρικούς μετασχηματισμούς: Αν $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ και $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)/g'(x)=l$, τότε $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)/g(x)=l$. Αποδείξτε το ως εξής:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας αριθμός a τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{για } x > a.$$

Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για την f και την g στο $[a, x]$ για να δείξετε ότι

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - l \right| < \varepsilon \quad \text{για } x > a.$$

(Γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(x) - g(a) \neq 0$;)

(β) Τώρα γράψτε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{f(x)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x)}$$

(γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) - f(a) \neq 0$ για μεγάλα x;) και συμπεράνετε ότι

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < 2\varepsilon \quad \text{για αρκετά μεγάλα } x.$$

56. Για να ολοκληρωθεί η πληθώρα των παραλλαγών του Κανόνα του l'Hôpital, χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 55 για να αποδείξετε μερικές ακόμα περιπτώσεις της ακόλουθης γενικής πρότασης (υπάρχουν τόσες πολλές δυνατότητες που θα πρέπει να επιλέξετε μερικές μόνο, αν υπάρχουν, που σας ενδιαφέρουν:

Αν $\lim_{x \to [\ ]} f(x) = \lim_{x \to [\ ]} g(x) = \{\ \ \}$ και $\lim_{x \to [\ ]} f'(x)/g'(x) = (\ \ )$, τότε $\lim_{x \to [\ ]} f(x)/g(x) = (\ \ )$. Εδώ το $[\ ]$ μπορεί να είναι a ή a^+ ή a^- ή ∞ ή $-\infty$, και το $\{\ \ \}$ μπορεί να είναι 0 ή ∞ ή $-\infty$, και το $(\ \ )$ μπορεί να είναι l ή ∞ ή $-\infty$.

57. Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες και υπάρχει το $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$, προκύπτει ότι υπάρχει το $\lim_{x \to a} f'(x)/g'(x)$ (ένα αντίστροφο του κανόνα του l'Hôpital);

58. Αποδείξτε ότι αν η f' είναι αύξουσα, τότε κάθε εφαπτομένη της f τέμνει τη γραφική παράσταση της f μόνο μια φορά. (Συγκεκριμένα, αυτό ισχύει για τη συνάρτηση $f(x) = x^n$ αν ο n είναι άρτιος.)

59. Ξανακάνετε το Πρόβλημα 10-18(γ) όταν

$$(f')^2 = f - \frac{1}{f^2}.$$

(Γιατί βρίσκεται σε αυτό το κεφάλαιο αυτό το πρόβλημα;)

∗**60.** (α) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι, αν το ελάχιστο της f στο $[a, b]$ είναι στο a, τότε $f'(a) \geq 0$, και αν είναι στο b, τότε $f'(b) \leq 0$. (Θα επαναλάβετε τη μισή από την απόδειξη του Θεωρήματος 1.)

(β) Έστω ότι $f'(a) < 0$ και $f'(b) > 0$. Δείξτε ότι $f'(x) = 0$ για κάποιο x στο (a, b). Υπόδειξη: Θεωρήστε το ελάχιστο της f στο $[a, b]$· γιατί πρέπει να βρίσκεται κάπου στο (a, b);

(γ) Αποδείξτε ότι αν $f'(a) < c < f'(b)$, τότε $f'(x) = c$ για κάποιο x στο (a, b). (Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Θεώρημα του Darboux. Παρατηρήστε πως *δεν* υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής.) Υπόδειξη: «Μαγειρέψτε» μια συνάρτηση στην οποία να εφαρμόζεται το μέρος (β).

61. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a, αλλά η f' είναι ασυνεχής στο a. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Τα πλευρικά όρια $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ και $\lim_{x \to a^-} f'(x)$ δεν μπορεί να υπάρχουν και τα δύο. (Αυτό είναι απλώς μια ελαφρά παραλλαγή στο Θεώρημα 7.)

(β) Αυτά τα πλευρικά όρια, δεν μπορούν να υπάρχουν και τα δύο, ακόμα και αν επιτρέπουμε όρια με τιμές $+\infty$ ή $-\infty$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Darboux (Πρόβλημα 60).

∗**62.** Είναι εύκολο να βρούμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε η $|f|$ να είναι παραγωγίσιμη, ενώ η f όχι. Για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $f(x) = 1$ για x ρητό, και $f(x) = -1$ για x άρρητο. Σε αυτό το παράδειγμα η f δεν είναι καν συνεχής, και αυτό δεν είναι απλή σύμπτωση: Αποδείξτε ότι, αν η $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο a και η f είναι συνεχής στο a, τότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο a. Υπόδειξη: Αρκεί να εξετάσουμε μόνο τα a για τα οποία $f(a) = 0$. Γιατί; Σε αυτήν την περίπτωση, τί πρέπει να είναι το $|f|'(a)$;

∗**63.** (α) Έστω $y \neq 0$ και n άρτιος. Αποδείξτε ότι $x^n + y^n = (x + y)^n$ μόνο όταν $x = 0$. Υπόδειξη: Αν ${x_0}^n + y^n = (x_0 + y)^n$, εφαρμόστε το Θεώρημα των Rolle στην $f(x) = x^n + y^n - (x + y)^n$ πάνω στο $[0, x_0]$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $y \neq 0$ και n περιττός, τότε $x^n + y^n = (x + y)^n$ μόνο όταν $x = 0$ ή $x = -y$.

64. Έστω ότι $f(0) = 0$ και η f' είναι αύξουσα. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)/x$ είναι αύξουσα στο $(0, \infty)$. Υπόδειξη: Προφανώς θα πρέπει να κοιτάξετε την $g'(x)$. Αποδείξτε ότι είναι θετική εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο κατάλληλο διάστημα (θα βοηθήσει να θυμάστε ότι η υπόθεση $f(0) = 0$ είναι ουσιαστική, όπως φαίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2$).

65. Χρησιμοποιήστε παραγώγους για να αποδείξτε ότι, αν $n \geq 1$, τότε

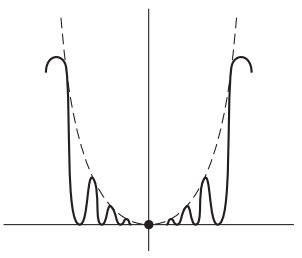
$$(1 + x)^n > 1 + nx \quad \text{για } -1 < x < 0 \text{ και } 0 < x$$

(παρατηρήστε ότι για $x = 0$ ισχύει ισότητα).

66. Θέτουμε $f(x) = x^4 \sin^2 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$ (Σχήμα 33).

(α) Αποδείξτε ότι το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f.

(β) Αποδείξτε ότι $f'(0) = f''(0) = 0$.



ΣΧΗΜΑ 33

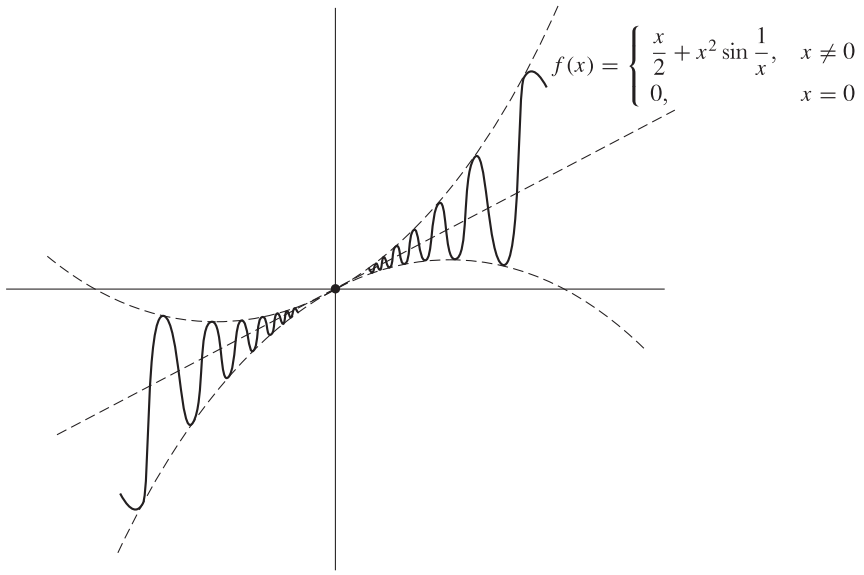
Επομένως, αυτή η συνάρτηση μας δίνει άλλο ένα παράδειγμα που δείχνει ότι το Θεώρημα 6 δεν επιδέχεται βελτίωση. Περιγράφει επίσης ένα «λεπτό σημείο» για τα μέγιστα και ελάχιστα που συχνά περνά απαρατήρητο: μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι αύξουσα σε κανένα διάστημα δεξιά από ένα σημείο τοπικού ελαχίστου, ούτε φθίνουσα σε κανένα διάστημα αριστερά του.

∗**67.** (α) Αποδείξτε ότι, αν $f'(a) > 0$ και η f' είναι συνεχής στο a, τότε η f είναι αύξουσα σε κάποιο διάστημα που περιέχει το a.

Τα επόμενα δύο μέρη αυτού του προβλήματος δείχνουν ότι η συνέχεια της f' είναι απαραίτητη.

(β) Αν $g(x) = x^2 \sin 1/x$, δείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί x οσοδήποτε κοντά στο 0 με $g'(x) = 1$ καθώς και με $g'(x) = -1$.

(γ) Έστω ότι $0 < \alpha < 1$. Θέτουμε $f(x) = \alpha x + x^2 \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$ (βλ. Σχήμα 34). Δείξτε ότι η f δεν είναι αύξουσα σε κανένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το 0, δείχνοντας ότι σε κάθε διάστημα υπάρχουν σημεία x με $f'(x) > 0$ καθώς και σημεία x με $f'(x) < 0$.



ΣΧΗΜΑ 34

Η συμπεριφορά της f για $\alpha \geq 1$, που είναι πολύ πιο δύσκολο να αναλυθεί, θα συζητηθεί στο επόμενο πρόβλημα.

****68.** Θέτουμε $f(x) = \alpha x + x^2 \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$ όταν $\alpha \geq 1$ είναι απαραίτητο να εξετάσουμε αν το $2x \sin 1/x - \cos 1/x$ γίνεται < -1 για αριθμούς x κοντά στο 0. Είναι κάπως βολικότερο να μελετήσουμε τη συνάρτηση $g(y) = 2(\sin y)/y - \cos y$ για $y \neq 0$· θα θέλαμε να ξέρουμε αν $g(y) < -1$ για μεγάλα y. Αυτό το πρόβλημα είναι πολύ λεπτό· το πιο σημαντικό κομμάτι του $g(y)$ είναι το $-\cos y$, που φτάνει την τιμή -1, αλλά αυτό συμβαίνει μόνο όταν $\sin y = 0$, και δεν είναι καθόλου σαφές το αν η g η ίδια μπορεί να έχει τιμές < -1. Η προφανής προσέγγιση σε αυτό το πρόβλημα είναι να βρούμε τις τοπικά ελάχιστες τιμές της g. Δυστυχώς, είναι αδύνατο να λύσουμε την εξίσωση $g'(y) = 0$, απαιτείται επομένως περισσότερη ευστροφία.

(α) Δείξτε ότι, αν $g'(y) = 0$, τότε

$$\cos y = (\sin y)\left(\frac{2 - y^2}{2y}\right),$$

και συμπεράνετε ότι

$$g(y) = (\sin y)\left(\frac{2 + y^2}{2y}\right).$$

(β) Τώρα δείξτε ότι, αν $g'(y) = 0$, τότε

$$\sin^2 y = \frac{4y^2}{4 + y^4},$$

και συμπεράνετε ότι

$$|g(y)| = \frac{2 + y^2}{\sqrt{4 + y^4}}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $(2+y^2)/\sqrt{4+y^4} > 1$, δείξτε ότι, αν $\alpha = 1$, τότε η f δεν είναι αύξουσα σε κανένα διάστημα γύρω από το 0.

(δ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{y\to\infty}(2+y^2)/\sqrt{4+y^4} = 1$, δείξτε ότι, αν $\alpha > 1$, τότε η f *είναι* αύξουσα σε κάποιο διάστημα γύρω από το 0.

****69.** Μια συνάρτηση f λέγεται **αύξουσα στο *a*** αν υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε

$$f(x) > f(a) \quad \text{αν} \quad a < x < a+\delta$$

και

$$f(x) < f(a) \quad \text{αν} \quad a-\delta < x < a.$$

Παρατηρήστε πως αυτό *δεν* σημαίνει ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(a-\delta, a+\delta)$· για παράδειγμα, η συνάρτηση που βλέπετε στο Σχήμα 34 είναι αύξουσα στο 0, αλλά δεν είναι αύξουσα σε κανένα ανοικτό διάστημα που να περιέχει το 0.

(α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ότι η f είναι αύξουσα στο a για κάθε a στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο $[0,1]$. (Πεισθείτε πρώτα ότι υπάρχει κάτι που να χρειάζεται απόδειξη.) Υπόδειξη: Για $0 < b < 1$, αποδείξτε ότι το ελάχιστο της f στο $[b,1]$ πρέπει να εμφανίζεται στο b.

(β) Αποδείξτε το μέρος (α) χωρίς να υποθέσετε ότι η f είναι συνεχής, εξετάζοντας για κάθε b στο $[0,1]$ το σύνολο $S_b = \{x : f(y) \geq f(b)$ για κάθε y στο $[b,x]\}$. (Αυτό το μέρος του προβλήματος δεν χρειάζεται για τα υπόλοιπα.) Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $S_b = \{x : b \leq x \leq 1\}$ παίρνοντας το $\sup S_b$.

(γ) Αν η f είναι αύξουσα στο a και η f είναι παραγωγίσιμη στο a, αποδείξτε ότι $f'(a) \geq 0$ (αυτό είναι εύκολο).

(δ) Αν $f'(a) > 0$, αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα στο a (επιστρέψτε στον ορισμό του $f'(a)$).

(ε) Χρησιμοποιήστε το (α) και (δ) για να δείξετε, χωρίς χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, ότι, αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f'(a) > 0$ για κάθε a στο $[0,1]$, τότε η f είναι αύξουσα στο $[0,1]$.

(στ) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και ότι $f'(a) = 0$ για κάθε a στο $(0,1)$. Εφαρμόστε το μέρος (ε) στη συνάρτηση $g(x) = f(x) + \varepsilon x$ για να δείξετε ότι $f(1) - f(0) > -\varepsilon$. Ομοίως, δείξτε ότι $f(1) - f(0) < \varepsilon$ εξετάζοντας την $h(x) = \varepsilon x - f(x)$. Συμπεράνετε ότι $f(0) = f(1)$.

Η συγκεκριμένη αυτή απόδειξη του ότι μια συνάρτηση με παράγωγο μηδέν πρέπει να είναι σταθερή έχει πολλά κοινά σημεία με μια απόδειξη του H. A. Schwarz, που είναι ίσως η πρώτη αυστηρή απόδειξη που δόθηκε. Τουλάχιστον, ο δημιουργός της έτσι νόμιζε. Δείτε την ενθουσιώδη επιστολή του στην παραπομπή [54] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας.

****70.** (α) Αν f είναι μια σταθερή συνάρτηση, τότε κάθε σημείο είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Είναι πολύ πιθανό να συμβαίνει κάτι τέτοιο, ακόμα και αν η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση: για παράδειγμα, αν $f(x) = 0$ για $x < 0$ και $f(x) = 1$ για $x \geq 0$. Αποδείξτε, όμως, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 8-4 ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και κάθε σημείο του $[a,b]$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. Το ίδιο ισχύει, φυσικά, όταν κάθε σημείο του $[a,b]$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

(β) Υποθέστε τώρα ότι κάθε σημείο είναι είτε τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο για τη συνεχή συνάρτηση f (χωρίς να αποκλείουμε την εκδοχή μερικά σημεία να είναι τοπικά ελάχιστα και άλλα τοπικά μέγιστα). Αποδείξτε ότι η

f είναι σταθερά ως εξής: Έστω $f(a_0) < f(b_0)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a_0) < f(x) < f(b_0)$ για $a_0 < x < b_0$. (Γιατί;) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 8, διαμερίστε το $[a_0, b_0]$ σε διαστήματα πάνω στα οποία να ισχύει $\sup f - \inf f < (f(b_0) - f(a_0))/2$. Επίσης διαλέξτε τα μήκη των εν λόγω διαστημάτων να είναι μικρότερα του $(b_0 - a_0)/2$. Τότε υπάρχει ένα τέτοιο υποδιάστημα $[a_1, b_1]$ με $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$ και $f(a_1) < f(b_1)$. (Γιατί;). Συνεχίστε επαγωγικά και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα των Κιβωτισμένων Διαστημάτων (Πρόβλημα 8-14) για να βρείτε σημείο x που δεν μπορεί να είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε ελάχιστο.

****71.** (α) Ένα σημείο x λέγεται **σημείο γνήσιου μεγίστου** της f στο A αν $f(x) > f(y)$ για κάθε y στο A με $y \neq x$ (συγκρίνετε με τον ορισμό του συνηθισμένου σημείου μεγίστου). Ένα **σημείο τοπικά γνήσιου μεγίστου** ορίζεται με τον προφανή τρόπο. Βρείτε όλα τα σημεία τοπικά γνήσιου μεγίστου της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ όπου } \dfrac{p}{q} \text{ ανάγωγο.} \end{cases}$$

Μοιάζει απίθανο για μια συνάρτηση να έχει ένα τοπικά γνήσιο μέγιστο σε *κάθε* σημείο (αν και το παραπάνω παράδειγμα θα μπορούσε να σας βάλει σε σκέψεις). Αποδείξτε το ως εξής.

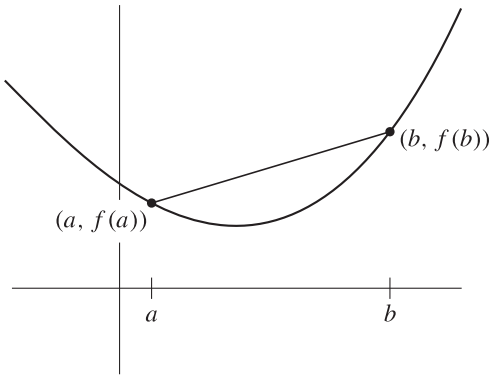
(β) Έστω ότι κάθε σημείο είναι σημείο τοπικά γνήσιου μεγίστου της f. Παίρνουμε οποιονδήποτε αριθμό x_1 και διαλέγουμε $a_1 < x_1 < b_1$ με $b_1 - a_1 < 1$ έτσι ώστε $f(x_1) > f(x)$ για κάθε x στο $[a_1, b_1]$. Έστω $x_2 \neq x_1$ κάποιο σημείο στο (a_1, b_1) και διαλέγουμε $a_1 \leq a_2 < x_2 < b_2 \leq b_1$ με $b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$ έτσι ώστε $f(x_2) > f(x)$ για κάθε x στο $[a_2, b_2]$. Συνεχίστε με αυτόν τον τρόπο, και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κιβωτισμένων Διαστημάτων (Πρόβλημα 8-14) για να οδηγηθείτε σε αντίφαση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΚΥΡΤΕΣ ΚΑΙ ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αν και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να σχεδιαστεί με αρκετή ακρίβεια με βάση τις πληροφορίες που μας παρέχει η παράγωγος, κάποιες κρυφές πτυχές της γραφικής παράστασης αποκαλύπτονται μόνο με τη μελέτη της δεύτερης παραγώγου. Σκόπιμα παραλείψαμε προηγουμένως αυτές τις λεπτομέρειες, διότι η σχεδίαση γραφικών παραστάσεων είναι αρκετά περίπλοκη ακόμα και αν δεν ασχοληθούμε με αυτές, και γιατί οι πρόσθετες πληροφορίες που παίρνουμε συχνά δεν αξίζουν τον κόπο. Εξάλλου, οι σωστές αποδείξεις των σχετικών θεωρημάτων είναι αρκετά δύσκολες, τόσο που η θέση τους να είναι σε ένα παράρτημα. Παρ' όλες αυτές τις αποθαρρυντικές παρατηρήσεις, αξίζει να κάνει κάποιος κτήμα του τις πληροφορίες που παρουσιάζονται εδώ, καθώς οι έννοιες του «κυρτού» και του «κοίλου», είναι πολύ πιο σημαντικές από κάποιο βοήθημα για να σχεδιάζουμε γραφικές παραστάσεις. Επιπλέον, οι αποδείξεις έχουν ένα ευχάριστα γεωμετρικό άρωμα που δεν απαντά συχνά σε θεωρήματα Απειροστικού Λογισμού. Στην πραγματικότητα, ο ίδιος ο βασικός ορισμός είναι γεωμετρικής υφής (βλ. Σχήμα 1).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Μια συνάρτηση f λέγεται **κυρτή** σε ένα διάστημα, αν για κάθε a και b στο διάστημα, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.



ΣΧΗΜΑ 1

Η γεωμετρική συνθήκη που εμφανίζεται σε αυτόν τον ορισμό μπορεί να εκφραστεί και με αναλυτικό τρόπο, που μερικές φορές είναι πιο χρήσιμος για τις αποδείξεις. Η ευθεία που περνά από τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που ορίζεται από την

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Αυτή η ευθεία βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f στο x αν $g(x) > f(x)$, δηλαδή αν

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x)$$

ή

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

ή

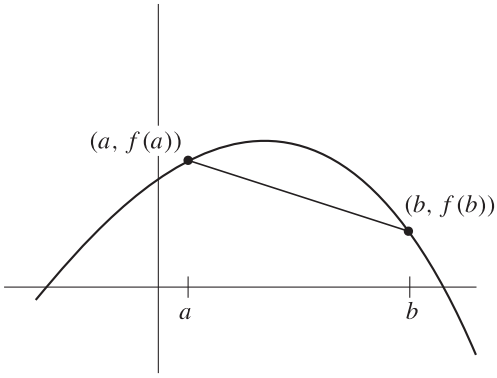
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Έχουμε λοιπόν έναν ισοδύναμο ορισμό της κυρτότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια συνάρτηση f λέγεται **κυρτή** σε ένα διάστημα, αν για a, x, και b σε αυτό το διάστημα με $a < x < b$, έχουμε

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



ΣΧΗΜΑ 2

Αν η φράση «πάνω από» στον Ορισμό 1 αντικατασταθεί από την «κάτω από» ή, ισοδύναμα, αν η ανισότητα του Ορισμού 2 αντικατασταθεί από την

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

παίρνουμε τον ορισμό της **κοίλης** συνάρτησης (Σχήμα 2). Δεν είναι δύσκολο να δούμε

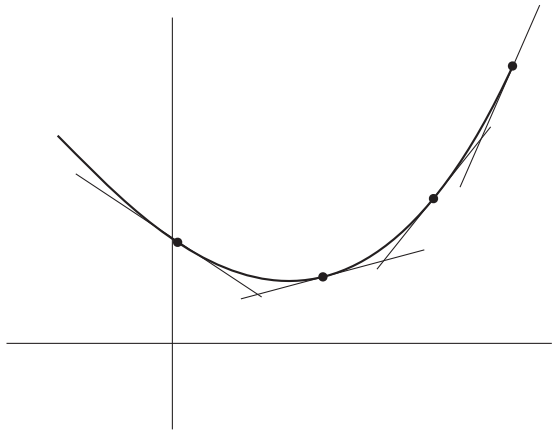
ότι οι κοίλες συναρτήσεις είναι ακριβώς αυτές της μορφής $-f$, όπου η f είναι κυρτή. Για αυτόν το λόγο, τα τρία επόμενα θεωρήματα για τις κυρτές συναρτήσεις έχουν άμεσα πορίσματα για κοίλες συναρτήσεις, τόσο απλά που δεν θα κάνουμε καν τον κόπο να τα διατυπώσουμε.

Το Σχήμα 3 δείχνει μερικές εφαπτόμενες μιας κυρτής συνάρτησης. Δύο πράγματα μοιάζουν να ισχύουν:

(1) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$ με εξαίρεση το ίδιο το σημείο $(a, f(a))$ (αυτό το σημείο λέγεται **σημείο επαφής** της εφαπτομένης).

(2) Αν $a < b$, τότε η κλίση της εφαπτομένης στο $(a, f(a))$ είναι μικρότερη από την κλίση της εφαπτομένης στο $(b, f(b))$· δηλαδή η f' είναι αύξουσα.

Στην πραγματικότητα αυτές οι παρατηρήσεις είναι σωστές, και οι αποδείξεις τους δεν είναι δύσκολες.



ΣΧΗΜΑ 3

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι η f είναι κυρτή. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$, με εξαίρεση το ίδιο το $(a, f(a))$. Αν $a < b$ και η f είναι παραγωγίσιμη στα a και b, τότε $f'(a) < f'(b)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν $0 < h_1 < h_2$, τότε, όπως υποδεικνύει το Σχήμα 4,

$$(1) \quad \frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1} < \frac{f(a+h_2) - f(a)}{h_2}.$$

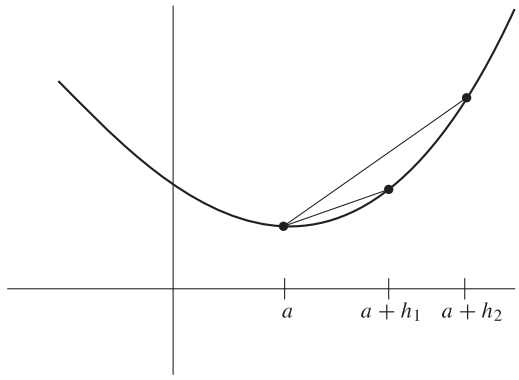
Μπορούμε να πάρουμε μια απόδειξη που να μη βασίζεται στο σχήμα, άμεσα από τον Ορισμό 2, αν τον εφαρμόσουμε στο $a < a + h_1 < a + h_2$. Η ανισότητα (1) δείχνει ότι οι τιμές του

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

φθίνουν καθώς το $h \to 0^+$. Επομένως

$$f'(a) < \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{για } h > 0$$

(στην πραγματικότητα η $f'(a)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα όλων αυτών των αριθμών). Αλλά αυτό σημαίνει ότι για $h > 0$ η τέμνουσα που περνά από τα $(a, f(a))$ και $(a + h, f(a + h))$ έχει μεγαλύτερη κλίση από την εφαπτομένη, που σημαίνει ότι το $(a + h, f(a + h))$ κείται πάνω από την εφαπτομένη (εύκολα μπορεί κανείς να δώσει μια αναλυτική μετάφραση αυτού του επιχειρήματος).



ΣΧΗΜΑ 4

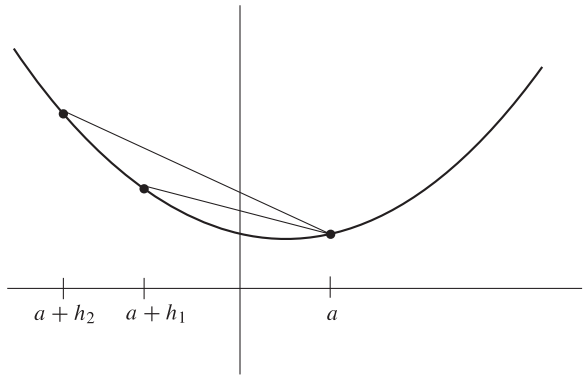
Για αρνητικά h η κατάσταση είναι παρόμοια (Σχήμα 5): αν $h_2 < h_1 < 0$, τότε

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1} > \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2}.$$

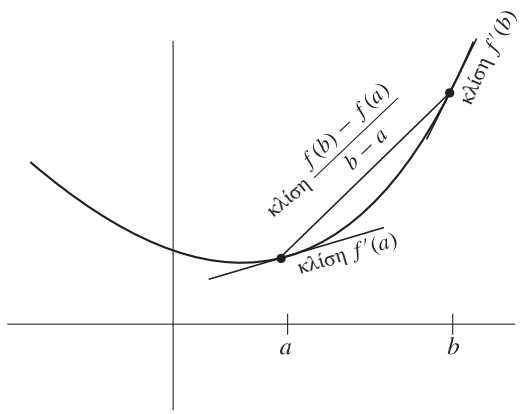
Αυτό δείχνει ότι η κλίση της εφαπτομένης είναι μεγαλύτερη από

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{για } h<0$$

(στην πραγματικότητα η $f'(a)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα όλων αυτών των αριθμών), και έτσι το $f(a+h)$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη αν $h<0$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του θεωρήματος.



ΣΧΗΜΑ 5



ΣΧΗΜΑ 6

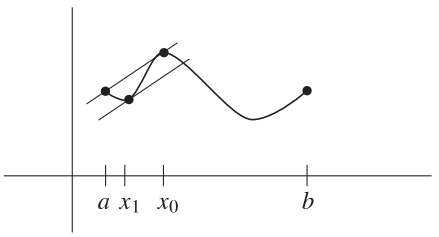
Έστω τώρα ότι $a < b$. Τότε, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει (Σχήμα 6),

$$f'(a) < \frac{f(a + (b-a)) - f(a)}{b-a} \quad \text{αφού } b - a > 0$$
$$= \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

και

$$f'(b) > \frac{f(b + (a-b)) - f(b)}{a-b} \quad \text{αφού } a - b < 0$$
$$= \frac{f(a) - f(b)}{a-b} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες, παίρνουμε $f'(a) < f'(b)$. ∎



ΣΧΗΜΑ 7

Το Θεώρημα 1 έχει δύο αντίστροφα. Εδώ οι αποδείξεις θα είναι λίγο πιο δύσκολες. Αρχίζουμε με ένα λήμμα που παίζει για το επόμενο θεώρημα τον ίδιο ρόλο με αυτόν που παίζει το Θεώρημα του Rolle στην απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. Ισχυρίζεται ότι αν η f' είναι αύξουσα, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από οποιαδήποτε *τέμνουσα που συμβαίνει να είναι οριζόντια*.

ΛΗΜΜΑ Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ότι η f' είναι αύξουσα. Αν $a < b$ και $f(a) = f(b)$, τότε $f(x) < f(a) = f(b)$ για κάθε $a < x < b$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(x) \geq f(a) = f(b)$ για κάποιο x στο (a, b). Τότε το μέγιστο της f στο $[a, b]$ εμφανίζεται σε κάποιο σημείο x_0 στο (a, b) με $f(x_0) \geq f(a)$ και φυσικά $f'(x_0) = 0$ (Σχήμα 7). Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[a, x_0]$, βρίσκουμε ότι υπάρχει κάποιο x_1 με $a < x_1 < x_0$ και

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq 0,$$

πράγμα που αντιφάσκει με το ότι η f' είναι αύξουσα. ∎

Επιχειρούμε τώρα τη γενική περίπτωση με αλγεβρικά τεχνάσματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η f' αύξουσα, τότε η f είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a < b$. Ορίζουμε μια συνάρτηση g με

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x - a).$$

Είναι εύκολο να δείτε ότι και η g' είναι αύξουσα· ακόμη, $g(a) = g(b) = f(a)$. Εφαρμόζοντας το λήμμα για τη g, συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) < f(a) \quad \text{αν} \quad a < x < b.$$

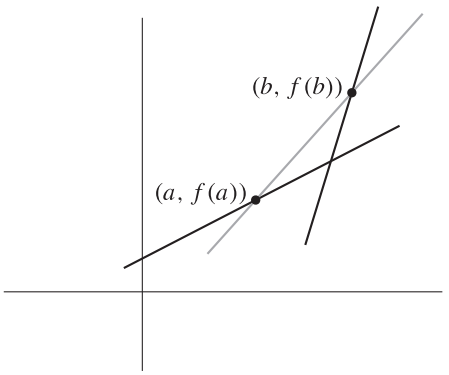
Με άλλα λόγια, αν $a < x < b$, τότε

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x - a) < f(a)$$

ή

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Άρα η f είναι κυρτή. ∎



ΣΧΗΜΑ 8

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν η f είναι παραγωγίσιμη και η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη με την εξαίρεση του σημείου επαφής, τότε η f είναι κυρτή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $a < b$. Από το Σχήμα 8 είναι φανερό ότι αν το $(b, f(b))$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$, και το $(a, f(a))$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(b, f(b))$, τότε η κλίση της εφαπτόμενης στο $(b, f(b))$ πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την κλίση της εφαπτομένης στο $(a, f(a))$. Το επιχείρημα που ακολουθεί λέει αυτό ακριβώς το πράγμα με δύο εξισώσεις.

Αφού η εφαπτομένη στο $(a, f(a))$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a),$$

και αφού το $(b, f(b))$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, έχουμε

$$(1) \quad f(b) > f'(a)(b - a) + f(a).$$

Ομοίως, αφού η εφαπτομένη στο $(b, f(b))$ είναι η γραφική παράσταση της

$$h(x) = f'(b)(x - b) + f(b),$$

και το $(a, f(a))$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο $(b, f(b))$, έχουμε

$$(2) \quad f(a) > f'(b)(a - b) + f(b).$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $f'(a) < f'(b)$.

Τώρα, το Θεώρημα 2 μας λέει ότι η f είναι κυρτή. ∎

Αν μια συνάρτηση f έχει στρωτή δεύτερη παράγωγο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πληροφορίες που δίνουν αυτά τα θεωρήματα για να ανακαλύψουμε τις περιοχές στις οποίες η f είναι κυρτή ή κοίλη. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Για αυτήν τη συνάρτηση

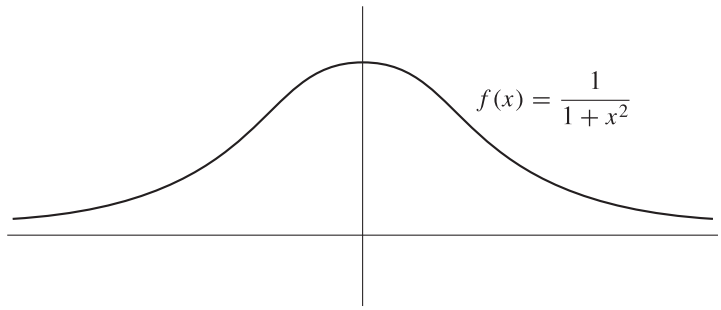
$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Άρα $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 0$, και $f(0) = 1$, ενώ

$$f'(x) > 0 \quad \text{αν} \quad x < 0,$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{αν} \quad x > 0.$$

Επιπλέον,

$$f(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x,$$
$$f(x) \to 0 \quad \text{όταν } x \to \infty \text{ ή } -\infty,$$
η f είναι άρτια.



ΣΧΗΜΑ 9

Επομένως η γραφική παράσταση της f θα μοιάζει κάπως με το Σχήμα 9. Υπολογίζουμε τώρα την

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) + 2x \cdot [2(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4}$$
$$= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Δεν είναι δύσκολο να διερευνήσουμε το πρόσημο της $f''(x)$. Παρατηρούμε πρώτα ότι $f''(x) = 0$ μόνο όταν $x = \sqrt{1/3}$ ή $-\sqrt{1/3}$. Αφού η f'' είναι προφανώς συνεχής, πρέπει να διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε καθένα από τα σύνολα

$$(-\infty, -\sqrt{1/3}),$$
$$(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}),$$
$$(\sqrt{1/3}, \infty).$$

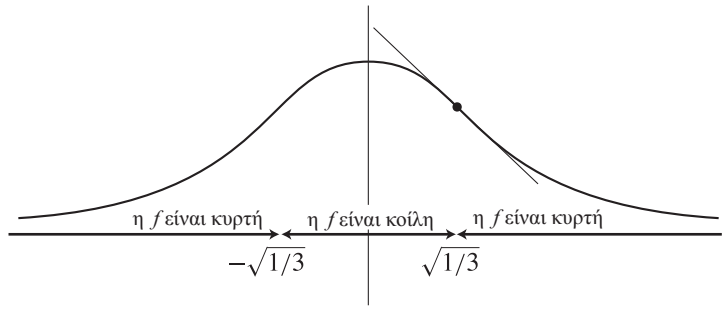
Αφού μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι, για παράδειγμα,

$$f''(-1) = \tfrac{1}{2} > 0,$$
$$f''(0) = -2 < 0,$$
$$f''(1) = \tfrac{1}{2} > 0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f'' > 0 \text{ στο } (-\infty, -\sqrt{1/3}) \text{ και στο } (\sqrt{1/3}, \infty),$$
$$f'' < 0 \text{ στο } (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}).$$

Αφού η $f'' > 0$ σημαίνει ότι η f' είναι αύξουσα, έπεται από το Θεώρημα 2 ότι η f είναι κυρτή στο $(-\infty, -\sqrt{1/3})$ και στο $(\sqrt{1/3}, \infty)$, ενώ στο $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ η f είναι κοίλη (Σχήμα 10).



ΣΧΗΜΑ 10

Παρατηρήστε ότι στο $(\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$ η εφαπτομένη βρίσκεται κάτω από το στα δεξιά του τμήμα της γραφικής παράστασης, αφού η f είναι κυρτή στο $(\sqrt{1/3}, \infty)$, και πάνω από το στα αριστερά του τμήμα της γραφικής παράστασης, αφού η f είναι κοίλη στο $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$· έτσι η εφαπτομένη διαπερνά τη γραφική παράσταση. Γενικά, ένας αριθμός a λέγεται **σημείο καμπής** της f αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο $(a, f(a))$ διασχίζει τη γραφική παράσταση· έτσι το $\sqrt{1/3}$ και το $-\sqrt{1/3}$ είναι σημεία καμπής της $f(x) = 1/(1+x^2)$. Σημειώστε ότι η συνθήκη $f''(a) = 0$ *δεν* μας βεβαιώνει ότι το a είναι σημείο καμπής της f· για παράδειγμα, αν $f(x) = x^4$, τότε $f''(0) = 0$, αλλά η f είναι κυρτή, άρα η εφαπτομένη στο $(0,0)$ σίγουρα δεν διαπερνά τη γραφική παράσταση της f. Για να είναι το a σημείο καμπής μιας συνάρτησης f, είναι αναγκαίο η f'' να έχει διαφορετικά πρόσημα αριστερά και δεξιά του a.

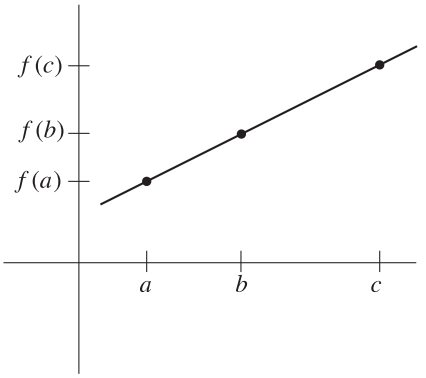
Αυτό το παράδειγμα περιγράφει τη διαδικασία που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε για να αναλύσετε οποιαδήποτε συνάρτηση f. Αφού σχεδιάσουμε πρόχειρα τη γραφική παράσταση, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχει η f' μπορούμε να υπολογίσουμε

τις ρίζες της f'' και να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f'' στα διαστήματα που βρίσκονται ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες. Στα διαστήματα όπου $f'' > 0$ η συνάρτηση είναι κυρτή· στα διαστήματα όπου $f'' < 0$ η συνάρτηση είναι κοίλη. Η γνώση των περιοχών στις οποίες η f είναι κυρτή και κοίλη μας προφυλάσσει συχνά από παρερμηνείες των άλλων δεδομένων για την f. Μερικές συναρτήσεις που αναλύονται με αυτόν τον τρόπο δίνονται στα προβλήματα, όπου περιέχονται και κάποια θεωρητικά ερωτήματα.

Για να ολοκληρώσουμε τη συζήτηση πάνω στις κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, θα αποδείξουμε ένα ακόμα αποτέλεσμα που μπορεί ίσως να το υποψιάζεστε ήδη. Είδαμε ότι οι κυρτές και κοίλες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα, κάθε εφαπτομένη ευθεία να τέμνει τη γραφική τους παράσταση μόνο σε ένα σημείο. Αν σχεδιάσετε μερικές συναρτήσεις, πιθανόν να πεισθείτε ότι δεν υπάρχουν άλλες συναρτήσεις που να έχουν αυτήν την ιδιότητα. Η μόνη απόδειξη όμως αυτού του ισχυρισμού που γνωρίζω είναι μάλλον «πονηρή».

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα και η γραφική της παράσταση τέμνεται από κάθε εφαπτομένη της μόνο μία φορά, τότε η f είναι ή κυρτή ή κοίλη στο διάστημα αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υπάρχουν δύο μέρη στην απόδειξη.



ΣΧΗΜΑ 11

(1) Κατ' αρχήν ισχυριζόμαστε ότι καμία ευθεία δεν μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε *τρία* διαφορετικά σημεία. Αν αντιθέτως, υποθέσουμε ότι αυτό συνέβαινε στα σημεία $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ και $(c, f(c))$ με $a < b < c$ (Σχήμα 11), τότε

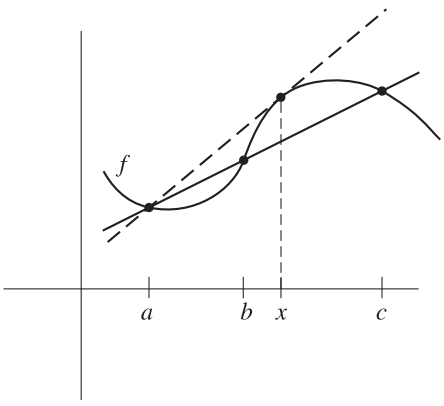
$$(1) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{για } x \text{ στο } [b, c].$$

Η εξίσωση (1) λέει ότι $g(b) = g(c)$. Έτσι, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει κάποιος αριθμός x στο (b, c) όπου $0 = g'(x)$, και άρα

$$0 = (x - a) f'(x) - [f(x) - f(a)]$$



ΣΧΗΜΑ 12

ή

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Αλλά αυτό λέει ότι (Σχήμα 12) η εφαπτομένη στο $(x, f(x))$ διέρχεται από το $(a, f(a))$, σε αντίθεση με την υπόθεσή μας.

(2) Έστω ότι $a_0 < b_0 < c_0$ και $a_1 < b_1 < c_1$ είναι σημεία στο διάστημά μας. Θέτουμε

$$\begin{aligned} x_t &= (1-t)a_0 + ta_1 \\ y_t &= (1-t)b_0 + tb_1 \qquad 0 \le t \le 1. \\ z_t &= (1-t)c_0 + tc_1 \end{aligned}$$

Τότε $x_0 = a_0$ και $x_1 = a_1$ και (βλ. Πρόβλημα 4-2) τα σημεία x_t κείνται όλα μεταξύ των a_0 και a_1, και ανάλογοι ισχυρισμοί ισχύουν για τα y_t και z_t. Επιπλέον,

$$x_t < y_t < z_t \qquad \text{για} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Τώρα, θεωρήστε τη συνάρτηση

$$g(t) = \frac{f(y_t) - f(x_t)}{y_t - x_t} - \frac{f(z_t) - f(x_t)}{z_t - x_t} \qquad \text{για } 0 \le t \le 1.$$

Από το βήμα (1), $g(t) \neq 0$ για κάθε t στο $[0, 1]$. Άρα, είτε $g(t) > 0$ για κάθε t στο $[0, 1]$, είτε $g(t) < 0$ για κάθε t στο $[0, 1]$. Δηλαδή, η f είναι είτε κυρτή είτε κοίλη. ∎

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις του Προβλήματος 11-1, υποδεικνύοντας τις περιοχές στις οποίες είναι κυρτές ή κοίλες, καθώς και τα σημεία καμπής τους (θεωρήστε ότι η (iv) έχει διπλό αστερίσκο).

2. Το Σχήμα 30 στο Κεφάλαιο 11 δείχνει τη γραφική παράσταση της f'. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f.

3. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα αν και μόνο αν για κάθε x και y στο διάστημα έχουμε

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \quad \text{για } 0 < t < 1.$$

(Αυτό δεν είναι τίποτε παραπάνω από μια αναδιατύπωση του ορισμού, είναι όμως χρήσιμη).

4. (α) Αποδείξτε ότι αν η f και η g είναι κυρτές και η f είναι αύξουσα, τότε η $f \circ g$ είναι κυρτή. (Το πιο εύκολο είναι να γίνει χρήση του Προβλήματος 3.)

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου η $g \circ f$ δεν είναι κυρτή.

(γ) Έστω ότι η f και η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Δώστε μια άλλη απόδειξη του μέρους (α), εξετάζοντας τις δεύτερες παραγώγους.

5. (α) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή πάνω σε ένα διάστημα. Δείξτε ότι η f είναι ή αύξουσα ή φθίνουσα, ή υπάρχει αριθμός c τέτοιος ώστε η f είναι φθίνουσα στα αριστερά του c και αύξουσα στα δεξιά του c.

(β) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δώσετε μία άλλη απόδειξη του αποτελέσματος στο Πρόβλημα 4(α) όταν η f και η g είναι μία φορά παραγωγίσιμες. (Θα πρέπει να είστε λίγο προσεκτικοί όταν συγκρίνετε την $f'(g(x))$ και την $f'(g(y))$ για $x < y$.)

(γ) Αποδείξτε το (α) μέρος χωρίς να υποθέσετε την f παραγωγίσιμη. Θα πρέπει να παρακολουθήσετε όλες τις διαφορετικές περιπτώσεις, αλλά δεν χρειάζονται ιδιαίτερα έξυπνες ιδέες. Αρχίστε δείχνοντας ότι αν $a < b$ και $f(a) < f(b)$, τότε η f είναι αύξουσα στα δεξιά του b· και αν $f(a) > f(b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στα αριστερά του a.

∗**6.** Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με τις εξής ιδιότητες: $f(x) > 0$ για $x \geq 0$, η f είναι φθίνουσα, και $f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $f''(x) = 0$ για κάποιο $x > 0$ (οπότε υπό φυσιολογικές συνθήκες η f θα έχει σημείο καμπής στο x —ένα παράδειγμα δίνεται από την $f(x) = 1/(1+x^2)$). Όλες οι υποθέσεις αυτού του θεωρήματος είναι ουσιαστικές, όπως φαίνεται από την $f(x) = 1 - x^2$, που δεν είναι θετική για κάθε x· από την $f(x) = x^2$, που δεν είναι φθίνουσα· και από την $f(x) = 1/(x+1)$, που δεν ικανοποιεί την $f'(0) = 0$. Υπόδειξη: Επιλέγουμε $x_0 > 0$ με $f'(x_0) < 0$. Δεν μπορεί να ισχύει $f'(y) \leq f'(x_0)$ για όλα τα $y > x_0$. Γιατί όχι; Άρα $f'(x_1) > f'(x_0)$ για κάποιο $x_1 > x_0$. Εξετάστε την f' στο $[0, x_1]$.

∗**7.** (α) Αποδείξτε ότι αν η f είναι κυρτή, τότε $f([x+y]/2) < [f(x) + f(y)]/2$.

(β) Έστω ότι η f ικανοποιεί αυτήν τη συνθήκη. Δείξτε ότι $f(kx + (1-k)y) < kf(x) + (1-k)f(y)$ όταν ο k είναι ρητός αριθμός, μεταξύ 0 και 1, της μορφής $m/2^n$. Υπόδειξη: Το μέρος (α) είναι η ειδική περίπτωση $n = 1$. Χρησιμοποιήστε επαγωγή, επικαλούμενοι το μέρος (α) σε κάθε βήμα.

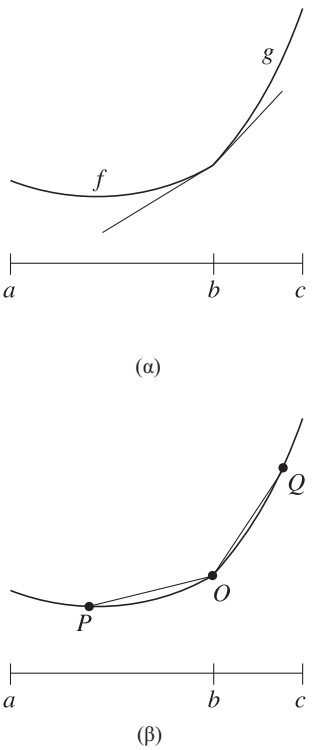
(γ) Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη του μέρους (α) και ότι η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι κυρτή.

∗**8.** Για $n > 1$, έστω $p_1, \ldots, p_n$ *θετικοί* αριθμοί με $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

(α) Για τυχαίους αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$ δείξτε ότι το $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ βρίσκεται ανάμεσα στο μικρότερο και το μεγαλύτερο x_i.

(β) Δείξτε το ίδιο για το $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$, όπου $t = \sum_{i=1}^{n-1} p_i$.

(γ) Αποδείξτε την *ανισότητα του Jensen:* Αν η f είναι κυρτή, τότε $f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 3, παρατηρώντας ότι $p_n = 1 - t$. (Το μέρος (β) χρειάζεται για να δείξετε ότι ο $(1/t)\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f αν το ίδιο ισχύει για τους $x_1, \ldots, x_n$.)



ΣΧΗΜΑ 13

∗**9.** (α) Για κάθε συνάρτηση f, η παράγωγος από τα δεξιά, $\lim_{h\to 0^+}[f(a+h)-f(a)]/h$ συμβολίζεται με $f'_+(a)$, και η παράγωγος από τα αριστερά συμβολίζεται με $f'_-(a)$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 στην πραγματικότητα δείχνει ότι η $f'_+(a)$ και η $f'_-(a)$ υπάρχουν πάντοτε αν η f είναι κυρτή σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το a. Ελέγξτε αυτόν τον ισχυρισμό, και ακόμα δείξτε ότι η f'_+ και η f'_- είναι αύξουσες και ότι $f'_-(a) \le f'_+(a)$.

(β) Αντιστρόφως υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[a, b]$ και η g είναι κυρτή στο $[b, c]$, με $f(b) = g(b)$ και $f'_-(b) \le g'_+(b)$ (Σχήμα 13(α)). Αν ορίσουμε την h στο $[a, c]$ να είναι η f στο $[a, b]$ και η g στο $[b, c]$, δείξτε ότι η h είναι κυρτή στο $[a, c]$. Υπόδειξη: Δοθέντων των P και Q σε αντίθετες πλευρές του $O = (b, f(b))$, όπως στο Σχήμα 13(β), συγκρίνετε την κλίση της OQ με εκείνη της PO.

(γ) Δείξτε ότι αν η f είναι κυρτή, τότε $f'_+(a) = f'_-(a)$ αν και μόνο αν η f'_+ είναι συνεχής στο a. (Έτσι η f είναι παραγωγίσιμη ακριβώς όταν η f'_+ είναι συνεχής.) Υπόδειξη: το $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ βρίσκεται κοντά στην $f'_-(a)$ για $b < a$ κοντά στο a, και η $f'_+(b)$ είναι μικρότερη από αυτό το πηλίκο.

∗**10.** (α) Αποδείξτε ότι μια κυρτή συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ή σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα, πρέπει να είναι συνεχής.

(β) Δώστε παράδειγμα κυρτής συνάρτησης επί κλειστού διαστήματος που *δεν* είναι συνεχής και εξηγήστε τι είδους ασυνέχειες είναι δυνατές.

11. Καλέστε μια συνάρτηση f *ασθενώς κυρτή* επί ενός διαστήματος αν, για $a < b < c$ στο διάστημα αυτό, έχουμε

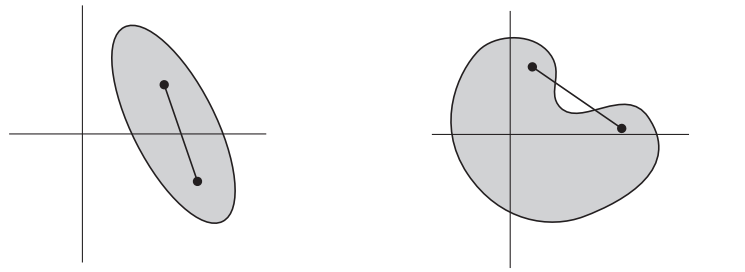
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(α) Δείξτε ότι μια ασθενώς κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή αν και μόνο αν η γραφική της παράσταση δεν περιέχει καθόλου ευθύγραμμα τμήματα. (Μερικές φορές μια ασθενώς κυρτή συνάρτηση καλείται απλώς «κυρτή», ενώ οι κυρτές συναρτήσεις με τη δική μας έννοια καλούνται «αυστηρώς κυρτές».)

(β) Επαναδιατυπώστε τα θεωρήματα της παραγράφου αυτής για ασθενώς κυρτές συναρτήσεις.

12. Βρείτε δύο κυρτές συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f(x) = g(x)$ αν και μόνο αν ο x είναι ακέραιος. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα ένα παράδειγμα όπου η g είναι απλά ασθενώς κυρτή, και στη συνέχεια τροποποιήστε το, χρησιμοποιώντας ως οδηγό το αποτέλεσμα του Προβλήματος 9.

13. Ένα σύνολο A σημείων του επιπέδου καλείται *κυρτό* αν το A περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει οποιαδήποτε δύο σημεία του (Σχήμα 14). Για μία συνάρτηση f, έστω A_f το σύνολο των σημείων (x, y) με $y \geq f(x)$, έτσι ώστε το A_f είναι το σημειοσύνολο στην, ή πάνω από την, γραφική παράσταση της f. Δείξτε ότι το A_f είναι κυρτό αν και μόνο αν η f είναι ασθενώς κυρτή, με την ορολογία του προηγουμένου προβλήματος. Για άλλες πληροφορίες πάνω στα κυρτά σύνολα συμβουλευθείτε την αναφορά [18] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας.



(α) κυρτό υποσύνολο του επιπέδου (β) μη κυρτό υποσύνολο του επιπέδου

ΣΧΗΜΑ 14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έχουμε τώρα στη διάθεσή μας αρκετά ισχυρές μεθόδους για να μελετάμε συναρτήσεις· αυτό που μας λείπει είναι ένα ικανοποιητικό απόθεμα συναρτήσεων πάνω στις οποίες να εφαρμόσουμε αυτές τις μεθόδους. Έχουμε δει διάφορους τρόπους κατασκευής καινούργιων συναρτήσεων από τις παλιές —την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση και τη σύνθεση— αλλά χρησιμοποιώντας αυτές μόνο, μπορούμε να πάρουμε μόνο τις ρητές συναρτήσεις (ακόμα και η συνάρτηση ημιτόνου, που χρησιμοποιήθηκε πολύ συχνά σε παραδείγματα, δεν έχει οριστεί έως τώρα). Στα αμέσως επόμενα κεφάλαια θα αρχίσουμε να κατασκευάζουμε νέες συναρτήσεις με πιο μοντέρνους τρόπους, υπάρχει όμως μια σπουδαία μέθοδος που θα διπλασιάζει στην πράξη την αξία κάθε καινούργιας μεθόδου που θα ανακαλύπτουμε.

Αν θυμηθούμε ότι μια συνάρτηση είναι ένα σύνολο από ζεύγη αριθμών, ίσως μας έρθει η λαμπρή ιδέα να αντιστρέψουμε όλα τα ζεύγη. Έτσι, από τη συνάρτηση

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,8)\},$$

παίρνουμε

$$g = \{(2,1),(4,3),(9,5),(8,13)\}.$$

Ενώ $f(1) = 2$ και $f(3) = 4$, έχουμε $g(2) = 1$ και $g(4) = 3$.

Δυστυχώς, αυτή η εξαιρετική ιδέα δεν δουλεύει πάντα. Αν

$$f = \{(1,2),(3,4),(5,9),(13,4)\},$$

τότε το σύνολο

$$\{(2,1),(4,3),(9,5),(4,13)\}$$

δεν είναι συνάρτηση, γιατί εκτός από το $(4,3)$ περιέχει και το $(4,13)$. Είναι φανερό το πού βρίσκεται το πρόβλημα: είναι $f(3) = f(13)$, ενώ $3 \neq 13$. Αυτή είναι και η μόνη δυσκολία που μπορεί να εμφανιστεί· αξίζει επομένως να δώσουμε ένα όνομα στις συναρτήσεις για τις οποίες αυτό δεν συμβαίνει.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **1-1** (διαβάζεται «ένα-προς-ένα») αν $f(a) \neq f(b)$ όποτε $a \neq b$.

Η ταυτοτική συνάρτηση I είναι προφανώς 1-1, το ίδιο και η εξής τροποποίησή της:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3,5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1, αφού $f(-1) = f(1)$, αλλά αν ορίσουμε την

$$g(x) = x^2, \qquad x \geq 0$$

(και δεν ορίσουμε την g για $x < 0$), τότε η g είναι 1-1, γιατί η g είναι αύξουσα (αφού $g'(x) = 2x > 0$, για $x > 0$). Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται εύκολα: Αν n είναι ένας φυσικός αριθμός και

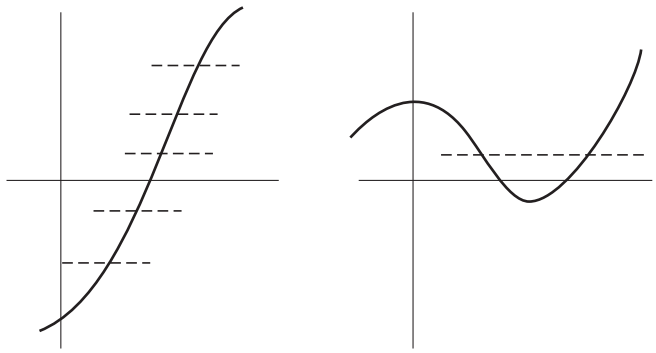
$$f(x) = x^n, \qquad x \geq 0,$$

τότε η f είναι 1-1. Αν ο n είναι περιττός, πετυχαίνουμε κάτι ακόμα καλύτερο: η συνάρτηση

$$f(x) = x^n \qquad \text{για κάθε } x$$

είναι 1-1 (γιατί $f'(x) = nx^{n-1} > 0$, για όλα τα $x \neq 0$).

Είναι πολύ εύκολο να διακρίνει κανείς, από τη γραφική παράσταση της f, αν η f είναι 1-1: η συνθήκη $f(a) \neq f(b)$ για $a \neq b$ σημαίνει ότι δεν υπάρχει *οριζόντια* γραμμή που να τέμνει δύο φορές τη γραφική παράσταση της f (Σχήμα 1).



μια συνάρτηση 1-1
(α)

μια συνάρτηση που δεν είναι 1-1
(β)

ΣΧΗΜΑ 1

Αν αντιστρέψουμε όλα τα ζεύγη της (όχι αναγκαστικά 1-1 συνάρτησης) f παίρνουμε, σε κάθε περίπτωση, ένα σύνολο από ζεύγη. Συνήθως απέχουμε από αυτήν τη διαδικασία όταν η f δεν είναι 1-1, αλλά δεν υπάρχει κανένας ιδιαίτερος λόγος για αυτό —αντί για έναν ορισμό με περιοριστικές συνθήκες μπορούμε να πάρουμε έναν ορισμό και ένα θεώρημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

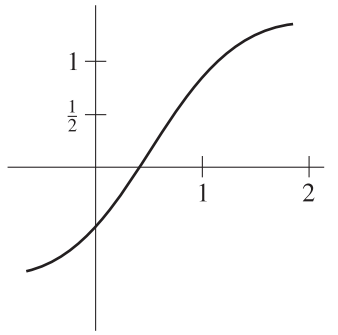
Για κάθε συνάρτηση f, η **αντίστροφη** της f, που συμβολίζεται με $\boldsymbol{f^{-1}}$, είναι το σύνολο όλων των ζευγών (a, b) για τα οποία το ζεύγος (b, a) ανήκει στην f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Η f^{-1} είναι συνάρτηση, αν και μόνο αν η f είναι 1-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι 1-1. Έστω (a, b) και (a, c) δύο ζεύγη στην f^{-1}. Τότε τα (b, a) και (c, a) ανήκουν στην f, άρα $a = f(b)$ και $a = f(c)$. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε $b = c$. Άρα η f^{-1} είναι συνάρτηση.

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση. Αν $f(b) = f(c)$, τότε η f περιέχει τα ζεύγη $(b, f(b))$ και $(c, f(c)) = (c, f(b))$, άρα τα $(f(b), b)$ και $(f(b), c)$ ανήκουν και τα δύο στην f^{-1}. Αφού η f^{-1} είναι συνάρτηση, έπεται ότι $b = c$. Άρα η f είναι 1-1. ∎

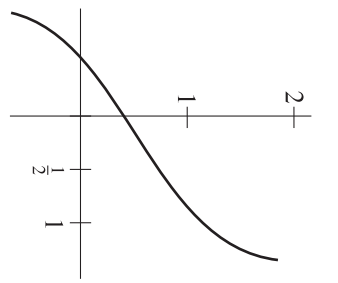
Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} συνδέονται τόσο στενά, που είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε τη γραφική παράσταση της f για να φέρουμε στο νου μας αυτήν της f^{-1}. Αφού η γραφική παράσταση της f^{-1} αποτελείται από όλα τα ζεύγη (a, b) με το (b, a) στη γραφική παράσταση της f, παίρνει κανείς τη γραφική παράσταση της f^{-1} από αυτήν της f αλλάζοντας τους ρόλους του οριζόντιου και κατακόρυφου άξονα. Αν η f έχει τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 2(α),



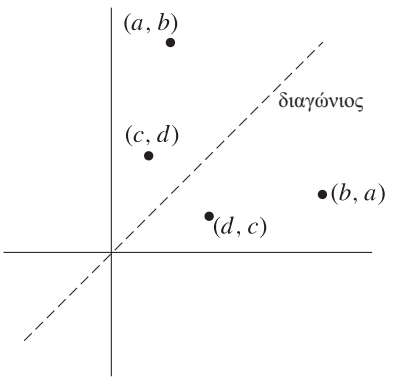
ΣΧΗΜΑ 2(α)

ΣΧΗΜΑ 2(β)

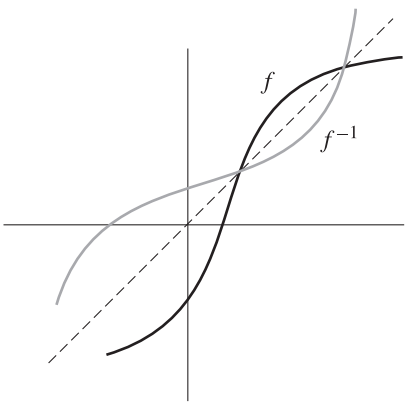
και στρίψτε αυτήν τη σελίδα ανάποδα μέχρι η γραφική παράσταση της f^{-1} να φαίνεται σωστή από τους δέκτες του ροδογιού κατά μία ορθή γωνία, ώστε τα σημεία του άξονα x να βρίσκονται στο σημείο που βρίσκονταν πριν οι άξονες x και y αλλάξουν θέσεις. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι το μόνο πρόβλημα που μένει (Σχήμα 2(β)). Το μόνο πρόβλημα είναι ότι η ορθή κατεύθυνση για αυτό θα πρέπει να καθορίσετε για να πάρετε την εικόνα για να πάρετε τη συνηθισμένη εικόνα της f^{-1}, όπως στο σχήμα 3).



ΣΧΗΜΑ 3



ΣΧΗΜΑ 4



ΣΧΗΜΑ 5

Αυτή η διαδικασία είναι κάπως άβολη με τα βιβλία και αδιανόητη με τους πίνακες, για αυτό είναι ευτύχημα που υπάρχει και άλλος τρόπος κατασκευής της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Τα σημεία (a, b) και (b, a) είναι συμμετρικά το ένα του άλλου ως προς τη γραφική παράσταση της $I(x) = x$, που λέγεται η **διαγώνιος** (Σχήμα 4). Για να πάρουμε τη γραφική παράσταση της f^{-1} απλώς αντικατοπτρίζουμε τη γραφική παράσταση της f πάνω σε αυτήν την ευθεία (Σχήμα 5).

Ένας διπλός αντικατοπτρισμός ως προς τη διαγώνιο προφανώς μας φέρνει πίσω στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε· αυτό σημαίνει ότι $(f^{-1})^{-1} = f$, που είναι επίσης φανερό από τον ορισμό. Σε σχέση με το Θεώρημα 1, αυτή η ισότητα έχει μια σημαντική συνέπεια: αν η f είναι 1-1 συνάρτηση, τότε η συνάρτηση f^{-1} είναι και αυτή 1-1 (γιατί η $(f^{-1})^{-1}$ είναι συνάρτηση).

Υπάρχουν μερικά ακόμα απλά πράγματα γύρω από τις αντίστροφες συναρτήσεις που θα έπρεπε να έχετε υπόψη σας. Αφού το (a, b) ανήκει στην f ακριβώς όταν το (b, a) ανήκει στην f^{-1}, έπεται ότι η

$$b = f(a) \qquad \text{σημαίνει ακριβώς το ίδιο με την} \qquad a = f^{-1}(b).$$

Δηλαδή $f^{-1}(b)$ είναι ο (μοναδικός) αριθμός a για τον οποίο $f(a) = b$· για παράδειγμα, αν $f(x) = x^3$ τότε $f^{-1}(b)$ είναι ο μοναδικός αριθμός a που ικανοποιεί την $a^3 = b$, και αυτός ο αριθμός είναι, εξ ορισμού, η $\sqrt[3]{b}$.

Το γεγονός ότι ο $f^{-1}(x)$ είναι ο αριθμός y για τον οποίο $f(y) = x$ μπορεί να διατυπωθεί ξανά σε μια πολύ πιο συμπαγή μορφή:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο πεδίο ορισμού της } f^{-1}.$$

Ακόμα,

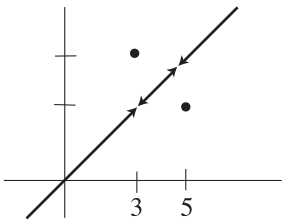
$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο πεδίο ορισμού της } f\cdot$$

αυτό προκύπτει από την προηγούμενη ισότητα, αν αντικαταστήσουμε την f με την f^{-1}. Αυτές οι δύο σημαντικές ισότητες μπορούν να γραφούν

$$f \circ f^{-1} = I,$$
$$f^{-1} \circ f = I$$

(εκτός από το ότι η δεξιά πλευρά θα έχει μεγαλύτερο πεδίο ορισμού αν το πεδίο ορισμού της f ή f^{-1} δεν είναι ολόκληρο το $\mathbf{R}$).

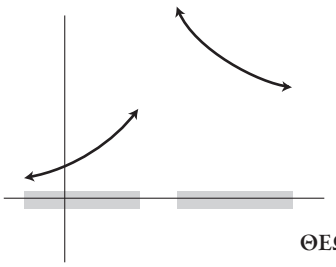
Μια και πολλές βασικές συναρτήσεις θα οριστούν ως αντίστροφες άλλων συναρτήσεων, είναι πολύ σημαντικό το να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε ποιες συναρτήσεις είναι 1-1. Έχουμε ήδη υποδείξει ποιες συναρτήσεις είναι αυτές που μπορούμε να χειριστούμε πιο εύκολα: Οι αύξουσες και οι φθίνουσες συναρτήσεις είναι προφανώς 1-1. Ακόμα, αν η f είναι αύξουσα, τότε η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα, και αν η f είναι φθίνουσα, τότε και η f^{-1} είναι φθίνουσα (η απόδειξη αφήνεται σε σας). Επιπλέον, ένα πολύ χρήσιμο πράγμα που πρέπει να θυμόμαστε είναι ότι η f είναι αύξουσα αν και μόνο αν η $-f$ είναι φθίνουσα.



ΣΧΗΜΑ 6

Ασφαλώς δεν ισχύει ότι κάθε 1-1 συνάρτηση είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Έχουμε ήδη αναφέρει ένα παράδειγμα, που τώρα απεικονίζεται στο Σχήμα 6:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 3, 5 \\ 3, & x = 5 \\ 5, & x = 3. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 7

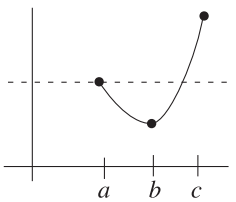
Το Σχήμα 7 δείχνει ότι υπάρχουν ακόμα και συνεχείς 1-1 συναρτήσεις που δεν είναι ούτε αύξουσες ούτε φθίνουσες. Αν όμως προσπαθήσετε να σχεδιάσετε μερικές παραστάσεις, σύντομα θα συμφωνήσετε ότι κάθε 1-1 συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η f είναι συνεχής και 1-1 σε κάποιο διάστημα, τότε είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη γίνεται σε τρία εύκολα βήματα:

(1) Αν $a < b < c$ είναι τρία σημεία του διαστήματος, τότε

$$\text{είτε} \quad \text{(i)} \quad f(a) < f(b) < f(c)$$
$$\text{είτε} \quad \text{(ii)} \quad f(a) > f(b) > f(c).$$



ΣΧΗΜΑ 8

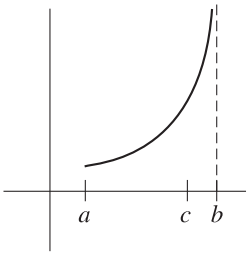
Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f(a) < f(c)$. Αν ίσχυε $f(b) < f(a)$ (Σχήμα 8), τότε από την εφαρμογή του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής στο διάστημα $[b, c]$ θα προέκυπτε ένα x με $b < x < c$ και $f(x) = f(a)$, το οποίο έρχεται σε σύγκρουση με το γεγονός ότι η f είναι 1-1 στο $[a, c]$. Ομοίως, αν $f(b) > f(c)$ θα οδηγούμασταν πάλι σε αντίφαση, άρα $f(a) < f(b) < f(c)$.

Φυσικά, ο ίδιος συλλογισμός ισχύει και για την περίπτωση που $f(a) > f(c)$.

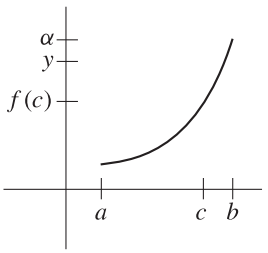
(2) Αν $a < b < c < d$ είναι τέσσερα σημεία του διαστήματος, τότε

$$\text{είτε} \quad \text{(i)} \quad f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$$
$$\text{είτε} \quad \text{(ii)} \quad f(a) > f(b) > f(c) > f(d).$$

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε την (1) στα $a < b < c$ και μετά στα $b < c < d$.



ΣΧΗΜΑ 9



ΣΧΗΜΑ 10

(3) Ας θεωρήσουμε οποιαδήποτε $a < b$ μέσα στο διάστημα, και ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Στην περίπτωση αυτή η f είναι αύξουσα, αφού αν τα c και d είναι δύο οποιαδήποτε σημεία, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (2) στο σύνολο $\{a, b, c, d\}$ (αφού πρώτα τα διατάξουμε κατά αύξουσα σειρά). ∎

Από δω και πέρα θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με συνεχείς αύξουσες ή φθίνουσες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα διάστημα. Αν f είναι μια τέτοια συνάρτηση, μπορούμε να πούμε ακριβώς ποιο θα είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η f είναι μια συνεχής αύξουσα συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Τότε, από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η f παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$. Άρα, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το κλειστό διάστημα $[f(a), f(b)]$. Ομοίως, αν η f είναι συνεχής και φθίνουσα στο $[a, b]$, τότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $[f(b), f(a)]$.

Αν η f είναι μια συνεχής αύξουσα συνάρτηση σε ένα *ανοικτό* διάστημα (a, b) η ανάλυση γίνεται κάπως δυσκολότερη. Για να ξεκινήσουμε, ας διαλέξουμε κάποιο σημείο c στο (a, b). Θα δούμε πρώτα ποιες τιμές $> f(c)$ παίρνει η f. Μια εκδοχή είναι να παίρνει η f οσοδήποτε μεγάλες τιμές (Σχήμα 9). Σε αυτήν την περίπτωση, η f παίρνει *όλες* τις τιμές $> f(c)$, όπως προκύπτει από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Αν, από την άλλη πλευρά, η f δεν παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, τότε το $A = \{ f(x) : c \leq x < b \}$ είναι άνω φραγμένο, άρα το A έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα α (Σχήμα 10). Ας υποθέσουμε τώρα ότι y είναι κάποιος αριθμός με $f(c) < y < \alpha$. Τότε η f παίρνει κάποια τιμή $f(x) > y$ (γιατί α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A). Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, η f πρέπει να παίρνει και την τιμή y. Παρατηρήστε ότι η f δεν μπορεί να έχει ως τιμή και το ίδιο το α, γιατί αν $\alpha = f(x)$ με $a < x < b$ και διαλέξουμε t με $x < t < b$, τότε $f(t) > \alpha$, που είναι αδύνατο.

Ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα δουλεύουν και για τις τιμές τις μικρότερες από $f(c)$: ή η f θα παίρνει όλες τις τιμές που είναι μικρότερες από $f(c)$, ή θα υπάρχει ένας αριθμός $\beta < f(c)$ τέτοιος ώστε η f να παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στον β και το $f(c)$, αλλά όχι τον ίδιο τον β.

Ολόκληρη αυτή η απόδειξη μπορεί να επαναληφθεί αν η f είναι φθίνουσα, και αν το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$ ή το (a, ∞) ή το $(-\infty, a)$. Συνοψίζοντας: αν f είναι μια συνεχής αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) ή $\mathbf{R}$, τότε και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι ένα διάστημα μιας εκ των τεσσάρων αυτών μορφών. Σε αυτήν τη συζήτηση μπορούμε εύκολα να συμπεριλάβουμε και τα υπόλοιπα είδη διαστημάτων $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b]$ και $[a, \infty)$.

Τώρα που ολοκληρώσαμε αυτήν την προκαταρκτική ανάλυση των συνεχών 1-1 συναρτήσεων, είναι λογικό να αρχίσουμε να εξετάζουμε ποιες σημαντικές ιδιότητες μιας 1-1 συνάρτησης κληρονομούνται από την αντίστροφή της. Με τη συνέχεια δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν η f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα, τότε η f^{-1} και αυτή συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 2 ότι η f είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα. Μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα, αφού για την άλλη περίπτωση δεν έχουμε παρά να εφαρμόσουμε το γνωστό τέχνασμα με την $-f$. Μπορούμε επίσης κάλλιστα να υποθέσουμε ότι το διάστημά μας είναι ανοικτό, αφού, όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε, μια συνεχής αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση σε κάποιο διάστημα μπορεί να επεκταθεί σε μια όμοια συνάρτηση ορισμένη σε ένα μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα.

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x \to b} f^{-1}(x) = f^{-1}(b)$$

για κάθε b στο πεδίο ορισμού της f^{-1}. Κάθε τέτοιος αριθμός b είναι της μορφής $f(a)$ για κάποιον a στο πεδίο ορισμού της f. Για κάθε $\varepsilon > 0$, θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$, τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } f(a) - \delta < x < f(a) + \delta, \text{ τότε } a - \varepsilon < f^{-1}(x) < a + \varepsilon.$$

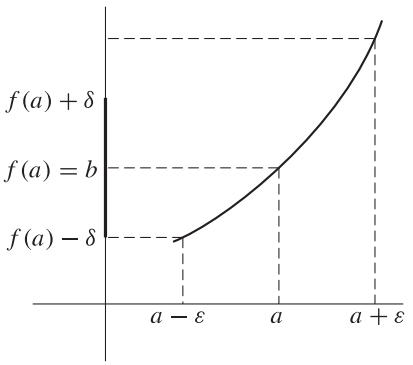
Το Σχήμα 11 μας δείχνει τον δρόμο για να βρούμε το δ (θυμηθείτε ότι αν κοιτάξετε πλάγια βλέπετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}): αφού

$$a-\varepsilon < a < a+\varepsilon,$$

έπεται ότι

$$f(a-\varepsilon) < f(a) < f(a+\varepsilon)\cdot$$

παίρνουμε ως δ το μικρότερο από τους $f(a+\varepsilon)-f(a)$ και $f(a)-f(a-\varepsilon)$. Το Σχήμα 11 περιέχει ολόκληρη την απόδειξη ότι αυτό το δ μας κάνει· αυτό που ακολουθεί ουσιαστικά είναι μια περιγραφή με λόγια των πληροφοριών που βρίσκονται μέσα σε αυτήν την εικόνα.



ΣΧΗΜΑ 11

Η επιλογή του δ μας βεβαιώνει ότι

$$f(a-\varepsilon) \le f(a)-\delta \text{ και } f(a)+\delta \le f(a+\varepsilon).$$

Επομένως, αν

$$f(a)-\delta < x < f(a)+\delta,$$

τότε

$$f(a-\varepsilon) < x < f(a+\varepsilon).$$

Αφού η f είναι αύξουσα, η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα, και παίρνουμε

$$f^{-1}(f(a-\varepsilon)) < f^{-1}(x) < f^{-1}(f(a+\varepsilon)),$$

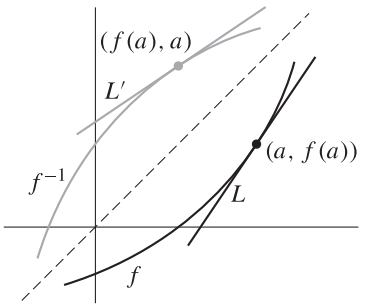
δηλαδή,

$$a-\varepsilon < f^{-1}(x) < a+\varepsilon,$$

που είναι ακριβώς αυτό που θέλουμε. ∎

Έχοντας εξακριβώσει με επιτυχία τη συνέχεια της f^{-1} είναι τελείως λογικό να αντιμετωπίσουμε και το θέμα της παραγωγισιμότητας. Και πάλι, ένα σχήμα μάς υποδεικνύει το σωστό αποτέλεσμα. Το Σχήμα 12 δείχνει τη γραφική παράσταση μιας 1-1 συνάρτησης f με εφαπτομένη την L στο σημείο $(a, f(a))$. Αν ολόκληρη αυτή η παράσταση ανακλαστεί στη διαγώνιο, μας δίνει τη γραφική παράσταση της f^{-1} και την εφαπτομένη L' στο $(f(a), a)$. Η κλίση της L' είναι η αντίστροφη της κλίσης της L. Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$



ΣΧΗΜΑ 12

Αυτός ο τύπος μπορεί εξίσου καλά να γραφεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να εκφράζει άμεσα την $(f^{-1})'(b)$, για κάθε b στο πεδίο ορισμού της f^{-1}:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Αντίθετα από την απόδειξη της συνέχειας, αυτή η οπτική «απόδειξη» περιπλέκεται κατά κάποιον τρόπο αν προσπαθήσει κανείς να τη διαμορφώσει με αναλυτικό τρόπο. Υπάρχει όμως μια άλλη προσέγγιση που θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε. Αφού γνωρίζουμε ότι

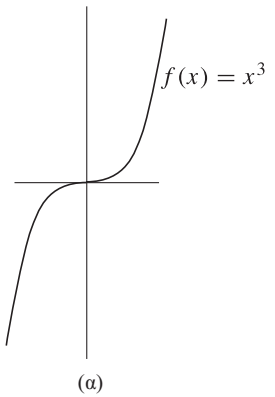
$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

είναι πειρασμός να αποδείξουμε τον τύπο που θέλουμε, εφαρμόζοντας τον Κανόνα της Αλυσίδας:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1,$$

άρα

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$



Δυστυχώς, αυτό δεν είναι απόδειξη της παραγωγισιμότητας της f^{-1}, γιατί ο Κανόνας της Αλυσίδας μπορεί να εφαρμοστεί μόνο αν ήδη ξέρουμε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη. Αλλά αυτός ο συλλογισμός δείχνει τι θα πρέπει να είναι η $(f^{-1})'(x)$ αν η f^{-1} *είναι* παραγωγίσιμη, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε κάποιες σπουδαίες προκαταρκτικές πληροφορίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν f είναι μια συνεχής 1-1 συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα και $f'(f^{-1}(a)) = 0$, τότε η f^{-1} *δεν* είναι παραγωγίσιμη στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

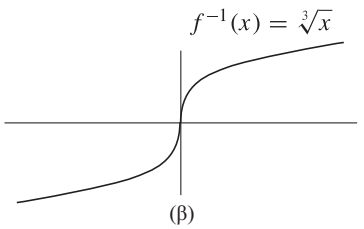
Αν η f^{-1} *ήταν* παραγωγίσιμη στο a, από τον Κανόνα της Αλυσίδας θα είχαμε

$$f'(f^{-1}(a)) \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

άρα

$$0 \cdot (f^{-1})'(a) = 1,$$

που είναι άτοπο. ∎



ΣΧΗΜΑ 13

Ένα απλό παράδειγμα στο οποίο εφαρμόζεται το Θεώρημα 4 είναι η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Αφού $f'(0) = 0$ και $0 = f^{-1}(0)$, η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (Σχήμα 13).

Έχοντας εξακριβώσει πότε μια αντίστροφη συνάρτηση δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη, είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε αυστηρά ότι σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις η παράγωγος δίνεται από τον τύπο που ήδη «αποδείξαμε» με δύο διαφορετικούς τρόπους. Παρατηρήστε ότι η απόδειξη που ακολουθεί χρησιμοποιεί τη *συνέχεια* της f^{-1}, την οποία έχουμε ήδη αποδείξει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Έστω f μια συνεχής 1-1 συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα διάστημα, και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $f^{-1}(b)$, με παράγωγο $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο b, και

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $b = f(a)$. Τότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - f^{-1}(b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h}.$$

Βέβαια, κάθε αριθμός $b + h$ στο πεδίο ορισμού της f^{-1} γράφεται στη μορφή

$$b + h = f(a + k)$$

για ένα μοναδικό k (θα έπρεπε αυστηρότερα να γράφουμε $k(h)$, αλλά θα αρκεστούμε στο k για να απλουστεύσουμε τα πράγματα). Τότε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(b+h) - a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a+k)) - a}{f(a+k) - b} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{f(a+k) - f(a)}.$$

Είναι φανερό ότι βρισκόμαστε στον σωστό δρόμο! Δεν είναι δύσκολο να βρούμε μια ακριβή έκφραση για το k· αφού

$$b + h = f(a + k)$$

έχουμε

$$f^{-1}(b + h) = a + k$$

ή

$$k = f^{-1}(b + h) - f^{-1}(b).$$

Τώρα από το Θεώρημα 3, προκύπτει ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο b. Αυτό σημαίνει ότι το k τείνει στο 0 όταν το h τείνει στο 0. Αφού

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a + k) - f(a)}{k} = f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0,$$

έπεται ότι

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad \blacksquare$$

Για τη δουλειά που κάναμε πάνω στις αντίστροφες συναρτήσεις, θα αμειφθούμε πλούσια αργότερα, να όμως και ένα άμεσο μέρισμα. Για n περιττό, έστω

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{για κάθε } x\text{·}$$

για n άρτιο, έστω

$$f_n(x) = x^n, \qquad x \geq 0.$$

Τότε η f_n είναι συνεχής 1-1 συνάρτηση, με αντίστροφη την

$$g_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

Από το Θεώρημα 5, για $x \neq 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{n(f_n^{-1}(x))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{1-(1/n)}} \\ &= \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1}. \end{aligned}$$

Άρα, αν $f(x) = x^a$, και ο a είναι ακέραιος ή ο αντίστροφος ενός φυσικού αριθμού, τότε $f'(x) = ax^{a-1}$. Είναι εύκολο τώρα να ελέγξουμε ότι αυτός ο τύπος ισχύει, αν ο a είναι τυχαίος ρητός αριθμός: Έστω $a = m/n$, όπου m είναι ένας ακέραιος, και n ένας φυσικός αριθμός· αν

$$f(x) = x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m,$$

τότε, από τον Κανόνα της Αλυσίδας,

$$\begin{aligned} f'(x) &= m\left(x^{1/n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{(1/n)-1} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{[(m/n)-(1/n)]+[(1/n)-1]} \\ &= \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}. \end{aligned}$$

Αν και τώρα έχουμε έναν τύπο για την $f'(x)$ όταν $f(x) = x^a$ και a ρητός, η μελέτη της συνάρτησης $f(x) = x^a$ για άρρητο a αναβάλλεται —αυτήν τη στιγμή δεν ξέρουμε ούτε καν την *έννοια* ενός συμβόλου σαν το $x^{\sqrt{2}}$. Οι αντίστροφες πάντως συναρτήσεις θα αναμειχθούν έντονα στον ορισμό του x^a για άρρητο a. Πράγματι, στα αμέσως επόμενα κεφάλαια πολλές και σημαντικές συναρτήσεις θα οριστούν με τη βοήθεια των αντίστροφών τους συναρτήσεων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε την f^{-1} για κάθε μία από τις ακόλουθες f.

(i) $f(x) = x^3 + 1$.

(ii) $f(x) = (x-1)^3$.

(iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ -x, & x \text{ άρρητος.} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ 1 - x^3, & x < 0. \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq a_1, \ldots, a_n \\ a_{i+1} & x = a_i, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ a_1, & x = a_n. \end{cases}$

(vi) $f(x) = x + [x]$.

(vii) $f(0.a_1a_2a_3\ldots) = 0.a_2a_1a_3\ldots$ (Χρησιμοποιούμε δεκαδική αναπαράσταση.)

(viii) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}, -1 < x < 1.$

2. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση της f^{-1} όταν

(i) η f είναι αύξουσα και πάντα θετική.

(ii) η f είναι αύξουσα και πάντα αρνητική.

(iii) η f είναι φθίνουσα και πάντα θετική.

(iv) η f είναι φθίνουσα και πάντα αρνητική.

3. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι αύξουσα, τότε το ίδιο συμβαίνει και με την f^{-1}· ομοίως για φθίνουσες συναρτήσεις.

4. Αν η f και η g είναι αύξουσες, είναι και η $f + g$; Η $f \cdot g$; Η $f \circ g$;

5. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι 1-1, τότε και η $f \circ g$ είναι 1-1. Βρείτε την $(f \circ g)^{-1}$ συναρτήσει των f^{-1} και g^{-1}. Υπόδειξη: Η απάντηση *δεν* είναι $f^{-1} \circ g^{-1}$.

(β) Βρείτε την g^{-1} συναρτήσει της f^{-1}, αν $g(x) = 1 + f(x)$.

6. Δείξτε ότι η $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ είναι 1-1 αν και μόνο αν $ad - bc \neq 0$, και βρείτε την f^{-1} σε αυτήν την περίπτωση.

7. Σε ποια διαστήματα $[a, b]$ είναι 1-1 οι ακόλουθες συναρτήσεις;

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2$.

(ii) $f(x) = x^5 + x$.

(iii) $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

8. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = (1 + x^3)^{-1/2}$. Δείξτε ότι η $g = f^{-1}$ ικανοποιεί την $g''(x) = \frac{3}{2}g(x)^2$.

9. Έστω ότι η f είναι μια 1-1 συνάρτηση και ότι η f^{-1} έχει παράγωγο που δεν μηδενίζεται πουθενά. Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Υπόδειξη: Υπάρχει μια πολύ σύντομη απόδειξη.

10. Σε συνέχεια του Προβλήματος 10-17, ποια επιπλέον συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η g για να εξασφαλιστεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη;

11. Βρείτε έναν τύπο για την $(f^{-1})''(x)$.

∗**12.** Αποδείξτε ότι αν $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ και η $f^{(k)}(f^{-1}(x))$ υπάρχει, τότε υπάρχει η $(f^{-1})^{(k)}(x)$.

13. Η κατά Schwarz παράγωγος $\mathscr{D}f$ ορίστηκε στο Πρόβλημα 10-19.

(α) Αποδείξτε ότι, αν η $\mathscr{D}f(x)$ υπάρχει για όλα τα x, τότε η $\mathscr{D}f^{-1}(x)$ επίσης υπάρχει για όλα τα x στο πεδίο ορισμού της f^{-1}.

(β) Βρείτε έναν τύπο για την $\mathscr{D}f^{-1}(x)$.

∗**14.** (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $[f(x)]^5 + f(x) + x = 0$ για κάθε x. Υπόδειξη: Δείξτε ότι η f εκφράζεται ως αντίστροφη συνάρτηση. Ο ευκολότερος τρόπος για να το κάνετε είναι να βρείτε την f^{-1}. Και ο ευκολότερος τρόπος για να το κάνετε *αυτό* είναι να θέσετε $x = f^{-1}(y)$.

(β) Βρείτε την f' συναρτήσει της f, χρησιμοποιώντας κατάλληλο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

(γ) Βρείτε την f' με άλλο τρόπο, απλώς παραγωγίζοντας την εξίσωση που ορίζει την f.

Η συνάρτηση του Προβλήματος 14 λέμε συχνά ότι **ορίζεται πεπλεγμένα** από την εξίσωση $y^5 + y + x = 0$. Η περίπτωση όμως αυτής της εξίσωσης είναι πολύ ειδική. Όπως δείχνει το επόμενο πρόβλημα, μια εξίσωση συνήθως δεν ορίζει πεπλεγμένα μια συνάρτηση σε ολόκληρη την ευθεία, ενώ σε μερικές περιοχές είναι δυνατόν να ορίζονται πεπλεγμένα περισσότερες από μία συναρτήσεις.

15. (α) Ποιες είναι οι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις f που ορίζονται πεπλεγμένα στο $(-1, 1)$ από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$, δηλαδή που ικανοποιούν την $x^2 + [f(x)]^2 = 1$ για κάθε x στο $(-1, 1)$; Παρατηρήστε ότι δεν υπάρχουν λύσεις ορισμένες έξω από το $[-1, 1]$.

(β) Ποιες συναρτήσεις f ικανοποιούν την $x^2 + [f(x)]^2 = -1$;

∗(γ) Ποιες παραγωγίσιμες συναρτήσεις f ικανοποιούν την $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$; Υπόδειξη: Θα βοηθούσε να σχεδιάσετε πρώτα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 3x$.

Γενικά, το να προσδιορίσουμε σε ποια διαστήματα ορίζεται πεπλεγμένα μια παραγωγίσιμη συνάρτηση από μια συγκεκριμένη εξίσωση μπορεί να είναι πολύ λεπτή υπόθεση, και τη μελετάμε καλύτερα στα πλαίσια του προχωρημένου Απειροστικού Λογισμού. Αν όμως *υποθέσουμε* ότι f είναι μια τέτοια παραγωγίσιμη λύση, τότε μπορούμε να αποδείξουμε έναν τύπο για την $f'(x)$, ακριβώς όπως στο Πρόβλημα 14(γ), παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης που ορίζει την f (μια διαδικασία γνωστή ως «πεπλεγμένη παραγώγιση»):

16. (α) Εφαρμόστε αυτήν τη μέθοδο στην εξίσωση $[f(x)]^2 + x^2 = 1$. Παρατηρήστε ότι στην απάντησή σας θα περιέχεται το $f(x)\cdot$ δεν μπορούσαμε να περιμένουμε κάτι καλύτερο, αφού υπάρχουν περισσότερες από μια συναρτήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα από την εξίσωση $y^2 + x^2 = 1$.

(β) Ελέγξτε όμως αν η απάντησή σας δουλεύει και για τις δύο συναρτήσεις f που βρήκατε στο Πρόβλημα 15(α).

(γ) Εφαρμόστε την ίδια αυτή μέθοδο στην $[f(x)]^3 - 3f(x) = x$.

17. (α) Χρησιμοποιήστε πεπλεγμένη διαφόριση για να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$ για τις συναρτήσεις f που ορίζονται πεπλεγμένα από την εξίσωση $x^3 + y^3 = 7$.

(β) Μια από αυτές τις συναρτήσεις f επαληθεύει τη σχέση $f(-1) = 2$. Βρείτε την $f'(-1)$ και την $f''(-1)$ για αυτήν την f.

18. Το σύνολο όλων των σημείων (x, y) έτσι ώστε $3x^3 + 4x^2y - xy^2 + 2y^3 = 4$ σχηματίζει μια ορισμένη καμπύλη του επιπέδου. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στην καμπύλη αυτή στο σημείο $(-1, 1)$.

19. Ο συμβολισμός του Leibniz είναι ιδιαίτερα εύχρηστος για την πεπλεγμένη παραγώγιση. Επειδή το y χρησιμοποιείται συνεχώς ως σύντμηση του $f(x)$, η εξίσωση ως προς x και y που ορίζει πεπλεγμένα την f αυτομάτως αντικαθιστά την εξίσωση που υποτίθεται ότι ικανοποιεί η f. Με τον δικό μας συμβολισμό πώς θα γράφαμε τον υπολογισμό που ακολουθεί;

$$\begin{aligned} y^4 + y^3 + xy &= 1, \\ 4y^3\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-y}{4y^3 + 3y^2 + x}. \end{aligned}$$

20. Αφού ήρθε στο προσκήνιο ο συμβολισμός του Leibniz, θα πρέπει να αναφέρουμε και τον συμβολισμό του Leibniz για τις παραγώγους αντίστροφων συναρτήσεων. Αν με dy/dx συμβολίζουμε την παράγωγο της f, τότε η παράγωγος της f^{-1} συμβολίζεται με dx/dy. Γράψτε το Θεώρημα 5 με αυτόν τον συμβολισμό. Η εξίσωση που προκύπτει θα σας δείξει έναν ακόμα λόγο για τον οποίο ο συμβολισμός του Leibniz έχει τόσους πολλούς οπαδούς. Θα εξηγήσει ακόμα σε ποιο σημείο πρέπει να υπολογίζουμε την $(f^{-1})'$, όταν χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό dx/dy. Ποια είναι η σημασία του παρακάτω υπολογισμού;

$$\begin{aligned} x &= y^n, \\ y &= x^{1/n}, \\ \frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}}. \end{aligned}$$

21. Έστω ότι f είναι μια παραγωγίσιμη 1-1 συνάρτηση που η παράγωγός της δεν μηδενίζεται πουθενά, και ότι $f = F'$. Έστω $G(x) = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$. Αποδείξτε ότι $G'(x) = f^{-1}(x)$. (Αν παραβλέψουμε τις λεπτομέρειες, αυτό το πρόβλημα μας λέει κάτι πολύ ενδιαφέρον: αν ξέρουμε μια συνάρτηση που η παράγωγός της είναι f, τότε ξέρουμε και μία που η παράγωγός της είναι f^{-1}. Αλλά πώς θα μπορούσε κανείς να μαντέψει τη συνάρτηση G; Περιγράφουμε δύο διαφορετικούς τρόπους στα Προβλήματα 14-14 και 19-16.)

22. Έστω ότι h είναι μια συνάρτηση με $h'(x) = \sin^2(\sin(x+1))$ και $h(0) = 3$. Βρείτε τα

(i) $(h^{-1})'(3)$.

(ii) $(\beta^{-1})'(3)$, όπου $\beta(x) = h(x+1)$.

23. (α) Αποδείξτε ότι μια αύξουσα και μια φθίνουσα συνάρτηση τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο.

(β) Βρείτε δύο συνεχείς αύξουσες συναρτήσεις f και g, τέτοιες ώστε $f(x) = g(x)$ ακριβώς όταν ο x είναι ακέραιος.

(γ) Βρείτε μια συνεχή αύξουσα συνάρτηση f και μια συνεχή φθίνουσα συνάρτηση g, ορισμένες στο $\mathbf{R}$, που δεν τέμνονται πουθενά.

∗**24.** (α) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ και $f = f^{-1}$, δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x τέτοιο ώστε $f(x) = x$. (Ποια η γεωμετρική σημασία της συνθήκης $f = f^{-1}$;)

(β) Δώστε διάφορα παραδείγματα συνεχούς f έτσι ώστε $f = f^{-1}$ και $f(x) = x$ για ένα ακριβώς x. Υπόδειξη: Προσπαθήστε να κάνετε την f φθίνουσα και θυμηθείτε τη γεωμετρική ερμηνεία. Μια πιθανότητα είναι να ισχύει $f(x) = -x$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν η f είναι αύξουσα συνάρτηση έτσι ώστε $f = f^{-1}$, τότε $f(x) = x$ για όλα τα x. Υπόδειξη: Αν και η γεωμετρική ερμηνεία είναι ευθέως πειστική, η απλούστερη απόδειξη (περίπου δύο γραμμές) είναι να αποκλείσετε τις περιπτώσεις $f(x) < x$ και $f(x) > x$.

∗**25.** Ποιες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα η γραφική τους παράσταση να είναι και πάλι γραφική παράσταση συνάρτησης όταν ανακλαστεί ως προς τη γραφική παράσταση της $-I$ (την «αντιδιαγώνιο»);

26. Μια συνάρτηση f λέγεται **μη φθίνουσα** αν $f(x) \leq f(y)$ όποτε $x < y$. (Για να είμαστε πιο ακριβείς θα έπρεπε να συμφωνήσουμε να είναι διάστημα το πεδίο ορισμού της f). Μια **μη αύξουσα** συνάρτηση ορίζεται με όμοιο τρόπο. Προσοχή: Μερικοί συγγραφείς χρησιμοποιούν το «αύξουσα» αντί για το «μη φθίνουσα», και το «γνησίως αύξουσα» για το δικό μας «αύξουσα».

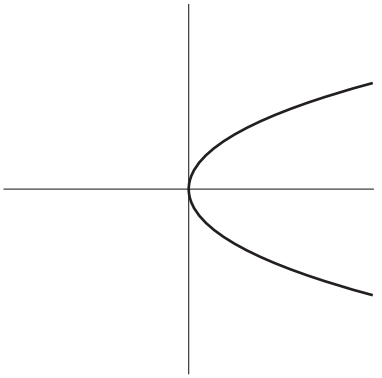
(α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι μη φθίνουσα, αλλά όχι αύξουσα, τότε η f είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα (φυλαχτείτε από το λογοπαίγνιο: το «όχι αύξουσα» δεν είναι το ίδιο με το «μη αύξουσα»).

(β) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη και μη φθίνουσα, τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε x.

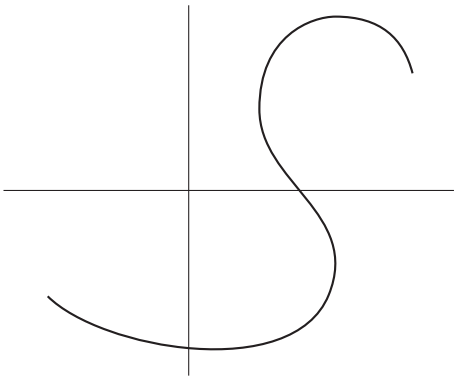
(γ) Αποδείξτε ότι, αν $f'(x) \geq 0$ για κάθε x, τότε η f είναι μη φθίνουσα.

∗**27.** (α) Έστω ότι $f(x) > 0$ για κάθε x, και ότι η f είναι φθίνουσα. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια *συνεχής* φθίνουσα συνάρτηση g, τέτοια ώστε $0 < g(x) \leq f(x)$ για κάθε x.

(β) Δείξτε ότι μπορούμε να τα καταφέρουμε έτσι ώστε η g να ικανοποιεί και την $\lim_{x\to\infty} g(x)/f(x) = 0$.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου έχει στόχο να δώσει έμφαση σε κάτι που σημειώσαμε από πριν: μια καμπύλη με πολύ ωραία εμφάνιση δεν είναι κατ' ανάγκην η γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης (Σχήμα 1). Με άλλα λόγια, μπορεί να μη γίνεται να την περιγράψουμε ως το σύνολο των σημείων $(x, f(x))$. Φυσικά μπορεί να γίνεται να την περιγράψουμε ως το σύνολο των σημείων $(f(x), x)$. Για παράδειγμα, η καμπύλη του Σχήματος 1 είναι το σύνολο όλων των σημείων (x^2, x). Αλλά και αυτό το τέχνασμα δεν αποδίδει τις περισσότερες φορές. Δεν μας επιτρέπει να περιγράψουμε τον κύκλο, που είναι όλα τα (x, y) με $x^2 + y^2 = 1$, ή μια έλλειψη, και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψουμε μια καμπύλη σαν εκείνη του Σχήματος 2.

Ο απλούστερος τρόπος να περιγράψουμε καμπύλες, εν γένει, είναι με επιστροφή στη φυσική έννοια μιας καμπύλης, ως διαδρομής ενός σωματιδίου που κινείται στο επίπεδο. Σε κάθε χρονική στιγμή t, το σωματίδιο βρίσκεται σε ορισμένο σημείο που έχει δυο συντεταγμένες· για να δείξουμε την εξάρτηση αυτών από τον χρόνο t, τις ονομάζουμε $u(t)$ και $v(t)$. Έτσι καταλήγουμε σε *δύο* συναρτήσεις. Αντιστρόφως, αν δοθούν δύο συναρτήσεις u και v, μπορούμε να θεωρήσουμε την καμπύλη που αποτελείται από όλα τα σημεία $(u(t), v(t))$. Λέμε τότε ότι η καμπύλη παριστάνεται *παραμετρικά* μέσω των u και v και το ζεύγος των συναρτήσεων u, v καλείται παραμετρική παράσταση της καμπύλης. Η καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά από τα u και v αποτελείται επομένως από όλα τα ζεύγη (x, y) με $x = u(t)$ και $y = v(t)$. Συχνά περιγράφεται ως «η καμπύλη $x = u(t)$, $y = v(t)$». Σημειώστε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορεί πάντοτε να περιγραφεί παραμετρικά μέσω των $x = t$, $y = f(t)$.

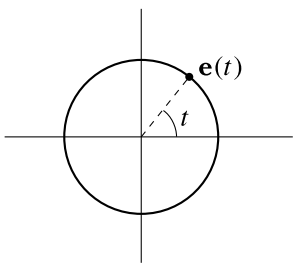
Αντί να θεωρήσουμε ότι μια καμπύλη του επιπέδου ορίζεται από δύο συναρτήσεις, μπορούμε να λάβουμε μια εννοιολογικά απλούστερη εικόνα, αν διευρύνουμε λίγο τον αρχικό ορισμό της συνάρτησης. Αντί να θεωρήσουμε έναν κανόνα που αντιστοιχίζει σε έναν αριθμό κάποιον άλλο αριθμό, μπορούμε να θεωρήσουμε μια «συνάρτηση c από τους πραγματικούς αριθμούς, στο επίπεδο», δηλαδή έναν κανόνα c που αντιστοιχίζει σε κάθε αριθμό t ένα *σημείο του επιπέδου*, το οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε με $c(t)$. Με την έννοια αυτή, καμπύλη είναι απλώς μια συνάρτηση από κάποιο διάστημα πραγματικών αριθμών, στο επίπεδο.

Φυσικά, οι δύο αυτές διαφορετικές περιγραφές μιας καμπύλης είναι ουσιαστικά ίδιες: Ένα ζεύγος (κανονικών) συναρτήσεων u και v ορίζει μια μονή συνάρτηση c από τους πραγματικούς αριθμούς, στο επίπεδο μέσω του κανόνα

$$c(t) = (u(t), v(t)),$$

και αντίστροφα, δοθείσης μιας συνάρτησης c από τους πραγματικούς αριθμούς, στο επίπεδο, κάθε $c(t)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου, επομένως είναι ένα ζεύγος αριθμών, το οποίο μπορούμε να καλέσουμε $u(t)$ και $v(t)$, έτσι ώστε να έχουμε δύο μοναδικές συναρτήσεις u και v που να ικανοποιούν αυτήν την εξίσωση.

Στο Παράρτημα 1 του Κεφαλαίου 4, χρησιμοποιήσαμε τον όρο «διάνυσμα» για να περιγράψουμε ένα σημείο του επιπέδου. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, μια καμπύλη του επιπέδου μπορεί να ονομαστεί και «διανυσματική συνάρτηση.» Οι συμβάσεις του Παραρτήματος εκείνου θα μας οδηγούσαν στη γραφή $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$· σε αυτό το Παράρτημα θα συνεχίσουμε όμως να χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό της μορφής $c(t) = (u(t), v(t))$ για να ελαχιστοποιήσουμε τη χρήση των δεικτών.



ΣΧΗΜΑ 3

Ένα απλό παράδειγμα διανυσματικής συνάρτησης που είναι αρκετά χρήσιμη είναι η

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t),$$

η οποία διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 3).

Για δύο (κανονικές) συναρτήσεις f και g, ορίσαμε τις νέες συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$ μέσω των κανόνων

(1) $$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$

(2) $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Αφού έχουμε ορίσει έναν τρόπο πρόσθεσης διανυσμάτων, μπορούμε να μιμηθούμε τον πρώτο από αυτούς τους ορισμούς για τις διανυσματικές συναρτήσεις c και d: ορίζουμε τη διανυσματική συνάρτηση $c + d$ ως

$$(c+d)(t) = c(t) + d(t),$$

όπου το $+$ στο δεξιό μέλος είναι τώρα *άθροισμα διανυσμάτων*. Αυτό σημαίνει απλά ότι, αν

$$c(t) = (u(t), v(t)),$$
$$d(t) = (w(t), z(t)),$$

τότε

$$(c+d)(t) = \big(u(t), v(t)\big) + \big(w(t), z(t)\big) = \big(u(t) + w(t), v(t) + z(t)\big).$$

Θυμηθείτε ότι έχουμε επίσης ορίσει το $a \cdot v$ για έναν αριθμό a και ένα διάνυσμα v. Για να το επεκτείνουμε αυτό στις διανυσματικές συναρτήσεις, θέλουμε να έχουμε μια κανονική *συνάρτηση* α και μια διανυσματική συνάρτηση c, έτσι ώστε για κάθε t να έχουμε έναν αριθμό $\alpha(t)$ και ένα διάνυσμα $c(t)$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νέα διανυσματική συνάρτηση $\alpha \cdot c$ ως

$$(\alpha \cdot c)(t) = \alpha(t) \cdot c(t),$$

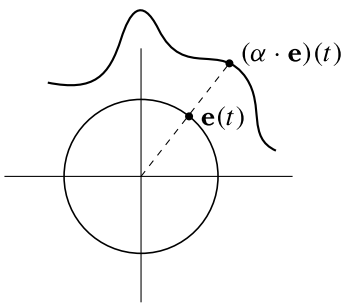
όπου το $\cdot$ στο δεξιό μέλος είναι το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα. Αυτό σημαίνει απλά, ότι

$$(\alpha \cdot c)(t) = \alpha(t) \cdot (u(t), v(t)) = \big(\alpha(t) \cdot u(t),\ \alpha(t) \cdot v(t)\big).$$

Παρατηρήστε ότι η καμπύλη $\alpha \cdot \mathbf{e}$,

$$(\alpha \cdot \mathbf{e})(t) = (\alpha(t)\cos t,\ \alpha(t)\sin t),$$

είναι ήδη αρκετά γενική (Σχήμα 4). Κατά τον συμβολισμό του Παραρτήματος 3 του Κεφαλαίου 4, το σημείο $(\alpha \cdot \mathbf{e})(t)$ έχει πολικές συντεταγμένες $\alpha(t)$ και t, με αποτέλεσμα το $(\alpha \cdot \mathbf{e})(t)$ να είναι «η γραφική παράσταση της α σε πολικές συντεταγμένες.»



ΣΧΗΜΑ 4

Ακόμα πιο γενικά, δοθείσης μια διανυσματικής συνάρτησης c, μπορούμε να ορίσουμε τις νέες συναρτήσεις r και θ ως

$$c(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t)),$$

όπου $r(t)$ είναι απλώς η απόσταση από την αρχή των αξόνων έως το $c(t)$, και $\theta(t)$ είναι κάποια επιλογή για τη γωνία του $c(t)$ (ως συνήθως, η συνάρτηση θ δεν ορίζεται μονοσήμαντα, οπότε πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν χρησιμοποιούμε αυτήν τη γραφή για μια τυχαία καμπύλη c).

Γενικά, την (2) δεν είμαστε σε θέση να την επεκτείνουμε για διανυσματικές συναρτήσεις, αφού δεν έχουμε ορίσει το γινόμενο δύο διανυσμάτων. Ωστόσο, τα Προβλήματα 2 και 4 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4 ορίζουν τα δύο *πραγματικά* γινόμενα $v \cdot w$ και $\det(v, w)$. Δοθέντων δύο διανυσματικών συναρτήσεων c και d, θα πρέπει να είναι σαφές πώς θα ορίζαμε δύο κανονικές (πραγματικές) συναρτήσεις

$$c \cdot d \qquad \text{και} \qquad \det(c, d).$$

Πέρα από το να μεταφέρουμε τις απλές αριθμητικές πράξεις στις συναρτήσεις, μπορούμε να εξετάσουμε πιο ενδιαφέροντα προβλήματα, όπως τα όρια. Για $c(t) = (u(t), v(t))$, μπορούμε να ορίσουμε το

(*) $$\lim_{t\to a}(u(t), v(t)) \quad \text{να είναι το} \quad \Big(\lim_{t\to a} u(t),\ \lim_{t\to a} v(t)\Big).$$

Από αυτό προκύπτουν άμεσα κανόνες, όπως οι

$$\lim_{t\to a}(c+d) = \lim_{t\to a} c + \lim_{t\to a} d,$$
$$\lim_{t\to a} \alpha \cdot c = \lim_{t\to a} \alpha(t) \cdot \lim_{t\to a} c.$$

Το Πρόβλημα 10 δείχνει πώς μπορούμε να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό σε άμεση αντιστοιχία με τον βασικό ορισμό των ορίων.

Τα όρια μάς οδηγούν φυσικά στις παραγώγους. Για

$$c(t) = (u(t), v(t))$$

μπορούμε να ορίσουμε την c' μέσω του προφανούς ορισμού

$$c'(a) = \big(u'(a), v'(a)\big).$$

Μπορούμε επίσης να προσπαθήσουμε να μιμηθούμε τον βασικό ορισμό:

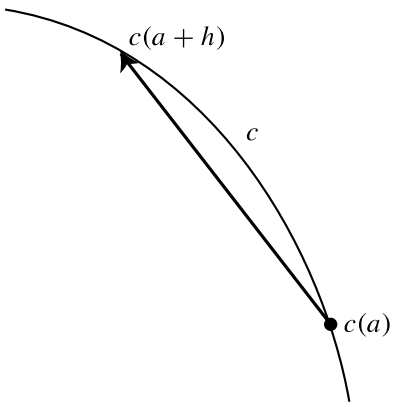
$$c'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{c(a+h) - c(a)}{h},$$

όπου το κλάσμα στο δεξιό μέλος εννοείται ότι σημαίνει

$$\frac{1}{h} \cdot [c(a+h) - c(a)].$$

Οι δύο αυτοί ορισμοί είναι ισοδύναμοι, επειδή

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{c(a+h) - c(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(a+h) - u(a)}{h}, \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \right) \\ &\qquad \text{με βάση τον ορισμό των ορίων } (*) \\ &= \big(u'(a), v'(a)\big).\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 5

Το Σχήμα 5 δείχνει τα $c(a+h)$ και $c(a)$, όπως και το βέλος από το $c(a)$ στο $c(a+h)$. Όπως δείξαμε στο Παράρτημα 1 του Κεφαλαίου 4, το βέλος αυτό είναι το $c(a+h)-c(a)$, με τη διαφορά ότι είναι μετακινημένο ώστε να ξεκινά από το $c(a)$. Καθώς $h \to 0$, το βέλος αυτό θα φαίνεται να μετακινείται όλο και πλησιέστερα προς την εφαπτομένη της καμπύλης μας, οπότε φαίνεται λογικό να *ορίσουμε* την εφαπτομένη της c στο $c(a)$ ως την ευθεία κατά μήκος του $c'(a)$, όταν το $c'(a)$ μετακινηθεί ώστε να ξεκινά από το $c(a)$. Με άλλα λόγια, ορίζουμε την εφαπτομένη της c στο $c(a)$ ως το σύνολο όλων των σημείων

$$c(a) + s \cdot c'(a).$$

Για $s = 0$ λαμβάνουμε το ίδιο το $c(a)$, για $s = 1$ λαμβάνουμε $c(a) + c'(a)$, κτλ. (Παρατηρήστε, όμως, ότι αυτός ο ορισμός δεν έχει νόημα όταν $c'(a) = (0, 0)$.) Το Πρόβλημα 1 δείχνει ότι αυτός ο ορισμός συμφωνεί με τον παλιό, όταν η καμπύλη c ορίζεται ως

$$c(t) = (t, f(t)),$$

ώστε να έχουμε απλά τη γραφική παράσταση της f.

Για ακόμη μια φορά, μπορούμε να βρούμε τα ανάλογα των παλιών τύπων. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}(c + d)'(a) &= c'(a) + d'(a), \\ (\alpha \cdot c)'(a) &= \alpha'(a) \cdot c(a) + \alpha(a) \cdot c'(a),\end{aligned}$$

ή, ως συναρτησιακές εξισώσεις,

$$\begin{aligned}(c + d)' &= c' + d', \\ (\alpha \cdot c)' &= \alpha' \cdot c + \alpha \cdot c'.\end{aligned}$$

Τους τύπους αυτούς μπορούμε να τους λάβουμε άμεσα από τον ορισμό συναρτήσει των συνιστωσών συναρτήσεων. Μπορούμε επίσης να τους λάβουμε και από τον ορισμό ως

όριο, μιμούμενοι τις προηγούμενες αποδείξεις· για τον δεύτερο τύπο θα πρέπει φυσικά να χρησιμοποιήσουμε το κλασικό τέχνασμα και να γράψουμε

$$\alpha(a+h)c(a+h) - \alpha(a)c(a) = \\ \alpha(a+h)\cdot[c(a+h)-c(a)] + [\alpha(a+h)-\alpha(a)]\cdot c(a).$$

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$d(t) = c(p(t)) = (c\circ p)(t),$$

όπου p είναι τώρα μια κανονική συνάρτηση, από αριθμούς σε αριθμούς. Η νέα καμπύλη d διέρχεται από τα ίδια σημεία με την c, αλλά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές· η p αντιστοιχεί δηλαδή σε μια «ανα-παραμετροποίηση» της c. Για

$$c = (u, v),$$
$$d = (u\circ p, v\circ p),$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} d'(a) &= \big((u\circ p)'(a), (v\circ p)'(a)\big) \\ &= \big(p'(a)u'(p(a)), p'(a)v'(p(a))\big) \\ &= p'(a)\cdot\big(u'(p(a)), v'(p(a))\big) \\ &= p'(a)\cdot c'(p(a)), \end{aligned}$$

ή απλώς

$$d' = p'\cdot(c'\circ p).$$

Παρατηρήστε ότι αν $p(a) = a$, έτσι ώστε οι d και c να διέρχονται τη χρονική στιγμή a από το ίδιο σημείο, τότε $d'(a) = p'(a)\cdot c'(a)$, έτσι ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα $d'(a)$ να είναι απλώς πολλαπλάσιο της $c'(a)$. Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτόμενη *ευθεία* της c στο $c(a)$ είναι η ίδια με την εφαπτομένη της ανα-παραμετροποιημένης καμπύλης d στο $d(a) = c(a)$. Η μόνη εξαίρεση συμβαίνει όταν $p'(a) = 0$, αφού σε αυτήν την περίπτωση η εφαπτομένη της d δεν ορίζεται, παρ' ότι η εφαπτομένη της c μπορεί να ορίζεται. Για παράδειγμα, η εφαπτομένη της $d(t) = c(t^3)$ δεν θα ορίζεται στο $t = 0$, παρ' ότι πρόκειται απλώς για ανα-παραμετροποίηση της c.

Τέλος, αφού μπορούμε να ορίσουμε τις πραγματικές συναρτήσεις

$$(c\cdot d)(t) = c(t)\cdot d(t),$$
$$\det(c,d)(t) = \det(c(t), d(t)),$$

θα πρέπει να έχουμε τύπους για τις παραγώγους των νέων αυτών συναρτήσεων. Όπως πιθανόν να μαντέψατε, οι σωστοί τύποι είναι οι

$$(c\cdot d)'(a) = c(a)\cdot d'(a) + c'(a)\cdot d(a),$$
$$[\det(c,d)]'(a) = \det(c',d)(a) + \det(c,d')(a),$$

οι οποίοι μπορούν να προκύψουν με απευθείας υπολογισμούς από τους ορισμούς συναρτήσει των συνιστωσών συναρτήσεων. Είναι όμως πιο κομψό να μιμηθούμε την απόδειξη του γνωστού κανόνα του γινομένου, χρησιμοποιώντας τους απλούς τύπους των Προβλημάτων 2 και 4 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4, και, φυσικά, το «κλασικό τέχνασμα» που αναφέραμε προηγουμένως.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Για μια συνάρτηση f, η «μορφή σημείου-κλίσης» (Πρόβλημα 4-6) της εφαπτομένης στο $(a, f(a))$ γράφεται ως $y - f(a) = (x - a)f'(a)$, έτσι ώστε η εφαπτομένη να αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής

$$\big(x,\, f(a) + (x - a)f'(a)\big).$$

Συμπεράνετε ότι η εφαπτομένη αποτελείται από όλα τα σημεία της μορφής

$$\big(a + s,\, f(a) + sf'(a)\big).$$

(β) Αν c είναι η καμπύλη $c(t) = (t, f(t))$, συμπεράνετε ότι η εφαπτομένη της c στο $(a, f(a))$ [χρησιμοποιώντας τον νέο μας ορισμό] είναι η ίδια με την εφαπτομένη της f στο $(a, f(a))$.

2. Έστω $c(t) = (f(t), t^2)$, όπου f είναι η συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 21 του Κεφαλαίου 9. Δείξτε ότι η c κείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της μη παραγωγίσιμης συνάρτησης $h(x) = |x|$, αλλά $c'(0) = (0, 0)$. Με άλλα λόγια, η ανα-παραμετροποίηση μπορεί να «κρύψει» μια γωνία. Για αυτόν το λόγο, συνήθως μας ενδιαφέρουν μόνο καμπύλες c με c' που δεν ισούται ποτέ με $(0, 0)$.

3. Έστω ότι $x = u(t)$, $y = v(t)$ είναι η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης και ότι η u είναι 1-1 σε κάποιο διάστημα.

(α) Δείξτε ότι σε αυτό το διάστημα η καμπύλη κείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της $f = v \circ u^{-1}$.

(β) Αν η u είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το διάστημα και $u'(t) \neq 0$, δείξτε ότι στο σημείο $x = u(t)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}.$$

Με τον συμβολισμό του Leibniz, συχνά αυτό γράφεται πιο παραστατικά ως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

(γ) Επίσης έχουμε ότι

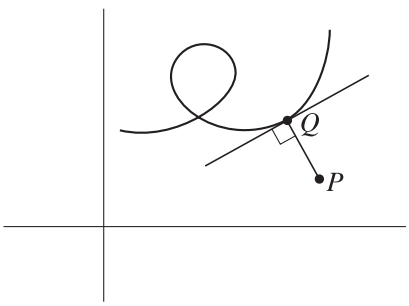
$$f''(x) = \frac{u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t)}{(u'(t))^3}.$$

4. Θεωρήστε μια συνάρτηση f που ορίζεται με πεπλεγμένο τρόπο μέσω της εξίσωσης $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Υπολογίστε την $f'(x)$ με δύο τρόπους:

(i) Με πεπλεγμένη παραγώγιση.

(ii) Θεωρώντας την παραμετρική παράσταση $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$.

5. Έστω $x = u(t)$, $y = v(t)$ η παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης με u και v παραγωγίσιμες, και έστω $P = (x_0, y_0)$ σημείο του επιπέδου. Δείξτε ότι αν το σημείο $Q = (u(\bar{t}), v(\bar{t}))$ στην καμπύλη είναι το πλησιέστερο στο (x_0, y_0) και οι $u'(\bar{t})$ και $v'(\bar{t})$ δεν είναι και οι δύο 0, τότε η ευθεία που διέρχεται από τα P και Q είναι κάθετη προς την εφαπτομένη της καμπύλης στο Q (Σχήμα 6). Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν το Q είναι το πλέον μακρινό σημείο από το (x_0, y_0).



ΣΧΗΜΑ 6

Έχουμε δει ότι η «γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες» είναι η καμπύλη

$$(f \cdot \mathbf{e})(t) = (f(t)\cos t,\, f(t)\sin t).$$

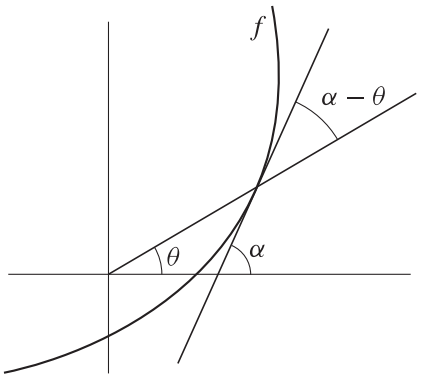
Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες είναι η καμπύλη με την παραμετρική παράσταση

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = f(\theta)\sin\theta.$$

6. (α) Δείξτε ότι για τη γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες, η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο με πολικές συντεταγμένες $(f(\theta), \theta)$ είναι

$$\frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta}{-f(\theta)\sin\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

(β) Δείξτε ότι αν $f(\theta) = 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο θ, τότε η ευθεία δια της αρχής των αξόνων που σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο θετικό άξονα είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε πολικές συντεταγμένες. Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να προσθέσετε μερικές λεπτομέρειες στη γραφική παράσταση της σπείρας του Αρχιμήδη στο Παράρτημα 3 του Κεφαλαίου 4 καθώς και στις γραφικές παραστάσεις των Προβλημάτων 3 και 10 εκείνου του Παραρτήματος.



ΣΧΗΜΑ 7

(γ) Έστω ότι το σημείο με πολικές συντεταγμένες $(f(\theta), \theta)$ είναι το πιο μακρινό από την αρχή των αξόνων O από οποιοδήποτε άλλο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Τί μπορείτε να πείτε για την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο αυτό; Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 5.

(δ) Έστω ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με πολικές συντεταγμένες $(f(\theta), \theta)$ σχηματίζει γωνία α με τον οριζόντιο άξονα (Σχήμα 7), έτσι ώστε η γωνία μεταξύ της εφαπτομένης και της ακτίνας από το O στο σημείο να είναι $\alpha - \theta$. Δείξτε ότι

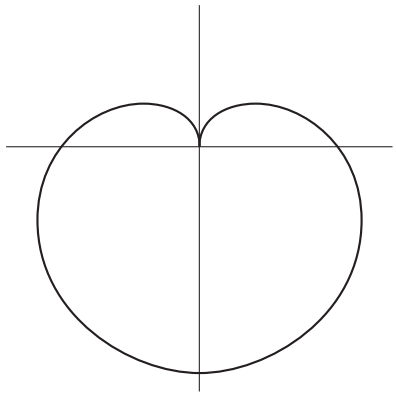
$$\tan(\alpha - \theta) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

7. (α) Στο Πρόβλημα 8 του Παραρτήματος 3 του Κεφαλαίου 4, βρήκαμε ότι το καρδιοειδές $r = 1 - \sin\theta$ περιγράφεται επίσης από την εξίσωση $(x^2+y^2+y)^2 = x^2 + y^2$. Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης σε ένα σημείο του καρδιοειδούς με δύο τρόπους:

(i) Με πεπλεγμένη παραγώγιση.

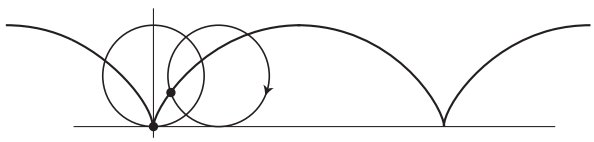
(ii) Με χρήση του προηγουμένου προβλήματος.

(β) Ελέγξτε ότι στην αρχή των αξόνων οι εφαπτόμενες είναι κατακόρυφες, όπως εμφανίζονται στο Σχήμα 8.

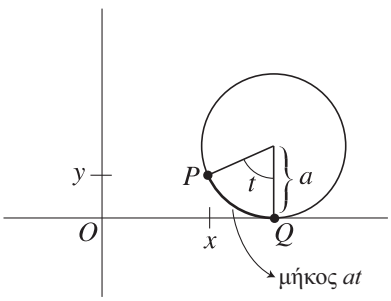

ΣΧΗΜΑ 8

Το επόμενο πρόβλημα χρησιμοποιεί ύλη του Κεφαλαίου 15, και συγκεκριμένα τη μέτρηση σε ακτίνια, τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους.

8. Ως *κυκλοειδής* ορίζεται η τροχιά που διαγράφει ένα σημείο που βρίσκεται στην περιφέρεια ενός κυλιόμενου τροχού ακτίνας a. Μπορείτε να δείτε μια όμορφη κυκλοειδή αν κολλήσετε έναν ανακλαστήρα στην περιφέρεια ενός τροχού ποδηλάτου και ένας φίλος σας το οδηγήσει σιγά μπροστά στα μεγάλα φώτα του αυτοκινήτου σας τη νύχτα. Αν δεν έχετε αυτοκίνητο, ποδήλατο ή έναν καλό φίλο, συμβιβαστείτε με αυτό που δίνει το Σχήμα 9.



ΣΧΗΜΑ 9

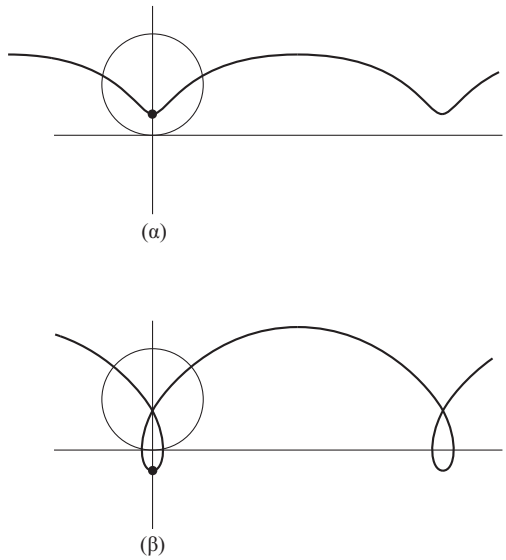


ΣΧΗΜΑ 10

(α) Έστω ότι $u(t)$ και $v(t)$ είναι οι συντεταγμένες του σημείου στην περιφέρεια του τροχού όταν έχει κυλήσει κατά γωνία t (ακτινίων). Αυτό σημαίνει ότι το τόξο από το P έως το Q της περιφέρειας στο Σχήμα 10 έχει μήκος at. Αφού ο τροχός κυλά, at είναι και η απόσταση από το O έως το Q. Δείξτε ότι έχουμε την παραμετρική παράσταση της κυκλοειδούς

$$u(t) = a(t - \sin t)$$
$$v(t) = a(1 - \cos t).$$

Το Σχήμα 11 δείχνει τις καμπύλες που παίρνουμε αν η απόσταση του σημείου από το κέντρο του τροχού είναι (α) μικρότερη από την ακτίνα ή (β) μεγαλύτερη από την ακτίνα. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση, η καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης· ορισμένες φορές το σημείο κινείται προς τα πίσω αν και ο τροχός κινείται προς τα εμπρός!



ΣΧΗΜΑ 11

Στο Σχήμα 9 ζωγραφίσαμε την κυκλοειδή ως γραφική παράσταση συνάρτησης, αλλά πρέπει να ελέγξουμε ότι τα πράγματα έχουν όντως έτσι:

(β) Υπολογίστε την $u'(t)$ και συμπεράνετε ότι η u είναι αύξουσα. Το Πρόβλημα 3 μας δείχνει τότε ότι η κυκλοειδής είναι η γραφική παράσταση της $f = v \circ u^{-1}$ και μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την $f'(t)$.

(γ) Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες της κυκλοειδούς στις «κορυφές» είναι κάθετες.

Δεν είναι δυνατόν να λάβουμε τύπο σε κλειστή μορφή για την f, μπορούμε όμως σχεδόν να βρούμε τέτοιον τύπο.

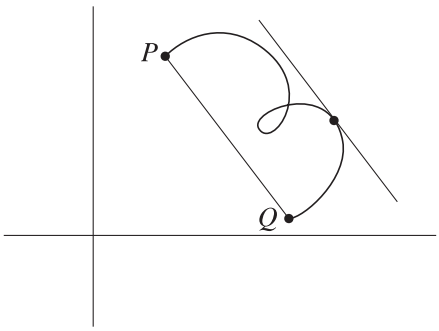
(δ) Δείξτε ότι

$$u(t) = a \arccos \frac{a - v(t)}{a} \pm \sqrt{[2a - v(t)]v(t)}.$$

Υπόδειξη: Λύστε πρώτα ως προς t συναρτήσει της $v(t)$.

(ε) Το πρώτο μισό του πρώτου τόξου της κυκλοειδούς είναι η γραφική παράσταση της g^{-1}, όπου

$$g(y) = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{(2a - y)y}.$$



ΣΧΗΜΑ 12

9. Έστω ότι οι u και v είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Τότε οι u και v αποτελούν την παραμετρική παράσταση μιας καμπύλης από το $P = (u(a), v(a))$ στο $Q = (u(b), v(b))$. Γεωμετρικά, φαίνεται να είναι ξεκάθαρο (Σχήμα 12) ότι σε κάποιο σημείο της καμπύλης η εφαπτομένη είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα από το P στο Q. Αποδείξτε το με αναλυτικό τρόπο. Υπόδειξη: Το πρόβλημα αυτό θα σας δώσει μια γεωμετρική ερμηνεία για ένα από τα θεωρήματα του Κεφαλαίου 11. Θα χρειαστεί επιπλέον να υποθέσετε ότι δεν έχουμε $u'(x) = v'(x) = 0$ για κανένα x στο (a, b) (συγκρίνετε με το Πρόβλημα 2).

10. Ο ακόλουθος ορισμός του ορίου μιας διανυσματικής συνάρτησης είναι το άμεσο ανάλογο του ορισμού για κανονικές συναρτήσεις:

$\lim_{t \to a} c(t) = l$ σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε t, αν $0 < |t - a| < \delta$, τότε $\|c(t) - l\| < \varepsilon$.

Εδώ $\| \ \|$ είναι η *νόρμα*, που ορίστηκε στο Πρόβλημα 2 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4. Συγκεκριμένα, αν $l = (l_1, l_2)$, τότε

$$\|c(t) - l\|^2 = |u(t) - l_1|^2 + |v(t) - l_2|^2.$$

(α) Συμπεράνετε ότι

$$|u(t) - l_1| \leq \|c(t) - l\| \qquad \text{και} \qquad |v(t) - l_2| \leq \|c(t) - l\|,$$

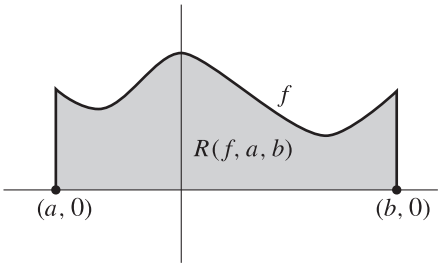
και δείξτε ότι αν $\lim_{t \to a} c(t) = l$ σύμφωνα με τον προαναφερθέντα ορισμό, τότε έχουμε επίσης ότι

$$\lim_{t \to a} u(t) = l_1 \qquad \text{και} \qquad \lim_{t \to a} v(t) = l_2,$$

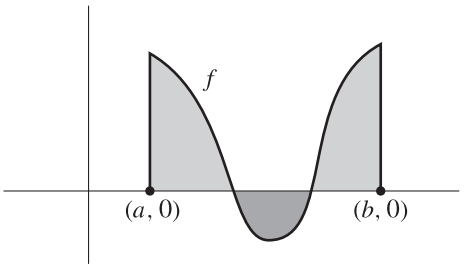
έτσι ώστε να έχουμε ότι $\lim_{t \to a} c(t) = l$ σύμφωνα με τον ορισμό $(*)$ της σελίδας 221 συναρτήσει των συνιστωσών συναρτήσεων.

(β) Αντιστρόφως, δείξτε ότι αν $\lim_{t \to a} c(t) = l$ σύμφωνα με τον ορισμό συναρτήσει των συνιστωσών συναρτήσεων, τότε και $\lim_{t \to a} c(t) = l$ σύμφωνα με τον προαναφερθέντα ορισμό.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

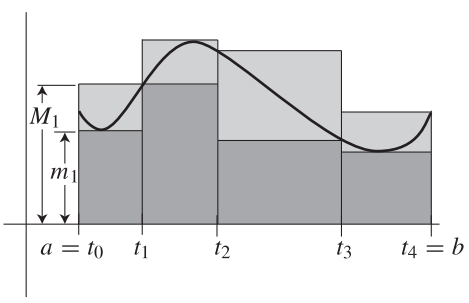
Η παράγωγος δεν εμφανίζει όλη της τη δύναμη παρά μόνο όταν συμμαχήσει με το «ολοκλήρωμα», τη δεύτερη κύρια έννοια του 3ου Μέρους. Στην αρχή, αυτή η έννοια μπορεί να φανεί τελείως ξεστρατισμένη —σε αυτό το κεφάλαιο δεν εμφανίζονται παράγωγοι ούτε μια φορά! (Σ.τ.Ε.: Εκτός από το Πρόβλημα 25). Η μελέτη των ολοκληρωμάτων απαιτεί πραγματικά μεγάλη προετοιμασία, αλλά από τη στιγμή που αυτή η προκαταρκτική εργασία θα έχει ολοκληρωθεί, τα ολοκληρώματα θα γίνουν ένα ανεκτίμητο εργαλείο για να δημιουργούμε καινούργιες συναρτήσεις, και η παράγωγος θα επανεμφανιστεί στο Κεφάλαιο 14, περισσότερο ισχυρή παρά ποτέ.

Αν και τελικά θα οριστεί με έναν μάλλον περίπλοκο τρόπο, το ολοκλήρωμα τυποποιεί μια απλή, διαισθητική έννοια —αυτήν του εμβαδού. Σύμφωνα με ό,τι έχουμε δει έως τώρα, δεν θα έπρεπε να εκπλήσσει κανέναν το γεγονός ότι ο ορισμός μιας διαισθητικής έννοιας μπορεί να παρουσιάσει μεγάλες δυσκολίες —και «το εμβαδόν» βέβαια δεν αποτελεί εξαίρεση.

Στη στοιχειώδη Γεωμετρία αποδεικνύονται τύποι για τα εμβαδά πολλών επιπέδων σχημάτων, αλλά αν σκεφτούμε λίγο θα δούμε ότι σπάνια δίνεται ένας αποδεκτός ορισμός του εμβαδού. Το εμβαδόν μιας επιφάνειας μερικές φορές ορίζεται ως το πλήθος των τετραγώνων, με πλευρές μήκους 1, που «χωράνε» στην επιφάνεια. Αλλά αυτός ο ορισμός είναι αδιόρθωτα ανεπαρκής για οποιαδήποτε επιφάνεια, εκτός από τις απλούστερες. Για παράδειγμα, ένας κύκλος με ακτίνα 1, υποτίθεται ότι έχει ως εμβαδόν τον άρρητο αριθμό π, αλλά δεν είναι καθόλου σαφές τι σημαίνει «π τετράγωνα». Ακόμα και αν θεωρήσουμε έναν κύκλο ακτίνας $1/\sqrt{\pi}$, που υποθετικά έχει εμβαδόν 1, είναι πολύ δύσκολο να πει κανείς με ποιον τρόπο χωράει ένα μοναδιαίο τετράγωνο σε αυτόν τον κύκλο, μια και δεν φαίνεται δυνατόν να διαιρέσουμε το μοναδιαίο τετράγωνο σε κομμάτια που, κατάλληλα διευθετημένα, να σχηματίζουν έναν κύκλο.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε το εμβαδόν μόνο κάποιων πολύ ειδικών επιφανειών (Σχήμα 1) —αυτών που φράσσονται από τον οριζόντιο άξονα, τις κατακόρυφες στα $(a, 0)$ και $(b, 0)$, και τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Είναι βολικό να συμβολίζουμε αυτήν την επιφάνεια με $R(f, a, b)$. Παρατηρούμε ότι σε αυτού του είδους τις επιφάνειες περιλαμβάνονται τα ορθογώνια και τα τρίγωνα, καθώς και πολλά άλλα σπουδαία γεωμετρικά σχήματα.

Ο αριθμός που θα δώσουμε τελικά ως εμβαδόν της $R(f, a, b)$ θα ονομαστεί το *ολοκλήρωμα* της f στο $[a, b]$. Στην πραγματικότητα, το ολοκλήρωμα θα οριστεί ακόμα και για συναρτήσεις f που δεν ικανοποιούν τη συνθήκη $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν f είναι η συνάρτηση που έχουμε σχεδιάσει στο Σχήμα 2, το ολοκλήρωμα θα παριστάνει τη διαφορά ανάμεσα στο εμβαδόν της ελαφρώς σκιασμένης επιφάνειας και το εμβαδόν της έντονα σκιασμένης επιφάνειας (το «αλγεβρικό εμβαδόν» του $R(f, a, b)$).



ΣΧΗΜΑ 3

Η ιδέα που βρίσκεται πίσω από τον μελλοντικό ορισμό φαίνεται στο Σχήμα 3. Το διάστημα $[a, b]$ έχει διαιρεθεί σε τέσσερα υποδιαστήματα

$$[t_0, t_1] \quad [t_1, t_2] \quad [t_2, t_3] \quad [t_3, t_4]$$

μέσω των αριθμών t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 για τους οποίους ισχύει

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = b$$

(η αρίθμηση των δεικτών αρχίζει με 0, έτσι ώστε ο μεγαλύτερος δείκτης να είναι ίσος με το πλήθος των υποδιαστημάτων).

Στο πρώτο διάστημα $[t_0, t_1]$ η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή m_1 και μέγιστη τιμή M_1. Ομοίως, στο i-στό διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ έστω m_i η ελάχιστη τιμή και M_i η μέγιστη τιμή της f. Το άθροισμα

$$s = m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + m_3(t_3 - t_2) + m_4(t_4 - t_3)$$

παριστάνει το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων που βρίσκονται μέσα στην επιφάνεια $R(f, a, b)$, ενώ το άθροισμα

$$S = M_1(t_1 - t_0) + M_2(t_2 - t_1) + M_3(t_3 - t_2) + M_4(t_4 - t_3)$$

παριστάνει το συνολικό εμβαδόν των ορθογωνίων που περιέχουν την επιφάνεια $R(f, a, b)$. Η αρχή που μας καθοδηγεί στην προσπάθειά μας να ορίσουμε το εμβαδόν A του $R(f, a, b)$, είναι η παρατήρηση ότι το A θα πρέπει να ικανοποιεί τις

$$s \leq A \quad \text{και} \quad A \leq S,$$

και αυτό θα πρέπει να είναι σωστό, *άσχετα με το πώς υποδιαιρείται το διάστημα* $[a, b]$. Ελπίζουμε ότι με αυτές τις απαιτήσεις θα προσδιοριστεί το A. Οι ορισμοί που ακολουθούν αρχίζουν να τυποποιούν αυτήν τη συζήτηση, και να εξαφανίζουν κάποιες από τις υποθέσεις που έγιναν σιωπηρά.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $a < b$. Μια **διαμέριση** του διαστήματος $[a, b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από σημεία στο $[a, b]$, δύο από τα οποία είναι το a και το b.

Τα σημεία σε μια διαμέριση μπορούν να αριθμηθούν $t_0, \ldots, t_n$ έτσι ώστε

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

πάντοτε θα υποθέτουμε ότι έχει γίνει τέτοιου είδους αρίθμηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$. Έστω

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Το **κάτω άθροισμα** της f για την P συμβολίζεται $L(f, P)$ και ορίζεται

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Το **άνω άθροισμα** της f για την P συμβολίζεται $U(f, P)$ και ορίζεται

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Το κάτω και το άνω άθροισμα αντιστοιχούν στα αθροίσματα s και S του προηγουμένου παραδείγματος· υποτίθεται ότι αντιπροσωπεύουν τα συνολικά εμβαδά των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω και πάνω από τη γραφική παράσταση της f. Παρατηρούμε όμως ότι, παρά το γεωμετρικό κίνητρο, αυτά τα αθροίσματα έχουν οριστεί ακριβώς χωρίς καμία αναφορά στην έννοια του «εμβαδού».

Δύο λεπτομέρειες στον ορισμό αξίζουν κάποια σχόλια. Η απαίτηση να είναι φραγμένη η f στο $[a, b]$ είναι απαραίτητη για να ορίζονται όλα τα m_i και M_i. Παρατηρούμε επίσης ότι ήταν αναγκαίο να ορίσουμε τους αριθμούς m_i και M_i ως $\inf$ και $\sup$, παρά ως ελάχιστα και μέγιστα, γιατί η f δεν έχει υποτεθεί συνεχής.

Ένα πράγμα είναι φανερό για τα κάτω και άνω αθροίσματα: αν P είναι οποιαδήποτε διαμέριση, τότε

$$L(f, P) \leq U(f, P),$$

γιατί

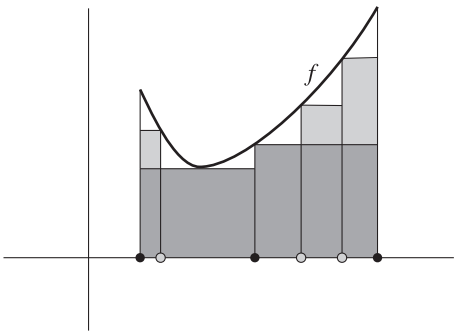
$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

και για κάθε i έχουμε

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Από την άλλη πλευρά, κάτι λιγότερο προφανές *θα πρέπει* να είναι αληθές: Αν P_1 και P_2 είναι δύο *οποιεσδήποτε* διαμερίσεις του $[a, b]$ τότε θα πρέπει να ισχύει ότι

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2),$$



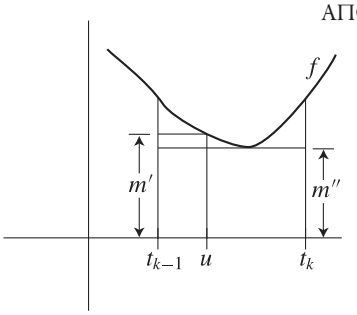
ΣΧΗΜΑ 4

γιατί $L(f, P_1)$ θα πρέπει να είναι $\leq$ εμβαδόν $R(f, a, b)$ και $U(f, P_2)$ θα πρέπει να είναι $\geq$ εμβαδόν $R(f, a, b)$. Αυτή η παρατήρηση δεν αποδεικνύει τίποτα (γιατί το «εμβαδόν του $R(f, a, b)$» δεν έχει καν οριστεί έως τώρα), αλλά δείχνει ότι, αν υπάρχει κάποια ελπίδα να οριστεί το εμβαδόν του $R(f, a, b)$, πρέπει να προηγηθεί μια απόδειξη της $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$. Η απόδειξη που πρόκειται να δώσουμε βασίζεται σε ένα λήμμα που έχει να κάνει με τη συμπεριφορά των κάτω και άνω αθροισμάτων, όταν περισσότερα σημεία περιλαμβάνονται σε μια διαμέριση. Στο Σχήμα 4, η διαμέριση P περιέχει τα σημεία που είναι μαύρα, και η Q περιέχει τα σημεία που είναι μαύρα και αυτά που είναι γκρίζα. Το σχήμα υποδηλώνει ότι τα ορθογώνια που σχεδιάζονται για τη διαμέριση Q είναι καλύτερη προσέγγιση της επιφάνειας $R(f, a, b)$ από ό,τι αυτά της αρχικής διαμέρισης P. Για να ακριβολογούμε:

ΛΗΜΜΑ Αν η Q περιέχει την P (δηλαδή αν όλα τα σημεία της P ανήκουν επίσης στην Q), τότε

$$L(f, P) \leq L(f, Q),$$
$$U(f, P) \geq U(f, Q).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας θεωρήσουμε πρώτα την ειδική περίπτωση (Σχήμα 5), στην οποία η Q περιέχει ακριβώς ένα σημείο παραπάνω από την P:



ΣΧΗΜΑ 5

$$P = \{t_0, \ldots, t_n\},$$
$$Q = \{t_0, \ldots, t_{k-1}, u, t_k, \ldots, t_n\},$$

όπου

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < u < t_k < \cdots < t_n = b.$$

Έστω

$$m' = \inf\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\},$$
$$m'' = \inf\{f(x) : u \leq x \leq t_k\}.$$

Τότε

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$L(f, Q) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

Επομένως, για να αποδείξουμε ότι $L(f, P) \leq L(f, Q)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$m_k(t_k - t_{k-1}) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Τώρα, το σύνολο $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq t_k\}$ περιέχει όλα τα στοιχεία του $\{f(x) : t_{k-1} \leq x \leq u\}$ και πιθανόν κάποια ακόμα μικρότερα, άρα το μέγιστο κάτω φράγμα του πρώτου συνόλου είναι *μικρότερο ή ίσο από* το μέγιστο κάτω φράγμα του δεύτερου· δηλαδή

$$m_k \leq m'.$$

Ομοίως,

$$m_k \leq m''.$$

Επομένως,

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) \leq m'(u - t_{k-1}) + m''(t_k - u).$$

Αυτό αποδεικνύει, σε αυτήν την ειδική περίπτωση, ότι $L(f, P) \leq L(f, Q)$. Η απόδειξη ότι $U(f, P) \geq U(f, Q)$ είναι παρόμοια, και αφήνεται σε σας ως μια εύκολη, αλλά χρήσιμη, άσκηση.

Μπορούμε τώρα να αναχθούμε στη γενική περίπτωση αρκετά εύκολα. Η διαμέριση Q προκύπτει από την P προσθέτοντας ένα σημείο κάθε φορά· με άλλα λόγια, υπάρχει μια ακολουθία διαμερίσεων

$$P = P_1, P_2, \ldots, P_\alpha = Q$$

τέτοια ώστε η P_{j+1} να περιέχει ακριβώς ένα σημείο παραπάνω από την P_j. Τότε

$$L(f, P) = L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \leq \cdots \leq L(f, P_\alpha) = L(f, Q),$$

και

$$U(f, P) = U(f, P_1) \geq U(f, P_2) \geq \cdots \geq U(f, P_\alpha) = U(f, Q). \blacksquare$$

Το θεώρημα που θέλαμε να αποδείξουμε είναι απλή συνέπεια αυτού του λήμματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι P_1 και P_2 είναι διαμερίσεις του $[a, b]$, και f μια συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$. Τότε

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υπάρχει μια διαμέριση P που περιέχει τόσο την P_1 όσο και την P_2 (π.χ. η P να περιέχει ακριβώς τα σημεία της P_1 και της P_2). Σύμφωνα με το λήμμα,

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \blacksquare$$

Από το Θεώρημα 1 έπεται ότι κάθε άνω άθροισμα $U(f, P')$ είναι ένα άνω φράγμα για το σύνολο όλων των κάτω αθροισμάτων $L(f, P)$. Συνεπώς, κάθε άνω άθροισμα $U(f, P')$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το *ελάχιστο* άνω φράγμα όλων των κάτω αθροισμάτων:

$$\sup\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\} \leq U(f, P'),$$

για κάθε P'. Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι το $\sup\{L(f, P)\}$ είναι ένα κάτω φράγμα για το σύνολο όλων των άνω αθροισμάτων της f. Συνεπώς,

$$\sup\{L(f, P)\} \leq \inf\{U(f, P)\}.$$

Είναι προφανές ότι αυτοί οι δύο αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα στο κάτω και το άνω άθροισμα της f για *όλες* τις διαμερίσεις:

$$L(f, P') \leq \sup\{L(f, P)\} \leq U(f, P'),$$
$$L(f, P') \leq \inf\{U(f, P)\} \leq U(f, P'),$$

για κάθε διαμέριση P'.

Μπορεί κάλλιστα να συμβεί

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P\}.$$

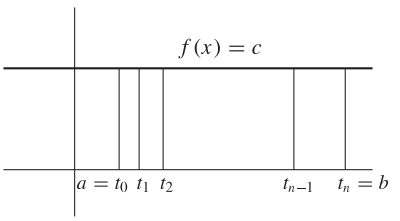
Σε αυτήν την περίπτωση, αυτός είναι ο *μοναδικός* αριθμός που βρίσκεται ανάμεσα στο κάτω και το άνω άθροισμα της f για όλες τις διαμερίσεις, και επομένως αυτός ο αριθμός είναι ιδανικός υποψήφιος για το εμβαδόν του $R(f, a, b)$. Από την άλλη πλευρά, αν

$$\sup\{L(f, P)\} < \inf\{U(f, P)\},$$

τότε κάθε αριθμός x ανάμεσα στο $\sup\{L(f, P)\}$ και το $\inf\{U(f, P)\}$ θα ικανοποιεί την

$$L(f, P') \leq x \leq U(f, P')$$

για όλες τις διαμερίσεις P'.



ΣΧΗΜΑ 6

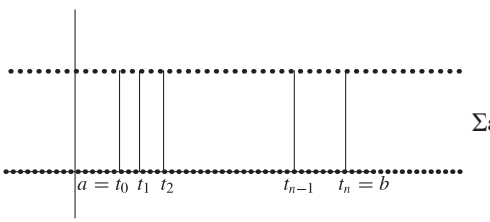
Δεν είναι καθόλου φανερό το πότε συμβαίνει μια τέτοια ευτυχής σύμπτωση. Τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν, αν και δεν είναι τόσο ενδιαφέροντα όσο αυτά που σύντομα θα εμφανιστούν, δείχνουν ότι και τα δύο φαινόμενα είναι δυνατά.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $f(x) = c$ για κάθε x στο $[a, b]$ (Σχήμα 6). Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι τυχαία διαμέριση του $[a, b]$, τότε

$$m_i = M_i = c,$$

άρα

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a),$$
$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} c(t_i - t_{i-1}) = c(b - a).$$



ΣΧΗΜΑ 7

Σε αυτήν την περίπτωση, όλα τα κάτω και άνω αθροίσματα είναι ίσα και

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\} = c(b - a).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα (Σχήμα 7) τη συνάρτηση f για την οποία

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1, & x \text{ ρητός.} \end{cases}$$

Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι τυχαία διαμέριση, τότε

$$m_i = 0, \text{ αφού υπάρχει ένας άρρητος αριθμός στο } [t_{i-1}, t_i],$$

και

$$M_i = 1, \text{ αφού υπάρχει ένας ρητός αριθμός στο } [t_{i-1}, t_i].$$

Επομένως,

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}0\cdot(t_i-t_{i-1})=0,$$
$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}1\cdot(t_i-t_{i-1})=b-a.$$

Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση σίγουρα *δεν* ισχύει ότι $\sup\{L(f,P)\}=\inf\{U(f,P)\}$. Η αρχή πάνω στην οποία επρόκειτο να βασιστεί ο ορισμός του εμβαδού δεν παρέχει αρκετές πληροφορίες ώστε να προσδιορίσουμε κάποιο συγκεκριμένο εμβαδόν για το $R(f,a,b)$ —οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στο 0 και το $b-a$ μοιάζει το ίδιο καλός. Από την άλλη πλευρά, η επιφάνεια $R(f,a,b)$ είναι τόσο αλλόκοτη που δικαιολογημένα θα μπορούσαμε να της αρνηθούμε να έχει κάποιο εμβαδόν. Μπορούμε πραγματικά να ισχυριστούμε, πιο γενικά, ότι αν

$$\sup\{L(f,P)\}\neq\inf\{U(f,P)\},$$

η επιφάνεια $R(f,a,b)$ είναι τελείως παράλογη, άρα δεν αξίζει να έχει ένα εμβαδόν. Όπως δείχνει και η προσφυγή μας στη λέξη «παράλογο», είμαστε έτοιμοι να καλύψουμε την άγνοιά μας με ορολογία.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f που είναι φραγμένη στο $[a,b]$ είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a,b]$, αν

$$\sup\{L(f,P):P\text{ διαμέριση του }[a,b]\}=\inf\{U(f,P):P\text{ διαμέριση του }[a,b]\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο κοινός αυτός αριθμός λέγεται το **ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f.$$

(Το σύμβολο $\int$ λέγεται *σύμβολο ολοκλήρωσης* και ήταν αρχικά ένα επιμηκυσμένο s, από τη λέξη «sum» (= άθροισμα). Οι αριθμοί a και b λέγονται *κάτω* και *άνω όρια της ολοκλήρωσης*.) Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ λέγεται επίσης το **εμβαδόν** του $R(f,a,b)$ όταν $f(x)\geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό,

$$L(f,P)\leq\int_a^b f\leq U(f,P)\quad\text{για κάθε διαμέριση }P\text{ του }[a,b].$$

Επιπλέον, το $\int_a^b f$ είναι ο *μοναδικός* αριθμός με αυτήν την ιδιότητα.

Αυτός ο ορισμός απλώς υποδεικνύει, και δεν λύνει, το πρόβλημα που συζητήσαμε προηγουμένως: δεν ξέρουμε ποιες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες (ούτε ξέρουμε πώς να βρούμε το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ όταν η f *είναι* ολοκληρώσιμη). Το μόνο που ξέρουμε προς το παρόν είναι δύο παραδείγματα:

(1) αν $f(x)=c$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f=c\cdot(b-a)$.

(Παρατηρούμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα δίνει το αναμενόμενο εμβαδόν ενός ορθογωνίου.)

(2) αν $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ άρρητος}\\ 1, & x\text{ ρητός},\end{cases}$ τότε η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Θα δοθούν περισσότερα παραδείγματα, πριν συζητήσουμε αυτά τα προβλήματα διεξοδικά. Ακόμα και για αυτά τα παραδείγματα όμως, θα βοηθήσει να διατυπώσουμε με σαφήνεια το παρακάτω απλό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P του $[a, b]$, τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση P ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Αφού

$$\inf\{U(f, P')\} \leq U(f, P),$$
$$\sup\{L(f, P')\} \geq L(f, P),$$

έπεται ότι

$$\inf\{U(f, P')\} - \sup\{L(f, P')\} < \varepsilon.$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι

$$\sup\{L(f, P')\} = \inf\{U(f, P')\}\cdot$$

τότε, από τον ορισμό, η f είναι ολοκληρώσιμη. Η απόδειξη του αντίστροφου ισχυρισμού είναι όμοια. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}.$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαμερίσεις P', P'' με

$$U(f, P'') - L(f, P') < \varepsilon.$$

Έστω P μια διαμέριση που περιέχει και την P' και την P''. Τότε, σύμφωνα με το λήμμα,

$$U(f, P) \leq U(f, P''),$$
$$L(f, P) \geq L(f, P')\cdot$$

συνεπώς,

$$U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P'') - L(f, P') < \varepsilon. \blacksquare$$

Αν και το τεχνικό μέρος της απόδειξης καταλαμβάνει κάποιο χώρο, είναι σαφές ότι το Θεώρημα 2 δεν είναι τίποτε περισσότερο από μια διαφορετική διατύπωση του ορισμού της ολοκληρωσιμότητας. Είναι όμως μια πολύ εύχρηστη διατύπωση γιατί δεν υπάρχει καμία αναφορά σε sup και inf, που συχνά είναι δύσκολο να τα χειριστεί κανείς. Το επόμενο παράδειγμα αποσαφηνίζει αυτό το σημείο, και ακόμα χρησιμεύει ως μια καλή εισαγωγή στο είδος των αποδείξεων που απαιτεί ο πολύπλοκος ορισμός του ολοκληρώματος, ακόμα και σε πολύ απλές περιπτώσεις.

Ας ορίσουμε την f στο $[0, 2]$ ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Έστω ότι $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[0, 2]$ με

$$t_{j-1} < 1 < t_j$$

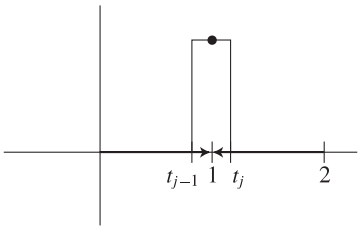
(βλ. Σχήμα 8). Τότε

$$m_i = M_i = 0 \quad \text{αν} \quad i \neq j,$$

αλλά

$$m_j = 0 \qquad \text{και} \qquad M_j = 1.$$

Αφού



ΣΧΗΜΑ 8

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{j-1} M_i(t_i - t_{i-1}) + M_j(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

έχουμε

$$U(f,P) - L(f,P) = t_j - t_{j-1}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη: για να πάρουμε μια διαμέριση P με

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

αρκεί μόνο να διαλέξουμε μια διαμέριση με

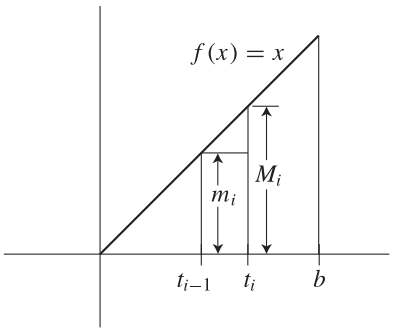
$$t_{j-1} < 1 < t_j \quad \text{και} \quad t_j - t_{j-1} < \varepsilon.$$

Ακόμα, είναι φανερό ότι

$$L(f,P) \leq 0 \leq U(f,P) \quad \text{για κάθε διαμέριση } P.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει μόνο *ένας* αριθμός ανάμεσα σε όλα τα κάτω και άνω αθροίσματα, συγκεκριμένα το ολοκλήρωμα της f, άρα

$$\int_0^2 f = 0.$$



ΣΧΗΜΑ 9

Αν και η ασυνέχεια της f ήταν υπεύθυνη για τις δυσκολίες σε αυτό το παράδειγμα, ακόμα χειρότερα προβλήματα γεννιούνται για πολύ απλές συνεχείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα, έστω $f(x) = x$, και για ευκολία θεωρούμε ένα διάστημα $[0, b]$, όπου $b > 0$. Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[0, b]$, τότε (Σχήμα 9)

$$m_i = t_{i-1} \qquad \text{και} \qquad M_i = t_i$$

και επομένως

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= t_0(t_1 - t_0) + t_1(t_2 - t_1) + \cdots + t_{n-1}(t_n - t_{n-1}), \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} t_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= t_1(t_1 - t_0) + t_2(t_2 - t_1) + \cdots + t_n(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Κανένας από τους δύο τύπους δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικός, αλλά και οι δύο απλοποιούνται σημαντικά για διαμερίσεις $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ σε n *ίσα* υποδιαστήματα. Σε αυτήν την περίπτωση, το μήκος $t_i - t_{i-1}$ του κάθε υποδιαστήματος είναι b/n, επομένως

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ t_1 &= \frac{b}{n}, \\ t_2 &= \frac{2b}{n}, \ \text{κτλ.} \end{aligned}$$

γενικά

$$t_i = \frac{ib}{n}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_{i-1}(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{(i-1)b}{n} \right\} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} (i-1) \right] \frac{b^2}{n^2} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} j \right) \frac{b^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Αν θυμηθούμε τον τύπο

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

αυτό μπορεί να γράφει

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{(n-1)(n)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b^2}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^2}{2}. \end{aligned}$$

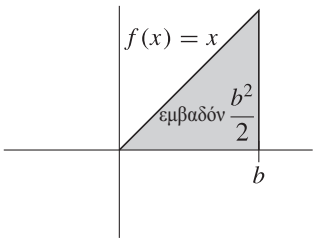
Αν το n είναι πολύ μεγάλο, τα $L(f, P_n)$ και $U(f, P_n)$ είναι και τα δύο κοντά στο $b^2/2$, και με αυτήν την παρατήρηση είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \frac{2}{n} \cdot \frac{b^2}{2}.$$

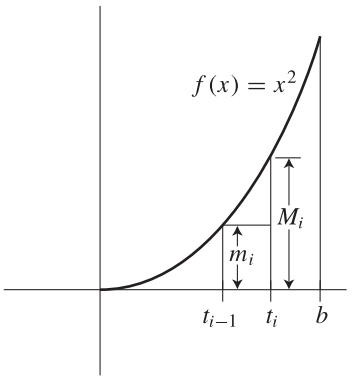
Αυτό δείχνει ότι υπάρχουν διαμερίσεις P_n ώστε το $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ να γίνεται όσο μικρό θέλουμε. Από το Θεώρημα 2, η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, το $\int_0^b f$ μπορεί τώρα να βρεθεί με ελάχιστη δουλειά. Είναι φανερό, πρώτα απ' όλα, ότι

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^2}{2} \leq U(f, P_n) \quad \text{για κάθε } n.$$

Αυτή η ανισότητα δείχνει μόνο ότι το $b^2/2$ βρίσκεται ανάμεσα σε κάποια ειδικά άνω και κάτω αθροίσματα, αλλά μόλις τώρα είδαμε ότι το $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ μπορεί να γίνει



ΣΧΗΜΑ 10



ΣΧΗΜΑ 11

όσο μικρό θέλουμε· άρα υπάρχει *μόνο ένας* αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Αφού το ολοκλήρωμα σίγουρα έχει αυτήν την ιδιότητα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\int_0^b f = \frac{b^2}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση μας δίνει εμβαδόν $b^2/2$ για ένα ορθογώνιο τρίγωνο με βάση και ύψος b (Σχήμα 10). Κάνοντας πιο σύνθετους υπολογισμούς, ή εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ παρουσιάζει ακόμα μεγαλύτερες δυσκολίες. Σε αυτήν την περίπτωση (Σχήμα 11), αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[0, b]$, τότε

$$m_i = f(t_{i-1}) = (t_{i-1})^2 \quad \text{και} \quad M_i = f(t_i) = {t_i}^2.$$

Διαλέγοντας, για μια ακόμα φορά, μια διαμέριση $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ σε n ίσα κομμάτια, οπότε

$$t_i = \frac{i \cdot b}{n}$$

τα κάτω και άνω αθροίσματα γίνονται

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} j^2, \\ U(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} {t_i}^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2. \end{aligned}$$

Αν θυμηθούμε τον τύπο

$$1^2 + \cdots + k^2 = \tfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

από το Πρόβλημα 2-1, αυτά τα αθροίσματα μπορούν να γραφούν

$$\begin{aligned} L(f, P_n) &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1), \\ U(f, P_n) &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{1}{6}(n+1)(n)(2n+1). \end{aligned}$$

Δεν είναι πολύ δύσκολο να αποδείξουμε ότι

$$L(f, P_n) \leq \frac{b^3}{3} \leq U(f, P_n),$$

και ότι το $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, αν διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο. Με την ίδια αιτιολόγηση όπως πριν, βλέπουμε τότε ότι

$$\int_0^b f = \frac{b^3}{3}.$$

Με αυτούς τους υπολογισμούς φτάσαμε κιόλας σε ένα μη τετριμμένο αποτέλεσμα —το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από μία παραβολή συνήθως δεν υπολογίζεται στη στοιχειώδη Γεωμετρία. Το αποτέλεσμα όμως ήταν γνωστό στον Αρχιμήδη, που το υπολόγισε ουσιαστικά με τον ίδιο τρόπο. Η μόνη υπεροχή που μπορούμε να διεκδικήσουμε είναι ότι στο επόμενο κεφάλαιο θα ανακαλύψουμε έναν πολύ απλούστερο τρόπο για να φτάσουμε σε αυτό το συμπέρασμα.

Μερικά από τα αποτελέσματά μας μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

$$\int_a^b f = c \cdot (b-a) \quad \text{αν} \quad f(x) = c \ \text{ για κάθε } x,$$
$$\int_a^b f = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \quad \text{αν} \quad f(x) = x \ \text{ για κάθε } x,$$
$$\int_a^b f = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \quad \text{αν} \quad f(x) = x^2 \ \text{για κάθε } x.$$

Αυτός ο μικρός κατάλογος δείχνει ότι ο συμβολισμός $\int_a^b f$ έχει ένα μειονέκτημα: του λείπει ένας κατάλληλος συμβολισμός για τις συναρτήσεις που ορίζονται με τύπους. Για αυτόν το λόγο, ένας εναλλακτικός συμβολισμός,* ανάλογος με τον $\lim_{x\to a} f(x)$, είναι επίσης χρήσιμος:

$$\text{το } \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{σημαίνει ακριβώς το ίδιο με το} \quad \int_a^b f.$$

Έτσι

$$\int_a^b c\,dx = c \cdot (b-a),$$
$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$
$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Παρατηρούμε ότι, όπως στον συμβολισμό $\lim_{x\to a} f(x)$, το σύμβολο x μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο γράμμα (εκτός από f, a ή b, βέβαια):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\alpha)\,d\alpha = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(c)\,dc.$$

Το σύμβολο dx δεν έχει καμία έννοια από μόνο του, όπως και το σύμβολο $x \to$ δεν έχει κανένα νόημα, έξω από το $\lim_{x\to a} f(x)$. Στην εξίσωση

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

*Ο συμβολισμός $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι πραγματικά ο παλαιότερος και επί σειρά ετών ήταν ο μόνος για το ολοκλήρωμα. Ο Leibnitz χρησιμοποίησε αυτό το σύμβολο επειδή θεώρησε ότι το ολοκλήρωμα ήταν το άθροισμα (που το σημείωνε με το $\int$) απείρου πλήθος ορθογωνίων με ύψος $f(x)$ και «απειροελάχιστο» πλάτος dx. Μεταγενέστεροι συγγραφείς χρησιμοποίησαν $x_0, \ldots, x_n$ για να συμβολίσουν τα σημεία μιας διαμέρισης, και συντομογραφικά σημείωναν το $x_i - x_{i-1}$ με Δx_i. Το ολοκλήρωμα ορίζεται ως όριο, όταν το Δx_i προσεγγίζει το 0, των αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ (κατ' αναλογία προς το κάτω και άνω άθροισμα). Το γεγονός ότι το όριο λαμβάνεται αλλάζοντας το $\sum$ σε $\int$, το $f(x_i)$ σε $f(x)$ και το Δx_i σε dx, γοητεύει πολλούς.

το *πλήρες* σύμβολο $x^2\,dx$ μπορεί να θεωρηθεί σύντμηση της φράσης:

$$\text{η συνάρτηση } f \text{ για την οποία } f(x) = x^2 \text{ για κάθε } x.$$

Αυτός ο συμβολισμός για το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο εύκαμπτος όσο ο συμβολισμός $\lim_{x\to a} f(x)$. Τα παραδείγματα που ακολουθούν μπορεί να βοηθήσουν στην ερμηνεία διαφόρων ειδών τύπων που εμφανίζονται συχνά· έχουμε κάνει χρήση των Θεωρημάτων 5 και 6.*

$$(1)\quad \int_a^b (x+y)\,dx = \int_a^b x\,dx + \int_a^b y\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + y(b-a).$$

$$(2)\quad \int_a^x (y+t)\,dy = \int_a^x y\,dy + \int_a^x t\,dy = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + t(x-a).$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \int_a^b \left(\int_a^x (1+t)\,dz\right) dx &= \int_a^b (1+t)(x-a)\,dx \\ &= (1+t)\int_a^b (x-a)\,dx \\ &= (1+t)\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - a(b-a)\right].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\quad \int_a^b \left(\int_c^d (x+y)\,dy\right) dx &= \int_a^b \left[x(d-c) + \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right] dx \\ &= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\int_a^b x\,dx \\ &= \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)(b-a) + (d-c)\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Οι υπολογισμοί των $\int_a^b x\,dx$ και $\int_a^b x^2\,dx$ ίσως υποδεικνύουν ότι το να υπολογίσει κανείς ολοκληρώματα είναι γενικά δύσκολο ή αδύνατο. Για να είμαστε ακριβείς, τα ολοκληρώματα των περισσοτέρων συναρτήσεων *είναι* αδύνατο να καθοριστούν με ακρίβεια (*αν και μπορούν να υπολογιστούν με οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας θέλουμε υπολογίζοντας τα κάτω και άνω αθροίσματα*). Όπως όμως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το ολοκλήρωμα πολλών συναρτήσεων μπορεί να υπολογιστεί με μεγάλη ευκολία.

Αν και τα περισσότερα ολοκληρώματα δεν μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς, είναι σημαντικό να ξέρουμε τουλάχιστον πότε μια συνάρτηση f *είναι* ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν και είναι δυνατόν να πούμε ακριβώς ποιες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες, το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας είναι μάλλον δύσκολο να διατυπωθεί εδώ, και θα πρέπει να ετοιμαστούμε για επί μέρους αποτελέσματα. Το θεώρημα που ακολουθεί μας δίνει το πιο χρήσιμο αποτέλεσμα, αλλά η απόδειξη που θα δώσουμε εδώ χρησιμοποιεί ύλη από το Παράρτημα του Κεφαλαίου 8. Αν προτιμάτε, μπορείτε να περιμένετε μέχρι το τέλος του επόμενου κεφαλαίου, οπότε θα δώσουμε μια τελείως διαφορετική απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πρώτα παρατηρούμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, διότι είναι συνεχής στο $[a,b]$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2 και να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

*Προκειμένου ο αναγνώστης να μην πανικοβληθεί όταν διαβάζει άλλα βιβλία, η εξίσωση (1) χρειάζεται μια σημαντική επεξήγηση: Η εξίσωση αυτή ερμηνεύει το $\int_a^b y\,dx$ ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f που η κάθε τιμή $f(x)$ είναι ο αριθμός y. Αλλά ο κλασικός συμβολισμός, συχνά χρησιμοποιεί το y στη θέση του $y(x)$ και έτσι, το $\int_a^b y\,dx$ μπορεί να σημαίνει το ολοκλήρωμα κάποιας *τυχαίας συνάρτησης* y.

Από το Θεώρημα 1 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 8 γνωρίζουμε όμως ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Επομένως υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x και y στο $[a, b]$,

$$\text{αν } |x - y| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Το τέχνασμα είναι απλώς να επιλέξουμε μια διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ τέτοια ώστε κάθε $|t_i - t_{i-1}| < \delta$. Τότε για κάθε i έχουμε

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{για κάθε } x, y \text{ στο } [t_{i-1}, t_i],$$

και προκύπτει εύκολα ότι

$$M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε i, έχουμε

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} t_i - t_{i-1} \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot b - a \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. ∎

Αν και αυτό το θεώρημα παρέχει όλες τις πληροφορίες που είναι αναγκαίες για τη χρήση των ολοκληρωμάτων σε αυτό το βιβλίο θα μας ικανοποιούσε περισσότερο να έχουμε ένα κάπως μεγαλύτερο απόθεμα από ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αρκετά προβλήματα ασχολούνται λεπτομερειακά με αυτό το ζήτημα. Θα βοηθούσε να έχουμε υπόψη τα ακόλουθα τρία θεωρήματα, που δείχνουν: ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$· ότι η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη αν είναι οι f και g· και ότι η $c \cdot f$ είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη και c είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Ως απλή εφαρμογή αυτών των θεωρημάτων, ας θυμηθούμε ότι, αν η f είναι 0, εκτός από ένα σημείο όπου η τιμή της είναι 1, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Πολλαπλασιάζοντας αυτήν τη συνάρτηση με c, έπεται ότι το ίδιο ισχύει και αν η τιμή της f στο εν λόγω σημείο είναι c. Προσθέτοντας μια τέτοια συνάρτηση σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, βλέπουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τυχαία την τιμή μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σημείο, χωρίς να καταστρέψουμε την ολοκληρωσιμότητα. Αν σπάσουμε το διάστημα σε πολλά υποδιαστήματα, βλέπουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή σε οσαδήποτε πεπερασμένου πλήθους σημεία.

Οι αποδείξεις αυτών των θεωρημάτων συνήθως χρησιμοποιούν το εναλλακτικό κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Θεωρήματος 2· όπως φανερώνουν μερικές από τις προηγούμενες υποδείξεις μας, οι λεπτομέρειες του συλλογισμού συχνά συγκαλύπτουν το κρίσιμο σημείο της απόδειξης. Είναι σκόπιμο να προσπαθήσετε να κάνετε δικές σας αποδείξεις, και να συμβουλευτείτε αυτές που δίνονται εδώ ως ένα τελευταίο καταφύγιο, ή για έλεγχο. Αυτό πιθανόν να αποσαφηνίσει τις αποδείξεις, και σίγουρα θα είναι μια καλή εξάσκηση στις τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε κάποια από τα προβλήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Έστω $a < c < b$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$. Αντιστρόφως, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο

$[c, b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τέλος, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

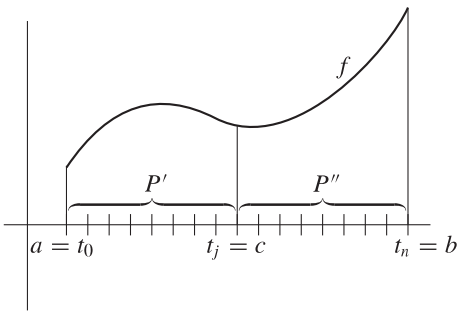
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $c = t_j$ για κάποιο j. (Αλλιώς, έστω Q η διαμέριση που περιέχει τα $t_0, \ldots, t_n$ και το c· τότε η Q περιέχει την P, άρα $U(f, Q) - L(f, Q) \leq U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.)

Τώρα $P' = \{t_0, \ldots, t_j\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, c]$ και $P'' = \{t_j, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[c, b]$ (Σχήμα 12). Αφού

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''),$$
$$U(f, P) = U(f, P') + U(f, P''),$$



ΣΧΗΜΑ 12

έχουμε

$$[U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] = U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Αφού καθένας από τους όρους στις αγκύλες είναι μη αρνητικός, καθένας είναι μικρότερος από ε. Αυτό δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$L(f, P') \leq \int_a^c f \leq U(f, P'),$$
$$L(f, P'') \leq \int_c^b f \leq U(f, P''),$$

επομένως

$$L(f, P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(f, P).$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε P, αποδεικνύεται ότι

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει μια διαμέριση P' του $[a, c]$ και μια διαμέριση P'' του $[c, b]$ έτσι ώστε

$$U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon/2,$$
$$U(f, P'') - L(f, P'') < \varepsilon/2.$$

Αν P είναι η διαμέριση του $[a, b]$ που περιέχει όλα τα σημεία των P' και P'', τότε

$$L(f, P) = L(f, P') + L(f, P''),$$
$$U(f, P) = U(f, P') + U(f, P'')\cdot$$

συνεπώς,

$$U(f, P) - L(f, P) = [U(f, P') - L(f, P')] + [U(f, P'') - L(f, P'')] < \varepsilon. \blacksquare$$

Το Θεώρημα 4 είναι η βάση για κάποιες, μικρής σημασίας, συμβάσεις στον συμβολισμό. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f$ ορίστηκε μόνο για $a < b$. Προσθέτουμε τώρα τους ορισμούς

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{και} \qquad \int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{αν } a > b.$$

Με αυτούς τους ορισμούς, η εξίσωση $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$ ισχύει για κάθε a, c, b ακόμα και αν δεν ισχύει η $a < c < b$ (η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται με έναν μάλλον βαρετό έλεγχο όλων των περιπτώσεων).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Αν οι f και g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε και η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ τυχαία διαμέριση του $[a, b]$. Έστω

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{(f + g)(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ m_i' &= \inf\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ m_i'' &= \inf\{g(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \end{aligned}$$

και ας ορίσουμε τα M_i, M_i', M_i'' με ανάλογο τρόπο. Δεν ισχύει αναγκαστικά ότι

$$m_i = m_i' + m_i'',$$

αλλά ισχύει (Πρόβλημα 10) ότι

$$m_i \ge m_i' + m_i''.$$

Όμοια,

$$M_i \le M_i' + M_i''.$$

Επομένως,

$$L(f, P) + L(g, P) \le L(f + g, P)$$

και

$$U(f + g, P) \le U(f, P) + U(g, P).$$

Άρα,

$$L(f, P) + L(g, P) \le L(f + g, P) \le U(f + g, P) \le U(f, P) + U(g, P).$$

Αφού οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, υπάρχουν διαμερίσεις P', P'' με

$$\begin{aligned} U(f, P') - L(f, P') &< \varepsilon/2, \\ U(g, P'') - L(g, P'') &< \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Αν η P περιέχει τις P' και P'', τότε

$$U(f, P) + U(g, P) - [L(f, P) + L(g, P)] < \varepsilon,$$

και συνεπώς

$$U(f + g, P) - L(f + g, P) < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} (1) \qquad L(f, P) + L(g, P) &\le L(f + g, P) \\ &\le \int_a^b (f + g) \\ &\le U(f + g, P) \le U(f, P) + U(g, P)\cdot \end{aligned}$$

και ακόμα

$$(2) \qquad L(f, P) + L(g, P) \le \int_a^b f + \int_a^b g \le U(f, P) + U(g, P).$$

Αφού μπορούμε να κάνουμε τα $U(f, P) - L(f, P)$ και $U(g, P) - L(g, P)$ όσο μικρά θέλουμε, έπεται ότι το

$$U(f, P) + U(g, P) - [L(f, P) + L(g, P)]$$

μπορεί επίσης να γίνει όσο μικρό θέλουμε· επομένως, από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε για κάθε αριθμό c, η συνάρτηση cf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b cf = c \cdot \int_a^b f.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη (που είναι πολύ πιο εύκολη από αυτήν του Θεωρήματος 5) αφήνεται σε σας. Μια καλή ιδέα είναι να χειριστείτε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $c \geq 0$ και $c \leq 0$. Γιατί; ∎

(Το Θεώρημα 6 είναι απλώς μια ειδική περίπτωση του πιο γενικού θεωρήματος ότι η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, αν είναι οι f και g· είναι όμως αρκετά δύσκολο να αποδειχθεί αυτό το συμπέρασμα (βλ. Πρόβλημα 38).)

Σε αυτό το κεφάλαιο, τα μόνα πράγματα που αποκομίσαμε ήταν ένας πολύπλοκος ορισμός, μερικά απλά θεωρήματα με περίπλοκες αποδείξεις, και ένα θεώρημα που απαιτούσε ύλη από το Παράρτημα του Κεφαλαίου 8. Αυτό, όχι γιατί τα ολοκληρώματα είναι πιο δύσκολο θέμα από τις παραγώγους, αλλά γιατί πολύ ισχυρά εργαλεία που αναπτύχθηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια αφέθηκαν να παραμείνουν σε αδράνεια. Η πιο σημαντική ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού είναι το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα και η παράγωγος συνδέονται στενά —από τη στιγμή που θα μάθουμε τη σχέση τους, το ολοκλήρωμα θα γίνει το ίδιο χρήσιμο με την παράγωγο, και το ίδιο εύκολο στη χρήση. Η σχέση ανάμεσα σε παραγώγους και ολοκληρώματα αξίζει ένα ξεχωριστό κεφάλαιο, αλλά οι προετοιμασίες που θα κάνουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να χρησιμεύουν ως υπόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα μια απλή ανισότητα σχετική με τα ολοκληρώματα, που θα παίξει κάποιο ρόλο σε πολλά σημαντικά θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$

Τότε

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Είναι φανερό ότι

$$m(b - a) \leq L(f, P) \quad \text{και} \quad U(f, P) \leq M(b - a)$$

για κάθε διαμέριση P. Αφού $\int_a^b f = \sup\{L(f, P)\} = \inf\{U(f, P)\}$, η ανισότητα που θέλουμε έπεται άμεσα. ∎

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Μπορούμε να ορίσουμε μια καινούργια συνάρτηση F στο $[a, b]$ ως εξής:

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\, dt.$$

(Αυτό βασίζεται στο Θεώρημα 4.) Έχουμε δει ότι η f μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη ακόμα και αν δεν είναι συνεχής, και τα Προβλήματα δίνουν παραδείγματα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων που είναι αρκετά παθολογικές. Η συμπεριφορά της F είναι επομένως μια πολύ ευχάριστη έκπληξη.

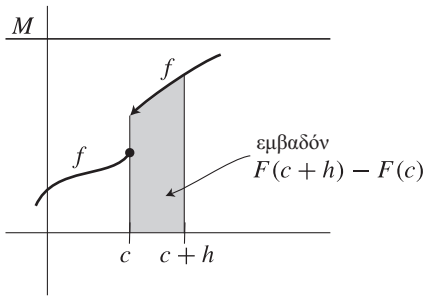
ΘΕΩΡΗΜΑ 8 Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και η F ορίζεται στο $[a, b]$ από τη σχέση

$$F(x) = \int_a^x f,$$

τότε η F είναι συνεχής στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Παίρνουμε ένα c στο $[a, b]$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, θα είναι, εξ ορισμού, φραγμένη στο $[a, b]$. Έστω M ένας αριθμός τέτοιος ώστε

$$|f(x)| \leq M \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$



ΣΧΗΜΑ 13

Αν $h > 0$, τότε (Σχήμα 13)

$$F(c + h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f.$$

Αφού

$$-M \leq f(x) \leq M \quad \text{για κάθε } x,$$

από το Θεώρημα 7 έπεται ότι

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f \leq Mh.$$

με άλλα λόγια,

$$(1) \qquad -Mh \leq F(c + h) - F(c) \leq Mh.$$

Αν $h < 0$, μπορούμε να καταλήξουμε σε μια παρόμοια ανισότητα. Παρατηρούμε ότι

$$F(c + h) - F(c) = \int_c^{c+h} f = -\int_{c+h}^c f.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7 στο διάστημα $[c + h, c]$, μήκους $-h$, παίρνουμε

$$Mh \leq \int_{c+h}^c f \leq -Mh.$$

και πολλαπλασιάζοντας με -1, που αντιστρέφει όλες τις ανισότητες, έχουμε

$$(2) \qquad Mh \leq F(c + h) - F(c) \leq -Mh.$$

Οι ανισότητες (1) και (2) μπορούν να συνδυαστούν:

$$|F(c + h) - F(c)| \leq M \cdot |h|.$$

Επομένως, αν $\varepsilon > 0$, έχουμε

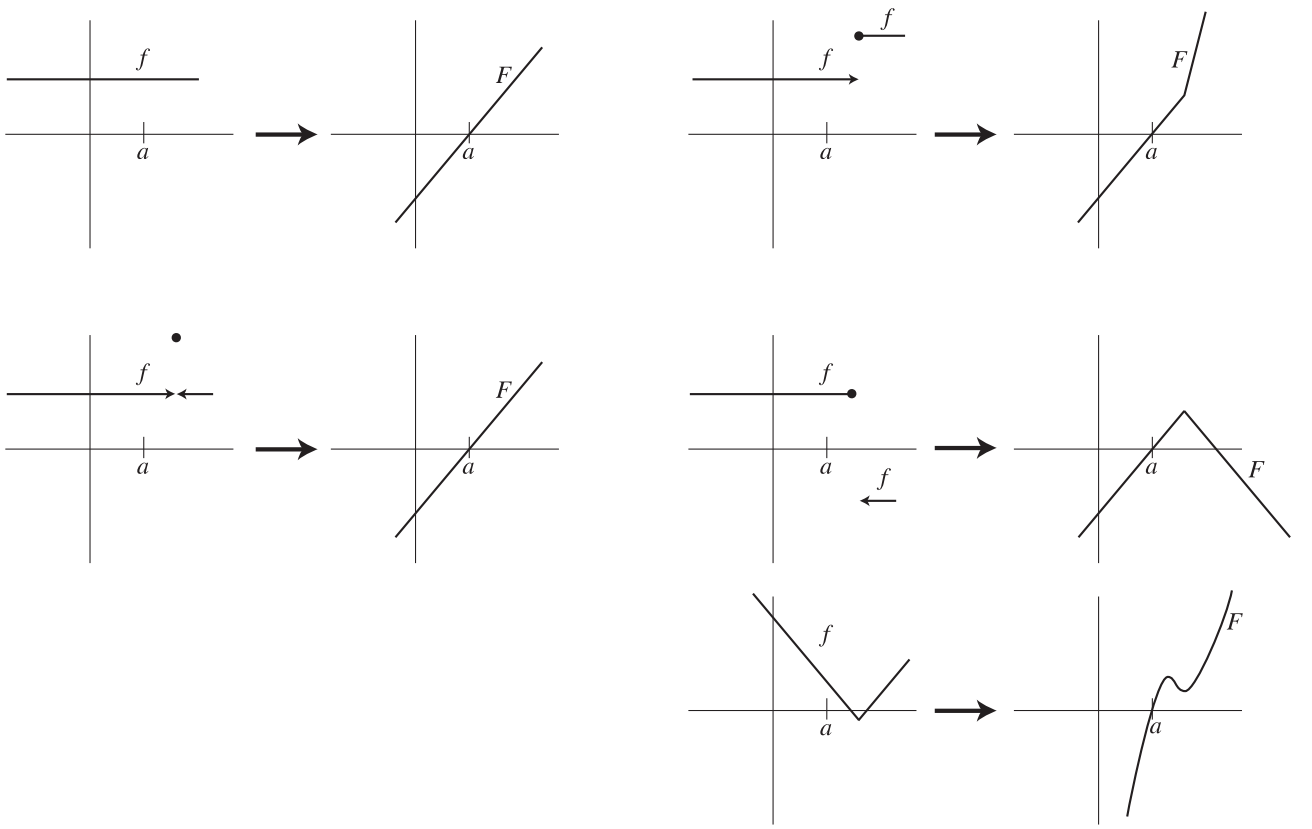
$$|F(c + h) - F(c)| < \varepsilon,$$

για $|h| < \varepsilon/M$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\lim_{h \to 0} F(c + h) = F(c).$$

με άλλα λόγια η F είναι συνεχής στο c. ∎

Το Σχήμα 14 συγκρίνει τις f και $F(x) = \int_a^x f$ για διάφορες συναρτήσεις f· φαίνεται ότι η F συμπεριφέρεται πάντα καλύτερα από την f. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πόσο αληθές είναι αυτό.



ΣΧΗΜΑ 14

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε ότι $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$, παίρνοντας διαμερίσεις σε n ίσα υποδιαστήματα και χρησιμοποιώντας τον τύπο που βρήκαμε στο Πρόβλημα 2-6 για το $\sum_{i=1}^{n} i^3$. Για αυτό το πρόβλημα, το μόνο που χρειάζεται είναι να μιμηθείτε τους υπολογισμούς στο κείμενο, αλλά καλό θα ήταν να δώσετε μια τυπική απόδειξη, ώστε να βεβαιωθείτε ότι όλα τα λεπτά σημεία του συλλογισμού είναι σαφή.

2. Αποδείξτε, ομοίως, ότι $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

∗**3.** (α) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 2-7, δείξτε ότι μπορούμε να φέρουμε το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} k^p/n^{p+1}$ όσο κοντά θέλουμε στο $1/(p+1)$, διαλέγοντας αρκετά μεγάλο n.

(β) Αποδείξτε ότι $\int_0^b x^p\,dx = b^{p+1}/(p+1)$.

∗**4.** Αυτό το πρόβλημα σκιαγραφεί έναν έξυπνο τρόπο υπολογισμού του $\int_a^b x^p\,dx$ για $0 < a < b$. (Το αποτέλεσμα για $a = 0$ προκύπτει από τη συνέχεια.) Το τέχνασμα συνίσταται στη χρήση διαμερίσεων $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ για τις οποίες *όλοι* οι λόγοι $r = t_i/t_{i-1}$ είναι ίσοι, αντί των διαμερίσεων για τις οποίες οι διαφορές $t_i - t_{i-1}$ είναι ίσες.

(α) Δείξτε ότι για μια τέτοια διαμέριση P έχουμε

$$t_i = a \cdot c^{i/n} \qquad \text{για } c = \frac{b}{a}.$$

(β) Αν $f(x) = x^p$, δείξτε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Προβλήματος 2-5, ότι

$$\begin{aligned} U(f, P) &= a^{p+1}(1 - c^{-1/n}) \sum_{i=1}^{n} (c^{(p+1)/n})^i \\ &= (a^{p+1} - b^{p+1}) c^{(p+1)/n} \frac{1 - c^{-1/n}}{1 - c^{(p+1)/n}} \\ &= (b^{p+1} - a^{p+1}) c^{p/n} \cdot \frac{1}{1 + c^{1/n} + \cdots + c^{p/n}} \end{aligned}$$

και βρείτε έναν ανάλογο τύπο για το $L(f, P)$.

(γ) Συμπεράνετε ότι

$$\int_a^b x^p \, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

(Πιθανόν να βρείτε χρήσιμο το Πρόβλημα 5-41.)

5. Υπολογίστε, χωρίς να κάνετε πράξεις, τα

(i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 \sqrt{1 - x^2} \, dx.$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^5 + 3) \sqrt{1 - x^2} \, dx.$

6. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t+1} \, dt > 0$$

για όλα τα $x > 0$.

7. Εξετάστε ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$, και υπολογίστε το ολοκλήρωμα, όπου μπορείτε:

(i) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ x - 2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ x - 2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

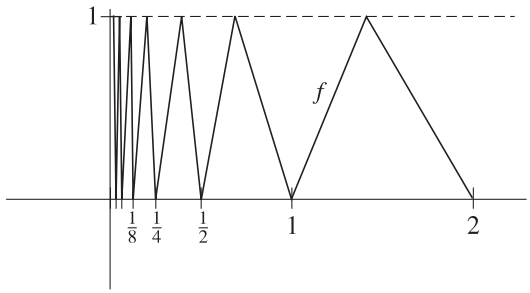
(iii) $f(x) = x + [x]$.

(iv) $f(x) = \begin{cases} x + [x], & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος.} \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ της μορφής } a + b\sqrt{2} \text{ με } a \text{ και } b \text{ ρητούς} \\ 0, & x \text{ όχι αυτής της μορφής.} \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \text{ ή } x > 1. \end{cases}$

(vii) f είναι η συνάρτηση του Σχήματος 15.



ΣΧΗΜΑ 15

8. Βρείτε τα εμβαδά των χωρίων που φράσσονται από

(i) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2$.

(ii) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = -x^2$ και τις κατακόρυφες ευθείες που περνούν από τα $(-1, 0)$ και $(1, 0)$.

(iii) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = 1 - x^2$.

(iv) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = 1 - x^2$ και $h(x) = 2$.

(v) τις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 - 2x + 4$ και τον κατακόρυφο άξονα.

(vi) τη γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$, τον οριζόντιο άξονα, και την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το $(2, 0)$. (Μην προσπαθήσετε να βρείτε το $\int_0^2 \sqrt{x}\, dx$· θα πρέπει με κάποιον τρόπο να μαντέψετε την απάντηση, χρησιμοποιώντας μόνο ολοκληρώματα που ήδη γνωρίζετε πώς να τα υπολογίζετε. Τα ερωτήματα που γεννιούνται από αυτό το παράδειγμα εξετάζονται στο Πρόβλημα 21.)

9. Βρείτε το

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y)\, dy \right) dx$$

συναρτήσει των $\int_a^b f$ και $\int_c^d g$. (Αυτή είναι μια άσκηση πάνω στον συμβολισμό, με μια τάση εκδίκησης· είναι βασικό να αναγνωρίζετε μια σταθερά όταν εμφανίζεται.)

10. Αποδείξτε, με τον συμβολισμό του Θεωρήματος 5, ότι

$$m_i' + m_i'' = \inf\{f(x_1) + g(x_2) : t_{i-1} \le x_1, x_2 \le t_i\} \le m_i.$$

11. (α) Ποιες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα κάθε κάτω άθροισμα να είναι ίσο με κάθε άνω άθροισμα;

(β) Ποιες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα κάποιο άνω άθροισμα να είναι ίσο με κάποιο (άλλο) κάτω άθροισμα;

(γ) Ποιες συνεχείς συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα όλα τα κάτω αθροίσματα να είναι ίσα;

∗(δ) Ποιες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις έχουν την ιδιότητα όλα τα κάτω αθροίσματά τους να είναι ίσα; (Θυμηθείτε ότι μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = 0$ για x άρρητο, $f(x) = 1/q$ για $x = p/q$ ανάγωγο.) Υπόδειξη: Θα χρειαστείτε την έννοια του πυκνού συνόλου, που ορίστηκε στο Πρόβλημα 8-6, καθώς και τα αποτελέσματα του Προβλήματος 30.

12. Αν $a < b < c < d$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, d]$, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, c]$. (Χωρίς πολλές λεπτομέρειες.)

13. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f \geq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. (Δεν χρειάζεται να σας προειδοποιήσουμε ότι, αν δουλέψετε σκληρά για το μέρος (β), χάνετε τον καιρό σας.)

14. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$

(Η γεωμετρική ερμηνεία θα έπρεπε να το καθιστά πολύ λογικό.) Υπόδειξη: Κάθε διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ γεννά μια διαμέριση $P' = \{t_0+c, \ldots, t_n+c\}$ του $[a + c, b + c]$, και αντιστρόφως.

∗**15.** Για $a, b > 1$ αποδείξτε ότι

$$\int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_1^b \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt.$$

Υπόδειξη: Αυτή γράφεται $\int_1^a 1/t\,dt = \int_b^{ab} 1/t\,dt$. Κάθε διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[1, a]$ γεννά μια διαμέριση $P' = \{bt_0, \ldots, bt_n\}$ του $[b, ab]$, και αντιστρόφως.

∗**16.** Αποδείξτε ότι

$$\int_{ca}^{cb} f(t)\,dt = c\int_a^b f(ct)\,dt.$$

(Παρατηρήστε ότι το Πρόβλημα 15 είναι ειδική περίπτωση αυτού.)

17. Αν δοθεί ότι η επιφάνεια που περικλείεται από τον μοναδιαίο κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2 = 1$, έχει εμβαδόν π, χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 16 για να δείξετε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει η έλλειψη με εξίσωση $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ είναι πab.

18. Αυτό το πρόβλημα σκιαγραφεί έναν ακόμη τρόπο υπολογισμού του $\int_a^b x^n\,dx$. Χρησιμοποιήθηκε από τον Cavalieri, έναν δραστήριο μαθηματικό πριν την εφεύρεση του Απειροστικού Λογισμού.

(α) Έστω $c_n = \int_0^1 x^n\,dx$. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 16 για να δείξετε ότι $\int_0^a x^n\,dx = c_n a^{n+1}$.

(β) Το Πρόβλημα 14 δείχνει ότι

$$\int_0^{2a} x^n\,dx = \int_{-a}^{a} (x+a)^n\,dx.$$

Χρησιμοποιήστε αυτόν τον τύπο για να αποδείξετε ότι

$$2^{n+1}c_n a^{n+1} = 2a^{n+1}\sum_{k\ \text{άρτιος}} \binom{n}{k} c_k.$$

(γ) Τώρα χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 2-3 για να αποδείξετε ότι $c_n = 1/(n+1)$.

19. Υποθέτουμε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$ με την εξαίρεση του x_0 στο (a, b). Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Υπόδειξη: Μιμηθείτε ένα από τα παραδείγματα στο κείμενο.

20. Έστω ότι η f είναι μη φθίνουσα στο $[a, b]$. Παρατηρήστε ότι η f αυτομάτως είναι φραγμένη στο $[a, b]$, γιατί $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

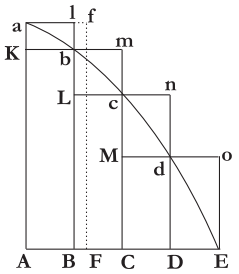
(α) Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$, ποιο είναι το $L(f, P)$ και ποιο το $U(f, P)$;

(β) Έστω ότι $t_i - t_{i-1} = \delta$ για κάθε i. Αποδείξτε ότι $U(f, P) - L(f, P) = \delta[f(b) - f(a)]$.

(γ) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(δ) Δώστε ένα παράδειγμα μη φθίνουσας συνάρτησης στο $[0, 1]$ που να είναι ασυνεχής σε άπειρα σημεία.

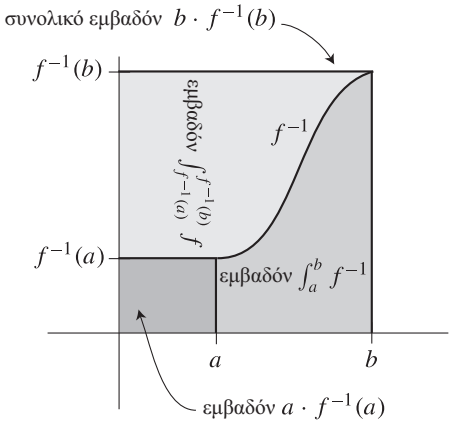
Ίσως σας ενδιαφέρει μια σύγκριση αυτού του προβλήματος με το εξής απόσπασμα από τα *Principia* του Newton.*



ΛΗΜΜΑ ΙΙ

Αν σε τυχαίο σχήμα AacE*, που ορίζεται από τις ορθές γραμμές* Aa, AE*, και την καμπύλη* acE*, εγγράψουμε οποιονδήποτε αριθμό παραλληλογράμμων* Ab, Bc, Cd, *κτλ., που υποθέτουμε ότι έχουν ίσες βάσεις* AB, BC, CD, *κτλ., και ότι οι πλευρές* Bb, Cc, Dd, *κτλ. είναι παράλληλες στη μια πλευρά* Aa *του σχήματος, και συμπληρώσουμε τα παραλληλόγραμμα* aKbl, bLcm, cMdn, *κτλ., τότε, αν υποθέσουμε ότι το πλάτος αυτών των παραλληλογράμμων ελαττώνεται και το πλήθος τους αυξάνει* επ' άπειρον*, ισχυρίζομαι ότι οι τελικοί λόγοι που θα έχουν το εγγεγραμμένο σχήμα* AKbLcMdD, *το περιγεγραμμένο σχήμα* AalbmcndoE, *και το καμπυλόγραμμο σχήμα* AabcdE, *το ένα με το άλλο, θα είναι λόγοι ισότητας.*

Αυτό, γιατί η διαφορά του εγγεγραμμένου από το περιγεγραμμένο σχήμα είναι το άθροισμα των παραλληλογράμμων Kl, Lm, Mn, Do, δηλαδή (από την ισότητα όλων των βάσεων), το ορθογώνιο που ορίζεται από μια από τις βάσεις τους Kb και το άθροισμα όλων των υψών Aa, δηλαδή το ορθογώνιο ABla. Αλλά αυτό το ορθογώνιο, επειδή το πλάτος του AB υποτίθεται ότι ελαττώνεται *επ' άπειρον*, γίνεται μικρότερο από οποιοδήποτε δοθέν εμβαδόν. Και επομένως (από το Λήμμα 1), το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο σχήμα γίνονται τελικά το ένα ίσο με το άλλο· και ακόμα περισσότερο, το ενδιάμεσο καμπυλόγραμμο σχήμα θα είναι τελικά ίσο με καθένα από τα δύο. Ο.Ε.Δ.



ΣΧΗΜΑ 16

∗**21.** Έστω ότι η f είναι αύξουσα. Το Σχήμα 16 υποδεικνύει ότι

$$\int_a^b f^{-1} = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f.$$

(α) Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$, θέτουμε

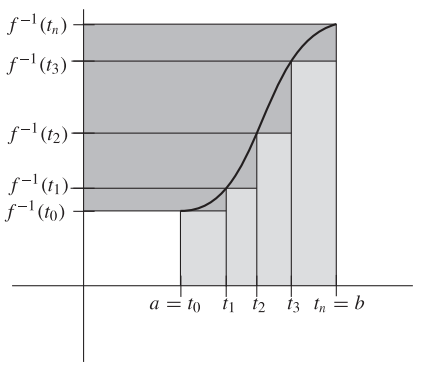
$$P' = \{f^{-1}(t_0), \ldots, f^{-1}(t_n)\}.$$

Αποδείξτε ότι, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 17,

$$L(f^{-1}, P) + U(f, P') = bf^{-1}(b) - af^{-1}(a).$$

(β) Τώρα αποδείξτε τον τύπο που δώσαμε πιο πάνω.

(γ) Βρείτε το $\displaystyle\int_a^b \sqrt[n]{x}\, dx$ για $0 \le a < b$.



ΣΧΗΜΑ 17

22. Έστω ότι η f είναι συνεχής αύξουσα συνάρτηση, με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι, για $a, b > 0$ έχουμε την *ανισότητα του Young*,

$$ab \le \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx,$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $b = f(a)$. Υπόδειξη: Κάντε ένα σχήμα σαν το Σχήμα 16!

Principia του Newton, University of California Press, Berkeley, California, 1946.

23. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $m \le f(x) \le M$, για όλα τα x στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\mu$$

για κάποιον αριθμό μ με $m \le \mu \le M$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$$

για κάποιο ξ στο $[a, b]$.

(γ) Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η συνέχεια είναι ουσιαστική.

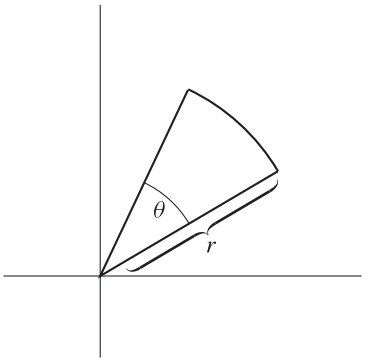
(δ) Πιο γενικά, υποθέστε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και μη αρνητική στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

για κάποιο ξ στο $[a, b]$. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται Θεώρημα Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα.

(ε) Συμπεράνετε ότι ισχύει το ίδιο αν η g είναι ολοκληρώσιμη και μη θετική στο $[a, b]$.

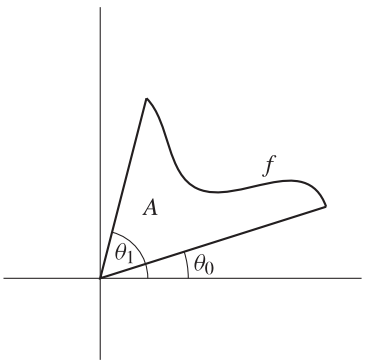
(στ) Δείξτε ότι η μία από τις δύο αυτές υποθέσεις για την g είναι ουσιαστική.



ΣΧΗΜΑ 18

24. Σε αυτό το πρόβλημα θεωρούμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε πολικές συντεταγμένες (Κεφάλαιο 4, Παράρτημα 3). Το Σχήμα 18 δείχνει έναν κυκλικό τομέα με βασική γωνία θ. Όταν η θ μετριέται σε ακτίνια, η επιφάνεια του τομέα έχει εμβαδόν $r^2 \cdot \dfrac{\theta}{2}$. Θεωρήστε τώρα την περιοχή A του Σχήματος 19, όπου η καμπύλη είναι η γραφική παράσταση σε πολικές συντεταγμένες της συνεχούς συνάρτησης f. Δείξτε ότι

$$\text{εμβαδόν } A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2 d\theta.$$

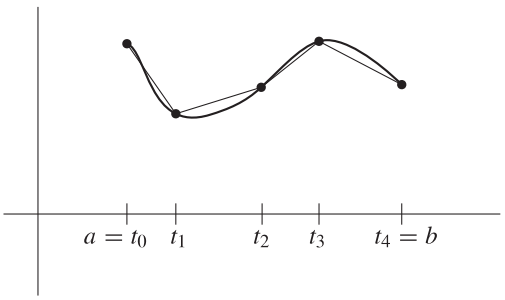


ΣΧΗΜΑ 19

∗**25.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$. Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$, ορίζουμε τον αριθμό

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}.$$

Ο αριθμός $\ell(f, P)$ παριστά το μήκος μιας πολυγωνικής καμπύλης εγγεγραμμένης στη γραφική παράσταση της f (βλ. Σχήμα 20). Ορίζουμε το **μήκος** της f πάνω από το $[a, b]$ ως το ελάχιστο άνω φράγμα όλων των $\ell(f, P)$ για όλες τις διαμερίσεις P (υπό την προϋπόθεση ότι το σύνολο όλων των $\ell(f, P)$ είναι άνω φραγμένο).



ΣΧΗΜΑ 20

(α) Αν η f είναι γραμμική στο $[a, b]$, δείξτε ότι το μήκος της f είναι η απόσταση μεταξύ του $(a, f(a))$ και του $(b, f(b))$.

(β) Αν η f δεν είναι γραμμική, αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $P = \{a, t, b\}$ του $[a, b]$ έτσι ώστε το $\ell(f, P)$ να είναι μεγαλύτερο από την απόσταση του $(a, f(a))$ από το $(b, f(b))$. (Θα χρειαστείτε το Πρόβλημα 4-9).

(γ) Συμπεράνετε ότι μεταξύ όλων των συναρτήσεων f στο $[a, b]$ με $f(a) = c$ και $f(b) = d$, το μήκος της γραμμικής συνάρτησης είναι το μικρότερο. (Ή, με συμβατική αλλά απελπιστικά μπερδεμένη ορολογία, ότι: «η ευθεία είναι η πιο σύντομη απόσταση μεταξύ δύο σημείων».)

(δ) Έστω ότι η f' είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Αν η P είναι τυχαία διαμέριση του $[a,b]$ δείξτε ότι

$$L\big(\sqrt{1+(f')^2},P\big) \le \ell(f,P) \le U\big(\sqrt{1+(f')^2},P\big).$$

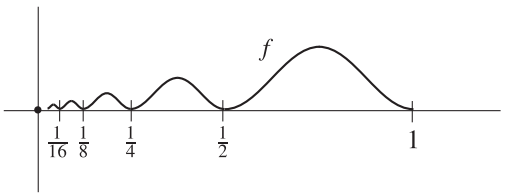
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

(ε) Γιατί ισχύει $\sup\big\{L(\sqrt{1+(f')^2},P)\big\} \le \sup\{\ell(f,P)\}$; (Εύκολο.)

(στ) Δείξτε τώρα ότι $\sup\{\ell(f,P)\} \le \inf\big\{U(\sqrt{1+(f')^2},P)\big\}$, αποδεικνύοντας έτσι ότι το μήκος της f πάνω από το $[a,b]$ είναι $\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$, αν η $\sqrt{1+(f')^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν P' και P'' είναι δύο τυχαίες διαμερίσεις, τότε $\ell(f,P') \le U\big(\sqrt{1+(f')^2},P''\big)$. Αν η P περιέχει τα σημεία και της P' και της P'', ποια η σχέση μεταξύ $\ell(f,P')$ και $\ell(f,P)$;

(ζ) Έστω $\mathscr{L}(x)$ το μήκος της γραφικής παράστασης της f πάνω από το $[a,x]$ και $d(x)$ το μήκος της ευθείας μεταξύ του $(a,f(a))$ και του $(x,f(x))$. Δείξτε ότι αν η $\sqrt{1+(f')^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και η f' είναι συνεχής στο a (δηλαδή αν $\lim_{x\to a^+} f'(x) = f'(a)$), τότε

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\mathscr{L}(x)}{d(x)} = 1.$$



ΣΧΗΜΑ 21

Υπόδειξη: Θα βοηθηθείτε αν κάνετε διπλή χρήση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

(η) Στο Σχήμα 21, το τμήμα της γραφικής παράστασης της f μεταξύ του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{1}{2}$ έχει το μισό μέγεθος από το τμήμα μεταξύ του $\frac{1}{2}$ και του 1, το τμήμα μεταξύ του $\frac{1}{8}$ και του $\frac{1}{4}$ έχει το μισό μέγεθος από το τμήμα μεταξύ του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{1}{2}$, κτλ. Δείξτε ότι το συμπέρασμα του μέρους (ζ) δεν ισχύει για αυτήν την f.

26. Μια συνάρτηση s ορισμένη στο $[a,b]$ λέγεται **κλιμακωτή συνάρτηση**, αν υπάρχει μια διαμέριση $P = \{t_0,\dots,t_n\}$ του $[a,b]$, τέτοια ώστε η s να είναι σταθερή σε κάθε (t_{i-1},t_i) (οι τιμές της s στα t_i μπορεί να είναι οποιεσδήποτε).

(α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια κλιμακωτή συνάρτηση $s_1 \le f$ με $\int_a^b f - \int_a^b s_1 < \varepsilon$, καθώς και μια κλιμακωτή συνάρτηση $s_2 \ge f$ με $\int_a^b s_2 - \int_a^b f < \varepsilon$.

(β) Έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν κλιμακωτές συναρτήσεις $s_1 \le f$ και $s_2 \ge f$ τέτοιες ώστε $\int_a^b s_2 - \int_a^b s_1 < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

(γ) Βρείτε μια συνάρτηση f που να μην είναι κλιμακωτή, αλλά να ικανοποιεί την $\int_a^b f = L(f,P)$ για κάποια διαμέριση P του $[a,b]$.

∗**27.** Αποδείξτε ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $g \le f \le h$ με $\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon$. Υπόδειξη: Πάρτε πρώτα κλιμακωτές συναρτήσεις με αυτήν την ιδιότητα, και μετά συνεχείς. Ένα σχήμα θα βοηθούσε τα μέγιστα.

28. (α) Δείξτε ότι, αν s_1 και s_2 είναι κλιμακωτές συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε το ίδιο ισχύει και για την $s_1 + s_2$.

(β) Αποδείξτε, χωρίς να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα 5, ότι $\int_a^b (s_1+s_2) = \int_a^b s_1 + \int_a^b s_2$.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) (και το Πρόβλημα 26) για να δώσετε μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 5.

29. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός x στο $[a, b]$ τέτοιος ώστε $\int_a^x f = \int_x^b f$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι *δεν* είναι πάντα δυνατόν να διαλέξουμε το x στο (a, b).

∗**30.** Ο σκοπός αυτού του προβλήματος είναι να δείξει ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η f πρέπει να είναι συνεχής σε πολλά σημεία του $[a, b]$.

(α) Έστω $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ με $U(f, P) - L(f, P) < b - a$. Αποδείξτε ότι για κάποιο i είναι $M_i - m_i < 1$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί a_1 και b_1 με $a < a_1 < b_1 < b$ και $\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1$. (Μπορείτε να διαλέξετε $[a_1, b_1] = [t_{i-1}, t_i]$ από το μέρος (α) εκτός αν $i = 1$ ή n· αλλά και σε αυτές τις δύο περιπτώσεις ένα πολύ απλό τέχνασμα λύνει το πρόβλημα.)

(γ) Αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί a_2 και b_2 με $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ και $\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}$.

(δ) Συνεχίστε με αυτόν τον τρόπο και βρείτε μια ακολουθία διαστημάτων $I_n = [a_n, b_n]$ τέτοιων ώστε $\sup\{f(x) : x \text{ στο } I_n\} - \inf\{f(x) : x \text{ στο } I_n\} < 1/n$. Εφαρμόστε το Θεώρημα Κιβωτισμένων Διαστημάτων (Πρόβλημα 8-14) για να βρείτε ένα σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.

(ε) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε άπειρα σημεία του $[a, b]$.

∗**31.** Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Θυμηθείτε, από το Πρόβλημα 13, ότι $\int_a^b f \geq 0$ αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(α) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x) \geq 0$ για κάθε x, και $f(x) > 0$ για κάποιο x στο $[a, b]$, και $\int_a^b f = 0$.

(β) Έστω ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$ και ότι η f είναι συνεχής στο x_0 στο $[a, b]$, για το οποίο $f(x_0) > 0$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$. Υπόδειξη: Αρκεί να βρείτε ένα κάτω άθροισμα $L(f, P)$ που να είναι θετικό.

(γ) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $f(x) > 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $\int_a^b f > 0$. Υπόδειξη: Θα χρειαστείτε το Πρόβλημα 30· και μάλιστα, αυτός είναι ένας λόγος για τον οποίο συμπεριλάβαμε το Πρόβλημα 30 σε αυτές τις ασκήσεις.

∗**32.** (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $\int_a^b fg = 0$ για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις g που ορίζονται στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (Αυτό είναι εύκολο· υπάρχει μια προφανής g που μπορείτε να διαλέξετε.)

(β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι $\int_a^b fg = 0$ για εκείνες τις συνεχείς συναρτήσεις g στο $[a, b]$ που ικανοποιούν την επιπλέον συνθήκη $g(a) = g(b) = 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (Αυτό το αθώο στην όψη γεγονός αποτελεί ένα σπουδαίο λήμμα στον λογισμό μεταβολών· βλ. την αναφορά [22] στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία.) Υπόδειξη: Καταλήξτε σε αντίφαση ξεκινώντας με την υπόθεση $f(x_0) > 0$ ή $f(x_0) < 0$. Η g που θα διαλέξετε εξαρτάται από τη συμπεριφορά της f κοντά στο x_0.

33. Έστω $f(x) = x$ για x ρητό και $f(x) = 0$ για x άρρητο.

(α) Υπολογίστε το $L(f, P)$ για όλες τις διαμερίσεις P του [0,1].

(β) Βρείτε το $\inf\{U(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [0, 1]\}$.

∗**34.** Έστω $f(x) = 0$ αν x άρρητος, και $1/q$ αν $x = p/q$ ανάγωγο. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και ότι $\int_0^1 f = 0$. (Κάθε κάτω άθροισμα προφανώς είναι 0· πρέπει να βρείτε έναν τρόπο για να κάνετε τα άνω αθροίσματα μικρά.)

∗**35.** Βρείτε δύο συναρτήσεις f και g που να είναι ολοκληρώσιμες, αλλά η σύνθεσή τους $g \circ f$ να μην είναι. Υπόδειξη: Το Πρόβλημα 34 είναι σχετικό.

∗**36.** Έστω ότι f είναι φραγμένη συνάρτηση στο $[a, b]$ και P μια διαμέριση του $[a, b]$. Έστω ότι τα M_i και m_i έχουν τη συνηθισμένη τους σημασία, και τα M_i' και m_i' έχουν την αντίστοιχη σημασία για τη συνάρτηση $|f|$.

(α) Αποδείξτε ότι $M_i' - m_i' \leq M_i - m_i$.

(β) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε το ίδιο συμβαίνει και με την $|f|$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, το ίδιο είναι και οι $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$.

(δ) Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν το «θετικό της μέρος» $\max(f, 0)$ και το «αρνητικό της μέρος» $\min(f, 0)$ είναι ολοκληρώσιμα στο $[a, b]$.

37. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Υπόδειξη: Αυτό προκύπτει εύκολα από μια σειρά ανισοτήτων· το Πρόβλημα 1-14 είναι σχετικό.

∗**38.** Έστω ότι η f και η g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και $f(x), g(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Έστω P μια διαμέριση του $[a, b]$. Με M_i' και m_i' συμβολίζουμε τα κατάλληλα $\sup$ και $\inf$ για την f και όμοια ορίζουμε τα M_i'' και m_i'' για την g, και τα M_i και m_i για την fg.

(α) Αποδείξτε ότι $M_i \leq M_i' M_i''$ και $m_i \geq m_i' m_i''$.

(β) Δείξτε ότι

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq \sum_{i=1}^{n} [M_i' M_i'' - m_i' m_i''](t_i - t_{i-1}).$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f και η g είναι φραγμένες, δηλαδή $|f(x)|$, $|g(x)| \leq M$ για x στο $[a, b]$, δείξτε ότι

$$U(fg, P) - L(fg, P) \leq M \left\{ \sum_{i=1}^{n} [M_i' - m_i'](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i'' - m_i''](t_i - t_{i-1}) \right\}.$$

(δ) Αποδείξτε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη.

(ε) Τώρα αφαιρέστε τον περιορισμό ότι $f(x), g(x) \geq 0$ για x στο $[a, b]$.

39. Έστω ότι η f και η g είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Η *ανισότητα Cauchy-Schwarz* ισχυρίζεται ότι

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \right) \left(\int_a^b g^2 \right).$$

(α) Αποδείξτε ότι η ανισότητα Schwarz είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz με τρεις τρόπους, μιμούμενοι μια από τις αποδείξεις της ανισότητας Schwarz στο Πρόβλημα 2-21. (Χρειάζεται λίγη φαντασία.)

(γ) Αν ισχύει ισότητα, είναι αναγκαστικά σωστό ότι $f = \lambda g$ για κάποιο λ; Αν η f και η g είναι συνεχείς;

(δ) Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2\right).$$

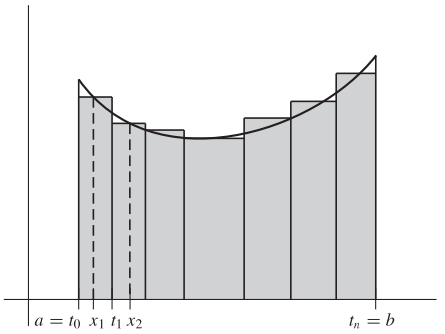
Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το 0 και το 1 με τα a και b;

∗**40.** Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, x]$ για κάθε $x > 0$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Υπόδειξη: Η συνθήκη $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ σημαίνει ότι το $f(t)$ είναι κοντά στο a για $t \geq$ από κάποιο N. Αυτό σημαίνει ότι το $\int_N^{N+M} f(t)\,dt$ είναι κοντά στο Ma. Αν το M είναι μεγάλο σε σχέση με το N, τότε το $Ma/(N + M)$ είναι κοντά στο a.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ RIEMANN



ΣΧΗΜΑ 1

Έστω ότι $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μία διαμέριση του $[a, b]$, και ότι για κάθε i διαλέγουμε κάποιο σημείο x_i στο $[t_{i-1}, t_i]$. Τότε εμφανώς έχουμε ότι

$$L(f, P) \le \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le U(f, P).$$

Κάθε άθροισμα $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ καλείται *άθροισμα Riemann* της f για την P. Το Σχήμα 1 δείχνει τη γεωμετρική ερμηνεία ενός αθροίσματος Riemann. Είναι το συνολικό εμβαδόν n ορθογωνίων που κείνται εν μέρει κάτω και εν μέρει πάνω από τη γραφική παράσταση της f. Λόγω του αυθαίρετου τρόπου με τον οποίο έχουν επιλεγεί τα ύψη των ορθογωνίων, δεν μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα αν ένα συγκεκριμένο άθροισμα Riemann είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Αλλά φαίνεται, πράγματι, ότι οι επικαλύψεις δεν έχουν μεγάλη σημασία: αν οι βάσεις όλων των ορθογωνίων είναι αρκετά στενές, τότε το άθροισμα Riemann οφείλει να είναι κοντά στην τιμή του ολοκληρώματος. Το θεώρημα που ακολουθεί διατυπώνει το παραπάνω με ακρίβεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$ με όλα τα μήκη $t_i - t_{i-1} < \delta$, τότε

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

για κάθε άθροισμα Riemann που σχηματίζεται αν διαλέξουμε x_i στο $[t_{i-1}, t_i]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού το άθροισμα Riemann και το ολοκλήρωμα βρίσκονται μεταξύ του $L(f, P)$ και του $U(f, P)$, θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε δοθέν ε μπορούμε να κάνουμε το $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ επιλέγοντας κάποιο δ έτσι ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ για οποιαδήποτε διαμέριση με όλα τα μήκη $t_i - t_{i-1} < \delta$.

Ο ορισμός της ολοκληρωσιμότητας της f στο $[a, b]$ περιλαμβάνει την προϋπόθεση ότι $|f| \le M$ για κάποιο M. Πρώτα επιλέγουμε μια συγκεκριμένη διαμέριση $P^* = \{u_0, \ldots, u_K\}$ για την οποία

$$U(f, P^*) - L(f, P^*) < \varepsilon/2,$$

και στη συνέχεια επιλέγουμε ένα δ τέτοιο ώστε

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4MK}.$$

Για κάθε διαμέριση P με όλα τα $t_i - t_{i-1} < \delta$, μπορούμε να σπάσουμε το άθροισμα

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

σε δύο αθροίσματα. Το πρώτο περιλαμβάνει εκείνα τα i για τα οποία το διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ περιέχεται εξ ολοκλήρου σε κάποιο από τα διαστήματα $[u_{j-1}, u_j]$. Είναι φανερό ότι το άθροισμα αυτό είναι $\le U(f, P^*) - L(f, P^*) < \varepsilon/2$. Για όλα τα άλλα i θα έχουμε $t_{i-1} < u_j < t_i$ για κάποιο $j = 1, \ldots, K-1$, και θα υπάρχουν το πολύ $K - 1$ τέτοια. Επομένως, το άθροισμα αυτών των όρων είναι $< (K-1) \cdot 2M \cdot \delta < \varepsilon/2$. ∎

Το δίδαγμα αυτής της ιστορίας είναι πως οτιδήποτε φαίνεται ως καλή προσέγγιση ενός ολοκληρώματος είναι καλή και στην πραγματικότητα, αρκεί όλα τα μήκη $t_i - t_{i-1}$ των

διαστημάτων στη διαμέριση να είναι αρκετά μικρά. Ορισμένα από τα προβλήματα που ακολουθούν θα μεταφέρουν το μήνυμα αυτό με ακόμη μεγαλύτερη έμφαση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Έστω ότι οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Για μια διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ διαλέξτε ένα σύνολο από σημεία x_i στο $[t_{i-1}, t_i]$ και άλλο ένα σύνολο από σημεία u_i στο $[t_{i-1}, t_i]$. Θεωρήστε το άθροισμα

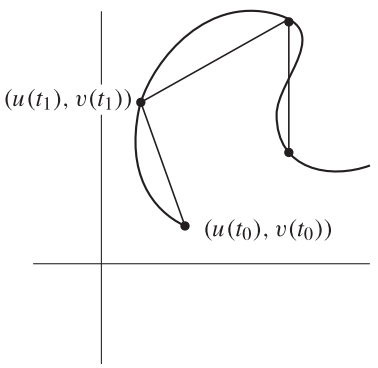
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(u_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Σημειώστε ότι αυτό *δεν* είναι άθροισμα Riemann της fg για την P. Παρ' όλα αυτά, δείξτε ότι όλα αυτά τα αθροίσματα βρίσκονται σε απόσταση ε από το $\int_a^b fg$, αρκεί η διαμέριση P να έχει όλα τα μήκη $t_i - t_{i-1}$ αρκετά μικρά. Υπόδειξη: Εκτιμήστε τη διαφορά μεταξύ ενός αθροίσματος σαν το παραπάνω και ενός αθροίσματος Riemann· θα χρειαστείτε την ομοιόμορφη συνέχεια (Κεφάλαιο 8, Παράρτημα).

2. Αυτό το πρόβλημα είναι όμοιο, αν και κάπως δυσκολότερο, με το προηγούμενο. Έστω ότι f και g είναι συνεχείς μη αρνητικές συναρτήσεις στο $[a, b]$. Για μια διαμέριση P, θεωρήστε τα αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f(x_i) + g(u_i)}\,(t_i - t_{i-1}).$$

Δείξτε ότι αυτά τα αθροίσματα βρίσκονται σε απόσταση ε από το $\int_a^b \sqrt{f+g}$, αν όλα τα $t_i - t_{i-1}$ είναι αρκετά μικρά. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας είναι ομοιόμορφα συνεχής σε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $[0, M]$.



ΣΧΗΜΑ 2

3. Τελικά, είμαστε έτοιμοι να αντιμετωπίσουμε κάτι σπουδαίο! (Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 13-25.) Θεωρήστε μια καμπύλη c που δίνεται παραμετρικά από δύο συναρτήσεις u και v στο $[a, b]$. Για μια διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ του $[a, b]$ ορίζουμε το

$$\ell(c, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[u(t_i) - u(t_{i-1})]^2 + [v(t_i) - v(t_{i-1})]^2}.$$

Ο αριθμός αυτός παριστά το μήκος μιας εγγεγραμμένης πολυγωνικής καμπύλης (Σχήμα 2). Ορίζουμε το μήκος της c ως το ελάχιστο άνω φράγμα όλων των $\ell(f, P)$, αν υπάρχει. Αποδείξτε ότι, αν οι u' και v' είναι συνεχείς στο $[a, b]$, τότε το μήκος της c είναι

$$\int_a^b \sqrt{u'^2 + v'^2}.$$

4. Έστω f' συνεχής στο διάστημα $[\theta_0, \theta_1]$. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες πάνω από αυτό το διάστημα έχει μήκος

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{f^2 + f'^2}.$$

5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1, δείξτε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz (Πρόβλημα 13-39) είναι συνέπεια της ανισότητας του Schwarz.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14 ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Από τις υποδείξεις που δόθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορεί να έχει κανείς ήδη μαντέψει το πρώτο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου. Ξέρουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $F(x) = \int_a^x f$ είναι συνεχής· αξίζει να ρωτήσουμε τι συμβαίνει όταν η αρχική συνάρτηση f είναι συνεχής. Προκύπτει ότι η F είναι παραγωγίσιμη (και η παράγωγός της είναι εξαιρετικά απλή).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ)

Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, και η F ορισμένη στο $[a, b]$ από την

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο c στο $[a, b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c, και

$$F'(c) = f(c).$$

(Αν $c = a$ ή b, τότε, λέγοντας $F'(c)$ εννοούμε τη δεξιά ή αριστερή παράγωγο της F.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα υποθέσουμε ότι το c βρίσκεται στο (a, b)· οι εύκολες τροποποιήσεις για $c = a$ ή b μπορούν να συμπληρωθούν από τον αναγνώστη. Εξ ορισμού,

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $h > 0$. Τότε

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Ορίζουμε τα m_h και M_h ως εξής (Σχήμα 1):

$$m_h = \inf\{f(x) : c \le x \le c+h\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c \le x \le c+h\}.$$

Από το Θεώρημα 13-7 έπεται ότι

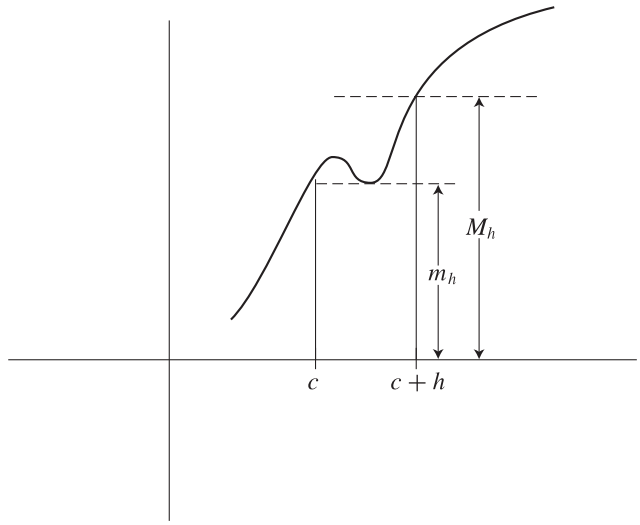
$$m_h \cdot h \le \int_c^{c+h} f \le M_h \cdot h.$$

Επομένως

$$m_h \le \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \le M_h.$$

Αν $h < 0$, πολύ λίγα πράγματα από τον ισχυρισμό μας πρέπει να αλλάξουν. Έστω

$$m_h = \inf\{f(x) : c+h \le x \le c\},$$
$$M_h = \sup\{f(x) : c+h \le x \le c\}.$$



ΣΧΗΜΑ 1

Τότε

$$m_h \cdot (-h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq M_h \cdot (-h).$$

Αφού

$$F(c+h) - F(c) = \int_{c}^{c+h} f = -\int_{c+h}^{c} f$$

αυτή δίνει

$$m_h \cdot h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h \cdot h.$$

Αλλά $h < 0$, άρα η διαίρεση με h αντιστρέφει και πάλι την ανισότητα, οπότε έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα, όπως και πριν:

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση, συνεχή ή όχι. Αφού όμως η f είναι συνεχής στο c,

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c),$$

και αυτό αποδεικνύει ότι

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c). \quad \blacksquare$$

Αν και το Θεώρημα 1 ασχολείται μόνο με τη συνάρτηση που παίρνουμε μεταβάλλοντας το άνω όριο της ολοκλήρωσης, ένα απλό τέχνασμα δείχνει τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται το κάτω όριο. Αν η G οριστεί από την

$$G(x) = \int_{x}^{b} f,$$

τότε

$$G(x) = \int_{a}^{b} f - \int_{a}^{x} f.$$

Επομένως, αν η f είναι συνεχής στο c, τότε

$$G'(c) = -f(c).$$

Το πρόσημο μείον που εμφανίζεται εδώ είναι πολύ βολικό και μας επιτρέπει να επεκτείνουμε το Θεώρημα 1 ακόμα και στην περίπτωση που η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f$$

ορίζεται για $x < a$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$F(x) = -\int_x^a f,$$

και άρα, αν $c < a$, έχουμε

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c),$$

ακριβώς όπως και πριν.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις, η παραγωγισιμότητα της F στο c εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της f στο c και μόνο. Πάντως, το Θεώρημα 1 αποκτά το μεγαλύτερο ενδιαφέρον του όταν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του $[a, b]$. Σε αυτήν την περίπτωση, η F είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $[a, b]$ και

$$F' = f.$$

Γενικά, είναι εξαιρετικά δύσκολο να διακρίνει κανείς αν μια δοθείσα συνάρτηση f είναι η παράγωγος κάποιας άλλης συνάρτησης· για αυτόν το λόγο, το Θεώρημα 11-7 και τα Προβλήματα 11-60 και 11-61 είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, γιατί αποκαλύπτουν κάποιες ιδιότητες που πρέπει να έχει η f. Αν όμως η f είναι συνεχής, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα —σύμφωνα με το Θεώρημα 1, η f *είναι* η παράγωγος κάποιας συνάρτησης, και συγκεκριμένα, της συνάρτησης

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Το Θεώρημα 1 έχει ένα άμεσο πόρισμα που συχνά απλοποιεί τελείως τους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

ΠΟΡΙΣΜΑ Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g, τότε

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Τότε $F' = f = g'$ στο $[a, b]$. Επομένως, υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε

$$F = g + c.$$

Ο αριθμός c μπορεί εύκολα να υπολογιστεί: παρατηρούμε ότι

$$0 = F(a) = g(a) + c,$$

άρα $c = -g(a)$· έτσι,

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Αυτό θα ισχύει, ειδικότερα, για $x = b$. Άρα

$$\int_a^b f = F(b) = g(b) - g(a). \blacksquare$$

Από την απόδειξη αυτού του πορίσματος μπορεί, με μια πρώτη ματιά, να φαίνεται ότι το πόρισμα είναι άχρηστο: τελικά, πόσο καλό είναι να ξέρει κανείς ότι

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

αν η g είναι, για παράδειγμα, η $g(x) = \int_a^x f$; Το ουσιαστικό σημείο είναι, φυσικά, ότι θα μπορούσε να ξέρει κανείς μια τελείως διαφορετική συνάρτηση g με αυτήν την ιδιότητα. Για παράδειγμα, αν

$$g(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{και} \quad f(x) = x^2,$$

τότε $g'(x) = f(x)$ οπότε παίρνουμε, χωρίς ποτέ να υπολογίσουμε κάτω και άνω αθροίσματα, ότι

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Μπορεί κανείς να χειριστεί και τις άλλες δυνάμεις με τον ίδιο τρόπο· αν n είναι ένας φυσικός αριθμός και $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, τότε $g'(x) = x^n$, άρα

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Για κάθε φυσικό αριθμό n, η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα που περιέχει το 0, αλλά αν τα a και b είναι και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά, τότε

$$\int_a^b x^{-n}\,dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Αυτός ο τύπος ισχύει φυσικά μόνο για $n \neq -1$. *Δεν ξέρουμε απλή έκφραση του*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx.$$

Το πρόβλημα του υπολογισμού αυτού του ολοκληρώματος θα συζητηθεί αργότερα, αλλά μας παρέχει μια καλή ευκαιρία να προειδοποιήσουμε για ένα σοβαρό λάθος. Το συμπέρασμα του Πορίσματος 1 συχνά συγχέεται με τον ορισμό του ολοκληρώματος — πολλοί φοιτητές νομίζουν ότι το $\int_a^b f$ ορίζεται: «$g(b)-g(a)$, όπου g είναι μια συνάρτηση με παράγωγο την f». Αυτός ο «ορισμός» δεν είναι μόνο λαθεμένος, είναι και άχρηστος. Ένας λόγος είναι ότι, μια συνάρτηση f μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη χωρίς να είναι η παράγωγος κάποιας άλλης συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 0$ για $x \neq 1$ και $f(1) = 1$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη, αλλά η f δεν μπορεί να είναι παράγωγος (γιατί όχι;). Υπάρχει ακόμα ένας άλλος λόγος που είναι πολύ πιο σημαντικός: Αν η f είναι συνεχής, τότε ξέρουμε ότι $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g· αλλά αυτό το ξέρουμε *μόνο λόγω του Θεωρήματος 1*. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ παρέχει μια εξαίρετη διευκρίνιση: αν $x > 0$, τότε $f(x) = g'(x)$, όπου

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

αλλά δεν ξέρουμε καμία απλούστερη συνάρτηση g με αυτήν την ιδιότητα.

Το πόρισμα του Θεωρήματος 1 είναι τόσο χρήσιμο που συχνά αποκαλείται Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Στο παρόν βιβλίο κρατάμε αυτό το όνομα για ένα κάπως ισχυρότερο αποτέλεσμα (που στην πράξη όμως δεν είναι πολύ πιο χρήσιμο). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μια συνάρτηση f μπορεί να είναι της μορφής g' ακόμα και αν η f δεν είναι συνεχής. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, ισχύει και πάλι ότι

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Η απόδειξη όμως πρέπει να είναι τελείως διαφορετική —δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1, άρα πρέπει να επιστρέψουμε στον ορισμό του ολοκληρώματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2
(ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ)

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g, τότε

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα σημείο x_i στο $[t_{i-1}, t_i]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} g(t_i) - g(t_{i-1}) &= g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) \\ &= f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Αν

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) : t_{i-1} \le x \le t_i\}, \end{aligned}$$

τότε προφανώς,

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}),$$

που σημαίνει ότι

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Προσθέτοντας αυτές τις εξισώσεις για $i = 1, \ldots, n$ παίρνουμε

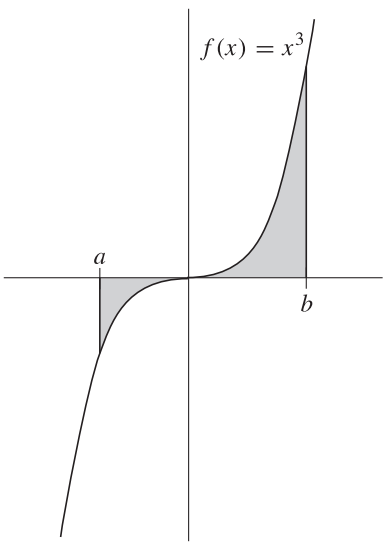
$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \le g(b) - g(a) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

δηλαδή

$$L(f, P) \le g(b) - g(a) \le U(f, P)$$

για κάθε διαμέριση P. Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f. \quad \blacksquare$$



ΣΧΗΜΑ 2

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει το πόρισμα του Θεωρήματος 1 (ή, ισοδύναμα, το Θεώρημα 2) για να βρούμε τα ολοκληρώματα μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1},\ n \ne -1. \qquad (a \text{ και } b \text{ και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά, αν } n > 0).$$

Όπως υποδείξαμε στο Κεφάλαιο 13, αυτό το ολοκλήρωμα δεν αντιπροσωπεύει πάντοτε το εμβαδόν που φράσσεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα και τις κάθετες γραμμές στα $(a, 0)$ και $(b, 0)$. Για παράδειγμα, αν $a < 0 < b$, τότε το

$$\int_a^b x^3\,dx$$

δεν αντιπροσωπεύει το εμβαδόν της επιφάνειας στο Σχήμα 2, που αντίθετα δίνεται από το

$$-\left(\int_a^0 x^3\,dx\right) + \int_0^b x^3\,dx = -\left(\frac{0^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) + \left(\frac{b^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$= \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4}.$$

Με όμοιο τρόπο, πρέπει να εξασκηθεί κανείς στο να βρίσκει τα εμβαδά επιφανειών που φράσσονται από τις γραφικές παραστάσεις περισσοτέρων της μιας συναρτήσεων —ένα πρόβλημα που μπορεί συχνά, ανάλογα με την περίπτωση, να απαιτεί μεγάλη ευστροφία. Ας υποθέσουμε, για να πάρουμε ένα απλό παράδειγμα πρώτα, ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας που φαίνεται στο Σχήμα 3, ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

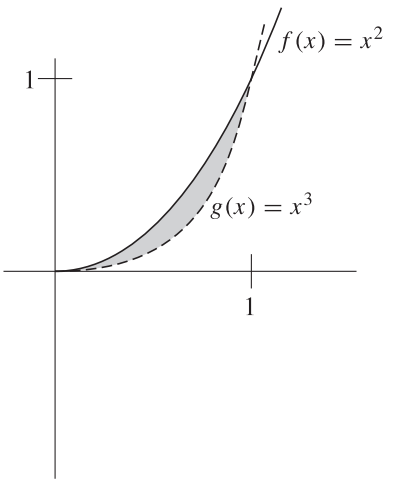
$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3$$

στο διάστημα $[0, 1]$. Αν $0 \le x \le 1$, τότε $0 \le x^3 \le x^2$, άρα η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από αυτήν της f. Το εμβαδόν της επιφάνειας που μας ενδιαφέρει είναι επομένως

$$\text{εμβαδόν } R(f, 0, 1) - \text{εμβαδόν } R(g, 0, 1),$$

που είναι

$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{12}.$$



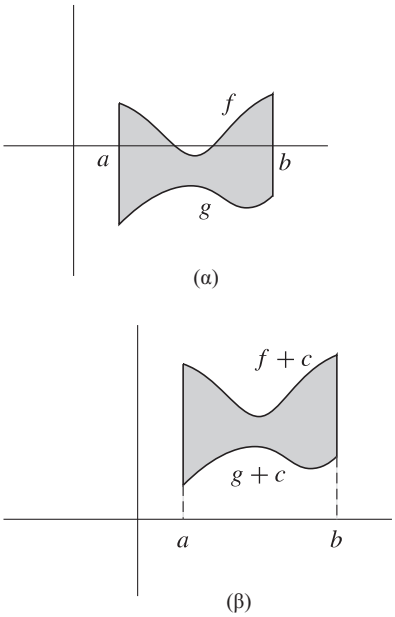
ΣΧΗΜΑ 3

Αυτό το εμβαδόν θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε και σαν

$$\int_a^b (f - g).$$

Αν $g(x) \le f(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε αυτό το ολοκλήρωμα πάντοτε δίνει το εμβαδόν που φράσσεται από τις f και g, *ακόμα και αν οι f και g είναι κάπου αρνητικές*. Ο πιο εύκολος τρόπος για να το διαπιστώσει κανείς φαίνεται στο Σχήμα 4. Αν c είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε οι $f + c$ και $g + c$ να είναι μη αρνητικές στο $[a, b]$, τότε η επιφάνεια R_1, που φράσσεται από τις f και g, έχει το ίδιο εμβαδόν με την επιφάνεια R_2, που φράσσεται από τις $f + c$ και $g + c$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\text{εμβαδόν } R_1 = \text{εμβαδόν } R_2 &= \int_a^b (f + c) - \int_a^b (g + c) \\ &= \int_a^b [(f + c) - (g + c)] \\ &= \int_a^b (f - g).\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 4

Αυτή η παρατήρηση είναι χρήσιμη για το ακόλουθο πρόβλημα: Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = x^3 - x \quad \text{και} \quad g(x) = x^2.$$

Το πρώτο που χρειάζεται είναι να καθορίσουμε αυτήν την επιφάνεια με μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται όταν

$$\begin{aligned} & x^3 - x = x^2, \\ \text{ή} \quad & x^3 - x^2 - x = 0, \\ \text{ή} \quad & x(x^2 - x - 1) = 0, \\ \text{ή} \quad & x = 0, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Στο διάστημα $([1 - \sqrt{5}]/2, 0)$ έχουμε $x^3 - x \ge x^2$ και στο διάστημα $(0, [1 + \sqrt{5}]/2)$ έχουμε $x^2 \ge x^3 - x$. Αυτοί οι ισχυρισμοί είναι προφανείς από τις γραφικές παραστάσεις (Σχήμα 5), αλλά μπορούμε εύκολα να τους ελέγξουμε και με τον εξής τρόπο: Αφού $f(x) = g(x)$ μόνο όταν $x = 0$, $[1 + \sqrt{5}]/2$ ή $[1 - \sqrt{5}]/2$, η συνάρτηση $f - g$ δεν

αλλάζει πρόσημο στα διαστήματα $([1-\sqrt{5}]/2, 0)$ και $(0, [1+\sqrt{5}]/2)$· άρα το μόνο που χρειάζεται είναι να παρατηρήσουμε, για παράδειγμα, ότι

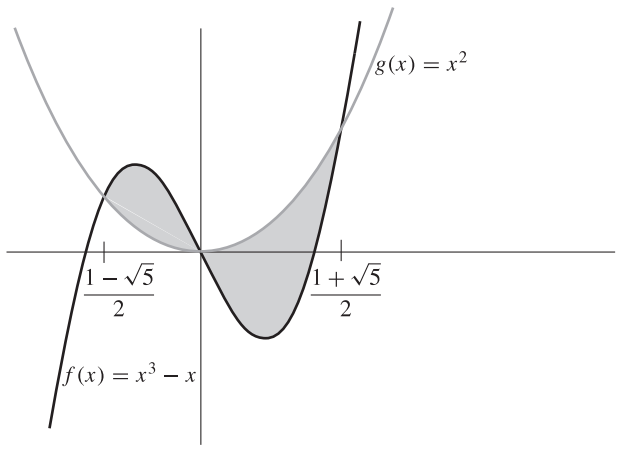
$$(-\tfrac{1}{2})^3 - (-\tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{8} > 0,$$
$$1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$f - g \geq 0 \quad \text{στο } ([1-\sqrt{5}]/2, 0),$$
$$f - g \leq 0 \quad \text{στο } (0, [1+\sqrt{5}]/2).$$

Το εμβαδόν λοιπόν της επιφάνειας που ζητάμε είναι

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)\,dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2 - (x^3 - x)]\,dx.$$



ΣΧΗΜΑ 5

Όπως αποκαλύπτει αυτό το παράδειγμα, ένα από τα κυριότερα προβλήματα που παρουσιάζονται όταν ζητάμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας, μπορεί να είναι ο ακριβής προσδιορισμός της επιφάνειας. Υπάρχουν, όμως, πιο ουσιαστικά προβλήματα λογικής υφής —έχουμε έως τώρα ορίσει το εμβαδόν μόνο κάποιων πολύ ειδικών επιφανειών, που δεν περιλαμβάνουν ούτε καν τις επιφάνειες των οποίων τα εμβαδά μόλις τώρα υπολογίσαμε! Απλώς υποθέσαμε ότι το εμβαδόν είχε κάποιο νόημα για αυτές τις επιφάνειες, και ότι κάποιες φυσιολογικές ιδιότητες του «εμβαδού» ισχύουν. Αυτές οι παρατηρήσεις δεν έχουν σκοπό να σας ωθήσουν να θεωρείτε την εξάσκηση στον υπολογισμό εμβαδών σαν κάτι άχρηστο, αλλά να υποδείξουν ότι υπάρχει μια καλύτερη προσέγγιση στον ορισμό των εμβαδών, αν και η φυσική της θέση είναι κάπου στον προχωρημένο Απειροστικό Λογισμό. Η επιθυμία να ορίσουμε το εμβαδόν ήταν το κίνητρο για τον ορισμό του ολοκληρώματος, τόσο σε αυτό το βιβλίο όσο και ιστορικά —αλλά το ολοκλήρωμα δεν μας δίνει την καλύτερη μέθοδο για να *ορίζουμε* εμβαδά, αν και συχνά είναι το κατάλληλο εργαλείο για να τα *υπολογίζουμε*.

Ίσως είναι αποθαρρυντικό να μαθαίνει κανείς ότι τα ολοκληρώματα δεν είναι κατάλληλα για τον ίδιο τον σκοπό που προκάλεσε την επινόησή τους, αλλά σύντομα θα δούμε πόσο απαραίτητα είναι για άλλους σκοπούς. Η πιο σημαντική χρήση των ολοκληρωμάτων έχει ήδη επισημανθεί: αν η f είναι συνεχής, το ολοκλήρωμα μας δίνει μια συνάρτηση y, τέτοια ώστε

$$y'(x) = f(x).$$

Αυτή η εξίσωση είναι το απλούστερο παράδειγμα «διαφορικής εξίσωσης» (μιας εξίσωσης ως προς μια συνάρτηση y που περιέχει παραγώγους της y). Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού λέει ότι αυτή η διαφορική εξίσωση έχει λύση, αν η f είναι

συνεχής. Σε επόμενα κεφάλαια, και σε διάφορα προβλήματα, θα λύσουμε πιο σύνθετες εξισώσεις, αλλά η λύση σχεδόν πάντα θα στηρίζεται κατά κάποιον τρόπο στο ολοκλήρωμα· για να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση, είναι αναγκαίο να κατασκευάσουμε μια καινούργια συνάρτηση, και το ολοκλήρωμα είναι ένας από τους καλύτερους τρόπους για να πετύχουμε κάτι τέτοιο.

Μια και οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις που μας παρέχει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού θα παίξουν έναν εξέχοντα ρόλο στη μεταγενέστερη εργασία μας, είναι πολύ σπουδαίο να κατανοήσει κανείς ότι αυτές οι συναρτήσεις μπορούν να συνδυαστούν, όπως και οι «λιγότερο μυστήριες» συναρτήσεις, για να δώσουν ακόμα περισσότερες συναρτήσεις που οι παραγωγοί τους μπορούν να βρεθούν με τον Κανόνα της Αλυσίδας.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι

$$f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt.$$

Αν και ο συμβολισμός τείνει, κατά κάποιον τρόπο, να αποκρύψει το γεγονός, η f είναι η σύνθεση των συναρτήσεων

$$C(x) = x^3 \quad \text{και} \quad F(x) = \int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt.$$

Πράγματι, $f(x) = F(C(x))$· με άλλα λόγια, $f = F \circ C$. Επομένως, από τον Κανόνα της Αλυσίδας,

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x)) \cdot C'(x) \\ &= F'(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 x^3} \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

Αν η f, αντί για αυτό, ορίζεται ως

$$f(x) = \int_{x^3}^a \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt,$$

τότε

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\sin^2 x^3} \cdot 3x^2.$$

Αν η f ορίζεται ως *αντίστροφη* σύνθεση,

$$f(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt \right)^3,$$

τότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= C'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= 3\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt \right)^2 \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Ομοίως, αν

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^{\sin x} \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt, \\ g(x) &= \int_{\sin x}^a \frac{1}{1+\sin^2 t}\, dt, \end{aligned}$$

$$h(x) = \sin\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right),$$

τότε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\sin^2(\sin x)} \cdot \cos x, \\ g'(x) &= \frac{-1}{1+\sin^2(\sin x)} \cdot \cos x, \\ h'(x) &= \cos\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right) \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Η φοβερή στην όψη συνάρτηση

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$$

αποτελεί επίσης σύνθεση· πράγματι $f = F \circ F$. Άρα

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(F(x)) \cdot F'(x) \\ &= \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Όπως δείχνουν αυτά τα παραδείγματα, η παράσταση που εμφανίζεται πάνω (ή κάτω) στο σύμβολο της ολοκλήρωσης φανερώνει τη συνάρτηση που θα εμφανιστεί στα *δεξιά* όταν γράψουμε την f ως σύνθεση. Ως τελικό παράδειγμα, ας εξετάσουμε τις τριπλές συνθέσεις

$$f(x) = \int_a^{\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt, \quad g(x) = \int_a^{\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right]} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt,$$

που μπορούν να γραφούν

$$f = F \circ F \circ C \quad \text{και} \quad g = F \circ F \circ F.$$

Παραλείποντας τα ενδιάμεσα βήματα (που μπορείτε να συμπληρώσετε, αν αισθάνεστε ανασφάλεια), παίρνουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^{x^3} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x^3} \cdot 3x^2,$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\sin^2\left[\int_a^{\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right]} \cdot \frac{1}{1+\sin^2\left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt\right)} \cdot \frac{1}{1+\sin^2 x}.$$

Ομοίως με τις απλούστερες παραγωγίσεις του Κεφαλαίου 10, αυτοί οι χειρισμοί φαίνονται πιο εύκολοι αν εξασκηθεί κανείς με μερικά προβλήματα, και, όπως και τα προβλήματα του Κεφαλαίου 10, αυτές οι παραγωγίσεις είναι απλώς μια άσκηση κατανόησης του Κανόνα της Αλυσίδας, στο κάπως άγνωστο πλαίσιο που μας παρέχει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Τα ισχυρά αποτελέσματα που θα δώσει το ολοκλήρωμα στα επόμενα κεφάλαια βασίζονται όλα στο Θεμελιώδες Θεώρημα, παρ' όλο που η απόδειξη αυτού του θεωρήματος ήταν αρκετά εύκολη —φαίνεται ότι όλος ο ουσιαστικός κόπος μπήκε στο να ορίσουμε το ολοκλήρωμα. Στην πραγματικότητα, αυτό δεν ισχύει απόλυτα. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1 σε μια συνεχή συνάρτηση, χρειάζεται να γνωρίζουμε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν και έχουμε ήδη προσφέρει μια απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, υπάρχει ένας πιο στοιχειώδης τρόπος που ίσως προτιμήσετε. Όπως όλες οι«στοιχειώδεις» αποδείξεις, εμπεριέχει τεχνάσματα, αλλά έχει την αρετή ότι εξαναγκάζει σε μια επανάληψη της απόδειξης του Θεωρήματος 1.

Αν f είναι οποιαδήποτε συνάρτηση φραγμένη στο $[a, b]$, τότε τα

$$\sup\{L(f, P)\} \quad \text{και} \quad \inf\{U(f, P)\}$$

υπάρχουν και τα δύο, ακόμα και αν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Αυτοί οι αριθμοί λέγονται το **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$ και το **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$, αντίστοιχα, και θα συμβολίζονται με

$$\mathbf{L}\int_a^b f \quad \text{και} \quad \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Τα κάτω και άνω ολοκληρώματα έχουν και τα δύο διάφορες ιδιότητες που έχει το ολοκλήρωμα. Ειδικότερα, αν $a < c < b$, τότε

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{L}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f} + \mathbf{L}\int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \quad \text{και} \quad \mathbf{U}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} = \mathbf{U}\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f} + \mathbf{U}\int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f},$$

και αν $m \le f(x) \le M$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε

$$m(b-a) \le \mathbf{L}\int_a^b f \le \mathbf{U}\int_a^b f \le M(b-a).$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω αφήνονται ως άσκηση, αφού είναι τελείως ίδιες με τις αντίστοιχες αποδείξεις για ολοκληρώματα. Τα συμπεράσματα για τα ολοκληρώματα είναι στην πραγματικότητα πορίσματα των συμπερασμάτων για τα κάτω και άνω ολοκληρώματα, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη ακριβώς όταν

$$\mathbf{L}\int_a^b f = \mathbf{U}\int_a^b f.$$

Θα αποδείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, αποδεικνύοντας ότι αυτή η ισότητα ισχύει πάντα για συνεχείς συναρτήσεις. Στην πραγματικότητα, είναι ευκολότερο να δείξουμε ότι

$$\mathbf{L}\int_a^x f = \mathbf{U}\int_a^x f$$

για κάθε x στο $[a, b]$· το τέχνασμα είναι να παρατηρήσουμε ότι για το μεγαλύτερο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 1 δεν χρειάστηκε καν το γεγονός ότι η f ήταν ολοκληρώσιμη!

ΘΕΩΡΗΜΑ 13-3 Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ορίζουμε τις συναρτήσεις L και U στο $[a, b]$ ως εξής:

$$L(x) = \mathbf{L}\int_a^x f \quad \text{και} \quad U(x) = \mathbf{U}\int_a^x f.$$

Έστω x στο (a, b). Αν $h > 0$ και

$$m_h = \inf\{f(t) : x \le t \le x + h\},$$

$$M_h = \sup\{f(t) : x \le t \le x + h\},$$

τότε

$$m_h \cdot h \le \mathbf{L}\int_x^{x+h} f \le \mathbf{U}\int_x^{x+h} f \le M_h \cdot h,$$

άρα

$$m_h \cdot h \le L(x+h) - L(x) \le U(x+h) - U(x) \le M_h \cdot h$$

ή

$$m_h \le \frac{L(x+h) - L(x)}{h} \le \frac{U(x+h) - U(x)}{h} \le M_h.$$

Αν $h < 0$ και

$$m_h = \inf\{f(t) : x + h \le t \le x\},$$
$$M_h = \sup\{f(t) : x + h \le t \le x\},$$

παίρνει κανείς την ίδια ανισότητα, ακριβώς όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.

Αφού η f είναι συνεχής στο x, έχουμε

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(x),$$

και αυτό αποδεικνύει ότι

$$L'(x) = U'(x) = f(x) \quad \text{για } x \text{ στο } (a, b).$$

Το τελευταίο σημαίνει ότι υπάρχει ένας αριθμός c, τέτοιος ώστε

$$U(x) = L(x) + c \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$

Αφού

$$U(a) = L(a) = 0,$$

ο αριθμός c πρέπει να είναι ίσος με 0, άρα

$$U(x) = L(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$

Ειδικότερα,

$$\mathbf{U}\int_a^b f = U(b) = L(b) = \mathbf{L}\int_a^b f,$$

και αυτό σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. ∎

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

(i) $F(x) = \displaystyle\int_a^{x^3} \sin^3 t\, dt.$

(ii) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\left(\int_1^x \sin^3 t\, dt\right)} \frac{1}{1 + \sin^6 t + t^2}\, dt$

(iii) $F(x) = \displaystyle\int_{15}^{x} \left(\int_8^y \frac{1}{1 + t^2 + \sin^2 t}\, dt\right) dy.$

(iv) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + \sin^2 t}\, dt.$

(v) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1 + t^2 + \sin^2 t}\, dt.$

(vi) $F(x) = \sin\left(\displaystyle\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t\, dt\right) dy\right).$

(vii) F^{-1}, όπου $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$

(viii) F^{-1}, όπου $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt.$

(Βρείτε την $(F^{-1})'(x)$ συναρτήσει της $F^{-1}(x)$.)

2. Για κάθε μία από τις f που ακολουθούν, αν $F(x) = \int_0^x f$, σε ποια σημεία x ισχύει $F'(x) = f(x)$; (Προειδοποίηση: μπορεί να συμβαίνει $F'(x) = f(x)$, ακόμα και αν η f δεν είναι συνεχής στο x.)

(i) $f(x) = 0$ αν $x \leq 1$, $f(x) = 1$ αν $x > 1$.

(ii) $f(x) = 0$ αν $x < 1$, $f(x) = 1$ αν $x \geq 1$.

(iii) $f(x) = 0$ αν $x \neq 1$, $f(x) = 1$ αν $x = 1$.

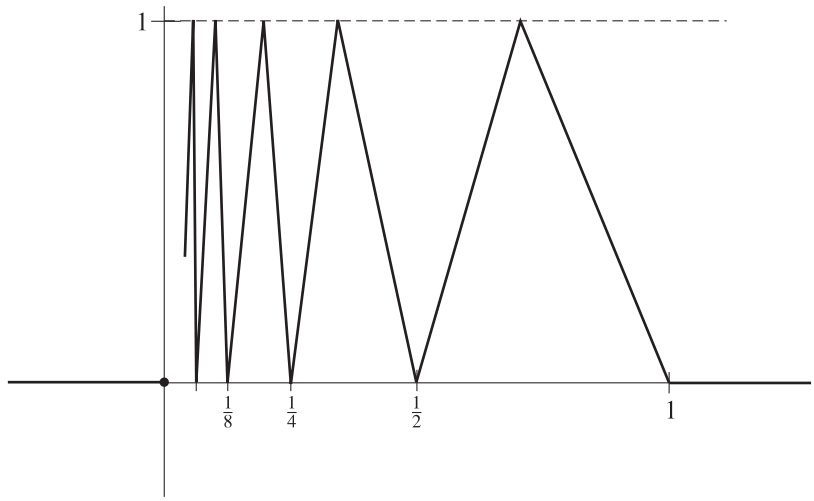
(iv) $f(x) = 0$ αν x άρρητος, $f(x) = 1/q$ αν $x = p/q$ ανάγωγο.

(v) $f(x) = 0$ αν $x \leq 0$, $f(x) = x$ αν $x \geq 0$.

(vi) $f(x) = 0$ αν $x \leq 0$ ή $x > 1$, $f(x) = 1/[1/x]$ αν $0 < x \leq 1$.

(vii) f είναι η συνάρτηση που δείχνει το Σχήμα 6.

(viii) $f(x) = 1$ αν $x = 1/n$ για κάποιο n στο $\mathbf{N}$, $f(x) = 0$ αλλιώς.



ΣΧΗΜΑ 6

3. Δείξτε ότι οι τιμές των πιο κάτω παραστάσεων δεν εξαρτώνται από το x:

(i) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1 + t^2}\, dt.$

(ii) $\displaystyle\int_{-\cos x}^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt, \quad x$ στο $(0, \pi/2)$.

4. Βρείτε την $(f^{-1})'(0)$ αν

(i) $f(x) = \displaystyle\int_0^x 1 + \sin(\sin t)\, dt.$

(ii) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \cos(\cos t)\, dt.$

(Μην προσπαθήσετε να βρείτε με τι είναι ακριβώς ίση η f.)

5. Βρείτε μια συνάρτηση g τέτοια ώστε

(i) $\displaystyle\int_0^x tg(t)\,dt = x + x^2.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{x^2} tg(t)\,dt = x + x^2.$

(Παρατηρήστε ότι δεν θεωρούμε τη g συνεχή στο 0.)

6. (α) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση

$$\int_0^x f = (f(x))^2 + C \qquad \text{για κάποια σταθερά } C \neq 0$$

υποθέτοντας ότι η f έχει το πολύ ένα 0.

(β) Βρείτε επίσης μια λύση που είναι 0 στο διάστημα $(-\infty, b]$ με $0 < b$, αλλά δεν είναι μηδέν για $x > b$.

(γ) Τέλος, για $C = 0$ και οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ με $a < 0 < b$, βρείτε μια λύση που είναι 0 στο $[a, b]$, αλλά δεν είναι μηδέν αλλού.

7. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 13-23 για να αποδείξετε ότι

(i) $\displaystyle\frac{1}{7\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \frac{1}{7}.$

(ii) $\displaystyle\frac{3}{8} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$

8. Βρείτε την $F'(x)$ αν $F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$. (Η απάντηση *δεν* είναι $xf(x)$· θα πρέπει να κάνετε έναν προφανή μετασχηματισμό στο ολοκλήρωμα πριν προσπαθήσετε να βρείτε την F'.)

9. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής, τότε

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right) du.$$

Υπόδειξη: Παραγωγίστε και τα δύο μέλη κάνοντας χρήση του Προβλήματος 8.

∗**10.** Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 9 για να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2\,du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_2} \left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right) du_2.$$

11. Βρείτε μια συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f'''(x) = 1 \,/\, \sqrt{1+\sin^2 x}$. (Αυτό το πρόβλημα υποτίθεται ότι είναι εύκολο· μην παρερμηνεύσετε τη λέξη «βρείτε»).

12. Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική**, με **περίοδο** a, αν $f(x+a) = f(x)$ για κάθε x.

(α) Αν η f είναι περιοδική με περίοδο a και ολοκληρώσιμη στο $[0, a]$, δείξτε ότι

$$\int_0^a f = \int_b^{b+a} f \quad \text{για κάθε } b.$$

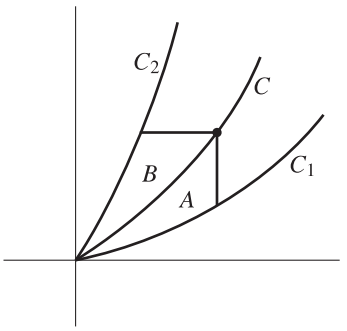
(β) Βρείτε μια συνάρτηση f που να μην είναι περιοδική, αλλά η f' να είναι. Υπόδειξη: Διαλέξτε μια περιοδική g για την οποία να μπορούμε να εγγυηθούμε ότι η $f(x) = \int_0^x g$ δεν είναι περιοδική.

(γ) Αν η f' είναι περιοδική με περίοδο a και $f(a) = f(0)$, τότε η f είναι επίσης περιοδική με περίοδο a.

∗(δ) Αντίστροφα, αν η f' είναι περιοδική με περίοδο a και η f είναι περιοδική (με περίοδο όχι απαραίτητα $= a$), τότε $f(a) = f(0)$.

13. Βρείτε το $\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx$, μαντεύοντας μια συνάρτηση f με $f'(x) = \sqrt[n]{x}$, και χρησιμοποιώντας το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Μετά συγκρίνετε με το Πρόβλημα 13-21.

∗**14.** Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και το Πρόβλημα 13-21 για να καταλήξετε στο συμπέρασμα που διατυπώθηκε στο Πρόβλημα 12-21.



ΣΧΗΜΑ 7

∗**15.** Έστω C_1, C και C_2 καμπύλες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Κάθε σημείο της C μπορεί να ενωθεί με ένα σημείο της C_1 με ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα και με ένα σημείο της C_2 με ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα. Θα λέμε ότι η C *διχοτομεί* την C_1 και την C_2 αν οι περιοχές A και B έχουν ίσα εμβαδά για κάθε σημείο της C.

(α) Αν C_1 είναι η γραφική παράστασης της $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ και C της $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, βρείτε την C_2 έτσι ώστε η C να διχοτομεί την C_1 και την C_2.

(β) Γενικότερα, βρείτε την C_2 αν η C_1 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = x^m$, και η C της $f(x) = cx^m$ για κάποιο $c > 1$.

16. (α) Βρείτε τις παραγώγους των $F(x) = \int_1^x 1/t\,dt$ και $G(x) = \int_b^{bx} 1/t\,dt$.

(β) Τώρα δώστε μια καινούργια απόδειξη για το Πρόβλημα 13-15.

∗**17.** Χρησιμοποιήστε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και το Θεώρημα του Darboux (Πρόβλημα 11-60) για να δώσετε άλλη απόδειξη του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

18. Αποδείξτε ότι, αν η h είναι συνεχής, η f και η g είναι παραγωγίσιμες, και

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt,$$

τότε $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Υπόδειξη: Προσπαθήστε να το αναγάγετε στις δύο περιπτώσεις που ξέρετε ήδη να χειρίζεστε, με μια σταθερά ως άνω ή κάτω όριο της ολοκλήρωσης.

19. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, ότι το c είναι στο (a, b), και έστω ότι

$$F(x) = \int_a^x f, \quad a \leq x \leq b.$$

Αποδείξτε ή βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις.

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο c, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c.

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο c, τότε η F' είναι συνεχής στο c.

(γ) Αν η f' είναι συνεχής στο c, τότε η F' είναι συνεχής στο c.

∗**20.** Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Είναι η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$ ολοκληρώσιμη στο 0; Υπόδειξη: Ρίξτε μια ματιά στη σελίδα 162.

21. Έστω ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για όλα τα x στο $[0, 1]$ έχουμε

$$|f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 |f'|^2}.$$

Δείξτε επίσης ότι η υπόθεση $f(0) = 0$ χρειάζεται. Υπόδειξη: Πρόβλημα 13-39.

∗**22.** Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $0 < f' \leq 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$\int_0^x f^3 \leq \left(\int_0^x f\right)^2.$$

∗**23.** (α) Έστω ότι $G' = g$ και $F' = f$. Αποδείξτε ότι, αν η συνάρτηση y ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(*) \qquad g(y(x)) \cdot y'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ σε κάποιο διάστημα,}$$

τότε υπάρχει ένας αριθμός c τέτοιος ώστε

$$(**) \qquad G(y(x)) = F(x) + c \quad \text{για κάθε } x \text{ σε αυτό το διάστημα.}$$

(β) Δείξτε, αντίστροφα, ότι αν η y ικανοποιεί την $(**)$, τότε η y είναι λύση της $(*)$.

(γ) Βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η y, αν

$$y'(x) = \frac{1 + x^2}{1 + y(x)}.$$

(Σε αυτήν την περίπτωση $g(t) = 1 + t$ και $f(t) = 1 + t^2$.) Μετά «λύστε» τις εξισώσεις που προκύπτουν για να βρείτε όλες τις δυνατές λύσεις y (καμία λύση δεν θα είναι ορισμένη σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$).

(δ) Βρείτε ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η y, αν

$$y'(x) = \frac{-1}{1 + 5[y(x)]^4}.$$

(Μια αναδρομή στο Πρόβλημα 12-14 θα σας πείσει ότι *υπάρχουν* συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση που προκύπτει.)

(ε) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις y που ικανοποιούν την

$$y(x)y'(x) = -x.$$

Βρείτε τη λύση y για την οποία $y(0) = -1$.

24. Στο Πρόβλημα 10-19 βρήκαμε ότι η κατά Schwarz παράγωγος

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

ήταν 0 για $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$. Τώρα υποθέστε ότι η f είναι συνάρτηση με κατά Schwarz παράγωγο μηδέν.

(α) Δείξτε ότι η f''^2/f'^3 είναι σταθερή συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι η f έχει τη μορφή $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$. Υπόδειξη: Θεωρήστε $u = f'$ και εφαρμόστε το προηγούμενο πρόβλημα.

25. Το όριο $\lim_{N\to\infty} \int_a^N f$, αν υπάρχει, συμβολίζεται με $\int_a^\infty f$ (ή $\int_a^\infty f(x)\,dx$) και λέγεται «γενικευμένο ολοκλήρωμα».

(α) Προσδιορίστε το $\int_1^\infty x^r\,dx$, αν $r < -1$.

(β) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 13-15 για να δείξετε ότι το $\int_1^\infty 1/x\,dx$ δεν υπάρχει. Υπόδειξη: Τί μπορείτε να πείτε για το $\int_1^{2^n} 1/x\,dx$;

(γ) Έστω ότι $f(x) \geq 0$ για $x \geq 0$ και ότι το $\int_0^\infty f$ υπάρχει. Αποδείξτε ότι, αν $0 \leq g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$ και η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[0, N]$, τότε υπάρχει και το $\int_0^\infty g$.

(δ) Εξηγήστε γιατί το $\int_0^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ υπάρχει. Υπόδειξη: Χωρίστε αυτό το ολοκλήρωμα στο 1.

26. Αποφασίστε αν τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα υπάρχουν:

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx$ (αυτός είναι ένας τύπος που εξετάζεται στο Πρόβλημα 28).

27. Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^a f$ ορίζεται, με τον προφανή τρόπο, ως $\lim_{N\to-\infty} \int_N^a f$. Αλλά ένα άλλο είδος γενικευμένου ολοκληρώματος, το $\int_{-\infty}^\infty f$, ορίζεται με έναν μη προφανή τρόπο: είναι το $\int_0^\infty f + \int_{-\infty}^0 f$, με την προϋπόθεση ότι και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα υπάρχουν.

(α) Εξηγήστε γιατί το $\int_{-\infty}^\infty 1/(1+x^2)\,dx$ υπάρχει.

(β) Εξηγήστε γιατί το $\int_{-\infty}^\infty x\,dx$ δεν υπάρχει. (Αλλά παρατηρήστε ότι το $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N x\,dx$ *υπάρχει*.)

(γ) Αποδείξτε ότι, αν το $\int_{-\infty}^\infty f$ υπάρχει, τότε το $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^N f$ υπάρχει και είναι ίσο με $\int_{-\infty}^\infty f$. Δείξτε ακόμα, ότι τα $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N+1} f$ και $\lim_{N\to\infty} \int_{-N^2}^N f$ υπάρχουν και τα δύο και είναι ίσα με $\int_{-\infty}^\infty f$. Μπορείτε να διατυπώσετε μια εύλογη γενίκευση των παραπάνω; (Αν δεν μπορείτε, θα ταλαιπωρηθείτε πολύ προσπαθώντας για αυτές τις ειδικές περιπτώσεις!)

28. Υπάρχει άλλο ένα είδος «γενικευμένου ολοκληρώματος» στο οποίο το διάστημα είναι φραγμένο, αλλά η *συνάρτηση* δεν είναι φραγμένη:

(α) Αν $a > 0$, βρείτε το $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^a 1/\sqrt{x}\,dx$. Αυτό το όριο συμβολίζεται με $\int_0^a 1/\sqrt{x}\,dx$, αν και η συνάρτηση $f(x) = 1/\sqrt{x}$ δεν είναι φραγμένη στο $[0, a]$, όπως και αν ορίσουμε το $f(0)$.

(β) Βρείτε το $\int_0^a x^r\,dx$, αν $-1 < r < 0$.

(γ) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 13-15 για να δείξετε ότι το $\int_0^a x^{-1}\,dx$ δεν έχει έννοια, ούτε ως όριο.

(δ) Επινοήστε έναν λογικό ορισμό για το $\int_a^0 |x|^r\,dx$ για $a < 0$ και υπολογίστε το για $-1 < r < 0$.

(ε) Επινοήστε έναν λογικό ορισμό για το $\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2}\,dx$, ως άθροισμα δύο ορίων, και δείξτε ότι τα όρια υπάρχουν. Υπόδειξη: Γιατί υπάρχει το $\int_{-1}^0 (1+x)^{-1/2}\,dx$; Πώς συγκρίνεται το $(1+x)^{-1/2}$ με το $(1-x^2)^{-1/2}$ για $-1 < x < 0$;

29. (α) Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, υπολογίστε το

$$\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

∗(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και συνεχής στο 0, υπολογίστε το

$$\lim_{x \to 0^+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt.$$

30. Είναι δυνατόν, τελικά, να συνδυάσουμε τις δύο δυνατές επεκτάσεις της έννοιας του ολοκληρώματος.

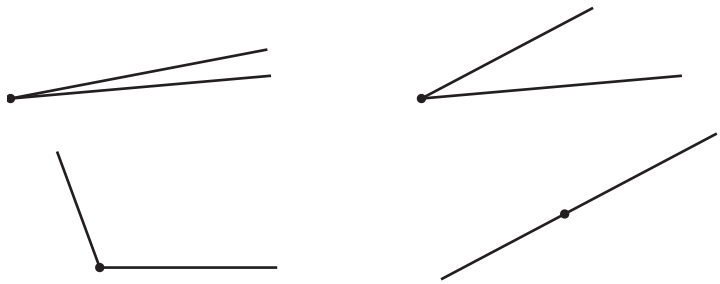
(α) Αν $f(x) = 1/\sqrt{x}$ για $0 \le x \le 1$ και $f(x) = 1/x^2$ για $x \ge 1$, βρείτε το $\int_0^\infty f(x)\, dx$ (αφού αποφασίσετε τι θα πρέπει να σημαίνει).

(β) Δείξτε ότι το $\int_0^\infty x^r\, dx$ δεν έχει ποτέ έννοια. (Διακρίνετε τις περιπτώσεις $-1 < r < 0$ και $r < -1$. Στη μια περίπτωση τα πράγματα χαλάνε στο 0, στην άλλη περίπτωση στο ∞· για $r = -1$ έχουμε πρόβλημα και στα δύο σημεία.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

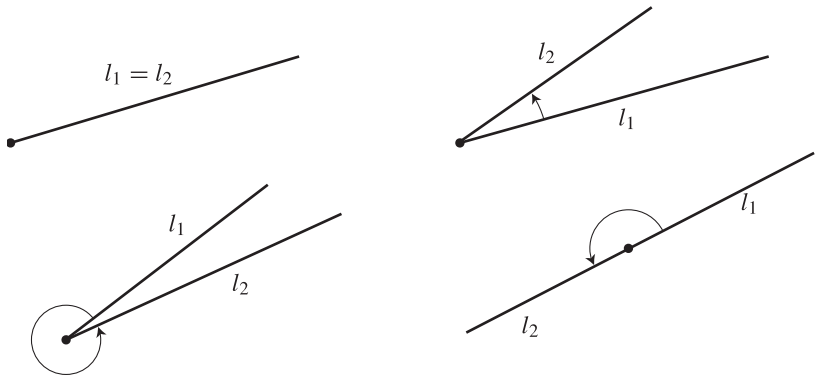
Οι ορισμοί των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$ είναι πολύ πιο περίπλοκοι από όσο θα υποπτευόταν κανείς. Για αυτόν το λόγο, το κεφάλαιο αυτό αρχίζει με κάποιους άτυπους και διαισθητικούς ορισμούς, που δεν θα έπρεπε να εξεταστούν εξονυχιστικά, αφού σύντομα θα αντικατασταθούν με τους τυπικούς ορισμούς που πρόκειται τελικά να χρησιμοποιήσουμε.

Στη στοιχειώδη Γεωμετρία μια γωνία είναι απλώς η ένωση δύο ημιευθειών με κοινό αρχικό σημείο (Σχήμα 1).

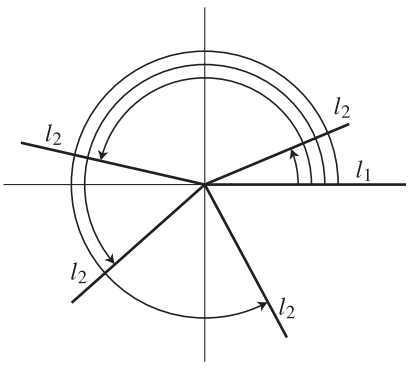


ΣΧΗΜΑ 1

Πιο χρήσιμες για την τριγωνομετρία είναι οι «προσανατολισμένες γωνίες» που μπορούν να θεωρηθούν ως ζεύγη (l_1, l_2) ημιευθειών με το ίδιο αρχικό σημείο, όπως στο Σχήμα 2.



ΣΧΗΜΑ 2



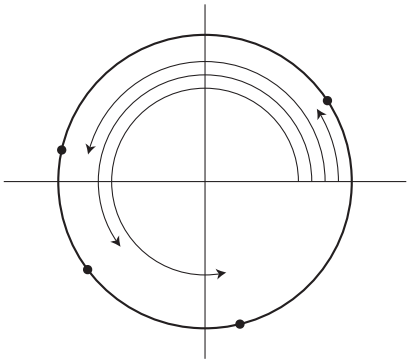
ΣΧΗΜΑ 3

Αν για l_1 διαλέγουμε πάντοτε το θετικό μισό του οριζόντιου άξονα, μια προσανατολισμένη γωνία περιγράφεται απολύτως από τη δεύτερη ημιευθεία (Σχήμα 3).

Αφού κάθε ημιευθεία τέμνει τον μοναδιαίο κύκλο ακριβώς σε ένα σημείο, μια προσανατολισμένη γωνία περιγράφεται ακόμα πιο απλά, από ένα σημείο στον μοναδιαίο κύκλο (Σχήμα 4), δηλαδή, από ένα σημείο (x, y) με $x^2 + y^2 = 1$.

Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας προσανατολισμένης γωνίας μπορούν τώρα να οριστούν ως εξής (Σχήμα 5): μια προσανατολισμένη γωνία προσδιορίζεται από ένα σημείο (x, y) με $x^2 + y^2 = 1$· ως ημίτονο της γωνίας ορίζουμε το y, και ως συνημίτονο το x.

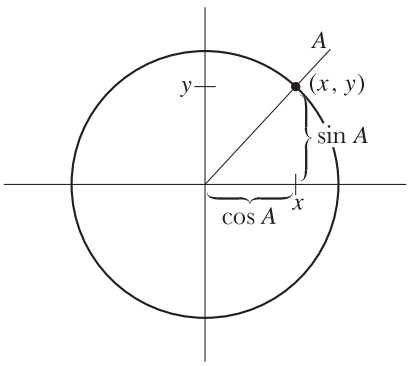
Παρ' όλη την αίσθηση ακρίβειας που αποπνέει η προηγούμενη παράγραφος, δεν



ΣΧΗΜΑ 4

έχουμε ακόμα τελειώσει με τους ορισμούς των sin και cos. Πραγματικά: μόλις τώρα αρχίσαμε. Αυτό που ορίσαμε είναι το ημίτονο και το συνημίτονο μιας προσανατολισμένης γωνίας· αυτό που *θέλουμε* να ορίσουμε, είναι τα $\sin x$ και $\cos x$ για κάθε *αριθμό* x. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος για να το πετύχουμε βασίζεται στην αντιστοίχιση μιας γωνίας σε κάθε αριθμό. Η παλιότερη μέθοδος είναι να «μετράμε τις γωνίες με μοίρες». Μια γωνία «μιας ολόκληρης στροφής» αντιστοιχεί στο 360, μια γωνία «μισής στροφής» αντιστοιχεί στο 180, μια γωνία «στροφής ενός τετάρτου» στο 90, κτλ. (Σχήμα 6). Η γωνία που αντιστοιχεί, με αυτόν τον τρόπο, στον αριθμό x, λέγεται «η γωνία x μοιρών». Η γωνία των 0 μοιρών είναι η ίδια με τη γωνία των 360 μοιρών, και αυτή η αμφιβολία εσκεμμένα επεκτείνεται, δηλαδή μια γωνία 90 μοιρών είναι επίσης γωνία $360 + 90$ μοιρών, κτλ. Μπορεί τώρα να ορίσει κανείς μια συνάρτηση, που θα τη συμβολίζουμε με $\sin^\circ$, ως εξής:

$$\sin^\circ(x) = \text{το ημίτονο της γωνίας } x \text{ μοιρών.}$$

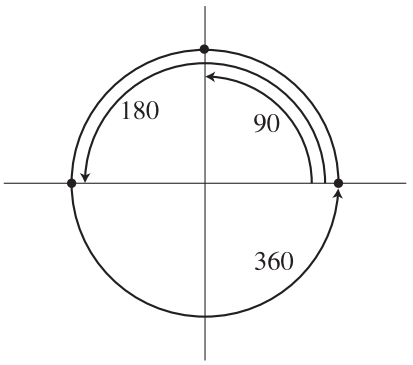


ΣΧΗΜΑ 5

Υπάρχουν δυο δυσκολίες σε αυτήν την προσέγγιση. Αν και μπορεί να είναι φανερό τι εννοούμε με μια γωνία 90 ή 45 μοιρών, δεν είναι και τόσο φανερό τι είναι μια γωνία $\sqrt{2}$ μοιρών, για παράδειγμα. Ακόμα και αν μπορούσαμε να παρακάμψουμε αυτήν τη δυσκολία, φαίνεται απίθανο αυτό το σύστημα να οδηγήσει σε κομψά αποτελέσματα, καθώς εξαρτάται από την τυχαία επιλογή του αριθμού 360 —θα ήταν τελείως συμπτωματικό η συνάρτηση $\sin^\circ$ να έχει «ευχάριστες» μαθηματικές ιδιότητες.

Η «μέτρηση σε rad (ακτίνια)» εμφανίζεται ικανή να θεραπεύσει αυτές τις ατέλειες. Αν δοθεί ένας αριθμός x, διαλέγουμε ένα σημείο P στον μοναδιαίο κύκλο, τέτοιο ώστε το μήκος του τόξου του κύκλου που αρχίζει από το $(1, 0)$ και καταλήγει με φορά αντίθετη του ρολογιού στο P, να είναι ίσο με x (Σχήμα 7). Η προσανατολισμένη γωνία που καθορίζεται από το P λέγεται «η γωνία των x rad». Αφού το μήκος ολόκληρου του κύκλου είναι 2π, η γωνία των x rad και η γωνία των $2\pi + x$ rad ταυτίζονται. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια συνάρτηση $\sin^r$ ως εξής:

$$\sin^r(x) = \text{το ημίτονο της γωνίας } x \text{ rad.}$$



ΣΧΗΜΑ 6

Η ίδια μέθοδος μπορεί εύκολα να υιοθετηθεί για να οριστεί και η $\sin^\circ$· αφού θέλουμε να ισχύει $\sin^\circ 360 = \sin^r 2\pi$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\sin^\circ x = \sin^r \frac{2\pi x}{360} = \sin^r \frac{\pi x}{180}.$$

Σύντομα θα καταργήσουμε τον δείκτη r στο $\sin^r$, μια και η $\sin^r$ (και όχι η $\sin^\circ$) είναι η μοναδική συνάρτηση που θα μας απασχολήσει· πριν το επιχειρήσουμε, επιβάλλεται μια μικρή προειδοποίηση.

Οι παραστάσεις $\sin^\circ x$ και $\sin^r x$ μερικές φορές γράφονται

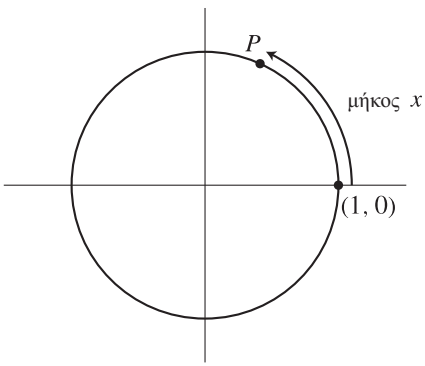
$$\sin x^\circ$$
$$\sin x \text{ σε rad,}$$

αλλά αυτός ο συμβολισμός είναι πολύ αποπροσανατολιστικός· ένας αριθμός x είναι απλώς ένας αριθμός —δεν κρατά μια σημαία που να υποδεικνύει ότι είναι «σε μοίρες» ή «σε rad». Αν η έννοια του συμβολισμού «$\sin x$» είναι αμφισβητούμενη, συνήθως ρωτά κανείς:

«Ο x είναι σε μοίρες ή σε rad;»

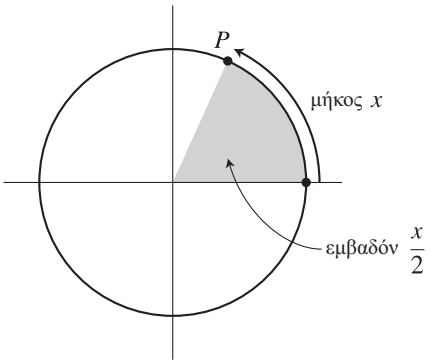
αλλά αυτό που εννοεί είναι:

«Εννοείτε «$\sin^\circ$» ή «$\sin^r$»;»



ΣΧΗΜΑ 7

Ακόμα και για μαθηματικούς που τους αρέσει η ακριβολογία, αυτές οι παρατηρήσεις μπορεί να φαίνονται περιττές, αλλά δεν θα έπρεπε, γιατί το να τις αγνοήσει κανείς μπορεί να τον οδηγήσει σε λαθεμένες απαντήσεις σε κάποια προβλήματα (ένα παράδειγμα δίνεται στο Πρόβλημα 19).

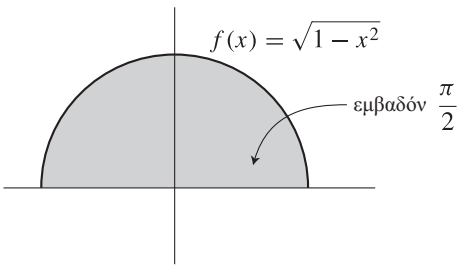


ΣΧΗΜΑ 8

Αν και η συνάρτηση $\sin^r$ είναι αυτή που θα θέλαμε να συμβολίζουμε απλώς με $\sin$ (και να τη χρησιμοποιούμε αποκλειστικά στο εξής), εμφανίζεται μια δυσκολία ακόμα και στον ορισμό της $\sin^r$. Ο ορισμός που προτείναμε βασίζεται στην έννοια του μήκους μιας καμπύλης. Αν και το μήκος μιας καμπύλης το έχουμε ορίσει σε διάφορα προβλήματα, είναι επίσης εύκολο να μετασχηματίσουμε τον ορισμό, παίρνοντας ως βάση το εμβαδόν. (Περιγράφουμε πώς μπορεί κανείς να χειριστεί το θέμα με βάση το μήκος στο Πρόβλημα 28.)

Έστω ότι x είναι το μήκος του τόξου του μοναδιαίου κύκλου από το $(1, 0)$ έως το P· άρα αυτό το τόξο περιέχει $x/2\pi$ από το συνολικό μήκος 2π της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου. Με S συμβολίζουμε τον «τομέα» που φαίνεται στο Σχήμα 8· ο S φράσσεται από τον μοναδιαίο κύκλο, τον οριζόντιο άξονα και την ημιευθεία που ορίζεται από τα $(0, 0)$ και P. Το εμβαδόν του S θα έπρεπε να είναι ίσο με $x/2\pi$ φορές το εμβαδόν του εσωτερικού του κύκλου, που περιμένουμε να είναι ίσο με π. Άρα ο S θα έπρεπε να έχει εμβαδόν

$$\frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}.$$



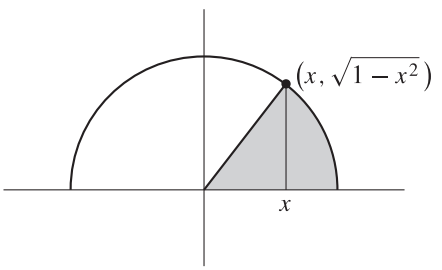
ΣΧΗΜΑ 9

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τα $\cos x$ και $\sin x$ ως τις συντεταγμένες του σημείου P που καθορίζει έναν τομέα εμβαδού $x/2$.

Με αυτές τις παρατηρήσεις ως υπόβαθρο, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στον αυστηρό ορισμό των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$. Ο πρώτος ορισμός ταυτίζει το π με το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου —ακριβέστερα, με το διπλάσιο του εμβαδού ενός ημικυκλίου (Σχήμα 9).

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\boldsymbol{\pi} = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

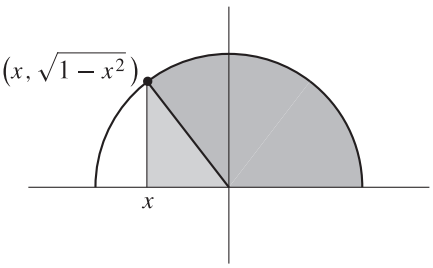


ΣΧΗΜΑ 10

(Ο ορισμός αυτός δεν παίζει διακοσμητικό ρόλο· για να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα χρειαστεί να ορίσουμε κατ' αρχήν τα $\sin x$ και $\cos x$ μόνο για $0 \le x \le \pi$.)

Ο δεύτερος ορισμός περιγράφει, για $-1 \le x \le 1$, το εμβαδόν $A(x)$ του τομέα που φράσσεται από τον μοναδιαίο κύκλο, τον οριζόντιο άξονα και την ημιευθεία που περνά από το $(x, \sqrt{1 - x^2})$. Αν $0 \le x \le 1$, το εμβαδόν αυτό μπορεί να εκφραστεί (Σχήμα 10) ως το άθροισμα του εμβαδού ενός τριγώνου και του εμβαδού μιας επιφάνειας που βρίσκεται κάτω από τον μοναδιαίο κύκλο:

$$\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$



ΣΧΗΜΑ 11

Ο ίδιος τύπος συμβαίνει να ισχύει και στην περίπτωση $-1 \le x \le 0$. Σε αυτήν την περίπτωση (Σχήμα 11), ο όρος

$$\frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

είναι αρνητικός, και παριστάνει το εμβαδόν του τριγώνου που πρέπει να αφαιρεθεί από τον όρο

$$\int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

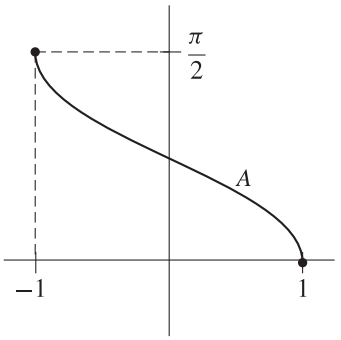
ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $-1 \le x \le 1$, τότε

$$\boldsymbol{A(x)} = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + \int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Παρατηρούμε ότι, αν $-1 < x < 1$, τότε η A παραγωγίζεται στο x και (χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού),

$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{1}{2}\left[x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^2 + (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right] - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1-2x^2-2(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 12

Παρατηρούμε επίσης (Σχήμα 12) ότι στο διάστημα $[-1, 1]$ η συνάρτηση A φθίνει από το

$$A(-1) = 0 + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$$

στο $A(1) = 0$. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της A, αλλά και από το γεγονός ότι η παραγωγός της είναι αρνητική στο $(-1, 1)$.

Για $0 \le x \le \pi$ θέλουμε να ορίσουμε τα $\cos x$ και $\sin x$ ως τις συντεταγμένες ενός σημείου $P = (\cos x, \sin x)$ το οποίο να βρίσκεται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και να καθορίζει έναν τομέα με εμβαδόν $x/2$ (Σχήμα 13). Με άλλα λόγια:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $0 \le x \le \pi$, τότε $\mathbf{\cos x}$ είναι ο μοναδικός αριθμός που βρίσκεται στο $[-1, 1]$ και ικανοποιεί την

$$A(\cos x) = \frac{x}{2}.$$

και

$$\mathbf{\sin x} = \sqrt{1-(\cos x)^2}.$$

Χρειάζεται βεβαίως κάποια σύντομη αιτιολόγηση για αυτόν τον ορισμό. Για να βεβαιωθούμε ότι *υπάρχει* ένας αριθμός y που να ικανοποιεί την $A(y) = x/2$, παίρνουμε υπόψη μας ότι η A είναι συνεχής, και παίρνει τις τιμές 0 και $\pi/2$. Αυτή η σιωπηρή προσφυγή στο Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής είναι κρίσιμη, αν θέλουμε ο προσωρινός μας ορισμός να είναι ακριβής. Έχοντας δώσει, και αιτιολογήσει, τον ορισμό μας, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε αρκετά γρήγορα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν $0 < x < \pi$, τότε

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= -\sin x, \\ \sin'(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν $B = 2A$, τότε ο ορισμός $A(\cos x) = x/2$ μπορεί να γραφεί

$$B(\cos x) = x.$$

με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\cos$ είναι απλώς η αντίστροφη της B. Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι

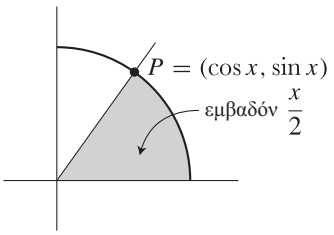
$$A'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$B'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= (B^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{B'(B^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{-\dfrac{1}{\sqrt{1-[B^{-1}(x)]^2}}}\\ &= -\sqrt{1-(\cos x)^2}\\ &= -\sin x.\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 13

Αφού

$$\sin x = \sqrt{1-(\cos x)^2},$$

μπορούμε επίσης να πάρουμε

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x\cdot\cos'(x)}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}\\ &= \frac{\cos x\sin x}{\sin x}\\ &= \cos x. \blacksquare\end{aligned}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πληροφορίες που περιέχονται στο Θεώρημα 1 για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις των sin και cos στο διάστημα $[0,\pi]$. Αφού

$$\cos'(x) = -\sin x < 0, \quad 0 < x < \pi,$$

η συνάρτηση cos φθίνει από το $\cos 0 = 1$ στο $\cos\pi = -1$ (Σχήμα 14). Συνεπώς, $\cos y = 0$ για ένα και μοναδικό y στο $[0,\pi]$. Για να βρούμε το y, παρατηρούμε ότι ο ορισμός της cos,

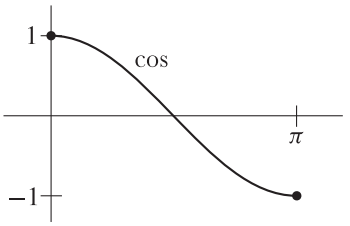
$$A(\cos x) = \frac{x}{2},$$

σημαίνει ότι

$$A(0) = \frac{y}{2},$$

άρα

$$y = 2\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt.$$



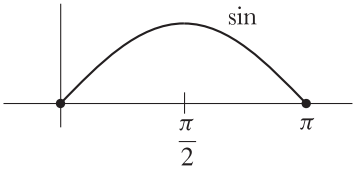
ΣΧΗΜΑ 14

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

άρα μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$y = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$



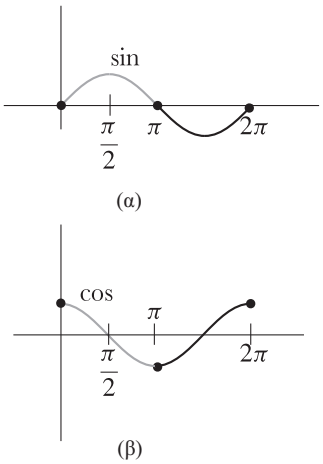
ΣΧΗΜΑ 15

Τώρα έχουμε

$$\sin'(x) = \cos x \begin{cases} > 0, & 0 < x < \pi/2\\ < 0, & \pi/2 < x < \pi,\end{cases}$$

άρα η sin είναι αύξουσα στο $[0,\pi/2]$, από το $\sin 0 = 0$ στο $\sin\pi/2 = 1$, και μετά είναι φθίνουσα στο $[\pi/2,\pi]$ με $\sin\pi = 0$ (Σχήμα 15).

Οι τιμές των $\sin x$ και $\cos x$ για x έξω από το $[0,\pi]$ ορίζονται πιο εύκολα σε δύο βήματα με μια διαδικασία συγκόλλησης.



ΣΧΗΜΑ 16

(1) Αν $\pi \leq x \leq 2\pi$, τότε

$$\sin x = -\sin(2\pi - x),$$
$$\cos x = \cos(2\pi - x).$$

Το Σχήμα 16 δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των sin και cos στο $[0, 2\pi]$.

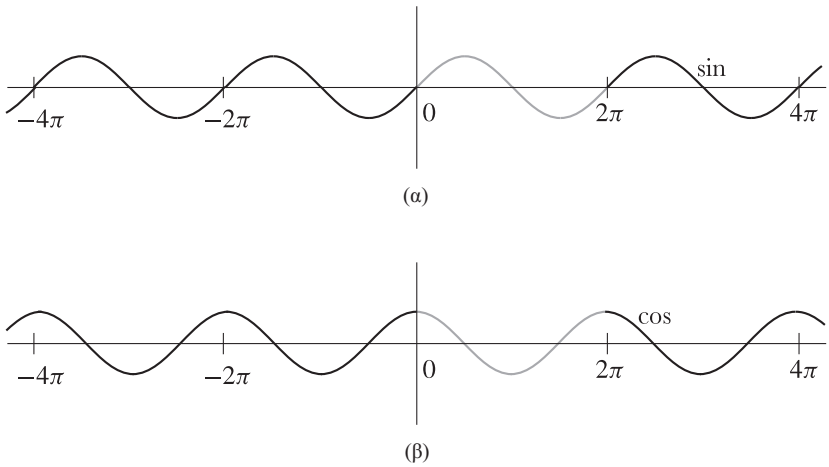
(2) Αν $x = 2\pi k + x'$ για κάποιον ακέραιο k, και κάποιο x' στο $[0, 2\pi]$, τότε

$$\sin x = \sin x',$$
$$\cos x = \cos x'.$$

Το Σχήμα 17 δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των sin και cos, ορισμένων τώρα σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$.

Έχοντας επεκτείνει τις συναρτήσεις sin και cos στο $\mathbf{R}$, πρέπει τώρα να ελέγξουμε ότι οι βασικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων εξακολουθούν να ισχύουν. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό είναι εύκολο. Για παράδειγμα, είναι φανερό ότι η εξίσωση

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$



ΣΧΗΜΑ 17

ισχύει για κάθε x. Ακόμα, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι

$$\sin'(x) = \cos x,$$
$$\cos'(x) = -\sin x,$$

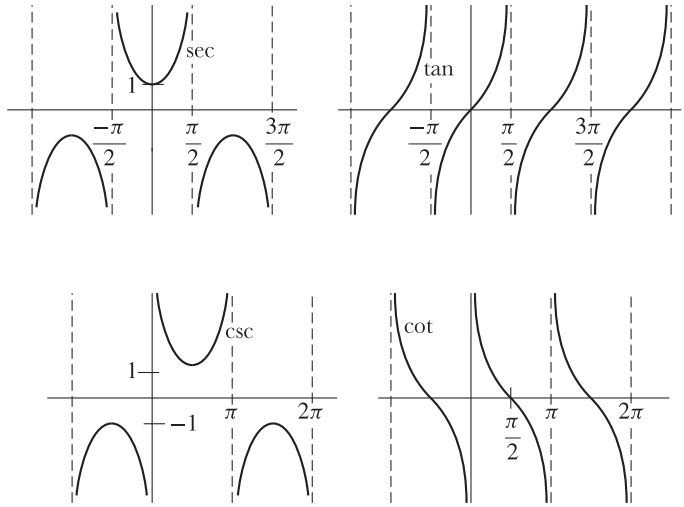
αν το x δεν είναι πολλαπλάσιο του π. Για παράδειγμα, αν $\pi < x < 2\pi$, τότε

$$\sin x = -\sin(2\pi - x),$$

άρα

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= -\sin'(2\pi - x) \cdot (-1)\\ &= \cos(2\pi - x)\\ &= \cos x.\end{aligned}$$

Αν το x είναι πολλαπλάσιο του π, καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα· αρκεί μόνο να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 11-7 για να συμπεράνουμε ότι οι ίδιοι τύποι ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση.



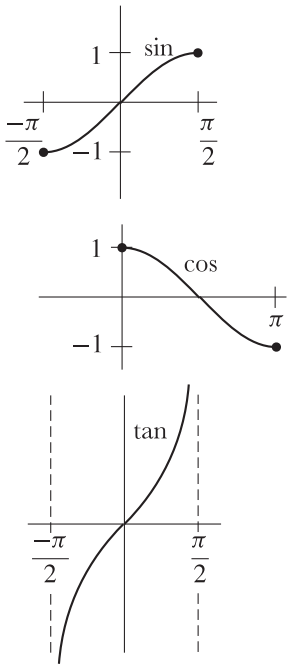
ΣΧΗΜΑ 18

Οι άλλες γνωστές τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία. Ορίζουμε

$$\left.\begin{aligned}\sec x &= \frac{1}{\cos x}\\ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\end{aligned}\right\} \quad x \neq k\pi + \pi/2,$$

$$\left.\begin{aligned}\csc x &= \frac{1}{\sin x}\\ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}\end{aligned}\right\} \quad x \neq k\pi.$$

Οι γραφικές παραστάσεις είναι σχεδιασμένες στο Σχήμα 18. Δεν είναι άσχημη ιδέα να προσπαθήσετε να πεισθείτε ότι, η γενική μορφή της κάθε γραφικής παράστασης μπορεί να προβλεφθεί από την παράγωγο της κάθε συνάρτησης, που δίνεται στο επόμενο θεώρημα (δεν υπάρχει λόγος να θυμάται κανείς τους ισχυρισμούς του θεωρήματος, αφού μπορεί να τους αποδείξει ξανά, οποτεδήποτε τους χρειαστεί.)



ΣΧΗΜΑ 19

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν $x \neq k\pi + \pi/2$, τότε

$$\sec'(x) = \sec x \tan x,$$
$$\tan'(x) = \sec^2 x.$$

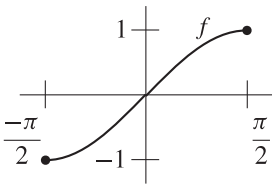
Αν $x \neq k\pi$, τότε

$$\csc'(x) = -\csc x \cot x,$$
$$\cot'(x) = -\csc^2 x.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφήνεται σε εσάς (απευθείας υπολογισμός). ∎

Μπορούμε επίσης εύκολα να βρούμε τις παραγώγους των αντίστροφων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι 1-1, επομένως είναι αναγκαίο να τις περιορίσουμε πρώτα σε κατάλληλα διαστήματα· το μεγαλύτερο δυνατό μήκος που μπορούμε να πετύχουμε είναι π, και συνήθως διαλέγουμε τα διαστήματα (Σχήμα 19)

$[-\pi/2, \pi/2]$ για την sin,
$[0, \pi]$ για την cos,



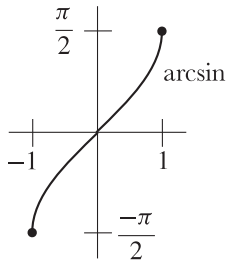
$(-\pi/2, \pi/2)$ για την $\tan$.

(Οι αντίστροφες των άλλων τριγωνομετρικών συναρτήσεων χρησιμοποιούνται τόσο σπάνια που δεν θα τις συζητήσουμε καθόλου εδώ.)

Η αντίστροφη της συνάρτησης

$$f(x) = \sin x, \qquad -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

συμβολίζεται με **arcsin** (Σχήμα 20)· πεδίο ορισμού της $\arcsin$ είναι το $[-1, 1]$. Αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\sin^{-1}$ γιατί η $\arcsin$ δεν είναι η αντίστροφη της $\sin$ (που δεν είναι 1-1), αλλά της περιορισμένης συνάρτησης f· Ορισμένες φορές η συνάρτηση αυτή f συμβολίζεται με Sin και η $\arcsin$ με Sin^{-1}.



ΣΧΗΜΑ 20

Η αντίστροφη της συνάρτησης

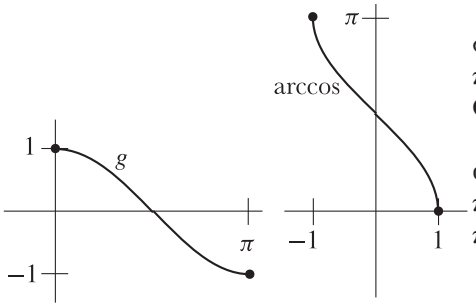
$$g(x) = \cos x, \qquad 0 \le x \le \pi$$

συμβολίζεται με **arccos** (Σχήμα 21)· το πεδίο ορισμού της $\arccos$ είναι το $[-1, 1]$. Ορισμένες φορές η g συμβολίζεται με Cos, και η $\arccos$ με Cos^{-1}.

Η αντίστροφη της συνάρτησης

$$h(x) = \tan x, \qquad -\pi/2 < x < \pi/2$$

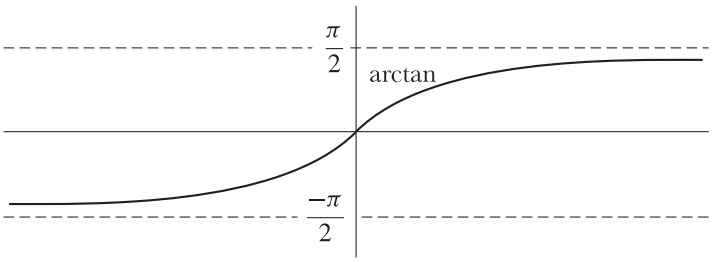
συμβολίζεται με **arctan** (Σχήμα 22)· η $\arctan$ είναι ένα από τα απλούστερα παραδείγματα παραγωγίσιμης συνάρτησης που είναι φραγμένη, αν και είναι 1-1 σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$. Ορισμένες φορές η συνάρτηση h συμβολίζεται με Tan, και η $\arctan$ με Tan^{-1}.



ΣΧΗΜΑ 21

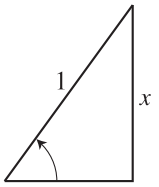
Οι παράγωγοι των αντιστρόφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι εκπληκτικά απλές και δεν έχουν καμία σχέση με τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Το να βρούμε τις παραγώγους είναι απλή υπόθεση, αλλά για να τις εκφράσουμε σε μια κατάλληλη μορφή πρέπει να απλουστεύσουμε εκφράσεις σαν τις

$$\cos(\arcsin x), \qquad \sec(\arctan x).$$



ΣΧΗΜΑ 22

Μια μικρή εικόνα είναι ο καλύτερος τρόπος για να θυμάται κανείς τις σωστές απλοποιήσεις. Για παράδειγμα, το Σχήμα 23 δείχνει μια προσανατολισμένη γωνία της οποίας το ημίτονο είναι x —η γωνία που δείχνουμε είναι λοιπόν μια γωνία $(\arcsin x)$ ακτινίων· επομένως το $\cos(\arcsin x)$ είναι το μήκος της άλλης πλευράς, και συγκεκριμένα, $\sqrt{1-x^2}$. Πάντως, στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος δεν θα καταφύγουμε σε τέτοιες εικόνες.



ΣΧΗΜΑ 23

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν $-1 < x < 1$, τότε

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ακόμα, για κάθε x έχουμε

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= (f^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}\\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.\end{aligned}$$

Τώρα

$$[\sin(\arcsin x)]^2 + [\cos(\arcsin x)]^2 = 1,$$

δηλαδή

$$x^2 + [\cos(\arcsin x)]^2 = 1\cdot$$

επομένως

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(Πρέπει να πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα γιατί το $\arcsin x$ ανήκει στο $(-\pi/2, \pi/2)$, επομένως $\cos(\arcsin x) > 0$.) Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο τύπο.

Η δεύτερη σχέση έχει ήδη αποδειχθεί (στην απόδειξη του Θεωρήματος 1). Μπορούμε επίσης να μιμηθούμε την απόδειξη για την πρώτη σχέση, σαν μια καλή άσκηση, αν εκείνη η απόδειξη παρουσίασε δυσκολίες. Η τρίτη σχέση αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= (h^{-1})'(x)\\ &= \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)}\\ &= \frac{1}{\sec^2(\arctan x)}\end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ταυτότητας

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

με $\cos^2 a$ παίρνουμε

$$\tan^2 a + 1 = \sec^2 a.$$

Έπεται ότι

$$[\tan(\arctan x)]^2 + 1 = \sec^2(\arctan x),$$

ή

$$x^2 + 1 = \sec^2(\arctan x),$$

που αποδεικνύει την τρίτη σχέση. ∎

Η παραδοσιακή απόδειξη της σχέσης $\sin'(x) = \cos x$ (τελείως διαφορετική από αυτήν που δίνουμε εδώ) περιγράφεται στο Πρόβλημα 27. Αυτή η απόδειξη βασίζεται στο να δείξουμε πρώτα το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

και στην «ταυτότητα της πρόσθεσης»

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Τώρα που οι παράγωγοι των sin και cos είναι γνωστές, μπορούμε να δείξουμε εύκολα και τις δύο ισότητες. Η πρώτη είναι απλώς η ειδική περίπτωση $\sin'(0) = \cos 0$. Η δεύτερη

στηρίζεται σε έναν όμορφο χαρακτηρισμό των συναρτήσεων sin και cos. Για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα, χρειαζόμαστε ένα λήμμα που η απόδειξή του απαιτεί ένα έξυπνο τέχνασμα· θα δώσουμε μια πιο άμεση απόδειξη στο 4ο Μέρος.

ΛΗΜΜΑ Έστω ότι η f έχει παντού δεύτερη παράγωγο και

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Τότε $f = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της πρώτης εξίσωσης με f' παίρνουμε

$$f'f'' + ff' = 0.$$

Άρα

$$[(f')^2 + f^2]' = 2(f'f'' + ff') = 0,$$

επομένως η $(f')^2 + f^2$ είναι σταθερή συνάρτηση. Από τις $f(0) = 0$ και $f'(0) = 0$ έπεται ότι η σταθερά είναι το 0· άρα

$$[f'(x)]^2 + [f(x)]^2 = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$f(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x. \ \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν η f έχει παντού δεύτερη παράγωγο και

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= a, \\ f'(0) &= b, \end{aligned}$$

τότε

$$f = b \cdot \sin + a \cdot \cos.$$

(Ειδικότερα, αν $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, τότε $f = \sin$· αν $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$, τότε $f = \cos$.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε

$$g(x) = f(x) - b\sin x - a\cos x.$$

Τότε

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) - b\cos x + a\sin x, \\ g''(x) &= f''(x) + b\sin x + a\cos x. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} g'' + g &= 0, \\ g(0) &= 0, \\ g'(0) &= 0, \end{aligned}$$

πράγμα που δείχνει ότι

$$0 = g(x) = f(x) - b\sin x - a\cos x, \qquad \text{για κάθε } x. \ \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Αν x και y είναι δύο αριθμοί, τότε

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για κάθε συγκεκριμένο αριθμό y, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f μέσω της

$$f(x) = \sin(x+y).$$

Τότε

$$f'(x) = \cos(x+y)$$
$$f''(x) = -\sin(x+y).$$

Επομένως,

$$f'' + f = 0,$$
$$f(0) = \sin y,$$
$$f'(0) = \cos y.$$

Από το Θεώρημα 4 έπεται ότι

$$f = (\cos y)\cdot \sin + (\sin y)\cdot \cos \cdot$$

δηλαδή,

$$\sin(x+y) = \cos y \sin x + \sin y \cos x, \qquad \text{για κάθε } x.$$

Αφού θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με οποιοδήποτε y, έχει αποδειχθεί η πρώτη σχέση για όλα τα x και y.

Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. ∎

Ως επιστέγασμα αυτού του κεφαλαίου, και ως πρόλογο στο Κεφάλαιο 18, θα αναφέρουμε μια εναλλακτική προσέγγιση στον ορισμό της συνάρτησης sin. Αφού

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{για } -1 < x < 1,$$

από το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έπεται ότι

$$\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε αυτήν την εξίσωση για *ορισμό* της arcsin. Άμεσα θα προέκυπτε ότι

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Τότε θα μπορούσαμε να ορίσουμε τη συνάρτηση sin ως $(\arcsin)^{-1}$ και ο τύπος για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης θα έδειχνε ότι

$$\sin'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

το οποίο θα ορίζαμε ως $\cos x$. Τελικά, θα μπορούσε να δείξει κανείς ότι $A(\cos x) = x/2$, καταλήγοντας, στο τέλος της ανάπτυξης στον ορισμό με τον οποίο αρχίσαμε. Αν και ένα μεγάλο μέρος της παρουσίασης θα προχωρούσε πιο γρήγορα, ο ορισμός θα έμενε χωρίς αιτιολόγηση· μπορεί ο συγγραφέας να είχε κατά νου τη λογική των ορισμών, αλλά όχι και ο φοιτητής, στον οποίο θα απευθυνόταν! Παρ' όλα αυτά, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 18, μια τέτοια προσέγγιση είναι μερικές φορές πραγματικά πολύ λογική.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Παραγωγίστε τις εξής συναρτήσεις.

(i) $f(x) = \arctan(\arctan(\arctan x))$.

(ii) $f(x) = \arcsin(\arctan(\arccos x))$.

(iii) $f(x) = \arctan(\tan x \arctan x)$.

(iv) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2. Υπολογίστε με τον Κανόνα του l'Hôpital τα εξής όρια:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + x^3/6}{x^3}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + x^3/6}{x^4}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^2}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^4}$.

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x + x^3/3}{x^3}$.

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(α) Βρείτε την $f'(0)$.

(β) Βρείτε την $f''(0)$.

Σε αυτό το σημείο, είναι σχεδόν βέβαιο ότι θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hôpital, αλλά στο Κεφάλαιο 24 θα μπορούμε να βρούμε την $f^{(k)}(0)$ για κάθε k, χωρίς να κουραστούμε καθόλου.

4. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις

(α) $f(x) = \sin 2x$.

(β) $f(x) = \sin(x^2)$. (Μπορούμε να πάρουμε ένα πολύ αξιοπρεπές σκίτσο αυτής της γραφικής παράστασης χρησιμοποιώντας μόνο τη γραφική παράσταση της sin. Για να πούμε την αλήθεια, η φαντασία είναι η μόνη σας ελπίδα σε αυτό το πρόβλημα, γιατί το να προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$ δεν είναι ευκολότερο από το να προσδιορίσουμε τη συμπεριφορά της ίδιας της f. Ο τύπος της $f'(x)$, όμως, υποδεικνύει ένα σημαντικό στοιχείο — $f'(0) = 0$, που πρέπει να ισχύει αφού η f είναι άρτια, και θα πρέπει να είναι φανερό στη γραφική σας παράσταση.)

(γ) $f(x) = \sin x + \sin 2x$. (Ίσως σας βοηθήσει να σχεδιάσετε πρώτα τις γραφικές παραστάσεις των $g(x) = \sin x$ και $h(x) = \sin 2x$ προσεκτικά στο ίδιο σύστημα αξόνων, από το 0 έως το 2π, και να μαντέψετε με τι θα μοιάζει το άθροισμα. Μπορείτε εύκολα να βρείτε πόσα κρίσιμα σημεία έχει η f στο $[0, 2\pi]$ εξετάζοντας την παράγωγο της f. Μπορείτε έπειτα να εξακριβώσετε τη φύση αυτών των κρίσιμων σημείων βρίσκοντας το πρόσημο της f σε κάθε σημείο· το σχέδιό σας πιθανότατα θα δίνει την απάντηση).

(δ) $f(x) = \tan x - x$. (Πρώτα εξετάστε τη συμπεριφορά της f στο $(-\pi/2, \pi/2)$· στα διαστήματα $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ η γραφική παράσταση της f θα είναι ακριβώς η ίδια, μόνο που θα έχει μετακινηθεί κατά τι. Γιατί;)

(ε) $f(x) = \sin x - x$. (Το υλικό του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 11 θα σας είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για αυτήν τη συνάρτηση.)

(στ) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(Από το μέρος (δ) θα πρέπει να είστε σε θέση να εντοπίσετε τις ρίζες της f' κατά προσέγγιση. Παρατηρήστε ότι η f είναι άρτια και συνεχής στο 0· εξετάστε ακόμα το μέγεθος της f για μεγάλα x.)

(ζ) $f(x) = x \sin x$.

∗**5.** Η *υπερβολική σπείρα* είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(\theta) = a/\theta$ σε πολικές συντεταγμένες (Κεφάλαιο 4, Παράρτημα 3). Σχεδιάστε αυτήν την καμπύλη, προσέχοντας ιδιαίτερα τη συμπεριφορά της για θ κοντά στο 0.

6. Αποδείξτε τον τύπο της πρόσθεσης για την cos.

7. (α) Από τον τύπο της πρόσθεσης για τις sin και cos συνάγετε τύπους για τα: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin 3x$ και $\cos 3x$.

(β) Χρησιμοποιήστε αυτούς τους τύπους για να βρείτε τις εξής τιμές των τριγωνομετρικών συναρτήσεων (που συνήθως αποδεικνύονται με γεωμετρικά επιχειρήματα στη στοιχειώδη Τριγωνομετρία):

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\tan \frac{\pi}{4} = 1,$$
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8. (α) Δείξτε ότι το $A \sin(x + B)$ γράφεται ως $a \sin x + b \cos x$ για κατάλληλα a και b. (Ένα από τα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου δίνει μια απόδειξη της μιας γραμμής. Θα έπρεπε επίσης να μπορείτε να υπολογίσετε τα a και b.)

(β) Αντίστροφα, για δοθέντα a και b, βρείτε αριθμούς A και B, τέτοιους ώστε $a \sin x + b \cos x = A \sin(x + B)$ για κάθε x.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να σχεδιάσετε την $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

9. (α) Αποδείξτε ότι

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

με τον όρο ότι τα x, y και $x + y$ δεν είναι της μορφής $k\pi + \pi/2$. (Χρησιμοποιήστε τους τύπους της πρόσθεσης για τις sin και cos.)

(β) Αποδείξτε ότι

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right),$$

θέτοντας τους απαραίτητους περιορισμούς για τα x και y. Υπόδειξη: Αντικαταστήστε το x με $\arctan x$ και το y με $\arctan y$ στο μέρος (α).

10. Αποδείξτε ότι

$$\arcsin\alpha + \arcsin\beta = \arcsin\bigl(\alpha\sqrt{1-\beta^2} + \beta\sqrt{1-\alpha^2}\,\bigr),$$

επισημαίνοντας τυχόν περιορισμούς στα α και β.

11. Αποδείξτε ότι, αν m και n είναι τυχαίοι αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned}
\sin mx \sin nx &= \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],\\
\sin mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],\\
\cos mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].
\end{aligned}$$

12. Αποδείξτε ότι, αν m και n είναι φυσικοί αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}\\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n, \end{cases}\\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx &= 0.
\end{aligned}$$

Αυτές οι σχέσεις είναι πολύ σημαντικές στη θεωρία των σειρών Fourier. Αν και σε αυτό το θέμα θα δώσουμε προσοχή μόνο στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία (βλ. την αναφορά [26]), το επόμενο πρόβλημα είναι μια ένδειξη για τη σημασία τους.

13. (α) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$, δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή του

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\cos nx)^2\,dx$$

συμβαίνει όταν

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

και η ελάχιστη τιμή του

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - a\sin nx)^2\,dx$$

όταν

$$a = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

(Σε κάθε περίπτωση, φέρτε το a έξω από το σύμβολο της ολοκλήρωσης, παίρνοντας μια τετραγωνική παράσταση ως προς a.)

(β) Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}$$

Δείξτε ότι, αν c_i και d_i είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} c_n \cos nx + d_n \sin nx \right] \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx - 2\pi\left(\frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_nc_n + b_nd_n\right) + \pi\left(\frac{{c_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} {c_n}^2 + {d_n}^2\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2\,dx - \pi\left(\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} {a_n}^2 + {b_n}^2\right) + \pi\left(\left(\frac{c_0}{\sqrt{2}} - \frac{a_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \sum_{n=1}^{N}(c_n - a_n)^2 + (d_n - b_n)^2\right),$$

δείχνοντας έτσι ότι το πρώτο ολοκλήρωμα ελαχιστοποιείται όταν $a_i = c_i$ και $b_i = d_i$. Με άλλα λόγια, ανάμεσα σε όλους τους «γραμμικούς συνδυασμούς», των συναρτήσεων $s_n(x) = \sin nx$ και $c_n(x) = \cos nx$ για $1 \le n \le N$, η συγκεκριμένη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

είναι η πιο «κοντινή» στην f στο $[-\pi, \pi]$.

14. (α) Βρείτε έναν τύπο για την $\sin x + \sin y$. (Σημειώστε ότι αυτός δίνει έναν τύπο για το $\sin x - \sin y$.) Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα έναν τύπο για το $\sin(a+b) + \sin(a-b)$. Τί καλό έχει αυτό;

(β) Βρείτε επίσης έναν τύπο για το $\cos x + \cos y$ και το $\cos x - \cos y$.

15. (α) Ξεκινώντας από τον τύπο για το $\cos 2x$, αποδείξτε τύπους για τα $\sin^2 x$ και $\cos^2 x$ συναρτήσει του $\cos 2x$.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \text{και} \quad \sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

για $0 \le x \le \pi/2$.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να βρείτε τα $\displaystyle\int_a^b \sin^2 x\,dx$ και $\displaystyle\int_a^b \cos^2 x\,dx$.

(δ) Σχεδιάστε την $f(x) = \sin^2 x$.

16. Βρείτε το $\sin(\arctan x)$ και το $\cos(\arctan x)$ ως παραστάσεις που δεν περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Υπόδειξη: η $y = \arctan x$ σημαίνει ότι $x = \tan y = \sin y/\cos y = \sin y/\sqrt{1-\sin^2 y}$.

17. Αν $x = \tan u/2$, εκφράστε τα $\sin u$ και $\cos u$ συναρτήσει του x. (Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 16· οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι πολύ απλές παραστάσεις.)

18. (α) Αποδείξτε ότι $\sin(x + \pi/2) = \cos x$. (Ως τώρα σχεδιάζαμε τις γραφικές παραστάσεις των sin και cos σαν να το είχαμε υπόψη μας.)

(β) Με τί είναι ίσα το $\arcsin(\cos x)$ και το $\arccos(\sin x)$;

19. (α) Βρείτε το $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$. Υπόδειξη: Η απάντηση δεν είναι 45.

(β) Βρείτε το $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

20. Βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$.

21. (α) Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\sin^\circ$ και $\cos^\circ$ ως $\sin^\circ(x) = \sin(\pi x/180)$ και $\cos^\circ(x) = \cos(\pi x/180)$. Βρείτε την $(\sin^\circ)'$ και την $(\cos^\circ)'$ συναρτήσει των ίδιων αυτών συναρτήσεων.

(β) Βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^\circ x}{x}$ και το $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin^\circ\frac{1}{x}$.

22. Αποδείξτε ότι κάθε σημείο του μοναδιαίου κύκλου είναι της μορφής $(\cos\theta, \sin\theta)$ για τουλάχιστον έναν (και επομένως για άπειρους) αριθμούς θ.

23. (α) Αποδείξτε ότι ο π είναι το μέγιστο δυνατό μήκος ενός διαστήματος στο οποίο η $\sin$ να είναι 1-1, και ότι ένα τέτοιο διάστημα πρέπει να είναι της μορφής $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2]$ ή $[2k\pi + \pi/2, 2(k+1)\pi - \pi/2]$.

(β) Θέτουμε $g(x) = \sin x$ για x στο $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$. Ποια είναι η $(g^{-1})'$;

24. Έστω $f(x) = \sec x$ για $0 \le x \le \pi$. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

25. Αποδείξτε ότι $|\sin x - \sin y| < |x - y|$ για οποιουσδήποτε αριθμούς $x \neq y$. Υπόδειξη: Ο ίδιος ισχυρισμός, αν αντικαταστήσουμε το $<$ με $\le$, είναι άμεση συνέπεια ενός πολύ γνωστού θεωρήματος· με κάποιους απλούς συμπληρωματικούς συλλογισμούς μπορείτε έπειτα να βελτιώσετε το $\le$ σε $<$.

∗**26.** Είναι μια καλή δοκιμή για τη διαίσθησή σας να προβλέψετε την τιμή του

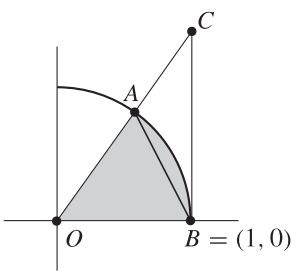
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx.$$

Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ίσως πιο προσιτές στη διαίσθηση, αλλά αν σας έρθει η σωστή ιδέα της απόδειξης, μπορείτε εύκολα να υπολογίσετε το όριο για κάθε ολοκληρώσιμη f.

(α) Δείξτε ότι $\lim_{\lambda\to\infty}\int_c^d \sin\lambda x\,dx = 0$, υπολογίζοντας ακριβώς το ολοκλήρωμα.

(β) Δείξτε ότι, αν s είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση στο $[a,b]$ (με την ορολογία του Προβλήματος 13-26), τότε $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b s(x)\sin\lambda x\,dx = 0$.

(γ) Τέλος, χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 13-26 για να δείξετε ότι $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0$ για κάθε συνάρτηση f που είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αυτό το αποτέλεσμα, όπως και το Πρόβλημα 12, παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των σειρών Fourier· είναι γνωστό ως Λήμμα Riemann-Lebesgue.



ΣΧΗΜΑ 24

27. Αυτό το πρόβλημα περιγράφει την κλασική θεωρία σχετικά με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ο σκιασμένος κυκλικός τομέας στο Σχήμα 24 έχει εμβαδόν $x/2$.

(α) Θεωρώντας τα τρίγωνα OAB και OCB αποδείξτε ότι, αν $0 < x < \pi/4$, τότε

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

(β) Συμπεράνετε ότι

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

και αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το όριο για να βρείτε το

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}.$$

(δ) Χρησιμοποιώντας τα μέρη (β) και (γ), και τον τύπο της πρόσθεσης για τη $\sin$, βρείτε τη $\sin'(x)$, αρχίζοντας από τον ορισμό της παραγώγου.

∗**28.** Αυτό το πρόβλημα δίνει μια αντιμετώπιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με χρήση της έννοιας του μήκους και του Προβλήματος 13-25. Έστω $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για $-1 \le x \le 1$. Ορίζουμε $\mathscr{L}(x)$ το μήκος της f στο $[x, 1]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\mathscr{L}(x) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

(Πρόκειται για γενικευμένο ολοκλήρωμα, όπως το ορίσαμε στο Πρόβλημα 14-28, επομένως πρέπει πρώτα να αποδείξετε τον αντίστοιχο ισχυρισμό για το μήκος στο $[x, 1-\varepsilon]$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\mathscr{L}(x)$ είναι το όριο αυτών των μηκών καθώς $\varepsilon \to 0^+$.)

(β) Δείξτε ότι

$$\mathscr{L}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{για } -1 < x < 1.$$

(γ) Ορίζουμε ως π το $\mathscr{L}(-1)$. Για $0 \le x \le \pi$, ορίζουμε το $\cos x$ από την $\mathscr{L}(\cos x) = x$, και ορίζουμε $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Αποδείξτε ότι $\cos'(x) = -\sin x$ και $\sin'(x) = \cos x$ για $0 < x < \pi$.

∗**29.** Μέχρι τώρα αναφέραμε με συντομία στο κείμενο και μια άλλη ανάπτυξη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων —ξεκινώντας με τις αντίστροφες συναρτήσεις, ορισμένες από ολοκληρώματα. Είναι πιο εύκολο να αρχίσουμε με την $\arctan$, γιατί αυτή η συνάρτηση ορίζεται για κάθε x. Για να λύσετε αυτό το πρόβλημα, υποκριθείτε ότι δεν έχετε ακούσει ποτέ για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

(α) Έστω $\alpha(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-1}\, dt$. Αποδείξτε ότι η α είναι περιττή και αύξουσα, και ότι το $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$ και το $\lim_{x\to-\infty} \alpha(x)$ υπάρχουν και τα δύο, και είναι αντίθετα. Αν ορίσουμε $\pi = 2 \lim_{x\to\infty} \alpha(x)$, τότε η α^{-1} ορίζεται στο $(-\pi/2, \pi/2)$.

(β) Δείξτε ότι $(\alpha^{-1})'(x) = 1 + [\alpha^{-1}(x)]^2$.

(γ) Για $-\pi/2 < x < \pi/2$, ορίζουμε $\tan x = \alpha^{-1}(x)$. Κατόπιν ορίζουμε $\sin x = \tan x / \sqrt{1+\tan^2 x}$. Αποδείξτε ότι

(i) $\lim_{x\to\pi/2^-} \sin x = 1$

(ii) $\lim_{x\to-\pi/2^+} \sin x = -1$

(iii) $\sin'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\tan x}, & -\pi/2 < x < \pi/2 \text{ και } x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(iv) $\sin''(x) = -\sin x$ για $-\pi/2 < x < \pi 2$.

∗**30.** Αν έχουμε τη διάθεση να δεχθούμε ότι κάποιες διαφορικές εξισώσεις έχουν λύση, τότε και άλλη μία προσέγγιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι δυνατή. Υποθέστε, συγκεκριμένα, ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση y_0 που δεν είναι παντού 0 και η οποία ικανοποιεί την $y_0'' + y_0 = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η ${y_0}^2 + ({y_0}')^2$ είναι σταθερή, και συμπεράνετε ότι $y_0(0) \neq 0$ ή ${y_0}'(0) \neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση s που ικανοποιεί την $s'' + s = 0$ με $s(0) = 0$ και $s'(0) = 1$. Υπόδειξη: Δοκιμάστε s της μορφής $ay_0 + b{y_0}'$.

Αν ορίσουμε $\sin = s$ και $\cos = s'$, τότε σχεδόν όλα όσα ξέρουμε για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις γίνονται τετριμμένα. Υπάρχει όμως ένα σημείο που απαιτεί κόπο —να παραγάγουμε τον αριθμό π. Αυτό γίνεται πιο εύκολα, αν χρησιμοποιήσουμε μια άσκηση από το Παράρτημα του Κεφαλαίου 11:

(γ) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 6 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 11 για να αποδείξετε ότι το $\cos x$ δεν μπορεί να είναι θετικό για κάθε $x > 0$. Έπεται ότι υπάρχει ένα ελάχιστο $x_0 > 0$ με $\cos x_0 = 0$, και μπορούμε να ορίσουμε $\pi = 2x_0$.

(δ) Αποδείξτε ότι $\sin \pi/2 = 1$. (Αφού $\sin^2 + \cos^2 = 1$, έχουμε $\sin \pi/2 = \pm 1$· το πρόβλημα είναι να αποφασίσετε γιατί το $\sin \pi/2$ είναι θετικό.)

(ε) Βρείτε τα $\cos \pi$, $\sin \pi$, $\cos 2\pi$ και $\sin 2\pi$. (Φυσικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιονδήποτε τύπο για την πρόσθεση, αφού οι αποδείξεις τους βασίζονται στους τύπους $\sin' = \cos$ και $\cos' = -\sin$.)

(στ) Αποδείξτε ότι η $\cos$ και η $\sin$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

31. (α) Μετά από όλη την εργασία που κάναμε για να ορίσουμε τη $\sin$, θα ήταν εξοργιστικό να ανακαλύψουμε ότι η $\sin$ είναι τελικά ρητή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι δεν είναι. (Υπάρχει μια απλή ιδιότητα της $\sin$ που δεν μπορεί να την έχει μια ρητή συνάρτηση.)

(β) Αποδείξτε ότι η $\sin$ δεν ορίζεται ούτε καν πεπλεγμένα από μια αλγεβρική εξίσωση· δηλαδή, δεν υπάρχουν ρητές συναρτήσεις $f_0, \ldots, f_{n-1}$ τέτοιες ώστε

$$(\sin x)^n + f_{n-1}(x)(\sin x)^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x.$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $f_0 = 0$, άρα η $\sin x$ μπορεί να βγει ως κοινός παράγοντας. Ο παράγοντας που απομένει είναι 0, εκτός ίσως από τα πολλαπλάσια του π. Αλλά αυτό σημαίνει ότι είναι 0 για κάθε x. (Γιατί;) Είστε τώρα έτοιμοι για μια απόδειξη με επαγωγή.

∗**32.** Έστω ότι οι ϕ_1 και ϕ_2 ικανοποιούν τις

$$\phi_1'' + g_1\phi_1 = 0,$$
$$\phi_2'' + g_2\phi_2 = 0,$$

και ότι $g_2 > g_1$.

(α) Δείξτε ότι

$$\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1 - (g_2 - g_1)\phi_1\phi_2 = 0.$$

(β) Δείξτε ότι αν $\phi_1(x) > 0$ και $\phi_2(x) > 0$ για κάθε x στο (a, b), τότε

$$\int_a^b [\phi_1''\phi_2 - \phi_2''\phi_1] > 0,$$

και συμπεράνετε ότι

$$[\phi_1'(b)\phi_2(b) - \phi_1'(a)\phi_2(a)] - [\phi_1(b)\phi_2'(b) - \phi_1(a)\phi_2'(a)] > 0.$$

(γ) Δείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να έχουμε $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$. Υπόδειξη: Εξετάστε το πρόσημο των $\phi_1'(a)$ και $\phi_1'(b)$.

(δ) Δείξτε ότι οι ισότητες $\phi_1(a) = \phi_1(b) = 0$ είναι επίσης αδύνατες αν $\phi_1 > 0$, $\phi_2 < 0$ ή $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$ ή $\phi_1 < 0$, $\phi_2 < 0$ στο (a, b). (Θα έπρεπε να μπορείτε να το κάνετε σχεδόν χωρίς επιπλέον δουλειά.)

Το τελικό συμπέρασμα αυτού του προβλήματος διατυπώνεται ως εξής: αν a και b είναι διαδοχικές ρίζες της ϕ_1, τότε η ϕ_2 πρέπει να έχει μια ρίζα κάπου ανάμεσα στο a και στο b. Αυτό το αποτέλεσμα, σε μια ελαφρώς γενικότερη μορφή, είναι γνωστό ως Θεώρημα Σύγκρισης του Sturm. Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + (x + 1)y = 0$$

πρέπει να έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε οποιοδήποτε διάστημα $(n\pi, (n+1)\pi)$.

33. (α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το $\sin x - \sin y$ του Προβλήματος 14, δείξτε ότι

$$\sin(k + \tfrac{1}{2})x - \sin(k - \tfrac{1}{2})x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx.$$

(β) Συμπεράνετε ότι

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \dfrac{x}{2}}.$$

Όπως με δύο άλλα αποτελέσματα σε αυτήν τη συλλογή των προβλημάτων, η πιο πάνω εξίσωση είναι πολύ σημαντική στη μελέτη των σειρών Fourier και τη χρησιμοποιούμε επίσης στα Προβλήματα 19-43 και 23-22.

(γ) Ομοίως, αποδείξτε τον τύπο

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\left(\dfrac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\dfrac{n}{2}x\right)}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

(Ένας πιο φυσικός τρόπος να εξαγάγουμε αυτούς τους τύπους θα εμφανιστεί στο Πρόβλημα 27-14).

(δ) Χρησιμοποιήστε τα μέρη (β) και (γ) για να βρείτε τα $\int_0^b \sin x\, dx$ και $\int_0^b \cos x\, dx$ απευθείας από τον ορισμό του ολοκληρώματος.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16 Ο π ΕΙΝΑΙ ΑΡΡΗΤΟΣ

Αυτό το μικρό κεφάλαιο, που αποκλίνει από τον κύριο κορμό του βιβλίου, συμπεριλαμβάνεται για να αποδείξει ότι είμαστε ήδη σε θέση να επιχειρήσουμε κάποια μαθηματικά επινοήματα. Ολόκληρο το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε μια στοιχειώδη απόδειξη του ότι ο π είναι άρρητος. Όπως και σε πολλές άλλες «στοιχειώδεις» αποδείξεις θεωρημάτων με μεγάλο βάθος, ο τρόπος σκέψης που οδήγησε στα βήματα της απόδειξής μας δεν μπορεί να αιτιολογηθεί· παρ' όλα αυτά, μπορεί κανείς, πιθανότατα, να παρακολουθήσει την απόδειξη βήμα προς βήμα.

Πρέπει να διατυπώσουμε δύο παρατηρήσεις πριν από την απόδειξη. Η πρώτη αφορά στη συνάρτηση

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

η οποία προφανώς ικανοποιεί την

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \quad \text{για } 0 < x < 1.$$

Μια σπουδαία ιδιότητα της συνάρτησης f_n αποκαλύπτεται αν εξετάσουμε την παράσταση που παίρνουμε εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό $x^n(1-x)^n$. Η μικρότερη δύναμη του x που θα εμφανιστεί είναι n, και η μεγαλύτερη δύναμη είναι η $2n$. Άρα η f_n μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

όπου οι αριθμοί c_i είναι ακέραιοι. Είναι φανερό από αυτήν την παράσταση ότι

$$f_n{}^{(k)}(0) = 0 \quad \text{αν } k < n \text{ ή } k > 2n.$$

Ακόμα,

$$\begin{aligned}
f_n{}^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}[n!\,c_n + \text{ όροι που περιέχουν το } x] \\
f_n{}^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!}[(n+1)!\,c_{n+1} + \text{ όροι που περιέχουν το } x] \\
&\vdots \\
f_n{}^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!}[(2n)!\,c_{2n}].
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
f_n{}^{(n)}(0) &= c_n, \\
f_n{}^{(n+1)}(0) &= (n+1)c_{n+1} \\
&\vdots \\
f_n{}^{(2n)}(0) &= (2n)(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)c_{2n},
\end{aligned}$$

όπου οι αριθμοί στα δεξιά είναι όλοι ακέραιοι. Άρα ο

$$f_n^{(k)}(0) \text{ είναι } \textit{ακέραιος} \text{ για κάθε } k.$$

Από τη σχέση

$$f_n(x) = f_n(1-x)$$

έπεται ότι

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)\cdot$$

επομένως ο

$$f_n^{(k)}(1) \text{ είναι επίσης } \textit{ακέραιος} \text{ για κάθε } k.$$

Η απόδειξη ότι ο π είναι άρρητος απαιτεί μια ακόμα παρατήρηση: αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός και αν $\varepsilon > 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n, θα έχουμε

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon.$$

Για να το αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι, αν $n \geq 2a$, τότε

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}.$$

Ας θέσουμε τώρα n_0 κάποιον φυσικό αριθμό με $n_0 \geq 2a$. Τότε, οποιαδήποτε τιμή και αν έχει το

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

οι επόμενες τιμές ικανοποιούν τις

$$\begin{aligned}
\frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
\frac{a^{(n_0+2)}}{(n_0+2)!} &< \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!} \\
&\vdots \\
\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} &< \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.
\end{aligned}$$

Αν το k είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\dfrac{a^{n_0}}{(n_0)!\,\varepsilon} < 2^k$, τότε

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < \varepsilon,$$

που είναι το συμπέρασμα που θέλαμε. Έχοντας κάνει αυτές τις παρατηρήσεις, είμαστε έτοιμοι για το μοναδικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ο αριθμός π είναι άρρητος· ακόμα καλύτερα, ο π^2 είναι άρρητος. (Παρατηρήστε ότι, αν ο π^2 είναι άρρητος, έπεται ότι και ο π είναι άρρητος, γιατί αν ο π ήταν ρητός, τότε βέβαια θα ήταν και ο π^2.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι ο π^2 είναι ρητός, οπότε

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

για κάποιους θετικούς ακεραίους a και b. Θέτουμε

$$G(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)]. \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους συντελεστές

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

είναι ακέραιος. Αφού οι $f_n^{(k)}(0)$ και $f_n^{(k)}(1)$ είναι ακέραιοι, αυτό αποδεικνύει ότι οι

$$G(0) \text{ και } G(1) \text{ είναι ακέραιοι.}$$

Παραγωγίζοντας την G δύο φορές, παίρνουμε

$$G''(x) = b^n[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)]. \tag{2}$$

Ο τελευταίος όρος, $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$, είναι ίσος με μηδέν. Οπότε, προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x). \tag{3}$$

Τώρα θέτουμε

$$H(x) = G'(x) \sin \pi x - \pi G(x) \cos \pi x.$$

Τότε

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos \pi x + G''(x) \sin \pi x - \pi G'(x) \cos \pi x + \pi^2 G(x) \sin \pi x \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \sin \pi x \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \sin \pi x, \text{ από την (3).} \end{aligned}$$

Από το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x \, dx &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \sin \pi - \pi G(1) \cos \pi - G'(0) \sin 0 + \pi G(0) \cos 0 \\ &= \pi[G(1) + G(0)]. \end{aligned}$$

Άρα ο

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x \, dx \quad \text{είναι } \textit{ακέραιος}.$$

Από την άλλη πλευρά, $0 < f_n(x) < 1/n!$ για $0 < x < 1$, άρα

$$0 < \pi a^n f_n(x) \sin \pi x < \frac{\pi a^n}{n!} \quad \text{για } 0 < x < 1.$$

Συνεπώς,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Αυτός ο συλλογισμός ήταν τελείως ανεξάρτητος από την τιμή του n. Αν τώρα ο n είναι αρκετά μεγάλος, τότε

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x \, dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Αλλά αυτό είναι άτοπο, γιατί το ολοκλήρωμα είναι ακέραιος, και δεν υπάρχει ακέραιος μεταξύ του 0 και του 1. Άρα η αρχική μας υπόθεση πρέπει να είναι λανθασμένη: ο π^2 είναι άρρητος. ∎

Παραδεχόμαστε ότι αυτή η απόδειξη είναι μυστηριώδης· πιο μυστηριώδες ίσως απ' όλα είναι ο τρόπος με τον οποίο το π μπαίνει στην απόδειξη —μοιάζει σχεδόν σαν να αποδείξαμε ότι ο π είναι άρρητος χωρίς να έχουμε ποτέ αναφέρει έναν ορισμό του π. Αν ξανακοιτάξουμε προσεκτικά την απόδειξη, θα δούμε ότι ακριβώς μια ιδιότητα του π είναι απαραίτητη:

$$\sin(\pi) = 0.$$

Η απόδειξη, πράγματι, βασίζεται στις ιδιότητες της συνάρτησης $\sin$, και αποδεικνύει ότι ο ελάχιστος θετικός αριθμός x για τον οποίο $\sin x = 0$ είναι άρρητος. Στην πραγματικότητα, πολύ λίγες ιδιότητες της $\sin$ χρειάζονται, και συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} \sin' &= \cos, \\ \cos' &= -\sin, \\ \sin(0) &= 0, \\ \cos(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ακόμη και αυτός ο κατάλογος μπορεί να συντομευθεί· σε σχέση με την απόδειξη η $\cos$ μπορεί κάλλιστα να ορισθεί ως $\sin'$. Τότε οι ιδιότητες της $\sin$ που απαιτούνται στην απόδειξη είναι οι

$$\begin{aligned} \sin'' + \sin &= 0, \\ \sin(0) &= 0, \\ \sin'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Αυτό βέβαια δεν μας εκπλήσσει καθόλου, αφού, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν πλήρως τη συνάρτηση $\sin$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Δείξτε ότι για τα εμβαδά των τριγώνων OAB και OAC στο Σχήμα 1 με $\angle AOB \leq \pi/4$, έχουμε

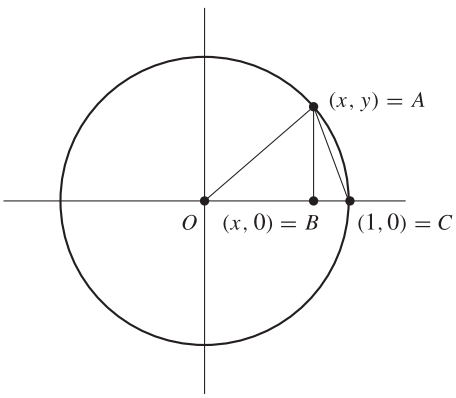
$$\text{εμβαδόν}\, OAC = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-16(\text{εμβαδόν}\, OAB)^2}}{2}}.$$

Υπόδειξη: Λύστε τις εξισώσεις $xy = 2(\text{εμβαδόν}\, OAB)$, $x^2 + y^2 = 1$, ως προς y.

(β) Έστω P_m το κανονικό πολύγωνο m πλευρών που εγγράφεται στον μοναδιαίο κύκλο. Αν A_m είναι το εμβαδόν του P_m, δείξτε ότι

$$A_{2m} = \frac{m}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-(2A_m/m)^2}}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να παίρνουμε (όλο και πιο πολύπλοκους) τύπους για το A_{2^n}, ξεκινώντας με $A_4 = 2$, και μετά να υπολογίσουμε το π με όση ακρίβεια θέλουμε (σύμφωνα με το Πρόβλημα 8-11). Αν και θα εμφανιστούν καλύτερες μέθοδοι στο Κεφάλαιο 20, μια ελαφρά παραλλαγή αυτής της προσέγγισης δίνει μια πολύ ενδιαφέρουσα παράσταση για το π:



ΣΧΗΜΑ 1

2. (α) Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\text{εμβαδόν}\,(OAB)}{\text{εμβαδόν}\,(OAC)} = OB,$$

δείξτε ότι, αν α_m είναι η απόσταση του O από μια πλευρά του P_m, τότε

$$\frac{A_m}{A_{2m}} = \alpha_m.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\frac{2}{A_{2^k}} = \alpha_4 \cdot \alpha_8 \cdot \ldots \cdot \alpha_{2^{k-1}}.$$

(γ) Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\alpha_m = \cos\frac{\pi}{m},$$

και τον τύπο $\cos x/2 = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$ (Πρόβλημα 15-15), αποδείξτε ότι

$$\alpha_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_8 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}},$$

$$\alpha_{16} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}},$$

κτλ.

Μαζί με το μέρος (β), αυτό δείχνει ότι ο $2/\pi$ γράφεται ως ένα «άπειρο γινόμενο»

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots .$$

Για να ακριβολογούμε, αυτή η ισότητα σημαίνει ότι το γινόμενο των πρώτων n παραγόντων μπορεί να είναι όσο κοντά θέλουμε στον $2/\pi$, αν διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο. Το συγκεκριμένο γινόμενο ανακαλύφθηκε από τον François Viète το 1579, και είναι μόνο μία από τις πολλές γοητευτικές εκφράσεις για το π, μερικές από τις οποίες θα αναφέρουμε αργότερα.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17 ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΠΛΑΝΗΤΩΝ

Η Φύση και οι Νόμοι της Φύσης ήταν κρυμμένοι μέσα στη νύχτα
και είπεν ο Θεός «Γεννηθήτω Newton», και εγένετο φως.

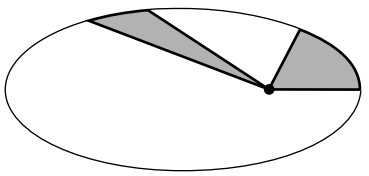
Alexander Pope

Σε αντίθεση με το Κεφάλαιο 16, ένα σύντομο κεφάλαιο που παρέκκλινε από τη βασική κατεύθυνση του βιβλίου, αυτό το μακροσκελές κεφάλαιο παρεκκλίνει από τη βασική κατεύθυνση του βιβλίου για να αποδείξει ότι είμαστε ήδη σε θέση να ασχοληθούμε με ένα πραγματικό πρόβλημα Φυσικής.

Το 1609 ο Kepler δημοσίευσε τους δύο πρώτους τους νόμους για την κίνηση των πλανητών. Ο πρώτος νόμος περιγράφει το σχήμα των πλανητικών τροχιών:

Οι πλανήτες κινούνται σε ελλείψεις, στη μια εστία των οποίων βρίσκεται ο ήλιος.

Ο δεύτερος νόμος αφορά στο εμβαδόν που διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τον ήλιο με κάθε πλανήτη (η «επιβατική ακτίνα του πλανήτη ως προς τον ήλιο») σε διάφορα χρονικά διαστήματα (Σχήμα 1).



ΣΧΗΜΑ 1

Η επιβατική ακτίνα διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα. (Ισοδύναμα, το εμβαδόν που διαγράφεται σε χρόνο t είναι ανάλογο του t.)

Ο τρίτος νόμος του Kepler, που δημοσιεύτηκε το 1619, συσχετίζει τις κινήσεις διαφορετικών πλανητών. Αν a είναι ο μεγάλος άξονας της ελλειπτικής τροχιάς ενός πλανήτη και T η περίοδός του, ο χρόνος δηλαδή που χρειάζεται ο πλανήτης για να επιστρέψει σε μια δοθείσα θέση, τότε:

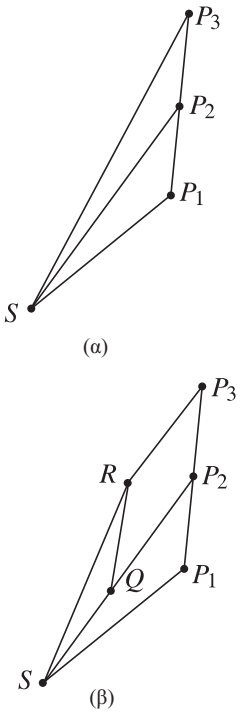
Ο λόγος a^3/T^2 είναι ο ίδιος για όλους τους πλανήτες.

Το μεγάλο κατόρθωμα του Newton ήταν πως έδειξε (χρησιμοποιώντας τον γενικό νόμο ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα ισούται με τη μάζα επί την επιτάχυνσή του) ότι ο νόμος του Kepler προκύπτει από την υπόθεση ότι οι πλανήτες συγκρατούνται από τον ήλιο μέσω μιας δύναμης (της βαρυτικής δύναμης του ήλιου) που έχει πάντα φορά προς τον ήλιο, είναι ανάλογη της μάζας του πλανήτη, και ικανοποιεί έναν νόμο αντιστρόφου τετραγώνου· δηλαδή από μια δύναμη που κατευθύνεται προς τον ήλιο, της οποίας το μέγεθος μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης του ήλιου από τον πλανήτη και ευθέως ανάλογα με τη μάζα του πλανήτη. Αφού η δύναμη ισούται με τη μάζα επί την επιτάχυνση, ισοδύναμα, μπορούμε απλώς να πούμε ότι το μέγεθος της επιτάχυνσης είναι μια σταθερά διαιρεμένη με το τετράγωνο της απόστασης από τον ήλιο.

Η ανάλυση του Newton οδήγησε σε τρία αποτελέσματα που σχετίζονται άμεσα με τους νόμους του Kepler. Το πρώτο αποτέλεσμα του Newton αφορά στον δεύτερο νόμο του Kepler (ο οποίος στην πραγματικότητα ανακαλύφθηκε πρώτος, διατηρώντας με όμορφο τρόπο τη συμμετρικότητα της κατάστασης):

Ο δεύτερος νόμος του Kepler ισχύει ακριβώς για «κεντρικές δυνάμεις», δηλαδή, αν και μόνο αν η δύναμη μεταξύ του ήλιου και του πλανήτη έχει πάντα τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει τον ήλιο με τον πλανήτη.

Παρ' ότι ο Newton τιμάται ως ο επινοητής του Απειροστικού Λογισμού, και πράγματι ανακάλυψε τον Απειροστικό Λογισμό για να αντιμετωπίσει τέτοιου είδους προβλήματα, ο



ΣΧΗΜΑ 2

τρόπος με τον οποίο εξήγαγε τα αποτελέσματα δεν φαίνεται να χρησιμοποιεί καθόλου τον Απειροστικό Λογισμό. Αντί να θεωρήσει μια δύναμη που μεταβάλλεται διαρκώς ενόσω κινείται ο πλανήτης, ο Newton θεωρεί πρώτα ίσα μικρά χρονικά διαστήματα και υποθέτει ότι μια στιγμιαία δύναμη ασκείται στο τελικό άκρο καθενός από αυτά τα διαστήματα.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας φανταστούμε ότι κατά τη διάρκεια του πρώτου χρονικού διαστήματος ο πλανήτης κινείται κατά μήκος της ευθείας P_1P_2, με ομοιόμορφη ταχύτητα (Σχήμα 2 (α)). Αν, κατά τη διάρκεια του επόμενου ίσου χρονικού διαστήματος, ο πλανήτης συνέχιζε να κινείται κατά μήκος αυτής της ευθείας, θα κατέληγε στο P_3, όπου το μήκος του P_1P_2 είναι ίσο με το μήκος του P_2P_3. Αυτό θα σήμαινε ότι το τρίγωνο SP_1P_2 έχει το ίδιο εμβαδόν με το τρίγωνο SP_2P_3 (αφού έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη) —αυτό λέει απλώς ότι ο νόμος του Kepler ισχύει στην ειδική περίπτωση που η δύναμη είναι 0.

Ας υποθέσουμε τώρα (Σχήμα 2 (β)) ότι τη στιγμή που ο πλανήτης φτάνει στο P_2 ασκείται σε αυτόν μια δύναμη *κατά τη διεύθυνση της ευθείας από το S στο* P_2, η οποία από μόνη της θα είχε ως αποτέλεσμα να κινηθεί ο πλανήτης προς το σημείο Q. Συνδυαζόμενη με την κίνηση που ήδη έχει ο πλανήτης, θα έχει ως αποτέλεσμα ο πλανήτης να κινηθεί προς το R, την κορυφή που βρίσκεται απέναντι από την P_2 στο παραλληλόγραμμο με πλευρές τις P_2P_3 και P_2Q.

Επομένως, το εμβαδόν που διαγράφεται κατά το δεύτερο χρονικό διάστημα είναι στην πραγματικότητα το τρίγωνο SP_2R. Το εμβαδόν όμως του τριγώνου SP_2R ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου SP_3P_2, αφού έχουν την ίδια βάση SP_2 και τα ίδια ύψη (αφού η RP_3 είναι παράλληλη στην SP_2). Άρα, τελικά, το εμβαδόν του τριγώνου SP_2R είναι το ίδιο με το εμβαδόν του αρχικού τριγώνου SP_1P_2! Αντίστροφα, αν το τρίγωνο SRP_2 έχει το ίδιο εμβαδόν με το SP_1P_2, και άρα το ίδιο εμβαδόν με το SP_3P_2, τότε η RP_3 πρέπει να είναι παράλληλη στην SP_2, που σημαίνει ότι το Q πρέπει να βρίσκεται πάνω στην SP_2.

Φυσικά, δεν πρόκειται για το είδος του συλλογισμού που θα περίμενε κανείς να βρει σε ένα σύγχρονο βιβλίο, αλλά με τον ιδιαίτερο γοητευτικό του τρόπο δείχνει από φυσικής πλευράς *γιατί* το αποτέλεσμα πρέπει να αληθεύει.

Για να αναλύσουμε την κίνηση των πλανητών θα χρησιμοποιήσουμε την ύλη του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 12, και την «ορίζουσα» $\det$ που ορίστηκε στο Πρόβλημα 4 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4. Περιγράφουμε την κίνηση ενός πλανήτη με την παραμετρική καμπύλη

$$c(t) = r(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t)),$$

έτσι ώστε η r να δίνει πάντα το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος από τον ήλιο ώς τον πλανήτη, και η θ τη γωνία, την οποία θα θεωρήσουμε αύξουσα (η περίπτωση φθίνουσας θ προκύπτει τότε εύκολα). Αυτό είναι βολικό να το γράψουμε ως

$$c(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t)), \tag{1}$$

όπου

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t)$$

είναι απλώς η παραμετρική καμπύλη που διαγράφει τον μοναδιαίο κύκλο. Παρατηρούμε ότι το

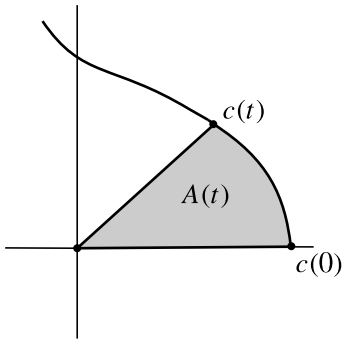
$$\mathbf{e}'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

είναι επίσης ένα διάνυσμα μοναδιαίου μήκος, αλλά κάθετο στο $\mathbf{e}(t)$, και ότι επίσης έχουμε

$$\det\big(\mathbf{e}(t), \mathbf{e}'(t)\big) = 1. \tag{2}$$

Αν παραγωγίσουμε την (1), χρησιμοποιώντας τους τύπους της σελίδας 222, λαμβάνουμε

$$c'(t) = r'(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t)) + r(t)\theta'(t) \cdot \mathbf{e}'(\theta(t)), \tag{3}$$



ΣΧΗΜΑ 3

και σε συνδυασμό με την (1), μαζί με τους τύπους του Προβλήματος 6 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\det\big(c(t), c'(t)\big) &= r(t)r'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}(\theta(t))\big) + r(t)^2\theta'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}'(\theta(t))\big)\\ &= r(t)^2\theta'(t)\det\big(\mathbf{e}(\theta(t)), \mathbf{e}'(\theta(t))\big),\end{aligned}$$

αφού η $\det(v, v)$ είναι πάντα 0. Χρησιμοποιώντας την (2) λαμβάνουμε στη συνέχεια

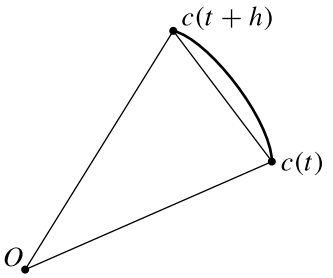
$$\det(c, c') = r^2\theta'. \tag{4}$$

Όπως θα δούμε, το $r^2\theta'$ έχει τελικά μια άλλη σημαντική ερμηνεία.

Έστω ότι $A(t)$ είναι το εμβαδόν που διαγράφεται από τη χρονική στιγμή 0 έως την t (Σχήμα 3). Θέλουμε να βρούμε έναν τύπο για την $A'(t)$, και, κατά τη λογική του Newton, θα ξεκινήσουμε κάνοντας μια βάσιμη υπόθεση. Το Σχήμα 4 δείχνει το $A(t+h) - A(t)$, μαζί με ένα ευθύγραμμο τμήμα ανάμεσα στο $c(t)$ και το $c(t+h)$. Είναι εύκολο να γράψουμε έναν τύπο για το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta(h)$ με κορυφές O, $c(t)$ και $c(t+h)$: σύμφωνα με τα Προβλήματα 4 και 5 του Παραρτήματος 1 του Κεφαλαίου 4, το εμβαδόν είναι

$$\text{εμβαδόν}(\Delta(h)) = \tfrac{1}{2}\det\big(c(t), c(t+h) - c(t)\big).$$

Αφού το τρίγωνο $\Delta(h)$ έχει στην πράξη το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο $A(t+h) - A(t)$, αυτό μας δείχνει (ή στην πράξη μας δείχνει) ότι



ΣΧΗΜΑ 4

$$\begin{aligned}A'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{A(t+h) - A(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\text{εμβαδόν}\,\Delta(h)}{h}\\ &= \tfrac{1}{2}\det\left(c(t), \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h) - c(t)}{h}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\det\big(c(t), c'(t)\big).\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με αυστηρό τρόπο, ο οποίος αποδίδει περισσότερο μέσω αυτής της διαδικασίας, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 13-24, το οποίο δίνει το εμβαδόν ενός χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε πολικές συντεταγμένες. Σύμφωνα με αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να γράψουμε

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \rho(\phi)^2\, d\phi \tag{$*$}$$

αν η παραμετρική μας καμπύλη $c(t) = r(t)\cdot\mathbf{e}(\theta(t))$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης ρ σε πολικές συντεταγμένες (εδώ χρησιμοποιήσαμε το ϕ για τη γωνιακή πολική συντεταγμένη για να αποφύγουμε τη σύγχυση με τη συνάρτηση θ που χρησιμοποιήσαμε για να περιγράψουμε την καμπύλη c).

Η συνάρτηση ρ είναι όμως απλώς η

$$\rho = r\circ\theta^{-1}$$

[για κάθε συγκεκριμένη γωνία ϕ, $\theta^{-1}(\phi)$ είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία η καμπύλη c έχει γωνιακή πολική συντεταγμένη ϕ, άρα $r(\theta^{-1}(t))$ είναι η ακτινική συντεταγμένη που αντιστοιχεί στην ϕ]. Παρ' όλο που η παρουσία της αντίστροφης συνάρτησης φαντάζει λίγο απειλητική, στην πραγματικότητα είναι μάλλον αθώα: Εφαρμόζοντας το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και τον Κανόνα της Αλυσίδας στην $(*)$ λαμβάνουμε αμέσως

$$\begin{aligned}A'(t) &= \tfrac{1}{2}\rho(\theta(t))^2\cdot\theta'(t)\\ &= \tfrac{1}{2}r(t)^2\theta'(t), \qquad \text{αφού } \rho = r\circ\theta^{-1}.\end{aligned}$$

Εν συντομία,

$$A' = \tfrac{1}{2} r^2 \theta'.$$

Αν επομένως συνδυαστεί με την (4), έχουμε

$$\boxed{A' = \frac{1}{2}\det(c, c') = \frac{1}{2} r^2 \theta'.} \tag{5}$$

Είμαστε πλέον έτοιμοι να εξετάσουμε τον δεύτερο νόμο του Kepler. Παρατηρήστε ότι *ο δεύτερος νόμος του Kepler ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η A' είναι σταθερή*, το οποίο είναι ισοδύναμο με την $A'' = 0$. Όμως

$$\begin{aligned} A'' = \tfrac{1}{2}\big[\det(c, c')\big]' &= \tfrac{1}{2}\det(c', c') + \tfrac{1}{2}\det(c, c'') \qquad \text{(βλ. σελίδα 223)} \\ &= \tfrac{1}{2}\det(c, c''). \end{aligned}$$

Επομένως

$$\boxed{\text{Ο δεύτερος νόμος του Kepler είναι ισοδύναμος με } \det(c, c'') = 0.}$$

Συνδυάζοντας τα όλα αυτά, έχουμε:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ο δεύτερος νόμος του Kepler ισχύει αν και μόνο αν η δύναμη είναι κεντρική, στην οποία περίπτωση κάθε πλανητική τροχιά $c(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t))$ ικανοποιεί την εξίσωση

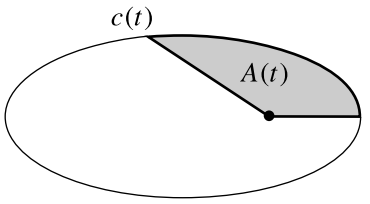
$$r^2\theta' = \det(c, c') = \text{σταθερά}. \tag{K_2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το γεγονός ότι η δύναμη είναι κεντρική σημαίνει απλά ότι έχει πάντα τη διεύθυνση του $c(t)$. Αφού το $c''(t)$ έχει τη διεύθυνση της δύναμης, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το $c''(t)$ έχει πάντα τη διεύθυνση του $c(t)$. Και αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι πάντα έχουμε

$$\det(c, c'') = 0.$$

Μόλις είδαμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τον δεύτερο νόμο του Kepler.

Επιπλέον, από την εξίσωση αυτή προκύπτει ότι $\big[\det(c, c')\big]' = 0$, η οποία μέσω της (5) δίνει την (K_2). ∎



ΣΧΗΜΑ 5

Στη συνέχεια ο Newton έδειξε ότι αν η βαρυτική δύναμη του ήλιου είναι κεντρική δύναμη και ικανοποιεί επιπλέον έναν νόμο αντιστρόφου τετραγώνου, τότε η τροχιά οποιουδήποτε αντικειμένου λόγω αυτής θα είναι κωνική τομή που έχει τον ήλιο σε μία από τις εστίες της. Οι πλανήτες, φυσικά, αντιστοιχούν στην περίπτωση που η κωνική τομή είναι έλλειψη· αυτό ισχύει και για τους κομήτες που επισκέπτονται περιοδικά τον ήλιο. Οι παραβολές και οι υπερβολές αντιπροσωπεύουν αντικείμενα που έρχονται από έξω από το ηλιακό σύστημα και τελικά συνεχίζουν και πάλι τη χαρούμενη πορεία τους έξω από το σύστημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η βαρυτική δύναμη του ήλιου είναι κεντρική δύναμη που ικανοποιεί έναν νόμο αντιστρόφου τετραγώνου, τότε η τροχιά οποιοδήποτε σώματος λόγω αυτής θα είναι μια κωνική τομή που έχει τον ήλιο σε μία από τις εστίες της (ακριβέστερα, είτε έλλειψη, είτε παραβολή, είτε ο ένας κλάδος μιας υπερβολής).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Παρατηρούμε ότι το συμπέρασμά μας προσδιορίζει το σχήμα της τροχιάς, και όχι κάποια συγκεκριμένη παραμετροποίηση. Η παραμετροποίηση όμως αυτή καθορίζεται από το Θεώρημα 1: από την υπόθεση της κεντρικής δύναμης έπεται ότι το εμβαδόν $A(t)$ (Σχήμα 5) είναι ανάλογο του t, επομένως ο καθορισμός του $c(t)$ είναι ουσιαστικά ισοδύναμος με τον καθορισμό του A για τυχαία σημεία της έλλειψης. Δυστυχώς, τα εμβαδά

τέτοιων τμημάτων δεν μπορούμε να τα προσδιορίζουμε ακριβώς.* Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να προσδιορίζουμε το *σχήμα* της τροχιάς $c(t) = r(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t))$ χωρίς να βρούμε την παραμετροποίησή της! Αφού το σχήμα της τροχιάς σε πολικές συντεταγμένες το καθορίζει στην πραγματικότητα η $r \circ \theta^{-1}$, δεν θα πρέπει να εκπλαγούμε αν βρούμε το θ^{-1} να εμφανίζεται στην απόδειξη.

Με βάση το Θεώρημα 1, από την υπόθεση της κεντρικής δύναμης έπεται ότι

$$(K_2) \qquad r^2\theta' = \det(c, c') = M$$

για κάποια σταθερά M. Η υπόθεση ενός νόμου αντιστρόφου τετραγώνου γράφεται ως

$$(*) \qquad c''(t) = -\frac{H}{r(t)^2}\,\mathbf{e}(\theta(t))$$

για κάποια σταθερά H. Χρησιμοποιώντας την (K_2), αυτό μπορούμε να το γράψουμε ως

$$\frac{c''(t)}{\theta'(t)} = -\frac{H}{M}\,\mathbf{e}(\theta(t)).$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι

$$[c' \circ \theta^{-1}]'(\theta(t)).$$

Αν επομένως θέσουμε

$$D = c' \circ \theta^{-1}$$

(αυτό είναι το βασικό τέχνασμα —«θεωρούμε την c' συνάρτηση της θ»), τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$D'(\theta(t)) = -\frac{H}{M}\,\mathbf{e}(\theta(t)) = -\frac{H}{M}\big(\cos\theta(t), \sin\theta(t)\big),$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε απλά ως

$$D'(u) = -\frac{H}{M}(\cos u, \sin u) = \left(-\frac{H}{M}\cos u, -\frac{H}{M}\sin u\right)$$

[για κάθε u της μορφής $\theta(t)$ για κάποιο t], απαλείφοντας πλήρως την θ.

Η εξίσωση που μόλις πήραμε είναι απλώς ένα ζεύγος εξισώσεων για τις συνιστώσες της D, τις οποίες μπορούμε να επιλύσουμε ανεξάρτητα τη μία από την άλλη. Βρίσκουμε επομένως ότι

$$D(u) = \left(\frac{H \cdot \sin u}{-M} + A,\ \frac{H \cdot \cos u}{M} + B\right)$$

για δύο σταθερές A και B. Αν θέσουμε ξανά $u = \theta(t)$ λαμβάνουμε έναν ακριβή τύπο για την c':

$$c' = \left(\frac{H \cdot \sin\theta}{-M} + A,\ \frac{H \cdot \cos\theta}{M} + B\right).$$

[Εδώ γράφουμε $\sin\theta$ αντί για $\sin \circ\, \theta$, κτλ. Πρόκειται για συντομογραφίες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.]

Παρ' ότι δεν μπορούμε να πάρουμε έναν ακριβή τύπο για την ίδια την c, αν αντικαταστήσουμε αυτήν την εξίσωση, μαζί με την $c = r(\cos\theta, \sin\theta)$, στην εξίσωση

$$\det(c, c') = M \qquad (\text{εξίσωση } (K_2)),$$

λαμβάνουμε

$$r\left[\frac{H}{M}\cos^2\theta + B\cos\theta + \frac{H}{M}\sin^2\theta - A\sin\theta\right] = M,$$

*Ακριβέστερα, δεν μπορούμε να γράψουμε τη λύση συναρτήσει γνωστών «κλασικών συναρτήσεων», όπως οι sin, arcsin, κτλ.

η οποία απλοποιείται στην

$$r\left[\frac{H}{M^2}+\frac{B}{M}\cos\theta-\frac{A}{M}\sin\theta\right]=1.$$

Το Πρόβλημα 15-8 δείχνει ότι αυτή μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$r(t)\left[\frac{H}{M^2}+C\cos(\theta(t)+D)\right]=1,$$

για κάποιες σταθερές C και D. Μπορούμε να θέσουμε $D=0$, αφού αυτό ισοδυναμεί απλώς με περιστροφή του συστήματος των πολικών μας συντεταγμένων (επιλέγοντας την ακτίνα που αντιστοιχεί σε $\theta=0$), και άρα, τελικά, μπορούμε να γράψουμε

$$r[1+\varepsilon\cos\theta]=\frac{M^2}{H}=\Lambda.$$

Αυτός είναι όμως ο τύπος των κωνικών τομών που βρήκαμε στο Παράρτημα 3 του Κεφαλαίου 4 (μαζί με τα Προβλήματα 5, 6, και 7 του ίδιου Παραρτήματος). ∎

Συναρτήσει της σταθεράς M στην εξίσωση

$$r^2\theta'=M$$

και της σταθεράς Λ στην εξίσωση της τροχιάς

$$r[1+\varepsilon\cos\theta]=\Lambda$$

η τελευταία εξίσωση της απόδειξής μας δείχνει ότι την $(*)$ μπορούμε να τη γράψουμε ως

$$(**)\qquad c''(t)=-\frac{M^2}{\Lambda}\cdot\frac{1}{r(t)^2}\,\mathrm{e}(\theta(t)).$$

Θυμηθείτε (σελίδα 78) ότι ο μεγάλος άξονας a μιας έλλειψης δίνεται από την

$$(\alpha)\qquad a=\frac{\Lambda}{1-\varepsilon^2},$$

και ο μικρός άξονας b από την

$$(\beta)\qquad b=\frac{\Lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Επομένως

$$(\gamma)\qquad \frac{b^2}{\Lambda}=a.$$

Θυμηθείτε ότι η εξίσωση (5) δίνει

$$A'(t)=\tfrac{1}{2}r^2\theta'=\tfrac{1}{2}M,$$

και άρα

$$A(t)=\tfrac{1}{2}Mt.$$

Μπορούμε επομένως να ερμηνεύσουμε την M συναρτήσει της περιόδου T της τροχιάς. Η περίοδος αυτή T είναι, εξ ορισμού, η τιμή του t για την οποία $\theta(t)=2\pi$, ώστε να λάβουμε την πλήρη έλλειψη. Επομένως

$$\text{εμβαδόν της έλλειψης}=A(T)=\tfrac{1}{2}MT,$$

ή

$$M = \frac{2(\text{εμβαδόν της έλλειψης})}{T} = \frac{2\pi ab}{T} \qquad \text{από το Πρόβλημα 13-17.}$$

Επομένως η σταθερά M^2/Λ στην $(**)$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{M^2}{\Lambda} &= \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 \Lambda} \\ &= \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \qquad \text{χρησιμοποιώντας την } (\gamma).\end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται το τελευταίο βήμα της ανάλυσης του Newton:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Ο τρίτος νόμος του Kepler ισχύει αν και μόνο αν οι επιταχύνσεις $c''(t)$ των διαφόρων πλανητών, οι οποίοι κινούνται σε ελλείψεις, ικανοποιούν την

$$c''(t) = -G \cdot \frac{1}{r^2}\,\mathbf{e}(\theta(t))$$

για κάποια σταθερά G που δεν εξαρτάται από τον πλανήτη.

Πρέπει να αναφέρουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος 2. Για να το αποδείξουμε, θέλουμε πρώτα να αποδείξουμε μια επιπλέον συνέπεια του δεύτερου νόμου του Kepler. Θυμηθείτε ότι για

$$\mathbf{e}(t) = (\cos t, \sin t)$$

έχουμε

$$\mathbf{e}'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Επομένως,

$$\mathbf{e}''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\mathbf{e}(t).$$

Αν παραγωγίσουμε την (3), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}c''(t) = {} & r''(t) \cdot \mathbf{e}(\theta(t)) + r'(t)\theta'(t) \cdot \mathbf{e}'(\theta(t)) \\ & + r'(t)\theta'(t) \cdot \mathbf{e}'(\theta(t)) + r(t)\theta''(t) \cdot \mathbf{e}'(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\theta'(t) \cdot \mathbf{e}''(\theta(t)).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\mathbf{e}''(t) = -\mathbf{e}(t)$ λαμβάνουμε

$$c''(t) = \left[r''(t) - r(t)\theta'(t)^2\right] \cdot \mathbf{e}(\theta(t)) + \left[2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\right] \cdot \mathbf{e}'(\theta(t)).$$

Αφού ο δεύτερος νόμος του Kepler συνεπάγεται κεντρικές δυνάμεις, επομένως το $c''(t)$ είναι πάντα πολλαπλάσιο του $c(t)$, και άρα πάντα πολλαπλάσιο του $\mathbf{e}(\theta(t))$, ο συντελεστής του $\mathbf{e}'(\theta(t))$ πρέπει να είναι 0 [στην πραγματικότητα αυτό μπορούμε να το δούμε άμεσα παίρνοντας την παράγωγο της σχέσης (K_2)]. Επομένως, από τον δεύτερο νόμο του Kepler προκύπτει ότι

$$c''(t) = \left[r''(t) - r(t)\theta'(t)^2\right] \cdot \mathbf{e}(\theta(t)). \tag{6}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν η τροχιά ενός πλανήτη που κινείται υπό την επίδραση μιας κεντρικής βαρυτικής δύναμης είναι μια κωνική τομή που έχει τον ήλιο ως εστία, η δύναμη πρέπει να ικανοποιεί έναν νόμο αντιστρόφου τετραγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Όπως στο Θεώρημα 2, παρατηρούμε ότι η υπόθεση για το σχήμα της τροχιάς, μαζί με την υπόθεση της κεντρικής δύναμης, που ισοδυναμούν με τον δεύτερο νόμο του Kepler, στην ουσία καθορίζουν την παραμετροποίηση. Αφού όμως δεν μπορούμε να γράψουμε μια ακριβή λύση, πρέπει να πάρουμε την πληροφορία για την επιτάχυνση χωρίς στην πραγματικότητα να γνωρίζουμε ποια είναι.

Πάλι από την υπόθεση της κεντρικής δύναμης έπεται ότι

$$(K_2) \qquad r^2\theta' = M,$$

για κάποια σταθερά M, και από την υπόθεση ότι η τροχιά είναι μια κωνική τομή που έχει ως εστία τον ήλιο έπεται ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathrm{A}) \qquad r[1 + \varepsilon\cos\theta] = \Lambda,$$

για κάποιο ε και Λ. Για την (όχι και τόσο διαφωτιστική) απόδειξή μας, θα συνεχίσουμε να παραγωγίζουμε και θα κάνουμε αντικαταστάσεις με βάση αυτές τις δύο εξισώσεις.

Πρώτα παραγωγίζουμε την (A) για να λάβουμε

$$r'[1 + \varepsilon\cos\theta] - \varepsilon r\theta'\sin\theta = 0.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με r, αυτό γίνεται

$$rr'[1 + \varepsilon\cos\theta] - \varepsilon r^2\theta'\sin\theta = 0.$$

Χρησιμοποιώντας και την (A) και την (K_2), αυτό γίνεται

$$\Lambda r' - \varepsilon M\sin\theta = 0.$$

Αν παραγωγίσουμε και πάλι, λαμβάνουμε

$$\Lambda r'' - \varepsilon M\theta'\cos\theta = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (K_2) λαμβάνουμε

$$\Lambda r'' - \frac{\varepsilon M^2}{r^2}\cos\theta = 0,$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την (A) λαμβάνουμε

$$\Lambda r'' - \frac{M^2}{r^2}\left[\frac{\Lambda}{r} - 1\right] = 0.$$

Αντικαθιστώντας για ακόμη μια φορά από την (K_2), λαμβάνουμε

$$\Lambda[r'' - r(\theta')^2] + \frac{M^2}{r^2} = 0,$$

ή

$$r'' - r(\theta')^2 = -\frac{M^2}{\Lambda r^2}.$$

Αν συγκρίνουμε με την (6), λαμβάνουμε

$$c''(t) = -\frac{M^2}{\Lambda r^2}\,\mathbf{e}(\theta(t)),$$

το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε: η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης του πλανήτη από τον ήλιο. ∎

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18 Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΚΑΙ Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Στο Κεφάλαιο 15 το ολοκλήρωμα μας έδωσε έναν τρόπο για να διατυπώσουμε αυστηρά τον αρχικό ορισμό των συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$. Σε αυτό το κεφάλαιο, το ολοκλήρωμα παίζει έναν ακόμα πιο ουσιαστικό ρόλο. Για μερικές συναρτήσεις, ακόμα και ένας εισαγωγικός ορισμός παρουσιάζει δυσκολίες. Για παράδειγμα, ας πάρουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = 10^x.$$

Αυτή η συνάρτηση υποτίθεται ότι ορίζεται για κάθε x και έχει μια αντίστροφη συνάρτηση ορισμένη για θετικά x, που είναι ο «λογάριθμος με βάση 10»,

$$f^{-1}(x) = \log_{10} x.$$

Στην άλγεβρα, το 10^x ορίζεται συνήθως μόνο για *ρητούς* x, ενώ ο ορισμός για άρρητους x αποσιωπάται με τρόπο. Μια σύντομη ανασκόπηση του ορισμού για ρητό x όχι μόνο εξηγεί αυτήν την παράλειψη, αλλά μας θυμίζει και μια σπουδαία ιδιότητα που κρύβεται πίσω από τον ορισμό του 10^x.

Το σύμβολο 10^n ορίζεται πρώτα για φυσικούς αριθμούς n. Αυτός ο συμβολισμός αποδεικνύεται εξαιρετικά εύχρηστος, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για τον πολλαπλασιασμό πολύ μεγάλων αριθμών, γιατί

$$10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}.$$

Η επέκταση του ορισμού του 10^x για ρητό x γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται αυτή η ισότητα. Η ίδια απαίτηση μας επιβάλλει ουσιαστικά τον συνηθισμένο ορισμό. Δεδομένου ότι θέλουμε να ισχύει η ισότητα

$$10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$$

πρέπει να ορίσουμε $10^0 = 1\cdot$ αφού θέλουμε να ισχύει η ισότητα

$$10^{-n} \cdot 10^n = 10^0 = 1$$

πρέπει να ορίσουμε $10^{-n} = 1/10^n\cdot$ αφού θέλουμε να ισχύει η ισότητα

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{n \text{ φορές}} = 10^{\underbrace{1/n+\cdots+1/n}_{n \text{ φορές}}} = 10^1 = 10$$

πρέπει να ορίσουμε $10^{1/n} = \sqrt[n]{10}\cdot$ αφού θέλουμε να ισχύει η ισότητα

$$\underbrace{10^{1/n} \cdot \ldots \cdot 10^{1/n}}_{m \text{ φορές}} = 10^{\underbrace{1/n+\cdots+1/n}_{m \text{ φορές}}} = 10^{m/n}$$

πρέπει να ορίσουμε $10^{m/n} = (\sqrt[n]{10})^m$.

Δυστυχώς, σε αυτό το σημείο το πρόγραμμά μας καταλήγει σε αδιέξοδο. Οδηγηθήκαμε από τον κανόνα ότι το 10^x θα πρέπει να οριστεί έτσι ώστε να είμαστε βέβαιοι πως

$10^{x+y} = 10^x 10^y$, αλλά αυτή η αρχή δεν μας δίνει κάποιον απλό αλγεβρικό τρόπο ορισμού του 10^x για άρρητο x. Για αυτόν το λόγο, θα προσπαθήσουμε με πιο σύγχρονες μεθόδους να βρούμε μια συνάρτηση f, τέτοια ώστε

$$(*) \qquad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{για κάθε } x \text{ και } y.$$

Ενδιαφερόμαστε βέβαια για μια συνάρτηση που να μην είναι παντού μηδέν, μπορούμε επομένως να προσθέσουμε τη συνθήκη $f(1) \neq 0$. Αν προσθέσουμε την πιο ειδική συνθήκη $f(1) = 10$, τότε από την $(*)$ θα έπρεπε να ισχύει $f(x) = 10^x$ για ρητούς x, και το 10^x θα μπορούσε να *οριστεί* ως $f(x)$ για τα υπόλοιπα x· γενικά, το $f(x)$ θα είναι ίσο με $[f(1)]^x$ για ρητό x.

Ένας τρόπος για να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση διαφαίνεται αν προσπαθήσουμε να λύσουμε ένα φαινομενικά δυσκολότερο πρόβλημα: να βρούμε μια *παραγωγίσιμη* συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{για κάθε } x \text{ και } y,$$
$$f(1) = 10.$$

Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση, είμαστε σε θέση να επιχειρήσουμε να βρούμε την f' —γιατί αν ξέρουμε την παράγωγο της f, ίσως έχουμε κάποια ένδειξη και για τον ορισμό της ίδιας της f. Τώρα

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot f(h) - f(x)}{h} \\ &= f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}. \end{aligned}$$

Επομένως, η απάντηση εξαρτάται από την

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Ας υποθέσουμε, προς το παρόν, ότι αυτό το όριο υπάρχει, και ας το συμβολίσουμε με α. Τότε,

$$f'(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \text{για κάθε } x.$$

Ακόμα και αν μπορούσαμε να υπολογίσουμε το α, αυτή η προσέγγιση φαίνεται να μειονεκτεί. Η παράγωγος της f εκφράστηκε και πάλι συναρτήσει της f.

Αν εξετάσουμε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} = \log_{10}$, η όλη κατάσταση εμφανίζεται τελείως διαφορετική:

$$\begin{aligned} \log_{10}{}'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\alpha \cdot f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha x}. \end{aligned}$$

Η παράγωγος της f^{-1} είναι όσο απλή γίνεται! Και, αυτό που είναι το πιο ενδιαφέρον, από όλα τα ολοκληρώματα $\int_a^b x^n\,dx$ που εξετάσαμε προηγουμένως, το ολοκλήρωμα $\int_a^b x^{-1}\,dx$ είναι το μόνο που δεν μπορέσαμε να υπολογίσουμε. Αφού $\log_{10} 1 = 0$, θα έπρεπε να ισχύει

$$\frac{1}{\alpha}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log_{10} x - \log_{10} 1 = \log_{10} x.$$

Αυτό μας δίνει την ιδέα να ορίσουμε τον $\log_{10} x$ ως $(1/\alpha)\int_1^x t^{-1}\,dt$. Η δυσκολία είναι ότι το α είναι άγνωστο. Ένας τρόπος να ξεπεράσουμε αυτήν τη δυσκολία είναι να ορίσουμε

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$

και να ελπίσουμε ότι αυτό το ολοκλήρωμα θα είναι ο λογάριθμος ως προς *κάποια* βάση, που θα υπολογιστεί ίσως αργότερα. Όπως και να έχει το πράγμα, η συνάρτηση που ορίζουμε με αυτόν τον τρόπο είναι σίγουρα πιο λογική, από μαθηματική άποψη, από ό,τι η $\log_{10}$. Η χρησιμότητα του $\log_{10}$ οφείλεται στον σπουδαίο ρόλο που παίζει ο αριθμός 10 στον αραβικό συμβολισμό (και βέβαια στο γεγονός ότι έχουμε δέκα δάχτυλα), ενώ η συνάρτηση $\log$ μας δίνει ένα σύμβολο για ένα εξαιρετικά απλό ολοκλήρωμα που δεν μπορεί να υπολογιστεί με βάση τις ήδη γνωστές μας συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ

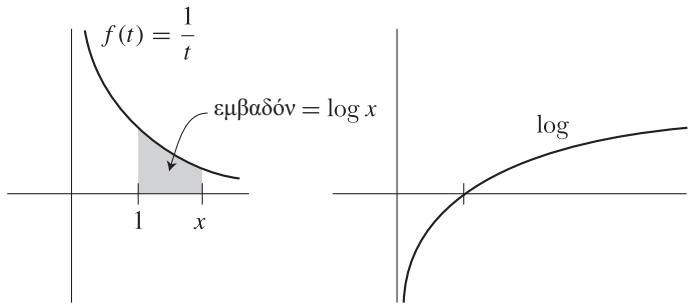
Αν $x > 0$, τότε

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

Η γραφική παράσταση της $\log$ φαίνεται στο Σχήμα 1. Παρατηρήστε ότι, αν $x > 1$, τότε $\log x > 0$, και αν $0 < x < 1$, τότε $\log x < 0$, αφού, όπως έχουμε συμφωνήσει,

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0.$$

Για $x \leq 0$, δεν μπορούμε να ορίσουμε τον $\log x$ με τον ίδιο τρόπο, γιατί η $f(t) = 1/t$ δεν είναι φραγμένη στο $[x, 1]$.



ΣΧΗΜΑ 1

Η αιτιολόγηση του συμβόλου «log» γίνεται με το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν $x, y > 0$, τότε

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Παρατηρούμε πρώτα ότι $\log'(x) = 1/x$, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Διαλέγουμε τώρα έναν αριθμό $y > 0$ και θέτουμε

$$f(x) = \log(xy).$$

Τότε

$$f'(x) = \log'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Άρα $f' = \log'$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας αριθμός c, τέτοιος ώστε

$$f(x) = \log x + c \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

δηλαδή

$$\log(xy) = \log x + c \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Ο αριθμός c μπορεί να υπολογιστεί με βάση την παρατήρηση ότι, για $x = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \log(1 \cdot y) &= \log 1 + c \\ &= c. \end{aligned}$$

Άρα

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \text{για κάθε } x.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $y > 0$, το θεώρημα έχει αποδειχθεί. ∎

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 Αν n είναι φυσικός αριθμός και $x > 0$, τότε

$$\log(x^n) = n \log x.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφήνεται σε σας (χρησιμοποιήστε επαγωγή). ∎

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 Αν $x, y > 0$, τότε

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έπεται από τις ισότητες

$$\log x = \log\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log y. \quad ∎$$

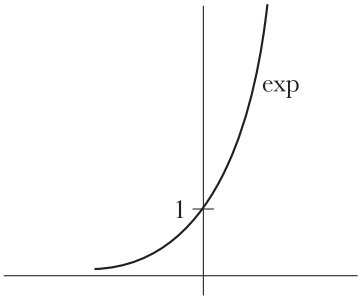
Το Θεώρημα 1 μας δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη γραφική παράσταση της $\log$. Η συνάρτηση $\log$ είναι σαφώς αύξουσα, αλλά αφού $\log'(x) = 1/x$, η παράγωγος γίνεται πολύ μικρή όταν το x γίνεται μεγάλο, επομένως η $\log$ αυξάνει όλο και πιο αργά. Δεν είναι προφανές το αν η $\log$ είναι φραγμένη ή όχι στο $\mathbf{R}$. Παρατηρούμε όμως, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\log(2^n) = n \log 2 \quad (\text{και } \log 2 > 0)\cdot$$

έπεται ότι η $\log$ δεν είναι άνω φραγμένη. Ομοίως,

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \log 1 - \log 2^n = -n \log 2\cdot$$

άρα η $\log$ δεν είναι κάτω φραγμένη στο $(0, 1)$. Αφού η $\log$ είναι συνεχής, παίρνει τελικά όλες τις τιμές. Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\log^{-1}$ είναι το $\mathbf{R}$. Αυτή η σπουδαία συνάρτηση έχει ένα ειδικό όνομα, που σύντομα θα φανεί πόσο ταιριαστό είναι.



ΣΧΗΜΑ 2

ΟΡΙΣΜΟΣ Η «εκθετική συνάρτηση», **exp**, είναι η $\log^{-1}$.

Η γραφική παράσταση της $\exp$ φαίνεται στο Σχήμα 2. Αφού η $\log x$ ορίζεται μόνο για $x > 0$, έχουμε πάντοτε $\exp(x) > 0$. Η παράγωγος της συνάρτησης $\exp$ υπολογίζεται εύκολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Για κάθε αριθμό x,

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\exp'(x) = (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\log^{-1}(x)}}$$
$$= \log^{-1}(x) = \exp(x). \blacksquare$$

Μια δεύτερη σημαντική ιδιότητα της $\exp$ είναι απλή συνέπεια του Θεωρήματος 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Αν x και y είναι τυχαίοι αριθμοί, τότε

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $x' = \exp(x)$ και $y' = \exp(y)$, οπότε

$$x = \log x',$$
$$y = \log y'.$$

Τότε

$$x + y = \log x' + \log y' = \log(x'y').$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\exp(x + y) = x'y' = \exp(x) \cdot \exp(y). \blacksquare$$

Αυτό το θεώρημα, καθώς και η συζήτηση στην αρχή του κεφαλαίου, υποδεικνύουν ότι ο $\exp(1)$ είναι πολύ σημαντικός. Υπάρχει, όντως, ένα ειδικό σύμβολο για αυτόν τον αριθμό.

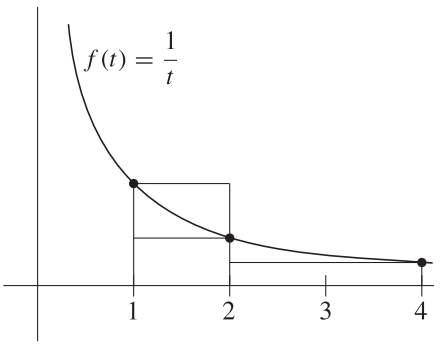
ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\boxed{e = \exp(1).}$$

Αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με την εξίσωση

$$1 = \log e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt.$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3,



ΣΧΗΜΑ 3

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < 1, \quad \text{γιατί το } 1 \cdot (2-1) \text{ είναι ένα άνω άθροισμα για την } f(t) = 1/t \text{ στο } [1,2],$$

και

$$\int_1^4 \frac{1}{t}\,dt > 1, \quad \text{γιατί το } \tfrac{1}{2} \cdot (2-1) + \tfrac{1}{4} \cdot (4-2) = 1 \text{ είναι ένα κάτω άθροισμα για την } f(t) = 1/t \text{ στο } [1,4].$$

Άρα

$$\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt < \int_1^e \frac{1}{t}\,dt < \int_1^4 \frac{1}{t}\,dt,$$

πράγμα που δείχνει ότι

$$2 < e < 4.$$

Στο Κεφάλαιο 20 θα βρούμε πολύ καλύτερες προσεγγίσεις για τον e, και θα δείξουμε ότι ο e είναι άρρητος (η απόδειξη είναι πολύ πιο εύκολη από την απόδειξη του ότι ο π είναι άρρητος!).

Όπως σημειώσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, από την εξίσωση

$$\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned}\exp(x) &= [\exp(1)]^x \\ &= e^x, \text{ για κάθε } \textit{ρητό } x.\end{aligned}$$

Αφού η $\exp$ ορίζεται για όλα τα x και $\exp(x) = e^x$ για ρητούς x, είναι συνεπές με την έως τώρα χρήση του εκθετικού συμβολισμού το να *ορίσουμε* το e^x ως $\exp(x)$ για κάθε x.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για κάθε αριθμό x,

$$\boldsymbol{e^x} = \exp(x).$$

Ο όρος «εκθετική συνάρτηση» είναι τώρα σαφής. Πετύχαμε να ορίσουμε το e^x για οποιονδήποτε (ακόμα και άρρητο) εκθέτη x. Δεν έχουμε ακόμα ορίσει το a^x, αν $a \neq e$, αλλά υπάρχει μια λογική σκέψη που μπορεί να μας καθοδηγήσει σε αυτήν την προσπάθεια. Αν ο x είναι *ρητός*, τότε

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}.$$

Αλλά, αφού η τελευταία παράσταση ορίζεται *για κάθε* x, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε το a^x.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $a > 0$, τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό x,

$$\boldsymbol{a^x} = e^{x\log a}.$$

(Αν $a = e$, αυτός ο ορισμός συμπίπτει βέβαια με τον προηγούμενο.)

Η απαίτηση $a > 0$ είναι αναγκαία για να ορίζεται ο $\log a$. Αυτό δεν είναι κάτι το υπερβολικά περιοριστικό αφού, για παράδειγμα, δεν μπορούμε ούτε καν να ορίσουμε το

$$(-1)^{1/2} \stackrel{?}{=} \sqrt{-1}.$$

(Βέβαια, για κάποιους ρητούς x, το σύμβολο a^x ίσως έχει έννοια, σύμφωνα με τον παλιό ορισμό· για παράδειγμα,

$$(-1)^{1/3} = \sqrt[3]{-1} = -1.)$$

Ο ορισμός μας για το a^x, δόθηκε έτσι ώστε να ισχύει

$$(e^x)^y = e^{xy} \quad \text{για κάθε } x \text{ και } y.$$

Όπως θα ήλπιζε κανείς, αυτή η ισότητα εξακολουθεί να ισχύει όταν το e αντικατασταθεί με οποιονδήποτε αριθμό $a > 0$. Η απόδειξη είναι μια σχετικά πολύπλοκη άσκηση πάνω στην ορολογία. Ταυτόχρονα, αποδεικνύουμε και τις άλλες σημαντικές ιδιότητες της a^x.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Αν $a > 0$, τότε

(1) $(a^b)^c = a^{bc}$ για κάθε b, c.

(Παρατηρήστε ότι αυτομάτως το a^b είναι θετικό, άρα το $(a^b)^c$ ορίζεται)·

(2) $a^1 = a$ και $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ για κάθε x, y.

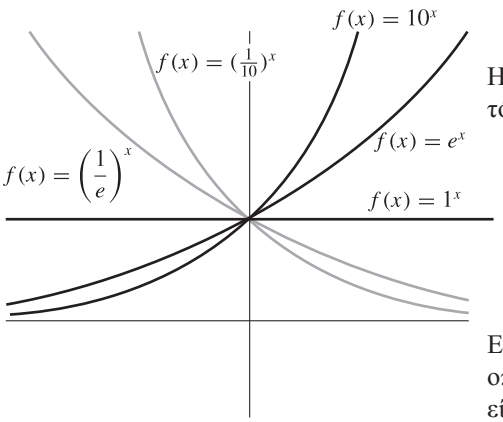
(Παρατηρήστε ότι από την (2) έπεται ότι αυτός ο ορισμός του a^x συμφωνεί με τον παλιό για ρητούς x.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$(1)\quad (a^b)^c = e^{c\log a^b} = e^{c\log(e^{b\log a})} = e^{c(b\log a)} = e^{cb\log a} = a^{bc}.$$

(Καθένα από τα βήματα σε αυτήν την αλυσίδα από ισότητες βασίζεται στον τελευταίο μας ορισμό, ή στο γεγονός ότι $\exp = \log^{-1}$.)

$$(2)\qquad a^1 = e^{1\log a} = e^{\log a} = a,$$
$$a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x\log a + y\log a} = e^{x\log a}\cdot e^{y\log a} = a^x\cdot a^y. \ \blacksquare$$



ΣΧΗΜΑ 4

Το Σχήμα 4 παρουσιάζει τη γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$ για διαφορετικά a. Η συμπεριφορά της συνάρτησης εξαρτάται από το αν $a < 1$, $a = 1$ ή $a > 1$. Αν $a = 1$, τότε $f(x) = 1^x = 1$. Έστω ότι $a > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, $\log a > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} &\text{αν} && x < y,\\ &\text{τότε} && x\log a < y\log a,\\ &\text{άρα} && e^{x\log a} < e^{y\log a},\\ &\text{δηλαδή} && a^x < a^y. \end{aligned}$$

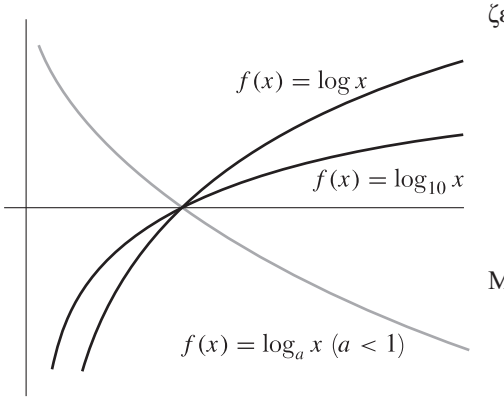
Επομένως, η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι αύξουσα. Από την άλλη πλευρά, αν $0 < a < 1$, οπότε $\log a < 0$, με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι φθίνουσα. Και στις δύο περιπτώσεις, αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε η $f(x) = a^x$ είναι 1-1. Αφού η $\exp$ παίρνει οποιαδήποτε θετική τιμή, είναι εύκολο να δούμε ότι και η a^x παίρνει κάθε θετική τιμή. Άρα, η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται στο σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, και παίρνει όλες τις τιμές. Αν $f(x) = a^x$, τότε f^{-1} είναι η συνάρτηση που συνήθως συμβολίζεται με $\log_a$ (Σχήμα 5).

Ακριβώς όπως η a^x μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της $\exp$, έτσι και η $\log_a$ εκφράζεται συναρτήσει της $\log$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} &\text{αν} && y = \log_a x,\\ &\text{τότε} && x = a^y = e^{y\log a},\\ &\text{άρα} && \log x = y\log a,\\ &\text{ή} && y = \frac{\log x}{\log a}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$



ΣΧΗΜΑ 5

Οι παράγωγοι των $f(x) = a^x$ και $g(x) = \log_a x$ υπολογίζονται και οι δύο εύκολα:

$$f(x) = e^{x\log a}, \quad \text{άρα } f'(x) = \log a\cdot e^{x\log a} = \log a\cdot a^x,$$
$$g(x) = \frac{\log x}{\log a}, \quad \text{άρα } g'(x) = \frac{1}{x\log a}.$$

Μπορούμε επίσης εύκολα να παραγωγίσουμε μια πιο σύνθετη συνάρτηση όπως η

$$f(x) = g(x)^{h(x)}$$

αρκεί να θυμόμαστε ότι *εξ ορισμού*,

$$f(x) = e^{h(x)\log g(x)}.$$

έπεται από τον Κανόνα της Αλυσίδας ότι

$$f'(x) = e^{h(x)\log g(x)}\cdot\left[h'(x)\log g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right]$$

$$= g(x)^{h(x)} \cdot \left[h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right].$$

Δεν υπάρχει λόγος να θυμάται κανείς αυτόν τον τύπο —εφαρμόζουμε απλώς την ιδέα που βρίσκεται πίσω από αυτόν, σε κάθε ειδική περίπτωση που εμφανίζεται. Βοηθά, όμως, να θυμάστε ότι ο πρώτος παράγοντας στην παράγωγο θα είναι ο $g(x)^{h(x)}$.

Υπάρχει μια ειδική περίπτωση αυτού του τύπου που *αξίζει* να τη θυμόμαστε. Η συνάρτηση $f(x) = x^a$ έχει έως τώρα οριστεί μόνο για ρητούς a. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε και να βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = x^a$ για κάθε αριθμό a· το αποτέλεσμα είναι ακριβώς αυτό που θα περιμέναμε:

$$f(x) = x^a = e^{a \log x}$$

άρα

$$f'(x) = \frac{a}{x} \cdot e^{a \log x} = \frac{a}{x} \cdot x^a = a x^{a-1}.$$

Τα αλγεβρικά τεχνάσματα με τις εκθετικές συναρτήσεις θα γίνουν η δεύτερή σας φύση με λίγη εξάσκηση —να θυμάστε μόνο ότι όλοι οι κανόνες που θα έπρεπε να ισχύουν όντως ισχύουν. Οι βασικές ιδιότητες της $\exp$ είναι οπωσδήποτε αυτές που διατυπώθηκαν στα Θεωρήματα 2 και 3:

$$\exp'(x) = \exp(x),$$
$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Πραγματικά, κάθε μια από αυτές τις ιδιότητες σχεδόν χαρακτηρίζει τη συνάρτηση $\exp$. Βέβαια η $\exp$ δεν είναι η μοναδική συνάρτηση f που ικανοποιεί την $f' = f$, γιατί αν $f = ce^x$, τότε $f'(x) = ce^x = f(x)$· όμως αυτές είναι οι μόνες συναρτήσεις με αυτήν την ιδιότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Αν η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = f(x) \quad \text{για κάθε } x,$$

τότε υπάρχει ένας αριθμός c, τέτοιος ώστε

$$f(x) = ce^x \quad \text{για κάθε } x.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

(Αυτό επιτρέπεται, γιατί $e^x \neq 0$ για κάθε x.) Τότε

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0.$$

Άρα υπάρχει ένας αριθμός c, τέτοιος ώστε

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = c \quad \text{για κάθε } x. \quad \blacksquare$$

Για τη δεύτερη βασική ιδιότητα της $\exp$ χρειάζεται πιο διεξοδική συζήτηση. Η συνάρτηση $\exp$ οπωσδήποτε δεν είναι η μόνη συνάρτηση f που ικανοποιεί την

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

Η συνάρτηση $f(x) = 0$ και οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a^x$ ικανοποιούν επίσης αυτήν την εξίσωση. Αλλά το όλο θέμα είναι πολύ πιο σύνθετο —υπάρχουν

άπειρες άλλες συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα, αλλά είναι αδύνατο να αποδείξουμε την ύπαρξη έστω και μιας διαφορετικής από αυτές που ήδη έχουμε αναφέρει, εκτός αν χρησιμοποιήσουμε πιο προχωρημένα μαθηματικά! Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ο ορισμός της 10^x είναι τόσο δύσκολος: υπάρχουν άπειρες το πλήθος συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$
$$f(1) = 10,$$

και που καμία από αυτές *δεν* είναι η συνάρτηση $f(x) = 10^x$! Πάντως ισχύει το εξής —κάθε *συνεχής* συνάρτηση f με

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

είναι σίγουρα της μορφής $f(x) = a^x$ ή $f(x) = 0$. (Το Πρόβλημα 38 υποδεικνύει τον τρόπο για να το αποδείξετε, έχει όμως κάτι να πει και για τις ασυνεχείς συναρτήσεις με αυτήν την ιδιότητα.)

Εκτός από τις δύο βασικές ιδιότητες που διατυπώθηκαν στα Θεωρήματα 2 και 3, η συνάρτηση $\exp$ έχει μια ακόμα ιδιότητα που είναι πολύ σημαντική —η $\exp$ «αυξάνει ταχύτερα από κάθε πολυώνυμο». Με άλλα λόγια,

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

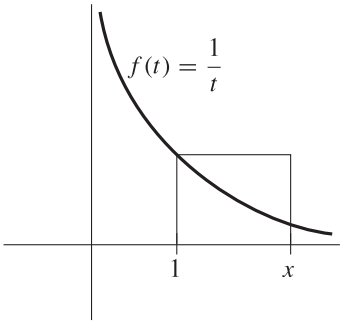
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη γίνεται βήμα προς βήμα.

Βήμα 1. $e^x > x$ για κάθε x, επομένως $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ (μπορούμε να πούμε ότι αυτή είναι η περίπτωση $n = 0$).

Για να δείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό (που είναι προφανής για $x \leq 0$), αρκεί να δείξουμε ότι

$$x > \log x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

Αν $x < 1$ αυτό σαφώς ισχύει, αφού $\log x < 0$. Αν $x > 1$, τότε (Σχήμα 6) ο $x - 1$ είναι ένα άνω άθροισμα για την $f(t) = 1/t$ στο $[1, x]$, άρα $\log x < x - 1 < x$.



ΣΧΗΜΑ 6

Βήμα 2. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$

Για να αποδείξουμε αυτό, παρατηρούμε ότι

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{x/2} \cdot e^{x/2}}{\frac{x}{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right) \cdot e^{x/2}.$$

Από το Βήμα 1, προκύπτει ότι η παράσταση στην παρένθεση είναι μεγαλύτερη από 1, και $\lim_{x\to\infty} e^{x/2} = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x\to\infty} e^x/x = \infty$.

Βήμα 3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{x/n})^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot n^n} = \frac{1}{n^n} \cdot \left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

Η παράσταση στην παρένθεση γίνεται οσοδήποτε μεγάλη, όπως προκύπτει από το Βήμα 2, άρα η n-οστή δύναμη σίγουρα μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη. ∎

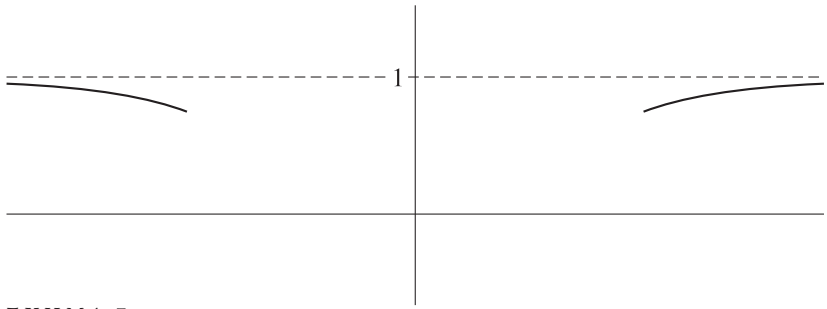
Έχουμε τώρα τη δυνατότητα να εξετάσουμε προσεκτικά την εξής πολύ ενδιαφέρουσα συνάρτηση: $f(x) = e^{-1/x^2}, x \neq 0$. Έχουμε

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

Άρα,

$$f'(x) < 0 \quad \text{για } x < 0,$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{για } x > 0,$$

δηλαδή η f είναι φθίνουσα για αρνητικά x και αύξουσα για θετικά x. Ακόμα, αν το $|x|$ είναι μεγάλο, τότε το x^2 είναι μεγάλο, άρα το $-1/x^2$ είναι κοντά στο 0, οπότε το e^{-1/x^2} είναι κοντά στο 1 (Σχήμα 7).



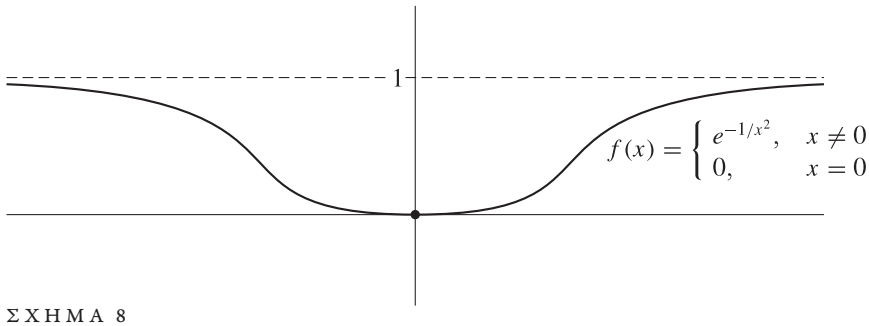
ΣΧΗΜΑ 7

Η συμπεριφορά της f κοντά στο 0 είναι πιο ενδιαφέρουσα. Αν το x είναι μικρό, τότε το $1/x^2$ είναι μεγάλο, άρα το e^{1/x^2} είναι μεγάλο, οπότε το $e^{-1/x^2} = 1/(e^{1/x^2})$ είναι μικρό. Αυτό το επιχείρημα, κατάλληλα διατυπωμένο με ε και δ, δείχνει ότι

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Επομένως, αν ορίσουμε

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 8

τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής (Σχήμα 8). Και μάλιστα, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. Πράγματι

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}},$$

και

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}, \qquad \text{ενώ} \qquad \lim_{h \to 0-} \frac{1/h}{e^{(1/h)^2}} = -\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{(x^2)}}.$$

Ξέρουμε ήδη ότι

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

Ακόμα περισσότερο ισχύει ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x} = \infty,$$

και αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(x^2)}} = 0.$$

Επομένως

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{2}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/h^2} \cdot \dfrac{2}{h^3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot e^{-1/h^2}}{h^4} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \dfrac{1}{h^4}}{e^{1/h^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{e^{(x^2)}}. \end{aligned}$$

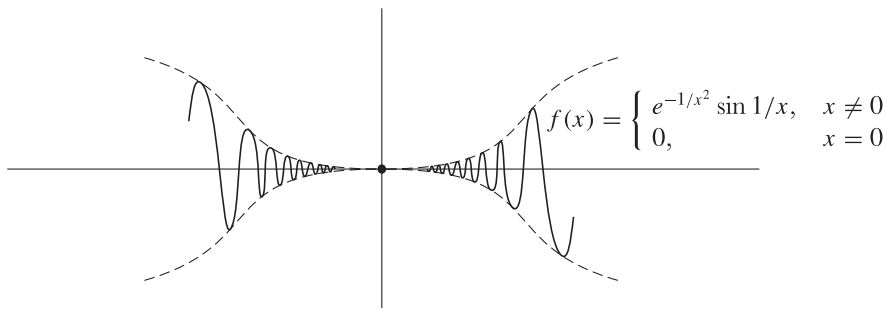
Με συλλογισμούς ίδιους με τον προηγούμενο, δείχνουμε ότι $f''(0) = 0$. Άρα

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{-6}{x^4} + e^{-1/x^2} \cdot \dfrac{4}{x^6}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται. Χρησιμοποιώντας επαγωγή, μπορούμε να δείξουμε (Πρόβλημα 40) ότι $f^{(k)}(0) = 0$ για *κάθε* k. Η συνάρτηση f είναι *απεριόριστα* επίπεδη στο 0, και τείνει στο 0 τόσο γρήγορα, που μπορεί να καλύψει πολλές ανωμαλίες άλλων συναρτήσεων. Για παράδειγμα (Σχήμα 9), ας υποθέσουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \cdot \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αποδεικνύεται (Πρόβλημα 41) ότι και για αυτήν τη συνάρτηση ισχύει και ότι $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε k. Το παράδειγμα αυτό δείχνει, με τον πιο εντυπωσιακό ίσως τρόπο, πόσο κακή μπορεί να είναι μια συνάρτηση, και παρ' όλα αυτά να είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη. Στο 4ο Μέρος θα εξετάσουμε ακόμα πιο περιοριστικές συνθήκες για μια συνάρτηση, που τελικά θα αποκλείσουν συμπεριφορές αυτού του τύπου.



ΣΧΗΜΑ 9

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Παραγωγίστε τις εξής συναρτήσεις (θυμηθείτε ότι το a^{b^c} πάντα συμβολίζει το $a^{(b^c)}$).

(i) $f(x) = e^{e^{e^{e^x}}}$.

(ii) $f(x) = \log(1 + \log(1 + \log(1 + e^{1+e^{1+x}})))$.

(iii) $f(x) = (\sin x)^{\sin(\sin x)}$.

(iv) $f(x) = e^{\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)}$.

(v) $f(x) = (\sin x)^{(\sin x)^{\sin x}}$.

(vi) $f(x) = \log_{(e^x)} \sin x$.

(vii) $f(x) = \left[\arcsin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\right]^{\log(\sin e^x)}$.

(viii) $f(x) = (\log(3 + e^4))e^{4x} + (\arcsin x)^{\log 3}$.

(ix) $f(x) = (\log x)^{\log x}$.

(x) $f(x) = x^x$.

(xi) $f(x) = \sin\left(x^{\sin(x^{\sin x})}\right)$.

2. (α) Επαληθεύστε ότι η παράγωγος της $\log \circ f$ είναι f'/f.

Αυτή η έκφραση καλείται η *λογαριθμική παράγωγος* της f. Είναι συχνά πιο εύκολο να υπολογιστεί αυτή, παρά η f', αφού τα γινόμενα και οι δυνάμεις στην παράσταση της f μετατρέπονται σε αθροίσματα και γινόμενα στην παράσταση της $\log \circ f$. Η παράγωγος f' μπορεί στη συνέχεια να ληφθεί απλώς με πολλαπλασιασμό της λογαριθμικής παραγώγου επί την f. Αυτή η διαδικασία λέγεται *λογαριθμική παραγώγιση*.

(β) Χρησιμοποιήστε λογαριθμική παραγώγιση για να βρείτε την $f'(x)$ των εξής συναρτήσεων:

(i) $f(x) = (1 + x)(1 + e^{x^2})$.

(ii) $f(x) = \dfrac{(3 - x)^{1/3}x^2}{(1 - x)(3 + x)^{2/3}}$.

(iii) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

(iv) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}(1 + x^3)}$.

3. Βρείτε το

$$\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$$

(για $f > 0$ στο $[a, b]$).

4. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

(α) $f(x) = e^{x+1}$.

(β) $f(x) = e^{\sin x}$.

(γ) $f(x) = e^x + e^{-x}$. } (Συγκρίνετε αυτές τις γραφικές παραστάσεις με τις

(δ) $f(x) = e^x - e^{-x}$. } αντίστοιχες των $\exp$ και $1/\exp$.)

(ε) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \dfrac{2}{e^{2x} + 1}$.

5. Βρείτε με τον Κανόνα του l'Hôpital τα εξής όρια:

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^2}$.

(ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{x^3}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3}$.

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^2}$.

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2}{x^3}$.

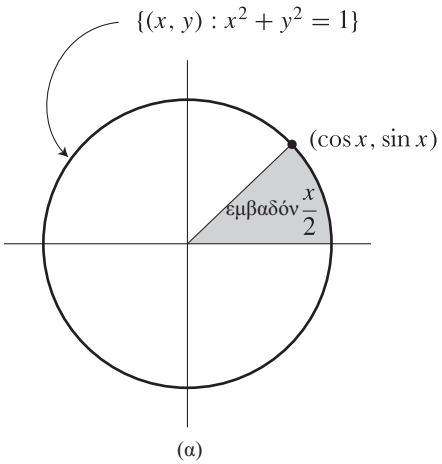
(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + x^2/2 - x^3/3}{x^3}$.

6. Βρείτε με τον Κανόνα του l'Hôpital τα εξής όρια:

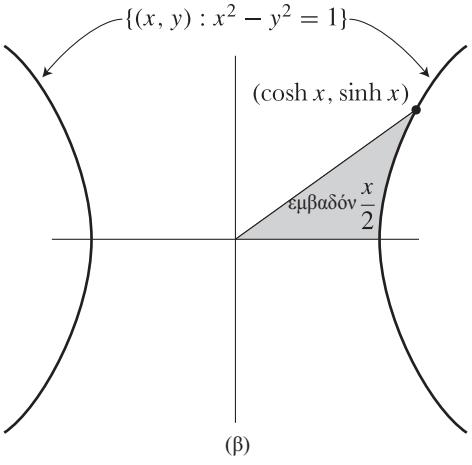
(i) $\lim_{x\to 0} (1-x)^{1/x}$.

(ii) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

(iii) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 10

7. Οι συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1},$$

καλούνται **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολικό συνημίτονο**, και **υπερβολική εφαπτομένη**, αντίστοιχα (αλλά συνήθως διαβάζονται sinch, cosh, και tanch). Υπάρχουν πολλές αναλογίες ανάμεσα σε αυτές τις συναρτήσεις και τα συνηθισμένα τριγωνομετρικά τους αντίστοιχα. Μια αναλογία περιγράφεται στο Σχήμα 10· αναβάλλουμε για το επόμενο κεφάλαιο την απόδειξη του ότι η περιοχή του Σχήματος 10(β) έχει πράγματι εμβαδόν $x/2$, γιατί σε αυτό θα αναπτύξουμε μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Στα επόμενα τρία προβλήματα εξετάζουμε άλλες αναλογίες, αλλά για τις βαθύτερες αναλογίες θα πρέπει να περιμένουμε μέχρι το Κεφάλαιο 27. Αν δεν έχετε ήδη επιλύσει το Πρόβλημα 4, σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων sinh, cosh και tanh.

8. Αποδείξτε ότι

(α) $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

(β) $\tanh^2 + 1/\cosh^2 = 1$.

(γ) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

(δ) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

(ε) $\sinh' = \cosh$.

(στ) $\cosh' = \sinh$.

(ζ) $\tanh' = \dfrac{1}{\cosh^2}$.

9. Οι συναρτήσεις $\sinh$ και $\tanh$ είναι 1-1· οι αντίστροφές τους $\sinh^{-1}$ και $\tanh^{-1}$, που συμβολίζονται ορισμένες φορές με arg sinh και arg tanh (το «όρισμα» του υπερβολικού ημιτόνου και εφαπτομένης), είναι ορισμένες στο $\mathbf{R}$ και στο $(-1,1)$, αντίστοιχα. Αν η $\cosh$ περιοριστεί στο $[0,\infty)$, έχει αντίστροφη, που συμβολίζεται με arg cosh ή απλώς με $\cosh^{-1}$, και ορίζεται στο $[1,\infty)$. Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες του Προβλήματος 8, ότι

(α) $\sinh(\cosh^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$.

(β) $\cosh(\sinh^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$.

(γ) $(\sinh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(δ) $(\cosh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ για $x > 1$.

(ε) $(\tanh^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ για $|x| < 1$.

10. (α) Βρείτε έναν ακριβή τύπο για τις $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$, και $\tanh^{-1}$ (λύνοντας την εξίσωση $y = \sinh^{-1} x$ ως προς x συναρτήσει του y, κτλ.).

(β) Βρείτε τα

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx \quad \text{για } a,b>1 \text{ ή } a,b<-1,$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx \quad \text{για } |a|,|b|<1.$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας στο τρίτο ολοκλήρωμα με αυτό που παίρνετε αν γράψετε

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right].$$

11. Δείξτε ότι η

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$$

δεν είναι φραγμένη στο $[2,\infty)$.

12. Έστω f μια μη φθίνουσα συνάρτηση στο $[1,\infty)$, και ορίστε την

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad x \geq 1.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$ αν και μόνο αν η $F/\log$ είναι φραγμένη στο $[1,\infty)$.

13. Βρείτε τα

(α) $\lim_{x\to\infty} a^x$ για $0 < a < 1$. (Θυμηθείτε τον ορισμό!)

(β) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{(\log x)^n}$.

(γ) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x}$.

(δ) $\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^n$. Υπόδειξη: $x(\log x)^n = \dfrac{(-1)^n \left(\log \dfrac{1}{x}\right)^n}{\dfrac{1}{x}}$.

(ε) $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

14. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^x$ για $x > 0$. (Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 13(ε).)

15. (α) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = e^x/x^n$ για $x > 0$, και συμπεράνετε ότι $f(x) > e^n/n^n$ για $x > n$.

(β) Χρησιμοποιώντας την παράσταση $f'(x) = e^x(x-n)/x^{n+1}$, αποδείξτε ότι $f'(x) > e^{n+1}/(n+1)^{n+1}$ για $x > n+1$, και έτσι δώστε μια άλλη απόδειξη του $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

16. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x/x^n$.

17. (α) Βρείτε το $\lim_{y\to 0} \big(\log(1+y)\big)/y$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hôpital, αλλά αυτό θα ήταν ανοησία.)

(β) Βρείτε το $\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)$.

(γ) Αποδείξτε ότι $e = \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$.

(δ) Αποδείξτε ότι $e^a = \lim_{x\to\infty}(1+a/x)^x$. (Μπορείτε να το πάρετε από το μέρος (γ) με ένα μικρό αλγεβρικό παιχνίδι.)

∗(ε) Αποδείξτε ότι $\log b = \lim_{x\to\infty} x(b^{1/x} - 1)$.

18. Σχεδιάστε την $f(x) = (1+1/x)^x$ για $x > 0$. (Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 17(γ).)

19. Αν μια τράπεζα δίνει a τοις εκατό τόκο τον χρόνο, τότε μια αρχική κατάθεση ίση με I γίνεται $I(1+a/100)$ μετά από 1 χρόνο. Αν η τράπεζα συνυπολογίζει τον τόκο (δηλαδή μετρά τον ετήσιο τόκο ως μέρος του κεφαλαίου κατά τον υπολογισμό του τόκου του επόμενου χρόνου), τότε η αρχική κατάθεση αυξάνει σε $I(1+a/100)^n$ μετά από n χρόνια. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο τόκος δίνεται δυο φορές τον χρόνο. Το τελικό ποσό μετά από n χρόνια είναι, δυστυχώς, όχι $I(1+a/100)^{2n}$, αλλά μόνο $I(1+a/200)^{2n}$ —αν και ο τόκος καταβάλλεται δυο φορές συχνότερα, πρέπει να υποδιπλασιάσουμε τον τόκο σε κάθε υπολογισμό, γιατί είναι $a/2$ ανά μισό χρόνο. Αυτό το ποσό είναι μεγαλύτερο από $I(1+a/100)^n$, αλλά όχι πολύ μεγαλύτερο. Έστω τώρα ότι η τράπεζα συνυπολογίζει τον τόκο συνεχώς, δηλαδή η τράπεζα υπολογίζει πόση θα γινόταν η κατάθεση αν ο τόκος δινόταν k φορές το χρόνο, και μετά παίρνει το ελάχιστο άνω φράγμα όλων αυτών των αριθμών. Πόση θα έχει γίνει μια αρχική κατάθεση ενός ευρώ μετά από ένα χρόνο;

20. (α) Θέτουμε $f(x) = \log|x|$ για $x \neq 0$. Αποδείξτε ότι $f'(x) = 1/x$ για $x \neq 0$.

(β) Αν $f(x) \neq 0$ για όλα τα x, αποδείξτε ότι $(\log|f|)' = f'/f$.

21. Έστω ότι, επί ενός διαστήματος, η συνάρτηση f ικανοποιεί την $f' = cf$ για κάποιον αριθμό c.

(α) Υποθέτοντας ότι η f δεν είναι ποτέ 0, χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 20(β) για να δείξετε ότι $|f(x)| = le^{cx}$, για κάποιον αριθμό l (> 0). Συμπεραίνουμε ότι $f(x) = ke^{cx}$ για κάποιο k.

(β) Δείξτε ότι αυτό το αποτέλεσμα ισχύει χωρίς την επιπλέον υπόθεση ότι η f δεν είναι ποτέ 0. Υπόδειξη: Δείξτε ότι η f δεν μπορεί να είναι 0 στα άκρα ανοικτού διαστήματος για το οποίο δεν είναι πουθενά μηδέν.

(γ) Δώστε μια απλούστερη απόδειξη του ότι $f(x) = ke^{cx}$ για κάποιο k, θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = f(x)/e^{cx}$.

(δ) Έστω ότι $f' = fg'$ για κάποια g. Δείξτε ότι $f(x) = ke^{g(x)}$ για κάποιο k.

∗**22.** Μια ραδιενεργός ουσία ελαττώνεται με ρυθμό ανάλογο προς τη στιγμιαία της μάζα (αφού για όλα τα άτομα η πιθανότητα διάσπασης είναι η ίδια, η συνολική διάσπαση είναι ανάλογη με τον αριθμό των ατόμων που απομένουν). Αν $A(t)$ είναι η μάζα τη χρονική στιγμή t, αυτό σημαίνει ότι $A'(t) = cA(t)$ για κάποιο c (που παριστάνει την πιθανότητα διάσπασης ενός ατόμου).

(α) Βρείτε το $A(t)$ συναρτήσει της αρχικής μάζας $A_0 = A(0)$ τη χρονική στιγμή 0.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ένας αριθμός τ (η «περίοδος ημιζωής» του ραδιενεργού στοιχείου) με την ιδιότητα $A(t + \tau) = A(t)/2$.

23. *Ο νόμος της ψύξης του Newton* ισχυρίζεται ότι ένα σώμα ψύχεται με ρυθμό ανάλογο προς τη διαφορά της θερμοκρασίας του από τη θερμοκρασία του μέσου που το περιβάλλει. Βρείτε τη θερμοκρασία $T(t)$ του σώματος τη χρονική στιγμή t, συναρτήσει της θερμοκρασίας του T_0 τη χρονική στιγμή 0, υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος διατηρείται σταθερή και ίση με M. Υπόδειξη: Για να λύσετε τη διαφορική εξίσωση που εκφράζει το νόμο του Newton, θυμηθείτε ότι $T' = (T - M)'$.

24. Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, τότε $f = 0$.

25. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f που επαληθεύουν την

(i) $\displaystyle\int_0^x f = e^x$.

(ii) $\displaystyle\int_0^{x^2} f = 1 - e^{2x^2}$.

26. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν την $f'(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

27. Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f που επαληθεύουν την εξίσωση

$$(f(x))^2 = \int_0^x f(t)\frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

28. (α) Έστω f και g δύο συνεχείς μη αρνητικές συναρτήσεις στο $[a, b]$ και g μη αρνητική. Υποθέτουμε ότι για κάποιο C έχουμε

$$f(x) \le C + \int_a^x fg, \qquad a \le x \le b.$$

Αποδείξτε την *ανισότητα του Gronwall*:

$$f(x) \le Ce^{\int_a^x g}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$h(x) = \big(C + \int_a^x fg\big)e^{-\int_a^x g}.$$

(β) Έστω ότι οι f και g είναι μη αρνητικές συναρτήσεις με την g να είναι συνεχή και την f παραγωγίσιμη. Έστω ότι $f'(x) = g(x)f(x)$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 21.)

29. (α) Αποδείξτε ότι

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \le e^x \quad \text{για } x \ge 0.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n, και συγκρίνετε τις παραγώγους.

(β) Δώστε μια καινούργια απόδειξη της $\lim_{x\to\infty} e^x/x^n = \infty$.

30. Δώστε και άλλη μια απόδειξη για αυτήν την πρόταση, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη μορφή του Κανόνα του l'Hôpital (βλ. Πρόβλημα 11-56).

31. (α) Υπολογίστε το $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$. (Θα πρέπει να είστε σε θέση να μαντέψετε σωστά το αποτέλεσμα, πριν από οποιεσδήποτε πράξεις.)

(β) Υπολογίστε τα εξής όρια:

(i) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(1/x)} e^{t^2}\,dt.$

(ii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(\log x)/x} e^{t^2}\,dt.$

(iii) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}\int_x^{x+(\log x)/2x} e^{t^2}\,dt.$

32. Αυτό το πρόβλημα περιγράφει την κλασική προσέγγιση στις έννοιες του λογαρίθμου και των εκθετικών συναρτήσεων. Κατ' αρχήν, θα υποθέσουμε απλώς ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, ορισμένη με τον στοιχειώδη τρόπο για ρητό x, μπορεί κάπως να επεκταθεί σε μια συνεχή και 1-1 συνάρτηση που υπακούει στους ίδιους αλγεβρικούς κανόνες σε όλη την ευθεία. (Βλ. το Πρόβλημα 22-29 για μια απευθείας απόδειξή του.) Η αντίστροφη της f θα σημειώνεται τότε με $\log_a$.

(α) Δείξτε, απευθείας από τον ορισμό, ότι

$$\begin{aligned}\log_a{}'(x) &= \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\lim_{k\to 0}(1+k)^{1/k}\right).\end{aligned}$$

Επομένως, το όλο πρόβλημα ανάγεται στον καθορισμό του $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$. Αν μπορούμε να δείξουμε ότι αυτό έχει ένα όριο e, τότε

$$\log_e{}'(x) = \frac{1}{x}\cdot\log_e e = \frac{1}{x},$$

και επομένως η $\exp = \log_e^{-1}$ έχει παράγωγο $\exp'(x) = \exp(x)$.

(β) Έστω $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ για φυσικούς αριθμούς n. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα, δείξτε ότι

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

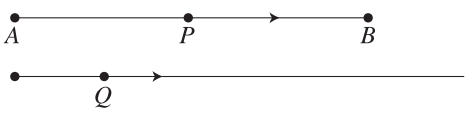
Συμπεράνετε ότι $a_n < a_{n+1}$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $1/k! \le 1/2^{k-1}$ για $k \ge 2$, δείξτε ότι όλα τα $a_n < 3$. Επομένως, το σύνολο των αριθμών $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ είναι φραγμένο και άρα έχει ελάχιστο άνω φράγμα e. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι $e - a_n < \varepsilon$, για αρκετά μεγάλο n.

(δ) Αν $n \le x \le n+1$, τότε

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Συμπεράνετε ότι $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Επίσης, δείξτε ότι $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, και συμπεράνετε ότι $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e$.



ΣΧΗΜΑ 11

∗**33.** Ένα σημείο P κινείται πάνω σε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10^7, ενώ ένα άλλο σημείο Q κινείται πάνω σε μια άπειρη ακτίνα (Σχήμα 11). Η ταχύτητα του P είναι διαρκώς ίση με την απόσταση του P από το B (με άλλα λόγια, αν $P(t)$ είναι η θέση του P τη χρονική στιγμή t, τότε $P'(t) = 10^7 - P(t)$), ενώ το Q κινείται με σταθερή ταχύτητα $Q'(t) = 10^7$. Η απόσταση που θα έχει διανύσει το Q μετά από χρόνο t, ορίζεται ως ο *Νεπέρειος λογάριθμος* της απόστασης του P από το B τη χρονική στιγμή t. Δηλαδή

$$10^7 t = \text{Nap log}\,[10^7 - P(t)].$$

Αυτός ήταν ο ορισμός του λογαρίθμου που δόθηκε από τον Napier (1550-1617) στη δημοσίευσή του το 1614, *Mirifici logarithmonum canonis descriptio* (Περιγραφή του Θαυμάσιου Νόμου των Λογαρίθμων)· εργασία που έγινε *πριν* να επινοηθεί η χρήση των εκθετών! Ο αριθμός 10^7 επιλέχθηκε επειδή οι πίνακες του Napier (που χρησίμευαν σε αστρονομικούς και ναυσιπλοϊκούς υπολογισμούς), κατέγραφαν τους λογαρίθμους ημιτόνων γωνιών, για τους οποίους οι καλύτεροι διαθέσιμοι πίνακες έφταναν μέχρι τα επτά δεκαδικά ψηφία, και ο Napier ήθελε να αποφύγει τα κλάσματα. Αποδείξτε ότι

$$\text{Nap log}\, x = 10^7 \log \frac{10^7}{x}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ίδιο τέχνασμα όπως στο Πρόβλημα 23 για να λύσετε την εξίσωση ως προς P.

∗**34.** (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = (\log x)/x$ (δείχνοντας ιδιαίτερη προσοχή στη συμπεριφορά κοντά στο 0 και το ∞).

(β) Ποιο είναι μεγαλύτερο, το e^π ή το π^e;

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $0 < x \leq 1$, ή $x = e$, τότε ο μοναδικός αριθμός y που ικανοποιεί την $x^y = y^x$ είναι ο $y = x$· αλλά αν $x > 1$, $x \neq e$, τότε υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $y \neq x$ που ικανοποιεί την $x^y = y^x$· ακόμα, αν $x < e$, τότε $y > e$, και αν $x > e$, τότε $y < e$. (Ερμηνεύστε τους παραπάνω ισχυρισμούς μέσω της γραφικής παράστασης του μέρους (α)!)

(δ) Αποδείξτε ότι, αν x και y είναι φυσικοί αριθμοί και $x^y = y^x$, τότε $x = y$ ή $x = 2$, $y = 4$, ή $x = 4$, $y = 2$.

(ε) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των ζευγών (x, y) με $x^y = y^x$ αποτελείται από μια καμπύλη και μια ευθεία που τέμνονται· βρείτε την τομή και σχεδιάστε ένα πρόχειρο σκίτσο.

∗∗(στ) Για $1 < x < e$ θέτουμε $g(x)$ τον μοναδικό αριθμό $> e$ με $x^{g(x)} = g(x)^x$. Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη. Είναι καλή ιδέα να μελετήσετε χωριστά τις συναρτήσεις,

$$f_1(x) = \frac{\log x}{x}, \quad 0 < x < e$$
$$f_2(x) = \frac{\log x}{x}, \quad e < x$$

και να γράψετε τη g ως συνάρτηση των f_1 και f_2. Αν κάνετε σωστά αυτό το κομμάτι, θα πρέπει να μπορείτε να δείξετε ότι

$$g'(x) = \frac{[g(x)]^2}{1 - \log g(x)} \cdot \frac{1 - \log x}{x^2}.$$

∗**35.** Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιεί ύλη από το Παράρτημα του Κεφαλαίου 11.

(α) Αποδείξτε ότι η $\exp$ είναι κυρτή και η $\log$ κοίλη.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ και όλα τα $p_i > 0$, τότε για κάθε $z_i > 0$ έχουμε

$$z_1{}^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n{}^{p_n} < p_1 z_1 + \cdots + p_n z_n.$$

(Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 8 από το Παράρτημα του Κεφαλαίου 11.)

(γ) Δώστε μια άλλη απόδειξη της $G_n \leq A_n$ (Πρόβλημα 2-22).

36. (α) Έστω f μια θετική συνάρτηση στο $[a, b]$, και P_n μια διαμέριση του $[a, b]$ σε n ίσα διαστήματα. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 2-22 για να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{b-a} L(\log f, P_n) \leq \log\left(\frac{1}{b-a} L(f, P_n)\right).$$

(β) Χρησιμοποιώντας το Παράρτημα του Κεφαλαίου 13, συμπεράνετε ότι για συνεχή $f > 0$ έχουμε

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f \leq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right).$$

Μια πιο άμεση προσέγγιση σκιαγραφείται στο επόμενο μέρος:

(γ) Στο Πρόβλημα 35, το αποτέλεσμα του Προβλήματος 2-22 συνάγεται ως ειδική περίπτωση της ανισότητας

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i)$$

για $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ και g κυρτή. Για g κοίλη, έχουμε την αντίστροφη ανισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i) \leq g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right).$$

Εφαρμόστε το πιο πάνω με $g = \log$ για να αποδείξετε απευθείας το μέρος (β) για κάθε ολοκληρώσιμη f.

(δ) Διατυπώστε ένα γενικό θεώρημα του οποίου το μέρος (β) να είναι απλώς μια ειδική περίπτωση.

37. Έστω ότι η f ικανοποιεί την $f' = f$ και την $f(x + y) = f(x) f(y)$ για κάθε x και y. Αποδείξτε ότι $f = \exp$ ή $f = 0$.

∗**38.** Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνεχής και $f(x + y) = f(x) f(y)$ για κάθε x και y, τότε $f = 0$ ή $f(x) = [f(1)]^x$ για κάθε x. Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f(x) = [f(1)]^x$ για ρητούς x, και μετά χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 8-6. Αυτό το πρόβλημα συνδέεται στενά με το Πρόβλημα 8-7, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πληροφορίες που δόθηκαν στο τέλος του Προβλήματος 8-7 για να δείξουμε ότι υπάρχουν ασυνεχείς συναρτήσεις f που ικανοποιούν την $f(x + y) = f(x) f(y)$.

∗**39.** Αποδείξτε ότι, αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στους θετικούς πραγματικούς, και $f(xy) = f(x) + f(y)$ για όλους τους θετικούς x και y, τότε $f = 0$ ή $f(x) = f(e) \log x$ για κάθε $x > 0$. Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f(e^x)$.

∗**40.** Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = e^{-1/x^2}$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$, τότε $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε k (θα συναντήσετε του ίδιου είδους δυσκολίες όπως στο Πρόβλημα 10-21). Υπόδειξη: Θεωρήστε συναρτήσεις $g(x) = e^{-1/x^2} P(1/x)$ για πολυωνυμική συνάρτηση P.

∗**41.** Αποδείξτε ότι, αν $f(x) = e^{-1/x^2} \sin 1/x$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$, τότε $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε k.

42. (α) Αποδείξτε ότι, αν α είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$(*) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

τότε η συνάρτηση $y(x) = e^{\alpha x}$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$(**) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

∗(β) Αποδείξτε ότι, αν ο α είναι διπλή ρίζα της $(*)$, τότε και η $y(x) = xe^{\alpha x}$ ικανοποιεί την $(**)$. Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι αν α είναι διπλή ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε $f'(\alpha) = 0$.

∗(γ) Αποδείξτε ότι, αν α είναι μια ρίζα της $(*)$ τάξης r, τότε η $y(x) = x^k e^{\alpha x}$ είναι λύση για $0 \leq k \leq r - 1$.

Αν η $(*)$ έχει n πραγματικές ρίζες (μετρώντας τις πολλαπλές ρίζες), το μέρος (γ) μας δίνει n λύσεις $y_1, \ldots, y_n$ της $(**)$.

(δ) Αποδείξτε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ επίσης ικανοποιεί την $(**)$.

Είναι γνωστό θεώρημα ότι σε αυτήν την περίπτωση αυτές είναι οι μόνες λύσεις της $(**)$. Το Πρόβλημα 21 και τα επόμενα δύο προβλήματα αποδεικνύουν ειδικές περιπτώσεις αυτού του θεωρήματος, και η γενική περίπτωση εξετάζεται στο Πρόβλημα 20-26. Στο Κεφάλαιο 27 θα δούμε τι πρέπει να κάνουμε όταν η $(*)$ δεν έχει n πραγματικές ρίζες.

∗**43.** Έστω ότι η f ικανοποιεί την $f'' - f = 0$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $f = 0$ ως εξής:

(α) Δείξτε ότι $f^2 - (f')^2 = 0$.

(β) Έστω ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (a, b). Δείξτε ότι $f(x) = ce^x$ ή αλλιώς $f(x) = ce^{-x}$ για κάθε x στο (a, b), όπου c είναι μια σταθερά.

∗∗(γ) Αν $f(x_0) \neq 0$ ας πούμε, για $x_0 > 0$, τότε θα υπήρχε ένας αριθμός a τέτοιος ώστε $0 \leq a < x_0$ και $f(a) = 0$, ενώ $f(x) \neq 0$ για $a < x < x_0$. Γιατί; Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός και το μέρος (β) για να καταλήξετε σε άτοπο.

∗**44.** (α) Δείξτε ότι, αν η f ικανοποιεί την $f'' - f = 0$, τότε $f(x) = ae^x + be^{-x}$ για κάποια a και b. (Βρείτε πρώτα πώς θα γράφονταν τα a και b, συναρτήσει των $f(0)$ και $f'(0)$, και μετά χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 43.)

(β) Δείξτε ακόμα ότι $f = a \sinh + b \cosh$ για κάποια (άλλα) a και b.

45. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν τις

(α) $f^{(n)} = f^{(n-1)}$.

(β) $f^{(n)} = f^{(n-2)}$.

∗**46.** Αυτό το πρόβλημα, που σχετίζεται με το Πρόβλημα 15-30, περιγράφει μια παρουσίαση της εκθετικής συνάρτησης ξεκινώντας με την υπόθεση ότι η διαφορική εξίσωση $f' = f$ έχει μια μη μηδενική λύση.

(α) Έστω ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f \neq 0$ με $f' = f$. Αποδείξτε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε x θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x) = f(x_0 + x) f(x_0 - x)$, όπου $f(x_0) \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση f που ικανοποιεί την $f' = f$ και την $f(0) = 1$.

(γ) Για αυτήν την f δείξτε ότι $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ εξετάζοντας τη συνάρτηση $g(x) = f(x+y)/f(x)$.

(δ) Δείξτε ότι η f είναι 1-1 και ότι $(f^{-1})'(x) = 1/x$.

47. Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις, έτσι ώστε $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Λέμε ότι η f *μεγαλώνει ταχύτερα από* την g ($f \gg g$) αν

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty,$$

και λέμε ότι η f και η g *μεγαλώνουν με την ίδια ταχύτητα* ($f \sim g$) αν

$$\text{το } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ υπάρχει και είναι } \neq 0, \infty.$$

Για παράδειγμα, για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση P με $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ (δηλαδή, η P είναι μη σταθερή και έχει θετικό κύριο συντελεστή) έχουμε $\exp \gg P$ και $P \gg \log^n$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

(α) Αν δοθούν f και g με $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, είναι κατ' ανάγκη αλήθεια ότι μια από τις τρεις συνθήκες $f \gg g$ ή $g \gg f$ ή $f \sim g$ ισχύει;

(β) Αν $f \gg g$, τότε $f + g \sim f$.

(γ) Αν
$$\frac{\log f}{\log g} \geq c > 1$$
για αρκούντως μεγάλο x, τότε $f \gg g$.

(δ) Αν $f \gg g$ και $F(x) = \int_0^x f$, $G(x) = \int_0^x g$, έπεται κατ' ανάγκη ότι $F \gg G$;

(ε) Διατάξτε καθένα από τα ακόλουθα σύνολα συναρτήσεων κατά αύξουσα σειρά μεγέθους ταχύτητας (χάριν ευκολίας, σημειώνουμε την κάθε συνάρτηση απλώς μέσω της τιμής της στο x):

(i) x^3, e^x, $x^3 + \log(x^3)$, $\log 4x$, $(\log x)^x$, x^x, $x + e^{-5x}$, $x^3 \log x$.

(ii) $x \log^2 x$, e^{5x}, $\log(x^x)$, e^{x^2}, x^x, $x^{\log x}$, $(\log x)^x$.

(iii) e^x, x^e, x^x, e^{x^2}, 2^x, $e^{x/2}$, $(\log x)^{2x}$.

48. Έστω ότι οι $g_1, g_2, g_3, \ldots$ είναι συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση f, η οποία αυξάνει ταχύτερα από οποιαδήποτε g_i.

49. Αποδείξτε ότι ο $\log_{10} 2$ είναι άρρητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Κάθε υπολογισμός παραγώγου μάς δίνει, σύμφωνα με το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, και έναν τύπο ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα,

$$\text{αν } F(x) = x(\log x) - x \quad \text{τότε } F'(x) = \log x\cdot$$

επομένως,

$$\int_a^b \log x\, dx = F(b) - F(a) = b(\log b) - b - [a(\log a) - a], \quad 0 < a, b.$$

Τύποι αυτού του είδους απλοποιούνται πολύ αν υιοθετήσουμε τον συμβολισμό

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\int_a^b \log x\, dx = x(\log x) - x\Big|_a^b.$$

Αυτός ο υπολογισμός του $\int_a^b \log x\, dx$ βασίστηκε στην «προφητεία» ότι η $\log$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = x(\log x) - x$. Γενικά, μια συνάρτηση F τέτοια ώστε $F' = f$ λέγεται **παράγουσα** της f. Ασφαλώς **μια συνεχής συνάρτηση f έχει πάντοτε παράγουσα**, την

$$F(x) = \int_a^x f,$$

αλλά σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθούμε να βρίσκουμε παράγουσες που να γράφονται με βάση τις γνωστές συναρτήσεις $\sin$, $\log$ κτλ. Μια συνάρτηση που μπορεί να γραφεί με αυτόν τον τρόπο λέγεται στοιχειώδης συνάρτηση. Για να ακριβολογούμε*, **στοιχειώδη συνάρτηση** λέμε αυτήν που λαμβάνεται με πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση και σύνθεση από τις ρητές συναρτήσεις, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους, καθώς και τις συναρτήσεις $\log$ και $\exp$.

Πρέπει να τονίσουμε από την αρχή ότι συνήθως είναι αδύνατο να βρεθούν στοιχειώδεις παράγουσες. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει *στοιχειώδης* συνάρτηση F τέτοια ώστε

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad \text{για κάθε } x$$

(δεν μιλάμε για μια προσωρινή άγνοια των μαθηματικών· υπάρχει ένα (δύσκολο) θεώρημα που μας βεβαιώνει ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση). Και, κάτι ακόμα χειρότερο,

*Ο ορισμός τον οποίο θα δώσουμε είναι συγκεκριμένος, αλλά όχι εντελώς ακριβής, ή τουλάχιστον όχι τόσο καθιερωμένος. Συνήθως οι στοιχειώδεις συναρτήσεις ορίζονται κατά τέτοιον τρόπο ώστε να περιλαμβάνουν τις «αλγεβρικές» συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις g που ικανοποιούν μια εξίσωση

$$(g(x))^n + f_{n-1}(x)(g(x))^{n-1} + \cdots + f_0(x) = 0,$$

όπου οι f_i είναι ρητές συναρτήσεις. Αλλά για τους δικούς μας σκοπούς, τέτοιες συναρτήσεις μπορούν να παραλειφθούν.

τίποτα δεν θα σας βοηθά να διακρίνετε αν *μπορεί* ή όχι να βρεθεί μια στοιχειώδης παράγουσα (δεν σας μένει παρά η ελπίδα ότι τα προβλήματα σε αυτό το κεφάλαιο δεν έχουν τυπογραφικά λάθη). Επειδή η έρευνα για στοιχειώδεις παράγουσες είναι τόσο αβέβαιη, το να βρούμε μία είναι συχνά ιδιαίτερα ικανοποιητικό. Αν παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = x \arctan x - \frac{\log(1+x^2)}{2}$$

ικανοποιεί την

$$F'(x) = \arctan x$$

(το πώς θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε μια τέτοια παρατήρηση, είναι άλλη ιστορία), οπότε

$$\int_a^b \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{\log(1+x^2)}{2}\Bigg|_a^b,$$

τότε μπορούμε να αισθανόμαστε ότι «πράγματι» υπολογίσαμε το $\int_a^b \arctan x \, dx$.

Αυτό το κεφάλαιο περιέχει κάτι παραπάνω από μεθόδους για να βρίσκουμε στοιχειώδεις παράγουσες δεδομένων στοιχειωδών συναρτήσεων (μια διαδικασία που είναι γνωστή ως «ολοκλήρωση»), μαζί με κάποιους συμβολισμούς, συντμήσεις, και συμφωνίες σχεδιασμένες για να διευκολύνουν τη διαδικασία. Αυτή η προκατάληψη με τις στοιχειώδεις συναρτήσεις μπορεί να δικαιολογηθεί με τρία επιχειρήματα:

(1) Η ολοκλήρωση είναι ένα παραδοσιακό θέμα στον Απειροστικό Λογισμό, και καθένας θα έπρεπε να ξέρει κάποια πράγματα για αυτήν.

(2) Κάθε τόσο μπορεί να σας χρειαστεί πραγματικά να υπολογίσετε ένα ολοκλήρωμα, κάτω από συνθήκες που δεν σας επιτρέπουν να συμβουλευτείτε κάποιον από τους γνωστούς πίνακες ολοκληρωμάτων (για παράδειγμα, μπορεί να πάρετε ένα μάθημα (Φυσικής) στο οποίο να θεωρείται φυσικό ότι είστε ικανοί να ολοκληρώνετε).

(3) Οι πιο χρήσιμες «μέθοδοι» ολοκλήρωσης είναι στην πραγματικότητα πολύ σημαντικά θεωρήματα (που εφαρμόζονται σε όλες τις συναρτήσεις, όχι μόνο στις στοιχειώδεις).

Φυσικά, ο τελευταίος λόγος είναι ο ουσιαστικός. Ακόμα και αν έχετε την πρόθεση να ξεχάσετε πώς ολοκληρώνουν (και θα ξεχάσετε πιθανότατα κάποιες λεπτομέρειες μετά τον πρώτο καιρό), δεν πρέπει να ξεχάσετε ποτέ τις βασικές μεθόδους.

Αυτές οι βασικές μέθοδοι είναι θεωρήματα που μας επιτρέπουν να εκφράσουμε τις παράγουσες μιας συνάρτησης με βάση τις παράγουσες άλλων συναρτήσεων. Για να αρχίσουμε λοιπόν να ολοκληρώνουμε, θα χρειαστούμε έναν κατάλογο με τις παράγουσες *κάποιων* συναρτήσεων· μπορούμε να αποκτήσουμε έναν τέτοιο κατάλογο απλώς παραγωγίζοντας διάφορες γνωστές συναρτήσεις. Ο κατάλογος που δίνουμε στη συνέχεια χρησιμοποιεί ένα καθιερωμένο σύμβολο που απαιτεί κάποια εξήγηση. Το σύμβολο

$$\int f \quad \text{ή} \quad \int f(x)\,dx$$

σημαίνει «μια παράγουσα της f» ή, ακριβέστερα, «το σύνολο όλων των παραγουσών της f». Το σύμβολο $\int f$ θα χρησιμοποιείται συχνά στη διατύπωση θεωρημάτων, ενώ το $\int f(x)\,dx$ είναι περισσότερο χρήσιμο σε τύπους σαν τον εξής:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}.$$

Αυτή η «ισότητα» έχει την έννοια ότι η συνάρτηση $F(x) = x^4/4$ ικανοποιεί την $F'(x) = x^3$. Δεν μπορούμε να την πάρουμε κατά λέξη γιατί το δεξιό μέλος είναι ένας αριθμός, όχι συνάρτηση, αλλά σε αυτήν τη μοναδική περίπτωση θα επιτρέπουμε τέτοιες ασυμφωνίες. Ο στόχος μας είναι να κάνουμε τη διαδικασία της ολοκλήρωσης όσο πιο μηχανική γίνεται,

για αυτό θα καταφύγουμε σε κάθε λογής τεχνάσματα. Υπάρχει κάτι ακόμα σε αυτήν την ισότητα που αξίζει να το αναφέρουμε. Οι περισσότεροι άνθρωποι γράφουν

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

για να τονίσουν το γεγονός ότι οι παράγουσες της $f(x) = x^3$ είναι ακριβώς οι συναρτήσεις της μορφής $F(x) = x^4/4 + C$ για κάποιον αριθμό C. Αν και είναι δυνατόν (Πρόβλημα 14) να καταλήξουμε σε αντιφάσεις αν παραβλέψουμε αυτό το σημείο, στην πράξη δεν εμφανίζονται τέτοιες δυσκολίες, και είναι άσκοπος μπελάς να νοιάζεται κανείς για αυτήν τη σταθερά.

Υπάρχει μια σημαντική σύμβαση που συνοδεύει αυτόν τον συμβολισμό: το γράμμα που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της ισότητας θα πρέπει να ταιριάζει με το γράμμα που εμφανίζεται μετά το «d» στο αριστερό μέλος —έτσι

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4},$$
$$\int tx\,dx = \frac{tx^2}{2},$$
$$\int tx\,dt = \frac{xt^2}{2}.$$

Μια συνάρτηση από το $\int f(x)\,dx$, δηλαδή μια παράγουσα της f, λέγεται συχνά και «αόριστο ολοκλήρωμα» της f, ενώ το $\int_a^b f(x)\,dx$ λέγεται, σε αντιδιαστολή, «ορισμένο ολοκλήρωμα». Αυτός ο συμβολισμός που προτείνουμε δουλεύει πολύ καλά στην πράξη, είναι όμως σημαντικό να μην ξεστρατίζετε. Διακινδυνεύοντας να γίνουμε βαρετοί, θα τονίσουμε για μία ακόμα φορά το εξής: το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ *δεν* ορίζεται ως «$F(b) - F(a)$, για F αόριστο ολοκλήρωμα της f» (αν αυτή η πρόταση δεν σας θυμίζει τίποτα, είναι καιρός να ξαναδιαβάσετε το Κεφάλαιο 13).

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τους τύπους που περιέχονται στον σύντομο αυτό πίνακα αορίστων ολοκληρωμάτων, παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις που δίνονται στο δεξιό μέλος.

$$\int a\,dx = ax$$
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$ (το $\int \frac{1}{x}\,dx$ γράφεται συχνά και $\int \frac{dx}{x}$ για ευκολία· παρόμοιες συντμήσεις χρησιμοποιούμε και στα δύο τελευταία παραδείγματα αυτού του πίνακα.)
$$\int e^x\,dx = e^x$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x$$
$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$$
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

Δύο γενικοί τύποι της ίδιας φύσης είναι συνέπειες των θεωρημάτων για την παραγώγιση:

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$
$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx.$$

Αυτές οι δύο ισότητες έχουν την έννοια ότι, αν προσθέσουμε μία παράγουσα της f σε μία παράγουσα της g, θα πάρουμε μία παράγουσα της $f + g$, ενώ αν πολλαπλασιάσουμε μία παράγουσα της f με c θα πάρουμε μία παράγουσα της $c \cdot f$.

Παρατηρήστε τα αντίστοιχα αυτών των τύπων για τα ορισμένα ολοκληρώματα: Αν η f και η g είναι συνεχείς, τότε

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx.$$

Αυτές οι σχέσεις προκύπτουν από τους προηγούμενους τύπους, γιατί κάθε ορισμένο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως η διαφορά των τιμών μιας αντίστοιχης παράγουσας στα a και b. Η συνέχεια απαιτείται για να είμαστε βέβαιοι ότι αυτές οι παράγουσες υπάρχουν. (Ασφαλώς, οι τύποι ισχύουν και όταν η f και η g είναι απλώς ολοκληρώσιμες, θυμηθείτε όμως πόσο δυσκολότερες είναι οι αποδείξεις σε αυτήν την περίπτωση.)

Ο τύπος για την παράγωγο γινομένου δίνει ένα πιο ενδιαφέρον θεώρημα, που θα γραφεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΜΕΡΗ)

Αν η f' και η g' είναι συνεχείς, τότε

$$\int fg' = fg - \int f'g,$$
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(Παρατηρήστε ότι στη δεύτερη ισότητα το $f(x)g(x)$ συμβολίζει τη *συνάρτηση* $f \cdot g$.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ο τύπος

$$(fg)' = f'g + fg'$$

γράφεται και

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Άρα

$$\int fg' = \int (fg)' - \int f'g,$$

και βέβαια μπορούμε να διαλέξουμε την fg σαν μία από τις συναρτήσεις που συμβολίζονται με $\int (fg)'$. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο τύπο.

Ο δεύτερος τύπος είναι απλώς μια αναδιατύπωση του πρώτου, και ο τρίτος προκύπτει άμεσα από οποιονδήποτε από τους δύο άλλους. ∎

Όπως φανερώνουν τα παραδείγματα που ακολουθούν, η ολοκλήρωση κατά μέρη είναι χρήσιμη όταν η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε μπορεί να θεωρηθεί γινόμενο μιας συνάρτησης f, που η παράγωγός της είναι απλούστερη από την f, και μιας άλλης συνάρτησης που έχει προφανώς τη μορφή g':

$$\int \underset{\substack{\downarrow\ \downarrow \\ f\ g'}}{x\,e^x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow\ \downarrow \\ f\ g}}{x\,e^x} - \int \underset{\substack{\downarrow\ \ \downarrow \\ f'\ \ g}}{1 \cdot e^x}\,dx$$
$$= xe^x - e^x$$

$$\int \underset{\substack{\downarrow\ \ \downarrow \\ f\ \ g'}}{x \sin x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)}\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x$$

Υπάρχουν δύο ειδικά τεχνάσματα που δουλεύουν συχνά στην ολοκλήρωση κατά μέρη. Το πρώτο είναι να θεωρήσουμε ως g' τον παράγοντα 1, που πάντα μπορεί να γραφεί μέσα στο ολοκλήρωμα

$$\int \log x\,dx = \int \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{1} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{x}\,\underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{(1/x)}\,dx$$
$$= x(\log x) - x.$$

Το δεύτερο τέχνασμα είναι να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη για να βρούμε το $\int h$ ως συνάρτηση του ίδιου του $\int h$, και μετά να λύσουμε ως προς $\int h$. Ένα απλό παράδειγμα είναι ο υπολογισμός του

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{(1/x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\log x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{\log x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\log x} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{(1/x)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{\log x}\,dx,$$

από όπου έπεται η

$$2\int \frac{1}{x}\log x\,dx = (\log x)^2$$

ή

$$\int \frac{1}{x}\log x\,dx = \frac{(\log x)^2}{2}.$$

Συχνά απαιτούνται πιο πολύπλοκοι υπολογισμοί:

$$\int \underset{\substack{\downarrow\ \ \downarrow \\ f\ \ g'}}{e^x \sin x}\,dx = \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ f'}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g}}{(-\cos x)}\,dx$$
$$= -e^x\cos x + \int \underset{\substack{\downarrow\ \ \downarrow \\ u\ \ v'}}{e^x \cos x}\,dx$$
$$= -e^x\cos x + [\underset{\substack{\downarrow \\ u}}{e^x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ v}}{(\sin x)} - \int \underset{\substack{\downarrow \\ u'}}{e^x}\,\underset{\substack{\downarrow \\ v}}{(\sin x)}\,dx]\cdot$$

επομένως,

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$$

ή

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$$

Δεδομένου ότι η ολοκλήρωση κατά μέρη βασίζεται στο να αναγνωρίσετε ότι μια συνάρτηση είναι της μορφής g', όσο πιο πολλές συναρτήσεις ξέρετε ήδη να ολοκληρώνετε, τόσο περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας έχετε. Συχνά φαίνεται λογικό να κάνουμε μια προκαταρκτική ολοκλήρωση πριν επιχειρήσουμε να λύσουμε το κύριο πρόβλημα. Για παράδειγμα, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά μέρη το

$$\int (\log x)^2\,dx = \int \underset{\downarrow\, f}{(\log x)}\underset{\downarrow\, g'}{(\log x)}\,dx$$

αν θυμηθούμε ότι $\int \log x\,dx = x(\log x) - x$ (αυτός ο τύπος αποδείχθηκε επίσης με ολοκλήρωση κατά μέρη)· έχουμε

$$\begin{aligned}\int \underset{\downarrow\, f}{(\log x)}\underset{\downarrow\, g'}{(\log x)}\,dx &= \underset{\downarrow\, f}{(\log x)}\underset{\downarrow\, g}{[x(\log x) - x]} - \int \underset{\downarrow\, f'}{(1/x)}\underset{\downarrow\, g}{[x(\log x) - x]}\,dx \\ &= (\log x)[x(\log x) - x] - \int [\log x - 1]\,dx \\ &= (\log x)[x(\log x) - x] - \int \log x\,dx + \int 1\,dx \\ &= (\log x)[x(\log x) - x] - [x(\log x) - x] + x \\ &= x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x.\end{aligned}$$

Η πιο σημαντική μέθοδος ολοκλήρωσης είναι μια συνέπεια του Κανόνα της Αλυσίδας. Η χρήση αυτής της μεθόδου απαιτεί πολύ περισσότερη εξυπνάδα από την ολοκλήρωση κατά μέρη· ακόμα και η παρουσίαση της μεθόδου είναι πιο δύσκολη. Για αυτό θα αναπτύξουμε αυτήν τη μέθοδο σταδιακά, διατυπώνοντας το θεώρημα πρώτα για ορισμένα ολοκληρώματα, και κρατώντας την περίπτωση των αορίστων ολοκληρωμάτων για αργότερα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2
(Ο ΤΥΠΟΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ)

Αν η f και η g' είναι συνεχείς, τότε

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)\cdot g'$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε το αριστερό μέλος είναι $F(g(b)) - F(g(a))$. Από την άλλη πλευρά,

$$(F \circ g)' = (F' \circ g)\cdot g' = (f \circ g)\cdot g',$$

άρα η $F \circ g$ είναι μια παράγουσα της $(f \circ g)\cdot g'$ και το δεξιό μέλος είναι

$$(F \circ g)(b) - (F \circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)). \quad \blacksquare$$

Οι απλούστερες περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε τον τύπο της αντικατάστασης είναι όταν γνωρίζουμε ότι μια δοθείσα συνάρτηση είναι της μορφής $(f \circ g)\cdot g'$. Για παράδειγμα, η ολοκλήρωση του

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x\,dx \quad \left(= \int_a^b (\sin x)^5 \cos x\,dx \right)$$

διευκολύνεται από την παρουσία του παράγοντα $\cos x$, που θα είναι ο παράγοντας $g'(x)$ για την $g(x) = \sin x$. Η παράσταση που απομένει, η $(\sin x)^5$, γράφεται ως $(g(x))^5 = f(g(x))$, για $f(u) = u^5$. Έτσι

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \sin x \\ f(u) = u^5 \end{bmatrix}$$
$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$
$$= \int_{\sin a}^{\sin b} u^5\,du = \frac{\sin^6 b}{6} - \frac{\sin^6 a}{6}.$$

Η ολοκλήρωση του $\int_a^b \tan x \, dx$ γίνεται με τον ίδιο τρόπο αν γράψουμε

$$\int_a^b \tan x\,dx = -\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx.$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο παράγοντας $-\sin x$ είναι το $g'(x)$, όπου $g(x) = \cos x$· ο παράγοντας $1/\cos x$ που απομένει γράφεται ως $f(\cos x)$ για $f(u) = 1/u$. Άρα

$$\int_a^b \tan x\,dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \cos x \\ f(u) = \dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$
$$= -\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = -\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$
$$= -\int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u}\,du = \log(\cos a) - \log(\cos b).$$

Τέλος, για να βρείτε το

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx,$$

παρατηρήστε ότι $1/x = g'(x)$ όπου $g(x) = \log x$, και ότι $1/\log x = f(g(x))$ για $f(u) = 1/u$. Έτσι,

$$\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx \qquad \begin{bmatrix} g(x) = \log x \\ f(u) = \dfrac{1}{u} \end{bmatrix}$$
$$= \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$
$$= \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u}\,du = \log(\log b) - \log(\log a).$$

Ευτυχώς, ο τρόπος που χρησιμοποιούμε τον τύπο της αντικατάστασης γίνεται να συντομευθεί αρκετά. Τα ενδιάμεσα βήματα, στα οποία γράφουμε

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du,$$

απαλείφονται αν παρατηρήσουμε το εξής: Για να πάμε από το αριστερό στο δεξιό μέλος,

$$\text{αντικαθιστούμε με } \begin{cases} u \text{ το } g(x) \\ du \text{ το } g'(x)\,dx \end{cases}$$

(και αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης).

Οι αντικαταστάσεις μπορούν να γίνουν απευθείας στην αρχική συνάρτηση (από όπου και το όνομα αυτού του θεωρήματος). Για παράδειγμα,

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx \left[\text{αντικαθιστούμε με } \begin{matrix} u \text{ το } \sin x \\ du \text{ το } \cos x \, dx \end{matrix} \right] = \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 \, du,$$

και ομοίως

$$\int_a^b \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \left[\text{αντικαθιστούμε με } \begin{matrix} u \text{ το } \cos x \\ du \text{ το } -\sin x \, dx \end{matrix} \right] = \int_{\cos a}^{\cos b} \frac{1}{u} \, du.$$

Συνήθως συντομεύουμε ακόμα περισσότερο τη μέθοδο, και λέμε απλώς:

$$\begin{aligned} \text{«Θέτουμε } \quad u &= g(x) \\ du &= g'(x) \, dx. \text{»} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\int_a^b \frac{1}{x \log x} \, dx \left[\begin{matrix} \text{θέτουμε } \quad u = \log x \\ du = \dfrac{1}{x} \, dx \end{matrix} \right] = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{u} \, du.$$

Σε αυτό το κεφάλαιο, συνήθως ενδιαφερόμαστε περισσότερο για τις παράγουσες παρά για τα ορισμένα ολοκληρώματα, αλλά αν μπορούμε να βρούμε το $\int_a^b f(x) \, dx$ για κάθε a και b, μπορούμε βέβαια να βρούμε και το $\int f(x) \, dx$. Για παράδειγμα, αφού

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \frac{\sin^6 b}{6} - \frac{\sin^6 a}{6},$$

έπεται ότι

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx = \frac{\sin^6 x}{6}.$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= -\log \cos x, \\ \int \frac{1}{x \log x} \, dx &= \log(\log x). \end{aligned}$$

Είναι τελείως αντιοικονομικό να παίρνουμε παράγουσες από τον τύπο της αντικατάστασης βρίσκοντας πρώτα τα ορισμένα ολοκληρώματα. Αντί για αυτό, μπορούμε να συνδυάσουμε τα δύο βήματα, καταλήγοντας στην εξής διαδικασία:

(1) Θέτουμε

$$\begin{aligned} u &= g(x), \\ du &= g'(x) \, dx\cdot \end{aligned}$$

(μετά από αυτόν τον μετασχηματισμό θα πρέπει να εμφανίζεται μόνο το γράμμα u, *όχι* το γράμμα x).

(2) Βρίσκουμε μια παράγουσα (ως παράσταση που περιέχει το u).

(3) Αντικαθιστούμε ξανά το u με $g(x)$.

Έτσι, για να βρούμε το

$$\int \sin^5 x \cos x \, dx,$$

(1) θέτουμε

$$u = \sin x,$$
$$du = \cos x\, dx$$

οπότε παίρνουμε το

$$\int u^5\, du\cdot$$

(2) υπολογίζουμε το

$$\int u^5\, du = \frac{u^6}{6}\cdot$$

(3) θυμόμαστε να αντικαταστήσουμε ξανά το u με $\sin x$, άρα

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx = \frac{\sin^6 x}{6}.$$

Ομοίως, αν

$$u = \log x,$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx,$$

τότε

$$\text{το} \quad \int \frac{1}{x \log x}\, dx \quad \text{γίνεται} \quad \int \frac{1}{u}\, du = \log u,$$

άρα

$$\int \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log x).$$

Για να υπολογίσουμε το

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx,$$

θέτουμε

$$u = 1 + x^2,$$
$$du = 2x\, dx.$$

Ο παράγοντας 2 που προέκυψε δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα —το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\log u,$$

άρα

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(Αυτό το αποτέλεσμα, αν συνδυαστεί με την ολοκλήρωση κατά μέρη, δίνει έναν τύπο που έχουμε ήδη αναφέρει:

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \arctan x\, dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x \arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)).\end{aligned}$$

Αυτές οι εφαρμογές του τύπου της αντικατάστασης* αντιπροσωπεύουν τις πιο άμεσες και λιγότερο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις —αν αναγνωρίσουμε τον κατάλληλο παράγοντα

*Ο τύπος της αντικατάστασης συχνά γράφεται στη μορφή

$$\int f(u)\, du = \int f(g(x))g'(x)\, dx, \quad u = g(x).$$

$g'(x)$, ολόκληρο το πρόβλημα μπορεί να γίνει τόσο απλό, ώστε να είμαστε σε θέση να το λύσουμε με το νου μας. Τα επόμενα τρία προβλήματα απαιτούν μόνο τις πληροφορίες που δίνει ο μικρός πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων στην αρχή του κεφαλαίου και, φυσικά, την κατάλληλη αντικατάσταση (το τρίτο πρόβλημα είναι λίγο μεταμφιεσμένο με κάποιο αλγεβρικό τέχνασμα).

$$\int \sec^2 x \tan^5 x \, dx,$$
$$\int (\cos x) e^{\sin x} \, dx,$$
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx.$$

Αν δεν τα καταφέρατε να βρείτε τις κατάλληλες αντικαταστάσεις, θα έπρεπε να είστε σε θέση να τις μαντέψετε από τις απαντήσεις, που είναι $(\tan^6 x)/6$, $e^{\sin x}$, και $\arcsin e^x$. Αρχικά μπορεί να βρίσκετε αυτά τα προβλήματα πολύ δύσκολα για να τα επιλύσετε με το μυαλό, αλλά τουλάχιστον όταν η g έχει την πολύ απλή μορφή $g(x) = ax + b$, δεν χρειάζεται να χάνετε τον καιρό σας γράφοντας αναλυτικά τον μετασχηματισμό. Τα επόμενα ολοκληρώματα πρέπει να είναι όλα φανερά. (Η μόνη κάπως ανησυχητική λεπτομέρεια είναι η σωστή τοποθέτηση της σταθεράς —η απάντηση στο δεύτερο θα είναι $e^{3x}/3$ ή μήπως $3e^{3x}$; Εγώ προσωπικά χειρίζομαι πάντοτε αυτά τα προβλήματα ως εξής: Προφανώς $\int e^{3x} \, dx = e^{3x} \cdot$ (κάτι). Τώρα αν παραγωγίσω την $F(x) = e^{3x}$, παίρνω $F'(x) = 3e^{3x}$, άρα το «κάτι» πρέπει να είναι $\frac{1}{3}$, για να διαγραφεί το 3.)

$$\int \frac{dx}{x+3} = \log(x+3),$$
$$\int e^{3x} \, dx = \frac{e^{3x}}{3},$$
$$\int \cos 4x \, dx = \frac{\sin 4x}{4},$$
$$\int \sin(2x+1) \, dx = \frac{-\cos(2x+1)}{2},$$
$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\arctan 2x}{2}.$$

Η χρήση του τύπου της αντικατάστασης είναι πιο ενδιαφέρουσα όταν ο παράγοντας $g'(x)$ *δεν* εμφανίζεται. Υπάρχουν δύο βασικά είδη αντικαταστάσεων στις οποίες συμβαίνει κάτι τέτοιο. Ας πάρουμε πρώτα το

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \, dx.$$

Η ξεχωριστή παρουσία της παράστασης e^x μας υποδεικνύει τον απλουστευτικό μετασχηματισμό

$$u = e^x,$$
$$du = e^x \, dx.$$

Αν και η παράσταση $e^x \, dx$ δεν εμφανίζεται, μπορεί πάντα να μπει μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \, dx = \int \frac{1+e^x}{1-e^x} \cdot \frac{1}{e^x} \cdot e^x \, dx.$$

Δεν μπορούμε να δεχθούμε αυτόν τον τύπο κατά λέξη (στο κάτω-κάτω, το $\int f(u) \, du$ θα έπρεπε να σημαίνει μια παράγουσα της f και το $\int f(g(x))g'(x) \, dx$ μια παράγουσα της $(f \circ g) \cdot g'$, και αυτές οι δύο σίγουρα δεν είναι ίσες.) Μπορούμε όμως να τη θεωρήσουμε ως μια συμβολική σύνοψη της διαδικασίας που αναπτύξαμε. Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του Leibniz, και τον φτιασιδώσουμε λιγάκι, ο τύπος διαβάζεται πολύ ωραία:

$$\int f(u) \, du = \int f(u) \frac{du}{dx} \, dx.$$

Παίρνουμε επομένως

$$\int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με το αλγεβρικό τέχνασμα

$$\int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int\left(\frac{2}{1-u}+\frac{1}{u}\right)du = -2\log(1-u)+\log u,$$

άρα

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = -2\log(1-e^x)+\log e^x = -2\log(1-e^x)+x.$$

Υπάρχει ένας άλλος προτιμότερος τρόπος για να χειριστούμε αυτό το πρόβλημα, που δεν απαιτεί πολλαπλασιασμό και διαίρεση με e^x. Αν γράψουμε

$$\begin{aligned} u = e^x, \qquad & x = \log u,\\ & dx = \frac{1}{u}\,du, \end{aligned}$$

τότε το

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx \quad \text{αμέσως γίνεται} \quad \int \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1}{u}\,du.$$

Τα περισσότερα προβλήματα αντικατάστασης είναι πολύ ευκολότερα αν καταφύγει κανείς σε αυτό το κόλπο, να εκφράσει δηλαδή το x συναρτήσει του u και το dx συναρτήσει του du, αντί για το αντίστροφο. Δεν είναι δύσκολο να δείτε γιατί αυτό το τέχνασμα δουλεύει πάντα (αρκεί βέβαια η συνάρτηση που εκφράζει το u ως συνάρτηση του x να είναι 1-1 για όλα τα x που θεωρούμε): Αν εφαρμόσουμε την αντικατάσταση

$$\begin{aligned} u = g(x), \qquad & x = g^{-1}(u)\\ & dx = (g^{-1})'(u)\,du \end{aligned}$$

στο ολοκλήρωμα

$$\int f(g(x))\,dx,$$

παίρνουμε

$$(1) \qquad \int f(u)(g^{-1})'(u)\,du.$$

Από την άλλη πλευρά, αν εφαρμόσουμε τη συνηθισμένη αντικατάσταση

$$\begin{aligned} u &= g(x)\\ du &= g'(x)\,dx \end{aligned}$$

στο ίδιο ολοκλήρωμα,

$$\int f(g(x))\,dx = \int f(g(x))\cdot\frac{1}{g'(x)}\cdot g'(x)\,dx,$$

παίρνουμε

$$(2) \qquad \int f(u)\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(u))}\,du.$$

Τα ολοκληρώματα (1) και (2) είναι ίσα, γιατί $(g^{-1})'(u) = 1/g'(g^{-1}(u))$.

Ως ένα ακόμα συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρούμε το

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα φερθούμε λίαν χονδροειδώς και θα αντικαταστήσουμε ολόκληρη την παράσταση $\sqrt{e^x+1}$ με ένα γράμμα. Επιλέγουμε δηλαδή την αντικατάσταση

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{e^x+1}, \\ u^2 &= e^x+1, \\ u^2-1 = e^x, \quad x &= \log(u^2-1), \\ dx &= \frac{2u}{u^2-1}\,du. \end{aligned}$$

Τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{(u^2-1)^2}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\,du = 2\int u^2-1\,du = \frac{2u^3}{3}-2u.$$

Έτσι,

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}-2(e^x+1)^{1/2}.$$

Ένα άλλο παράδειγμα, που εισάγει το δεύτερο βασικό είδος αντικατάστασης που μπορεί να γίνει, είναι το ολοκλήρωμα

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αντί να αντικαταστήσουμε μια πολύπλοκη παράσταση με μια άλλη απλούστερη, θα αντικαταστήσουμε το x με $\sin u$, γιατί $\sqrt{1-\sin^2 u}=\cos u$. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $u=\arcsin x$, αλλά η παράσταση του x συναρτήσει του u είναι αυτή που θα μας βοηθήσει να βρούμε την παράσταση που θα αντικαταστήσει το dx. Έτσι,

$$\begin{aligned} \text{θέτουμε} \quad x &= \sin u, \quad [u=\arcsin x] \\ dx &= \cos u\,du\cdot \end{aligned}$$

τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \sqrt{1-\sin^2 u}\,\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du.$$

Ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος βασίζεται στην ισότητα

$$\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$$

(βλ. την παράγραφο για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στη συνέχεια) δηλαδή

$$\int \cos^2 u\,du = \int \frac{1+\cos 2u}{2}\,du = \frac{u}{2}+\frac{\sin 2u}{4},$$

και

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{\arcsin x}{2}+\frac{\sin(2\arcsin x)}{4} \\ &= \frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x) \\ &= \frac{\arcsin x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση και η ολοκλήρωση κατά μέρη είναι οι μόνες θεμελιώδεις μέθοδοι που οφείλετε να μάθετε· με τη βοήθειά τους είναι δυνατόν να βρούμε τις παράγουσες ενός μεγάλου πλήθους συναρτήσεων. Παρ' όλα αυτά, όπως αποκαλύπτουν μερικά από

τα παραδείγματά μας, η επιτυχία συχνά βασίζεται σε κάποια πρόσθετα τεχνάσματα. Τα πιο σημαντικά καταγράφονται στη συνέχεια. Χρησιμοποιώντας τα θα πρέπει να μπορείτε να ολοκληρώσετε όλες τις συναρτήσεις στα Προβλήματα 1 ως 10 (μερικά άλλα ενδιαφέροντα τεχνάσματα θα συζητηθούν σε κάποια από τα υπόλοιπα προβλήματα).

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Αφού

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

και

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

παίρνουμε

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1,$$
$$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x,$$

ή

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τύπους για να βρούμε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin^n x\, dx,$$
$$\int \cos^n x\, dx,$$

αν ο n είναι άρτιος. Αντικαθιστώντας το $\sin^2 x$ ή το $\cos^2 x$ με

$$\frac{(1 - \cos 2x)}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{(1 + \cos 2x)}{2}$$

παίρνουμε ένα άθροισμα από όρους που περιέχουν χαμηλότερες δυνάμεις της $\cos$. Για παράδειγμα,

$$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

και

$$\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1 + \cos 4x}{2}\, dx.$$

Αν ο n είναι περιττός, $n = 2k + 1$, τότε

$$\int \sin^n x\, dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^k\, dx.$$

Η τελευταία παράσταση, αν κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς, περιέχει όρους της μορφής $\sin x \cos^l x$, που όλοι τους ολοκληρώνονται εύκολα. Για το ολοκλήρωμα της $\cos^n x$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο. Κάθε ολοκλήρωμα

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx$$

υπολογίζεται όμοια, αν ο n ή ο m είναι περιττός. Αν ο n και ο m είναι και οι δύο άρτιοι, χρησιμοποιούμε τους τύπους για το $\sin^2 x$ και το $\cos^2 x$.

Ένα τελευταίο σημαντικό τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα είναι το

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x).$$

Αν και υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να εξαγάγουμε αυτό το αποτέλεσμα με βάση τις μεθόδους που έχουμε ήδη στη διάθεσή μας (Πρόβλημα 13), είναι απλούστερο να ελέγξουμε αυτόν τον τύπο παραγωγίζοντας το δεξιό μέλος, και να τον απομνημονεύσουμε.

2. ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Η ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει (Πρόβλημα 21)

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\,dx$$

και πολλούς άλλους παρόμοιους τύπους. Οι δύο πρώτοι, αν χρησιμοποιηθούν κατ' επανάληψη, δίνουν μια διαφορετική μέθοδο υπολογισμού παράγουσας για την $\sin^n$ και την $\cos^n$. Ο τρίτος είναι πολύ σημαντικός για την ολοκλήρωση μιας μεγάλης γενικής κλάσης συναρτήσεων, που θα κλείσει τη συζήτησή μας.

3. ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θεωρούμε μια ρητή συνάρτηση p/q όπου

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0.$$

Μπορούμε κάλλιστα να υποθέσουμε ότι $a_n = b_m = 1$. Ακόμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n < m$, αλλιώς δεν έχουμε παρά να εκφράσουμε την p/q ως μια πολυωνυμική συνάρτηση συν μια ρητή συνάρτηση που *είναι* αυτής της μορφής, διαιρώντας (για παράδειγμα:

$$\frac{u^2}{u-1} = u + 1 + \frac{1}{u-1})$$

Η ολοκλήρωση τυχαίας ρητής συνάρτησης βασίζεται σε δύο στοιχεία· το πρώτο προκύπτει από το «Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας» (βλ. Κεφάλαιο 26, Θεώρημα 2 και Πρόβλημα 26-3), αλλά το δεύτερο δεν θα αποδειχθεί σε αυτό το βιβλίο.

ΘΕΩΡΗΜΑ Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση

$$q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$$

γράφεται ως το γινόμενο

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}$$

(όπου $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = m$).

(Σε αυτήν την παράσταση, έχουμε συγκεντρώσει τους ταυτόσημους παράγοντες, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα $x-\alpha_i$ και $x^2+\beta_i x+\gamma_i$ είναι διαφορετικά. Ακόμα, υποθέτουμε ότι κάθε δευτεροβάθμιος παράγοντας δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω. Αυτό σημαίνει ότι

$$\beta_i{}^2 - 4\gamma_i < 0,$$

γιατί αλλιώς μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το

$$x^2+\beta_i x+\gamma_i=\left[x-\left(\frac{-\beta_i+\sqrt{\beta_i{}^2-4\gamma_i}}{2}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{-\beta_i-\sqrt{\beta_i{}^2-4\gamma_i}}{2}\right)\right]$$

σε γραμμικούς παράγοντες).

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν $n<m$ και

$$\begin{aligned}p(x)&=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\\ q(x)&=x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0\\ &=(x-\alpha_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l},\end{aligned}$$

τότε η $p(x)/q(x)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}=&\left[\frac{a_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{a_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}\right]+\cdots\\ &+\left[\frac{\alpha_{k,1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{\alpha_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\right]\\ &+\left[\frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{b_{1,s_1}x+c_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}\right]+\cdots\\ &+\left[\frac{b_{l,1}x+c_{l,1}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)}+\cdots+\frac{b_{l,s_l}x+c_{l,s_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}\right].\end{aligned}$$

Αυτή η παράσταση, γνωστή ως «ανάλυση σε μερικά κλάσματα» της $p(x)/q(x)$ είναι τόσο πολύπλοκη που είναι απλούστερο να εξετάσουμε ένα παράδειγμα που δίνει μια τέτοια παράσταση και μας δείχνει πώς να τη βρίσκουμε. Σύμφωνα με το θεώρημα είναι δυνατόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}&\frac{2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}\\ &\qquad=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}+\frac{ex+f}{x^2+x+1}+\frac{gx+h}{(x^2+x+1)^2}.\end{aligned}$$

Για να βρούμε τους αριθμούς a, b, c, d, e, f, g και h, γράφουμε το δεξιό μέλος ως ένα πολυώνυμο με κοινό παρονομαστή $(x^2+x+1)^2(x^2+2x+3)(x-1)^2\cdot$ ο αριθμητής γίνεται

$$\begin{aligned}&a(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2+b(x^2+2x+2)(x^2+x+1)^2\\ &+(cx+d)(x-1)^2(x^2+x+1)^2+(ex+f)(x-1)^2(x^2+2x+2)(x^2+x+1)\\ &\qquad+(gx+h)(x-1)^2(x^2+2x+2).\end{aligned}$$

Ανοίγοντας τις παρενθέσεις (!), παίρνουμε ένα πολυώνυμο βαθμού 8, του οποίου οι συντελεστές είναι συνδυασμοί των $a,\ldots,h$. Εξισώνοντας αυτούς τους συντελεστές με τους συντελεστές του $2x^7+8x^6+13x^5+20x^4+15x^3+16x^2+7x+10$ (ο συντελεστής του x^8 είναι 0) παίρνουμε 8 εξισώσεις με οκτώ αγνώστους $a,\ldots,h$. Μετά από ηρωικούς υπολογισμούς, αυτές λύνονται και δίνουν

$$\begin{aligned}&a=1,\quad b=2,\quad c=1,\quad d=3,\\ &e=0,\quad f=0,\quad g=0,\quad h=1.\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\int \frac{2x^7+5x^6+13x^5+20x^4+17x^3+16x^2+7x+7}{(x^2+x+1)^2(x^2+2x+2)(x-1)^2}\,dx$$
$$=\int \frac{1}{(x-1)}\,dx+\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx+\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx.$$

(Σε απλούστερες περιπτώσεις οι υπολογισμοί που απαιτούνται μπορεί να γίνονται με σχετική ευκολία. Πήρα αυτό το συγκεκριμένο παράδειγμα *ξεκινώντας* από την ανάλυση σε μερικά κλάσματα και μετατρέποντάς τη σε ένα κλάσμα.)

Είμαστε ήδη σε θέση να βρούμε καθένα από τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην παραπάνω παράσταση· οι υπολογισμοί θα υπογραμμίσουν όλες τις δυσκολίες που ξεπροβάλλουν όταν ολοκληρώνουμε ρητές συναρτήσεις.

Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα είναι απλά:

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx=\log|x-1|,$$
$$\int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx=\frac{-2}{x-1}.$$

Η τρίτη ολοκλήρωση βασίζεται στο να «συμπληρώσουμε το τετράγωνο».

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}$$
$$=\tfrac{3}{4}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2+1\right].$$

(Αν είχαμε πάρει $-\frac{3}{4}$ αντί για $\frac{3}{4}$ δεν θα μπορούσαμε να πάρουμε την τετραγωνική ρίζα, αλλά σε αυτήν την περίπτωση ο αρχικά δευτεροβάθμιος παράγοντας θα μπορούσε να είχε αναλυθεί σε γραμμικούς παράγοντες.) Μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx=\frac{16}{9}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+1\right]^2}\,dx.$$

Η αντικατάσταση

$$u=\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}},$$
$$du=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\,dx,$$

μετατρέπει αυτό το ολοκλήρωμα σε

$$\frac{16}{9}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{(u^2+1)^2}\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με χρήση του τρίτου αναγωγικού τύπου που δόθηκε πιο πριν.

Τέλος, για να υπολογίσουμε το

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)}\,dx$$

γράφουμε

$$\int \frac{x+3}{x^2+2x+2}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx+\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος έχει σκόπιμα κατασκευαστεί έτσι ώστε να μπορούμε να το υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό

$$u = x^2 + 2x + 2,$$
$$du = (2x + 2)\,dx$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα στα δεξιά, που είναι απλώς η διαφορά των άλλων δύο, δεν είναι τίποτε άλλο από το $2\arctan(x+1)$. Αν το αρχικό ολοκλήρωμα ήταν

$$\int \frac{x+3}{(x^2+2x+2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^n}\,dx + \int \frac{2}{[(x+1)^2+1]^n}\,dx,$$

το πρώτο ολοκλήρωμα στα δεξιά θα υπολογιζόταν και πάλι με την ίδια αντικατάσταση. Το δεύτερο ολοκλήρωμα θα υπολογιζόταν με τη βοήθεια ενός αναγωγικού τύπου.

Αυτό το παράδειγμα σας έχει πιθανότατα πείσει ότι η ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων είναι μια θεωρητική παραξενιά και τίποτε άλλο, ειδικά αν σκεφτείτε ότι είναι απαραίτητο να παραγοντοποιήσετε την $q(x)$ πριν ακόμα αρχίσετε. Αυτό, από μια μόνο άποψη, είναι σωστό. Έχουμε κιόλας δει ότι μερικές φορές εμφανίζονται απλές ρητές συναρτήσεις, όπως στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx.$$

Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1|.$$

Επίσης, αν καταφέρουμε να αναγάγουμε ένα πρόβλημα στην ολοκλήρωση μιας ρητής συνάρτησης, τότε είναι βέβαιο ότι υπάρχει μια στοιχειώδης παράγουσα, ακόμα και αν η δυσκολία ή η αδυναμία να βρούμε τους παράγοντες του παρονομαστή μας εμποδίζουν να γράψουμε αυτήν την παράγουσα με τύπο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αυτό το πρόβλημα περιέχει μερικά ολοκληρώματα που απαιτούν κάτι παραπάνω από αλγεβρικούς μετασχηματισμούς, και επομένως δοκιμάζει την ικανότητά σας να ανακαλύπτετε αλγεβρικά τεχνάσματα, και λιγότερο το αν έχετε κατανοήσει τη διαδικασία της ολοκλήρωσης. Όμως, οποιοδήποτε από αυτά τα τεχνάσματα θα μπορούσε να είναι ένα σημαντικό πρώτο βήμα για ένα πραγματικό πρόβλημα ολοκλήρωσης. Ακόμα, είναι καλό να αναπτύξετε κάποια διαίσθηση για το ποια ολοκληρώματα είναι εύκολα, ώστε να μπορείτε να διακρίνετε πότε το τέλος μιας διαδικασίας ολοκλήρωσης είναι ορατό. Το παράρτημα με τις απαντήσεις, αν καταφύγετε σε αυτό, θα αποκαλύψει μόνο ποια άλγεβρα θα έπρεπε να έχετε χρησιμοποιήσει.

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x}}{e^{4x}}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{a^x}{b^x}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx.$ (Τα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα είναι πάντα πολύ «ευαίσθητα», γιατί υπάρχουν τόσες πολλές τριγωνομετρικές ταυτότητες που ένα εύκολο πρόβλημα, κάλλιστα μπορεί να φαίνεται δύσκολο.)

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}.$

(ix) $\displaystyle\int \frac{8x^2+6x+4}{x+1}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx.$

2. Οι ολοκληρώσεις που ακολουθούν απαιτούν απλές αντικαταστάσεις, τις περισσότερες από τις οποίες θα πρέπει να μπορείτε να επεξεργαστείτε με το νου σας.

(i) $\displaystyle\int e^x \sin e^x\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}\,dx.$ (Στο κείμενο έγινε με ολοκλήρωση κατά μέρη.)

(iv) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+2e^x+1}.$

(v) $\displaystyle\int e^{e^x}e^x\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

(ix) $\displaystyle\int \log(\cos x)\tan x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x\log x}\,dx.$

3. Ολοκλήρωση κατά μέρη.

(i) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx.$

(v) $\displaystyle\int (\log x)^3\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx.$ (Αυτό είναι ένα πονηρό και σημαντικό ολοκλήρωμα που εμφανίζεται συχνά. Αν δεν καταφέρετε να το υπολογίσετε, συμβουλευτείτε οπωσδήποτε τις απαντήσεις.)

(viii) $\displaystyle\int \cos(\log x)\,dx.$

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\log x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx.$

4. Οι επόμενες ολοκληρώσεις γίνονται όλες με αντικαταστάσεις της μορφής $x = \sin u$, $x = \cos u$, κτλ. Για να κάνετε κάποιες από αυτές, θα χρειαστεί να θυμάστε ότι

$$\int \sec x\,dx = \log(\sec x + \tan x)$$

καθώς και τον τύπο που ακολουθεί, που ελέγχεται και αυτός με παραγώγιση:

$$\int \csc x\,dx = -\log(\csc x + \cot x).$$

Ακόμα, σε αυτό το σημείο πρέπει να εμπεδώσετε τις παραγώγους όλων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ (Αυτό το ολοκλήρωμα σας είναι ήδη γνωστό, χρησιμοποιήστε όμως την αντικατάσταση $x = \sin u$, μόνο για να δείτε πώς δουλεύει.)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$ (Αφού $\tan^2 u + 1 = \sec^2 u$, πρέπει να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $x = \tan u$.)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ (Η απάντηση θα είναι κάποια αντίστροφη συνάρτηση που έκανε μια σύντομη εμφάνιση στο κείμενο.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

(vii) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx.$

} Θα χρειαστεί να θυμηθείτε τις μεθόδους ολοκλήρωσης δυνάμεων της $\sin$ και της $\cos$.

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$

5. Τα επόμενα ολοκληρώματα απαιτούν αντικαταστάσεις διαφόρων ειδών. Δεν υπάρχει κανένα υποκατάστατο της ευφυίας, υπάρχει όμως ένας γενικός κανόνας που μπορείτε να ακολουθείτε: αντικαταστήστε την παράσταση που εμφανίζεται συχνά ή ξεχωρίζει. Αν εμφανίζονται δύο διαφορετικές προβληματικές παραστάσεις, προσπαθήστε να τις εκφράσετε και τις δύο συναρτήσει μιας καινούριας. Και μην ξεχνάτε ότι συνήθως βοηθά το να εκφράσετε το x απευθείας συναρτήσει του u, για να βρείτε την κατάλληλη έκφραση που θα αντικαταστήσει το dx.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x}$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. (Η αντικατάσταση $u = e^x$ οδηγεί σε ένα ολοκλήρωμα που απαιτεί άλλη μια αντικατάσταση· αυτό δεν είναι κακό, μπορείτε όμως να κάνετε και τις δύο αντικαταστάσεις με τη μία.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\tan x}$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. (Και εδώ μπορείτε με μία αντικατάσταση να κάνετε δουλειά για δύο.)

(vii) $\displaystyle\int \frac{4^x+1}{2^x+1}\,dx$.

(viii) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

(ix) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$. (Σε αυτήν την περίπτωση είναι καλύτερα να κάνετε δύο διαδοχικές αντικαταστάσεις· υπάρχουν δύο προφανείς υποψήφιοι για την πρώτη αντικατάσταση, και οποιοσδήποτε από τους δύο θα σας βγάλει πέρα.)

∗(x) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$.

6. Το προηγούμενο πρόβλημα παρείχε δωρεάν μια τυχαία επιλογή από ρητές συναρτήσεις «προς ολοκλήρωσιν». Να μια πιο συστηματική επιλογή:

(i) $\displaystyle\int \frac{2x^2+7x-1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{x^3+7x^2-5x+5}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx$.

(iv) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}\,dx$.

(v) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+1}\,dx$.

(vi) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx$.

(vii) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}.$

(ix) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$

∗**7.** Βρείτε το $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^n-x^2}}$, το οποίο φαίνεται λίγο διαφορετικό από όλα τα προηγούμενα προβλήματα. Υπόδειξη: Θα σας βοηθήσει να γράψετε $(x^n-x^2)^{1/2} = x(x^{n-2}-1)^{1/2}$. 1η επιπλέον υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μια αντικατάσταση της μορφής $u^2 = \ldots$ για να πάρετε μια απάντηση που να περιέχει την $\arctan$. 2η επιπλέον υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μια αντικατάσταση της μορφής $y = x^\alpha$ για να πάρετε μια απάντηση που να περιέχει την $\arcsin$.

∗**8.** Λίγο απ' όλα (κανένας περιορισμός). Τα επόμενα ολοκληρώματα περιέχουν όλες τις μεθόδους των προηγουμένων προβλημάτων.

(i) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int x\log\sqrt{1+x^2}\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cdot\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$

(ix) $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx.$

(x) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}.$ (Για να παραγοντοποιήσετε το x^6+1, παραγοντοποιήστε πρώτα το y^3+1, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 1-1.)

Τα επόμενα δύο προβλήματα θα προσφέρουν ακόμη περισσότερη εξάσκηση στην ολοκλήρωση, σε περίπτωση που τη χρειάζεστε (και την αντέχετε). Το Πρόβλημα 9 αφορά αλγεβρικές και τριγωνομετρικές τεχνικές και ολοκλήρωση κατά μέρη, ενώ το Πρόβλημα 10 αφορά αντικαταστάσεις. (Φυσικά, σε πολλές περιπτώσεις, τα ολοκληρώματα που θα προκύψουν θα απαιτήσουν περαιτέρω χειρισμούς.)

9. Βρείτε τα ακόλουθα ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \log(a^2+x^2)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

(iii) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$

(iv) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx.$

(v) $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int x^2\arctan x\,dx.$

(viii) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$

(ix) $\displaystyle\int \sec^3 x\tan x\,dx.$

(x) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,dx.$

10. Βρείτε τα ακόλουθα ολοκληρώματα.

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$

(ii) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin x}\;dx.$

(iii) $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\;dx.$

(iv) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x+1}\;dx.$

(v) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3-2}}{x}\,dx.$

(vi) $\displaystyle\int \log\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)\,dx.$

(vii) $\displaystyle\int \log(x+\sqrt{x}\,)\,dx.$

{Υπάρχουν ορισμένες προφανείς αντικαταστάσεις που μπορείτε να δοκιμάσετε, όμως η ολοκλήρωση κατά μέρη είναι πολύ ευκολότερη. Η σύγκριση των απαντήσεων που προκύπτουν είναι, πιθανόν, διδακτική.

(viii) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{3/5}}.$

(ix) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\,dx.$

(x) $\displaystyle\int x^5\arctan(x^2)\,dx.$

11. Αν έχετε επιλύσει το Πρόβλημα 18-10, τα ολοκληρώματα (ii) και (iii) στο Πρόβλημα 4 θα σας είναι πολύ οικεία. Γενικά, η αντικατάσταση $x=\cosh u$ συχνά δουλεύει για ολοκληρώματα που περιέχουν το $\sqrt{x^2-1}$, ενώ η $x=\sinh u$ είναι αυτή που πρέπει να δοκιμάσει κανείς για ολοκληρώματα που περιέχουν το $\sqrt{x^2+1}$. Δοκιμάστε αυτούς τους μετασχηματισμούς στα υπόλοιπα ολοκληρώματα του Προβλήματος 4. (Η μέθοδος αυτή γενικά δεν συνιστάται· είναι ευκολότερο να καταπιαστείτε με τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις.)

∗**12.** Η πιο καταχθόνια αντικατάσταση στον κόσμο, είναι αναμφίβολα η

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Όπως βρήκαμε στο Πρόβλημα 15-17, αυτή η αντικατάσταση οδηγεί στις εκφράσεις

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Έτσι, αυτή η αντικατάσταση μετασχηματίζει κάθε ολοκλήρωμα που περιέχει μόνο την $\sin$ και την $\cos$, συνδυασμένες με πρόσθεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση, σε ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης. Βρείτε τα

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$. (Συγκρίνετε την απάντησή σας με το Πρόβλημα 1(viii).)

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$. (Σε αυτήν την περίπτωση, είναι καλύτερα να θέσουμε $t = \tan x$. Γιατί;)

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}$. (Υπάρχει και άλλος ένας τρόπος για να το κάνετε αυτό, χρησιμοποιωντας το Πρόβλημα 15-8.)

(iv) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$. (Μια άσκηση για να πεισθείτε ότι αυτή η αντικατάσταση θα έπρεπε να χρησιμοποιείται μόνο ως ύστατο μέσο.)

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\sin x}$. (Περίπτωση για ύστατο μέσο.)

∗**13.** Αποδείξτε τον τύπο που δίνει το $\int \sec x\,dx$ με τους εξής δύο τρόπους:

(α) Γράφοντας

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{\cos x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right],\end{aligned}$$

μια έκφραση που προφανώς εμπνευστήκαμε από τις διασπάσεις σε μερικά κλάσματα. Βεβαιωθείτε ότι σημειώσατε πως $\int \cos x/(1-\sin x)\,dx = -\log(1-\sin x)$· το πρόσημο πλην είναι πολύ σημαντικό. Και θυμηθείτε ότι $\frac{1}{2}\log\alpha = \log\sqrt{\alpha}$. Από εκεί και πέρα κάντε αλγεβρικές πράξεις και εμπιστευτείτε την τύχη.

(β) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \tan x/2$. Για μια ακόμα φορά, χρειάζονται αρκετοί μετασχηματισμοί για να φέρετε την απάντηση στη μορφή που θέλετε· μπορείτε να «επιτεθείτε» στην παράσταση $\tan x/2$ χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 15-9, ή να εκφράσετε και τις δύο απαντήσεις συναρτήσει του t. Υπάρχει άλλη μια έκφραση για το $\int \sec x\,dx$, που είναι λιγότερο ενοχλητική από την $\log(\sec x + \tan x)$· χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 15-9, παίρνουμε

$$\int \sec x\,dx = \log\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right) = \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Η τελευταία αυτή παράσταση ήταν στην πραγματικότητα η πρώτη που ανακαλύφθηκε, και οφείλεται όχι στην ευφυΐα κάποιου μαθηματικού, αλλά σε

ένα περίεργο ιστορικό περιστατικό: Στα 1599 ο Wright υπολόγιζε ναυτικούς πίνακες που αντιστοιχούσαν σε ορισμένα ολοκληρώματα της $\sec$. Όταν κατασκευάστηκαν οι πρώτοι πίνακες με λογαρίθμους εφαπτομένων, παρατηρήθηκε αμέσως η αντιστοιχία ανάμεσα στους δύο πίνακες (παρέμενε όμως ανεξήγητη μέχρι την επινόηση του Απειροστικού Λογισμού).

14. Ο υπολογισμός του $\int e^x \sin x\, dx$ που δίνεται στο κείμενο φαίνεται να αποδεικνύει ότι η μόνη παράγουσα της $f(x) = e^x \sin x$ είναι η $F(x) = e^x(\sin x - \cos x)/2$, ενώ και η $F(x) = e^x(\sin x - \cos x)/2 + C$ είναι παράγουσα για κάθε αριθμό C. Από πού προκύπτει αυτό το C; (Ποια είναι η σημασία της ισότητας

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx;)$$

15. Έστω ότι η f'' είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x\, dx = 2.$$

Αν δοθεί ότι $f(\pi) = 1$, υπολογίστε το $f(0)$.

16. (α) Βρείτε το $\int \arcsin x\, dx$, με το ίδιο τέχνασμα που δούλεψε για τις $\log$ και $\arctan$.

∗(β) Γενικεύστε αυτό το τέχνασμα: Βρείτε το $\int f^{-1}(x)\, dx$ συναρτήσει του $\int f(x)\, dx$. Συγκρίνετε με τα Προβλήματα 12-21 και 14-14.

17. (α) Βρείτε το $\int \sin^4 x\, dx$ με δύο διαφορετικούς τρόπους: πρώτα χρησιμοποιώντας τον αναγωγικό τύπο, και μετά χρησιμοποιώντας τον τύπο για το $\sin^2 x$.

(β) Συνδυάστε τις απαντήσεις σας και δείξτε μια εντυπωσιακή τριγωνομετρική ταυτότητα.

18. Εκφράστε το $\int \log(\log x)\, dx$ συναρτήσει του $\int (\log x)^{-1}\, dx$. (Κανένα από τα δύο δεν εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις.)

19. Εκφράστε το $\int x^2 e^{-x^2}\, dx$ συναρτήσει του $\int e^{-x^2}\, dx$.

20. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x/(e^{5x} + e^x + 1)$ έχει μια στοιχειώδη παράγουσα. (Μην προσπαθήσετε να τη βρείτε!)

21. Αποδείξτε τους αναγωγικούς τύπους του κειμένου. Για τον τρίτο γράψτε

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^n}$$

και δουλέψτε το τελευταίο ολοκλήρωμα. (Μια άλλη δυνατότητα είναι να χρησιμοποιήσετε την αντικατάσταση $x = \tan u$.)

22. Βρείτε αναγωγικό τύπο για τα

(α) $\int x^n e^x\, dx$

(β) $\int (\log x)^n\, dx$.

∗**23.** Αποδείξτε ότι

$$\int_1^{\cosh x} \sqrt{t^2 - 1}\, dt = \frac{\cosh x \sinh x}{2} - \frac{x}{2}.$$

(Βλ. το Πρόβλημα 18-7 για τη σημασία αυτού του υπολογισμού.)

24. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

(Μια γεωμετρική προσέγγιση το κάνει φανερό, είναι όμως μια καλή άσκηση στον χειρισμό των ορίων της ολοκλήρωσης κατά τη διάρκεια μιας αντικατάστασης.)

25. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν κύκλου ακτίνας r είναι πr^2. (Πρέπει φυσικά να θυμάστε ότι το π ορίζεται ως το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου.)

26. Έστω ϕ μια μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε $\phi(x) = 0$ για $|x| \geq 1$ και $\int_{-1}^{1} \phi = 1$. Για $h > 0$, έστω

$$\phi_h(x) = \frac{1}{h}\phi(x/h).$$

(α) Δείξτε ότι $\phi_h(x) = 0$ για $|x| \geq h$ και ότι $\int_{-h}^{h} \phi_h = 1$.

(β) Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$ και συνεχής στο 0. Δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \phi_h f = \lim_{h\to 0^+} \int_{-h}^{h} \phi_h f = f(0).$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}\,dx = \pi.$$

Το τελευταίο μέρος αυτού του προβλήματος θα μπορούσε, εκ πρώτης όψεως, να θεωρηθεί ακριβές ανάλογο του μέρους (β), αλλά στην πράξη απαιτεί πιο προσεκτικό συλλογισμό.

(δ) Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$ και συνεχής στο 0. Δείξτε ότι

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,dx = \pi f(0).$$

Υπόδειξη: Αν το h είναι μικρό, τότε το $h/(h^2+x^2)$ θα είναι μικρό στο μεγαλύτερο μέρος του $[-1, 1]$.

Τα επόμενα δύο προβλήματα χρησιμοποιούν τον τύπο

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta,$$

που εξήχθη στο Πρόβλημα 13-24, για το εμβαδόν μιας περιοχής φραγμένης από τη γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες.

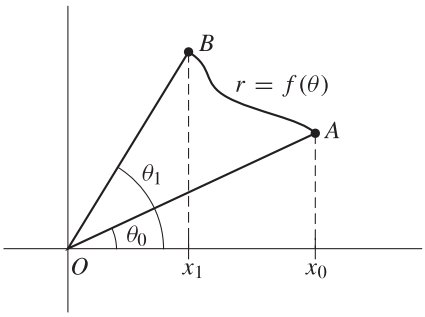
27. Για καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις, βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις τους σε πολικές συντεταγμένες. (Προσέξτε το πεδίο ορισμού της θ, γιατί αλλιώς θα πάρετε αποτελέσματα χωρίς νόημα!)

(i) $f(\theta) = a\sin\theta$.

(ii) $f(\theta) = 2 + \cos\theta$.

(iii) $f(\theta)^2 = 2a^2\cos 2\theta$.

(iv) $f(\theta) = a\cos 2\theta$.



ΣΧΗΜΑ 1

28. Το Σχήμα 1 δείχνει τη γραφική παράσταση της f σε πολικές συντεταγμένες. Η περιοχή OAB έχει, επομένως, εμβαδόν $\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)^2\,d\theta$. Τώρα, υποθέστε ότι αυτή η γραφική παράσταση συμβαίνει να είναι η συνηθισμένη γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης g. Τότε, η περιοχή OAB έχει επίσης εμβαδόν ίσο με

$$\text{εμβαδόν } \Delta Ox_1B + \int_{x_1}^{x_0} g - \text{ εμβαδόν } \Delta Ox_0A.$$

Αποδείξτε αναλυτικά ότι αυτοί οι δύο αριθμοί είναι πράγματι οι ίδιοι. Υπόδειξη: Η συνάρτηση g καθορίζεται από τις εξισώσεις

$$x = f(\theta)\cos\theta, \qquad g(x) = f(\theta)\sin\theta.$$

Τα επόμενα τέσσερα προβλήματα χρησιμοποιούν τους τύπους που εξήχθησαν στα Προβλήματα 3 και 4 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 13, για το μήκος καμπύλης που παριστάνεται παραμετρικά (και, ειδικότερα, με γραφική παράσταση σε πολικές συντεταγμένες).

29. Έστω c μια καμπύλη που παριστάνεται παραμετρικά μέσω των u και v στο $[a, b]$, και έστω h μια αύξουσα συνάρτηση με $h(\bar{a}) = a$ και $h(\bar{b}) = b$. Τότε, στο $[\bar{a}, \bar{b}\,]$ οι συναρτήσεις $\bar{u} = u \circ h$, $\bar{v} = v \circ h$ δίνουν την παραμετρική παράσταση μιας άλλης καμπύλης $\bar{c}$. Διαισθητικά, η $\bar{c}$ είναι απλώς η ίδια καμπύλη με την c διατρεχόμενη με διαφορετική ταχύτητα.

(α) Δείξτε, κατ' ευθείαν από τον ορισμό του μήκους, ότι το μήκος της c πάνω από το $[a, b]$ είναι ίσο με το μήκος της $\bar{c}$ πάνω από το $[\bar{a}, \bar{b}\,]$.

(β) Αν υποθέσουμε παραγωγισιμότητα για οποιαδήποτε από τις δύο συναρτήσεις, δείξτε ότι τα μήκη είναι ίσα, χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο του ολοκληρώματος και την κατάλληλη αντικατάσταση.

30. Βρείτε το μήκος των ακόλουθων καμπυλών, που περιγράφονται όλες ως γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, εκτός από την (iii), η οποία δίνεται παραμετρικά

(i) $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}, \qquad 0 \le x \le 1.$

(ii) $f(x) = x^3 + \frac{1}{12x}, \qquad 1 \le x \le 2.$

(iii) $x = a^3\cos^3 t, \qquad y = a^3\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

(iv) $f(x) = \log(\cos x), \qquad 0 \le x \le \pi/6.$

(v) $f(x) = \log x, \qquad 1 \le x \le e.$

(vi) $f(x) = \arcsin e^x, \qquad -\log 2 \le x \le 0.$

31. Για τις ακόλουθες συναρτήσεις, βρείτε το μήκος της γραφικής παράστασης που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες

(i) $f(\theta) = a\cos\theta.$

(ii) $f(\theta) = a(1 - \cos\theta).$

(iii) $f(\theta) = a\sin^2(\theta/2).$

(iv) $f(\theta) = \theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$

(v) $f(\theta) = 3\sec\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi/3.$

32. Στο Πρόβλημα 8 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 12, περιγράψαμε την κυκλοειδή, η οποία έχει την παραμετρική παράσταση

$$x = u(t) = a(t - \sin t), \qquad y = v(t) = a(1 - \cos t).$$

(α) Βρείτε το μήκος του ενός τόξου της κυκλοειδούς. [Απάντηση: $8a$].

(β) Θυμηθείτε ότι η κυκλοειδής είναι η γραφική παράσταση της $v \circ u^{-1}$. Βρείτε το εμβαδόν της περιοχής κάτω από το ένα τόξο της κυκλοειδούς, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη αντικατάσταση στο $\int f$ και υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα που προκύπτει. [Απάντηση: $3\pi a^2$.]

33. Χρησιμοποιήστε επαγωγή και ολοκλήρωση κατά μέρη για να γενικεύσετε το Πρόβλημα 14-10:

$$\int_0^x \frac{f(u)(x-u)^n}{n!}\,du = \int_0^x \left(\int_0^{u_n} \left(\dots\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt\right) du_1\right)\dots\right) du_n.$$

34. Αν η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά μέρη για να αποδείξετε το Λήμμα Riemann-Lebesgue για την f:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0.$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι μια ειδική μόνο περίπτωση του Προβλήματος 15-26, μπορούμε όμως να το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τη γενική περίπτωση (με τον ίδιο περίπου τρόπο που πήραμε το Λήμμα Riemann-Lebesgue στο Πρόβλημα 15-26 από την ειδική περίπτωση στην οποία η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση).

35. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα εισήχθη στο Πρόβλημα 13-23. Το «Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα» λέει το εξής: Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ϕ είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει αριθμός ξ στο $[a,b]$, τέτοιος ώστε

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \phi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Σε αυτό το πρόβλημα, θα υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και η ϕ είναι παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο ϕ'.

(α) Αποδείξτε ότι, αν το αποτέλεσμά μας είναι αληθές για μη αύξουσα ϕ, τότε είναι επίσης αληθές για μη φθίνουσα ϕ.

(β) Αποδείξτε ότι, αν το αποτέλεσμα είναι αληθές για μη αύξουσα ϕ που ικανοποιεί την $\phi(b) = 0$, τότε είναι αληθές για κάθε μη αύξουσα ϕ.

Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ϕ είναι μη αύξουσα και ότι $\phi(b) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

(γ) Αποδείξτε το παραπάνω χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη.

(δ) Δείξτε ότι η υπόθεση πως η ϕ είναι είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα, χρειάζεται.

Από αυτήν την ειδική περίπτωση του Δεύτερου Θεωρήματος Μέσης Τιμής για τα Ολοκληρώματα, η γενική περίπτωση θα μπορούσε να εξαχθεί με ορισμένους προσεγγιστικούς συλλογισμούς, όπως στην περίπτωση του Λήμματος Riemann-Lebesgue. Υπάρχει όμως ένας πιο διδακτικός τρόπος που σκιαγραφείται στο επόμενο πρόβλημα.

36. (α) Αν δοθούν $a_1, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$, έστω $s_k = a_1 + \cdots + a_k$. Δείξτε ότι

$$(*) \qquad a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + s_nb_n$$

Αυτός ο αφοπλιστικά απλός τύπος, καλείται μερικές φορές «Τύπος του Abel για άθροιση κατά μέρη». Μπορεί να θεωρηθεί ως ανάλογο για τα αθροίσματα της ολοκλήρωσης κατά μέρη μέσω του τύπου

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$

ειδικά αν χρησιμοποιήσουμε αθροίσματα Riemann (Παράρτημα Κεφαλαίου 13). Πράγματι, για μια διαμέριση $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ του $[a, b]$, η αριστερή πλευρά είναι κατά προσέγγιση

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} f'(t_k)g(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$

ενώ η δεξιά πλευρά είναι κατά προσέγγιση

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)g'(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

το οποίο είναι κατά προσέγγιση

$$\begin{aligned} f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\frac{g(t_k) - g(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \\ = f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(t_{k-1}) - g(t_k)] \\ = f(b)g(b) - f(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(a)] \cdot [g(t_{k-1}) - g(t_k)] \\ + f(a) \sum_{k=1}^{n} g(t_{k-1}) - g(t_k). \end{aligned}$$

Επειδή το τελευταίο δεξιό άθροισμα είναι απλώς $g(a) - g(b)$, αυτό καταλήγει να είναι

$$(2) \qquad [f(b) - f(a)]g(b) + \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(a)] \cdot [g(t_{k-1}) - g(t_k)].$$

Αν διαλέξουμε

$$a_k = f'(t_k)(t_k - t_{k-1}), \qquad b_k = g(t_{k-1})$$

τότε το

$$(1) \qquad \text{είναι} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

το οποίο είναι η αριστερή πλευρά της $(*)$, ενώ το $s_k = \sum_{i=1}^{k} f'(t_i)(t_i - t_{i-1})$ είναι κατά προσέγγιση

$$\sum_{i=1}^{k} \big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big) = f(t_k) - f(a),$$

έτσι το

$$(2) \qquad \text{είναι κατά προσέγγιση} \qquad s_nb_n + \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k-1}),$$

το οποίο είναι η δεξιά πλευρά της $(*)$.

Αυτή η συζήτηση δεν έχει το νόημα ότι ο τύπος του Abel μπορεί πράγματι να εξαχθεί από τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά μέρη, ή *αντιστρόφως*. Αλλά, όπως θα δούμε, ο τύπος του Abel μπορεί συχνά να χρησιμοποιηθεί ως υποκατάστατο της ολοκλήρωσης κατά μέρη, όταν οι συναρτήσεις που έχουμε δεν είναι παραγωγίσιμες.

(β) Έστω ότι η $\{b_n\}$ είναι μη αύξουσα, με $b_n \geq 0$ για κάθε n, και ότι

$$m \leq a_1 + \cdots + a_n \leq M$$

για όλα τα n. Αποδείξτε το Λήμμα του Abel:

$$b_1 m \leq a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \leq b_1 M.$$

(Και, επιπλέον,

$$b_k m \leq a_k b_k + \cdots + a_n b_n \leq b_k M,$$

ένας τύπος που μοιάζει πιο γενικός, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι.)

(γ) Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ϕ μη αύξουσα στο $[a, b]$ με $\phi(b) = 0$. Έστω $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Δείξτε ότι το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\phi(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

βρίσκεται μεταξύ του μικρότερου και του μεγαλύτερου των αθροισμάτων

$$\phi(a) \sum_{i=1}^{k} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Συμπεράνετε ότι το

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

βρίσκεται μεταξύ του ελαχίστου και του μεγίστου του

$$\phi(a) \int_a^x f(t)\,dt,$$

και επομένως ισούται με $\phi(a) \displaystyle\int_a^{\xi} f(t)\,dt$ για κάποιο ξ στο $[a, b]$.

37. (α) Δείξτε ότι τα πιο κάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν και τα δύο.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right) dx.$

(β) Αποφασίστε ποια από τα παρακάτω γενικευμένα ολοκληρώματα συγκλίνουν.

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

(ii) $\displaystyle\int_1^\infty \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

38. (α) Υπολογίστε το (γενικευμένο) ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$

(β) Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^\pi \log(\sin x)\,dx$ συγκλίνει.

(γ) Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $x = 2u$ για να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx + 2\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx + \pi \log 2.$$

(δ) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx$.

(ε) Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, υπολογίστε το

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\,dx.$$

39. Αποδείξτε την εξής έκδοση της ολοκλήρωσης κατά μέρη για τα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_a^{\infty} u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} u(x)v'(x)\,dx.$$

Το πρώτο σύμβολο στη δεξιά πλευρά σημαίνει, φυσικά,

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

∗**40.** Μια από τις πιο σημαντικές συναρτήσεις στην ανάλυση είναι η συνάρτηση γάμμα,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

(α) Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\Gamma(x)$ ορίζεται αν $x > 0$.

(β) Χρησιμοποιήστε ολοκλήρωση κατά μέρη (ακριβέστερα, την έκδοση για τα γενικευμένα ολοκληρώματα του προηγούμενου προβλήματος) για να αποδείξετε ότι

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(γ) Δείξτε ότι $\Gamma(1) = 1$, και συμπεράνετε ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

Η συνάρτηση γάμμα μάς δίνει, έτσι, ένα απλό παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης που «παρεμβάλλεται» στις τιμές του $n!$ για φυσικούς αριθμούς n. Φυσικά, υπάρχουν άπειρες συνεχείς συναρτήσεις f με $f(n) = (n-1)!\cdot$ υπάρχουν ακόμα άπειρες συνεχείς συναρτήσεις f με $f(x+1) = xf(x)$ για κάθε $x > 0$. Όμως, η συνάρτηση γάμμα έχει τη σημαντική πρόσθετη ιδιότητα ότι η $\log\circ\Gamma$ είναι κυρτή, μια συνθήκη που εκφράζει πόσο πολύ λεία είναι αυτή η συνάρτηση. Ένα όμορφο θεώρημα που οφείλεται στους Harald Bohr και Johannes Mollerup, μας λέει ότι η Γ είναι η μόνη συνάρτηση f για την οποία η $\log\circ f$ είναι κυρτή, $f(1) = 1$ και $f(x+1) = xf(x)$. Βλ. την αναφορά [43] στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία.

∗**41.** (α) Χρησιμοποιήστε τον αναγωγικό τύπο για το $\displaystyle\int \sin^n x\,dx$ για να δείξετε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx.$$

(β) Τώρα δείξτε ότι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n},$$

και συμπεράνετε ότι

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\frac{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx}.$$

(γ) Δείξτε ότι το πηλίκο των δύο ολοκληρωμάτων σε αυτήν την παράσταση βρίσκεται μεταξύ του 1 και του $1 + 1/2n$, ξεκινώντας από τις ανισότητες

$$0 < \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x \quad \text{για } 0 < x < \pi/2.$$

Αυτό το αποτέλεσμα, που δείχνει ότι τα γινόμενα

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

μπορούν να έρθουν όσο κοντά θέλουμε στο $\pi/2$, συνήθως γράφεται ως άπειρο γινόμενο, γνωστό ως γινόμενο του Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots.$$

(δ) Δείξτε ακόμα, ότι τα γινόμενα

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$$

μπορούν να έρθουν όσο κοντά θέλουμε στο $\sqrt{\pi}$. (Αυτό το γεγονός χρησιμοποιείται στο επόμενο πρόβλημα και στο Πρόβλημα 27-19.)

Η διαδικασία που ακολούθησε ο Wallis ήταν αρκετά διαφορετική! Εργάστηκε με το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ (το οποίο εμφανίζεται στο Πρόβλημα 42), ελπίζοντας να λάβει, μέσα από τις τιμές που προκύπτουν για τους φυσικούς αριθμούς n, έναν τύπο για το

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx.$$

Η πλήρης ανάπτυξη υπάρχει στην αναφορά [49] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας· η περίληψη που ακολουθεί μας δίνει όμως τη βασική ιδέα. Ο Wallis έλαβε πρώτα τον τύπο

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}\\ &= \frac{(2\cdot4\cdots2n)^2}{2\cdot3\cdot4\cdots2n(2n+1)} = \frac{2^n}{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, σκέφτηκε ότι το $\pi/4$ θα πρέπει να είναι

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{2^1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{1!} = \left(\tfrac{1}{2}!\right)^2.$$

Αν ερμηνεύσουμε το $\frac{1}{2}!$ να σημαίνει $\Gamma(1+\frac{1}{2})$, βρισκόμαστε σε συμφωνία με το Πρόβλημα 45. Ο Wallis δεν γνώριζε όμως τη συνάρτηση γάμμα (την οποία επινόησε ο Euler, καθοδηγούμενος κατά κύριο λόγο από τη δουλειά του Wallis). Αφού $(2n)!/(n!)^2$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{2n}{n}$, ο Wallis ήλπιζε ότι θα βρει το $\frac{1}{2}!$ βρίσκοντας το $\binom{p+q}{p}$ για $p = q = 1/2$. Όμως

$$\binom{p+q}{p} = \frac{(p+q)(p+q-1)\cdots(p+1)}{q!}$$

το οποίο έχει νόημα, ακόμα και αν ο p δεν είναι φυσικός αριθμός. Ο Wallis αποφάσισε επομένως ότι

$$\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}+q)\cdots(\frac{3}{2})}{q!}.$$

Με αυτήν την ερμηνεία του $\binom{p+q}{p}$ για $p = 1/2$, εξακολουθεί να αληθεύει ότι

$$\binom{p+q+1}{p} = \frac{p+q+1}{q+1}\binom{p+q}{p}.$$

Συμβολίζοντας το $\binom{\frac{1}{2}+q}{\frac{1}{2}}$ με $W(q)$, η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί

$$W(q+1) = \frac{\frac{1}{2}+q+1}{q+1}W(q) = \frac{2q+3}{2q+2}W(q),$$

από την οποία προκύπτει ο πίνακας

q	1	2	3	
$W(q)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}$	$\cdots$

Αφού όμως το $W(\frac{1}{2})$ πρέπει να είναι $4/\pi$, ο Wallis κατασκευάζει και τον πίνακα

q	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	
$W(q)$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}$	$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}$	$\cdots$

Στη συνέχεια, ο Wallis σημειώνει ότι αν a_1, a_2, a_3, a_4 είναι 4 διαδοχικές τιμές $W(q)$, $W(q+1)$, $W(q+2)$, $W(q+3)$ που εμφανίζονται σε οποιονδήποτε από τους δύο αυτούς πίνακες, τότε

$$\frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \frac{a_4}{a_3} \qquad \text{αφού } \frac{2q+3}{2q+2} > \frac{2q+5}{2q+4}\cdot\frac{2q+7}{2q+6}$$

(αυτό λέει ότι η $\log\circ(1/W)$ είναι κυρτή· συγκρίνετε τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν του Προβλήματος 41), από το οποίο προκύπτει ότι

$$\sqrt{\frac{a_3}{a_1}} > \frac{a_3}{a_2} > \sqrt{\frac{a_4}{a_2}}.$$

Στη συνέχεια, ο Wallis υποστηρίζει ότι αυτό θα πρέπει να αληθεύει και όταν τα a_1, a_2, a_3, a_4 είναι τέσσερις διαδοχικές τιμές από έναν συνδυασμένο πίνακα στον οποίο ο q παίρνει *και* ακέραιες και ημι-ακέραιες τιμές! Παίρνοντας επομένως ως τέσσερις διαδοχικές τιμές τις $W(n+\frac{1}{2})$, $W(n)$, $W(n+\frac{3}{2})$, $W(n+1)$, λαμβάνει

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+4}{2n+3}}{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+1}}} > \frac{\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}} > \sqrt{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{2n+3}{2n+2}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{2n+1}{2n}}}$$

το οποίο δίνει απλώς

$$\sqrt{\frac{2n+4}{2n+3}} > \frac{4}{\pi}\cdot\left[\frac{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots(2n)(2n)(2n+2)}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdots(2n+1)(2n+1)}\right] > \sqrt{\frac{2n+3}{2n+2}},$$

από το οποίο προκύπτει αμέσως το γινόμενο του Wallis.

∗∗**42.** Είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι μερικά γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_0^\infty f(x)\,dx$ υπολογίζονται, ενώ τα αντίστοιχα $\int_a^b f(x)\,dx$ όχι. Δεν υπάρχει στοιχειώδης τύπος για το $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$, μπορούμε όμως να βρούμε την τιμή του $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ακριβώς! Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να εκτιμήσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, οι περισσότεροι όμως απαιτούν προχωρημένες τεχνικές· η μέθοδος που ακολουθεί χρειάζεται αρκετή δουλειά, όχι όμως πράγματα που να μη σας είναι ήδη γνωστά.

(α) Δείξτε ότι

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1},$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση των αναγωγικών τύπων ή με κατάλληλες αντικαταστάσεις σε συνδυασμό με το προηγούμενο πρόβλημα.)

(β) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας την παράγωγο, ότι

$$1-x^2 \le e^{-x^2} \qquad \text{για } 0 \le x \le 1.$$
$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \quad \text{για } 0 \le x.$$

(γ) Ολοκληρώστε τις n-οστές δυνάμεις αυτών των ανισοτήτων από 0 ως 1 και από 0 ως ∞, αντίστοιχα. Μετά χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $y = \sqrt{n}\,x$ για να δείξετε ότι

$$\sqrt{n}\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$$
$$\le \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,dy \le \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$
$$\le \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}.$$

(δ) Τώρα χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 41(δ) για να δείξετε ότι

$$\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

****43.** (α) Κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη για να δείξετε ότι

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

και συμπεράνετε ότι το $\int_0^\infty (\sin x)/x\,dx$ υπάρχει. (Χρησιμοποιήστε την αριστερή πλευρά για να εξετάσετε το όριο καθώς $a \to 0^+$ και τη δεξιά για το όριο καθώς $b \to \infty$.)

(β) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 15-33 για να δείξετε ότι

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\dfrac{t}{2}}\,dt = \pi$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\pi \sin(\lambda+\tfrac{1}{2})t \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{\sin\dfrac{t}{2}}\right] dt = 0.$$

Υπόδειξη: Ο όρος μέσα στις αγκύλες είναι φραγμένος από το Πρόβλημα 15-2(vi)· τότε εφαρμόζεται το Λήμμα Riemann-Lebesgue.

(δ) Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό $u = (\lambda + \frac{1}{2})t$ και το μέρος (β) για να δείξετε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

44. Με δεδομένη την τιμή του $\int_0^\infty (\sin x)/x\,dx$ από το Πρόβλημα 43, υπολογίστε το

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

με ολοκλήρωση κατά μέρη. (Όπως και στο Πρόβλημα 38, ο τύπος για το $\sin 2x$ θα παίξει σημαντικό ρόλο.)

∗**45.** (α) Κάντε την αντικατάσταση $u = t^x$ για να δείξετε ότι

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-u^{1/x}}\,du.$$

(β) Βρείτε το $\Gamma(\frac{1}{2})$.

∗**46.** (α) Έστω ότι η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ για $0 < a < b$, και ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = B$. Αποδείξτε ότι για όλα τα $\alpha, \beta > 0$ έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(\beta x)}{x}\,dx = (A - B)\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

Υπόδειξη: Για να εκτιμήσετε το $\int_\varepsilon^N \dfrac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx$ χρησιμοποιήστε δύο διαφορετικές αντικαταστάσεις.

(β) Υποθέστε τώρα ότι το $\int_a^\infty \dfrac{f(x)}{x}\,dx$ συγκλίνει για όλα τα $a > 0$ και ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\,dx = A\log\frac{\beta}{\alpha}.$$

(γ) Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

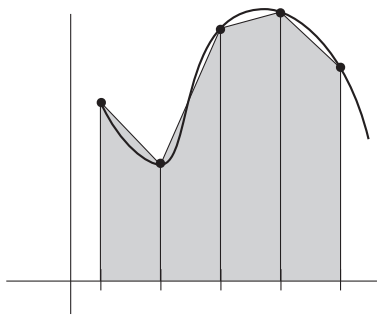
(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x}\,dx.$

Στο Κεφάλαιο 13, είπαμε κάπως «ελαφρά τη καρδία», ότι τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν σε οποιονδήποτε βαθμό επιθυμητής ακρίβειας, υπολογίζοντας κάτω και άνω αθροίσματα. Αλλά ένας εφαρμοσμένος μαθηματικός, ο οποίος πραγματικά έχει να κάνει τον υπολογισμό και όχι απλώς να μιλά για αυτόν, μπορεί να μη χαρεί ιδιαιτέρως με την προοπτική του υπολογισμού κάτω αθροισμάτων για να βρει την τιμή ενός ολοκληρώματος με προσέγγιση τρίτου δεκαδικού ψηφίου, ας πούμε (ένας βαθμός ακρίβειας που άνετα θα μπορούσε να χρειαστεί σε ορισμένες περιστάσεις). Τα επόμενα τρία προβλήματα δείχνουν πώς πιο εκλεπτυσμένες μέθοδοι μπορεί να κάνουν τους υπολογισμούς πολύ πιο αποτελεσματικούς.

Οφείλουμε να σημειώσουμε ευθύς εξ αρχής ότι ο υπολογισμός άνω και κάτω αθροισμάτων μπορεί να μην είναι καν πρακτικός, επειδή ενδέχεται να μην είναι δυνατόν να υπολογισθούν οι ποσότητες m_i και M_i για κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$. Είναι

πολύ πιο λογικό να διαλέξουμε απλώς σημεία x_i στο $[t_{i-1}, t_i]$ και να θεωρήσουμε το $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(t_i - t_{i-1})$. Αυτό παριστάνει το άθροισμα των εμβαδών ορισμένων ορθογωνίων που, εν μέρει, επικαλύπτουν τη γραφική παράσταση της f —βλ. το Σχήμα 1 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 13. Αλλά θα πάρουμε ένα πολύ καλύτερο αποτέλεσμα αν, αντί αυτών, διαλέξουμε τα τραπέζια που φαίνονται στο Σχήμα 2.



ΣΧΗΜΑ 2

Έστω, ειδικότερα, ότι διαιρούμε το $[a, b]$ σε n ίσα διαστήματα, μέσω των σημείων

$$t_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right) = a + ih.$$

Τότε, το τραπέζιο με βάση $[t_{i-1}, t_i]$ έχει εμβαδόν

$$\frac{f(t_{i-1}) + f(t_i)}{2}\cdot(t_i - t_{i-1})$$

και το άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών είναι απλώς

$$\begin{aligned}\Sigma_n &= h\left[\frac{f(t_1)+f(a)}{2} + \frac{f(t_2)+f(t_1)}{2} + \cdots + \frac{f(b)+f(t_{n-1})}{2}\right]\\ &= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.\end{aligned}$$

Αυτή η μέθοδος προσέγγισης της τιμής ενός ολοκληρώματος ονομάζεται *κανόνας του τραπεζίου*. Σημειώστε ότι, για να πάρουμε το Σ_{2n} από το Σ_n δεν είναι αναγκαίο να υπολογίσουμε ξανά τα παλιά $f(t_i)$. Η συμβολή τους στο Σ_{2n} είναι ακριβώς $\frac{1}{2}\Sigma_n$. Είναι λοιπόν πρακτικά καλύτερο να υπολογίσουμε τα Σ_2, Σ_4, Σ_8, ...για να πάρουμε προσεγγίσεις του $\int_a^b f$. Στο επόμενο πρόβλημα, θα εκτιμήσουμε το $\int_a^b f - \Sigma_n$.

47. (α) Έστω ότι η f'' είναι συνεχής. Έστω P_i η γραμμική συνάρτηση που συμπίπτει με την f στα t_{i-1} και t_i. Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 11-46 αποδείξτε ότι, αν n_i και N_i είναι το ελάχιστο και το μέγιστο της f'' στο $[t_{i-1}, t_i]$ και

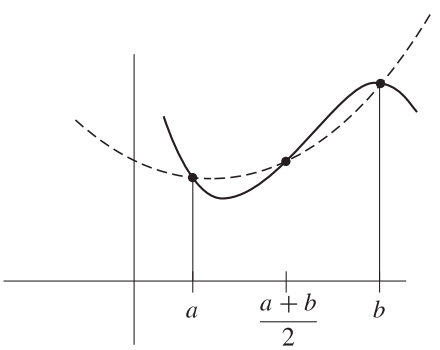
$$I = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (x - t_{i-1})(x - t_i)\,dx$$

τότε

$$\frac{n_i I}{2} \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \le \frac{N_i I}{2}.$$

(β) Βρείτε την τιμή του I για να πάρετε την

$$-\frac{n_i h^3}{12} \le \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f - P_i) \le -\frac{N_i h^3}{12}.$$



ΣΧΗΜΑ 3

(γ) Συμπεράνετε ότι υπάρχει κάποιο c στο (a, b), έτσι ώστε

$$\int_a^b f = \Sigma_n - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Σημειώστε ότι ο «όρος του σφάλματος» $(b-a)^3 f''(c)/12n^2$ μεταβάλλεται όπως μεταβάλλεται το $1/n^2$ (ενώ το σφάλμα που προκύπτει με τη χρήση συνηθισμένων ολοκληρωμάτων μεταβάλλεται όπως το $1/n$).

Μπορούμε να πάρουμε ακόμη πιο ακριβή αποτελέσματα αν προσεγγίσουμε την f με τετραγωνικές συναρτήσεις παρά με γραμμικές. Πρώτα εξετάζουμε τι συμβαίνει όταν το διάστημα $[a, b]$ διαιρεθεί σε δύο ίσα διαστήματα (Σχήμα 3).

48. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι $a = 0$ και $b = 2$. Έστω P το πολυώνυμο βαθμού ≤ 2 που συμπίπτει με την f στα σημεία 0, 1 και 2 (Πρόβλημα 3-6). Δείξτε ότι

$$\int_0^2 P = \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)].$$

(β) Συμπεράνετε ότι, στη γενική περίπτωση

$$\int_a^b P = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

(γ) Φυσικά, $\int_a^b P = \int_a^b f$ όταν η f είναι τετραγωνικό πολυώνυμο. Είναι όμως αξιοσημείωτο ότι η ίδια σχέση ισχύει όταν η f είναι κυβικό πολυώνυμο! Αποδείξτε το, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 11-46. Λάβετε υπόψη σας ότι η f''' είναι κάποια σταθερά.

Το προηγούμενο πρόβλημα δείχνει ότι δεν έχουμε να κάνουμε καθόλου νέους υπολογισμούς για να βρούμε την τιμή του $\int_a^b Q$, όταν το Q είναι *κυβικό* πολυώνυμο που συμπίπτει με την f στα σημεία a, b και $\frac{a+b}{2}$: εξακολουθούμε να έχουμε

$$\int_a^b Q = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Αλλά υπάρχει πολύ περισσότερη ελευθερία στην επιλογή του Q, πράγμα το οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προς όφελός μας:

49. (α) Δείξτε ότι υπάρχει ένα κυβικό πολυώνυμο Q που επαληθεύει τις

$$Q(a) = f(a), \qquad Q(b) = f(b), \qquad Q\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$Q'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Υπόδειξη: Προφανώς $Q(x) = P(x) + A(x-a)(x-b)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ για κάποιο A.

(β) Αποδείξτε ότι αν η $f^{(4)}$ ορίζεται στο $[a, b]$, τότε για κάθε x στο $[a, b]$ έχουμε ότι

$$f(x) - Q(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$$

για κάποιο ξ στο (a, b). Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη του Προβλήματος 11-46.

(γ) Συμπεράνετε ότι, αν η $f^{(4)}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(c)$$

για κάποιο c στο (a, b).

(δ) Διαιρέστε τώρα το $[a, b]$ σε $2n$ διαστήματα μέσω των σημείων

$$t_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{2n}.$$

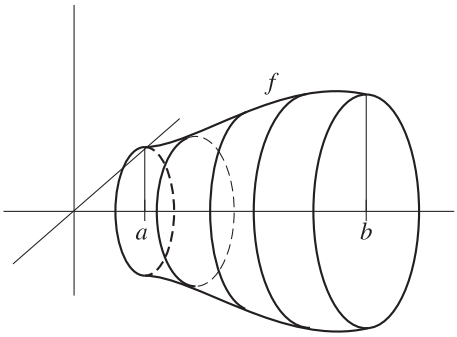
Αποδείξτε τον *κανόνα του Simpson*:

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6n}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_{2i}) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\bar{c})$$

για κάποιο $\bar{c}$ στο (a, b).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. ΤΟ «ΚΟΣΜΟΠΟΛΙΤΙΚΟ» ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

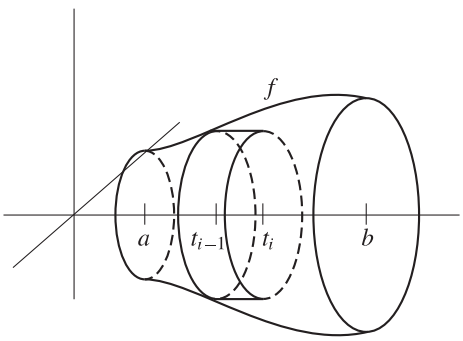
Αρχικά, εισαγάγαμε τα ολοκληρώματα προκειμένου να βρούμε το εμβαδόν της περιοχής κάτω από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αλλά το ολοκλήρωμα είναι κατά πολύ πιο ποικιλόμορφη έννοια από αυτό. Για παράδειγμα, το Πρόβλημα 13-24 χρησιμοποίησε το ολοκλήρωμα για να εκφράσει το εμβαδόν μιας περιοχής εντελώς άλλου είδους. Επιπλέον, το Πρόβλημα 13-25 έδειξε ότι το ολοκλήρωμα μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τα μήκη καμπυλών —αν και, όπως είδαμε σε Παράρτημα του Κεφαλαίου 13, χρειάζεται πολλή εργασία για να αντιμετωπιστεί η γενική περίπτωση! Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα ήταν πιθανώς και λίγο έκπληξη, αφού το ολοκλήρωμα φαίνεται, σε πρώτη ματιά, να είναι διδιάστατη ύπαρξη. Στην πράξη, το ολοκλήρωμα κάνει την εμφάνισή του σε αρκετούς γεωμετρικούς τύπους, που θα τους παρουσιάσουμε σε αυτό το Παράρτημα. Για την εξαγωγή αυτών των τύπων, θα θεωρήσουμε γνωστά μερικά αποτελέσματα της στοιχειώδους γεωμετρίας (και θα επιτρέψουμε και λίγη προχειρολογία).



ΣΧΗΜΑ 1

Αντί να κατέβουμε στα μονοδιάστατα αντικείμενα, θα αρχίσουμε με την αντιμετώπιση μερικών τριδιάστατων αντικειμένων. Υπάρχουν κάποια ειδικά στερεά, των οποίων οι όγκοι μπορούν να εκφραστούν μέσω ολοκληρωμάτων. Το απλούστερο αυτό στερεό V είναι ένα «στερεό εκ περιστροφής», που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής κάτω από τη γραφική παράσταση μιας $f \geq 0$ στο $[a, b]$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα, αν το επίπεδο θεωρηθεί τοποθετημένο στον χώρο (Σχήμα 1). Αν $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι μια οποιαδήποτε διαμέριση του $[a, b]$, και τα m_i και M_i έχουν το συνηθισμένο νόημα, τότε το

$$\pi {m_i}^2 (t_i - t_{i-1})$$



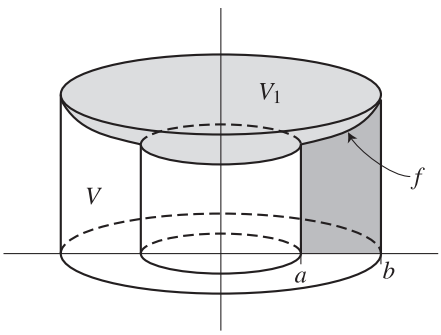
ΣΧΗΜΑ 2

είναι ο όγκος ενός δίσκου που κείται εντός του στερεού V (Σχήμα 2). Ομοίως, $\pi {M_i}^2 (t_i - t_{i-1})$ είναι ο όγκος ενός δίσκου που περιέχει το τμήμα του V μεταξύ του t_{i-1} και του t_i. Συνεπώς,

$$\pi \sum_{i=1}^{n} {m_i}^2 (t_i - t_{i-1}) \leq \text{ όγκος } V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} {M_i}^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Αλλά τα αθροίσματα των άκρων αυτής της ανισότητας είναι απλώς τα κάτω και άνω αθροίσματα της f^2 στο $[a, b]$:

$$\pi \cdot L(f^2, P) \leq \text{όγκος } V \leq \pi \cdot U(f^2, P).$$



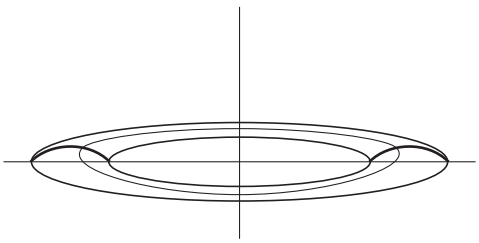
ΣΧΗΜΑ 3

Επομένως, ο όγκος του V πρέπει να δίνεται από τον τύπο

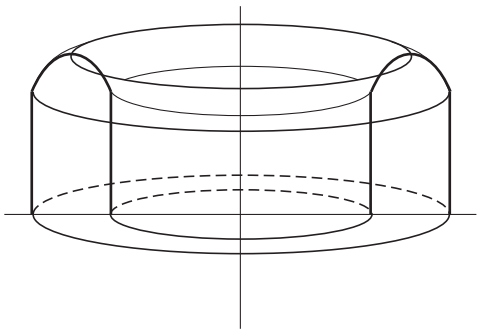
$$\text{όγκος } V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Αυτήν τη μέθοδο υπολογισμού των όγκων την ονομάζουμε χαϊδευτικά «μέθοδο των δίσκων».

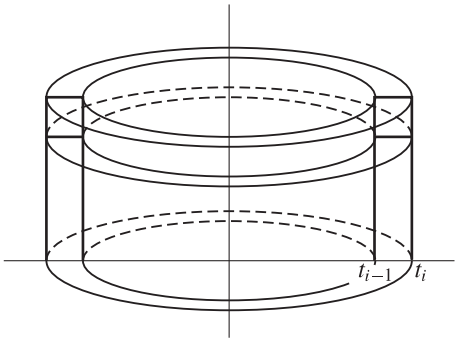
Το Σχήμα 3 δείχνει ένα πιο περίπλοκο στερεό V που παίρνουμε από την περιστροφή της περιοχής κάτω από τη γραφική παράσταση της f γύρω από τον *κατακόρυφο* άξονα (το V είναι το στερεό που απομένει όταν ξεκινήσουμε με τον μεγάλο κύλινδρο ακτίνας b και αφαιρέσουμε και τον μικρό κύλινδρο ακτίνας a και το στερεό V_1 που βρίσκεται ακριβώς στην κορυφή του). Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε τόσο ότι $a \geq 0$ όπως και ότι $f \geq 0$. Τα Σχήματα 4 και 5 δείχνουν μερικά άλλα πιθανά σχήματα για το V.



ΣΧΗΜΑ 4



ΣΧΗΜΑ 5



ΣΧΗΜΑ 6

Για μια διαμέριση $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ θεωρούμε τα «κελύφη» που προκύπτουν από την περιστροφή του ορθογωνίου με βάση $[t_{i-1}, t_i]$ και ύψος m_i ή M_i (Σχήμα 6). Προσθέτοντας τους όγκους αυτών των κελυφών, παίρνουμε

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i({t_i}^2 - {t_{i-1}}^2) \le \text{όγκος } V \le \pi \sum_{i=1}^{n} M_i({t_i}^2 - {t_{i-1}}^2),$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε ως

$$\pi \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \le \text{όγκος } V \le \pi \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}).$$

Αυτά τα αθροίσματα τώρα δεν είναι τα άνω ή κάτω αθροίσματα κανενός πράγματος. Αλλά το Πρόβλημα 1 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 13 δείχνει ότι κάθε άθροισμα

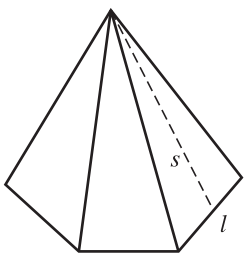
$$\sum_{i=1}^{n} m_i t_i (t_i - t_{i-1}) \qquad \text{και} \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i t_{i-1}(t_i - t_{i-1})$$

μπορεί να προσεγγίσει, όσο θέλουμε, το $\int_a^b xf(x)\,dx$ διαλέγοντας τα μήκη $t_i - t_{i-1}$ αρκετά μικρά. Το ίδιο ισχύει για τα δεξιά αθροίσματα, οπότε βρίσκουμε πως

$$\text{όγκος } V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx.$$

Αυτή είναι η αποκαλούμενη «μέθοδος των κελυφών» για την εύρεση όγκων.

Το εμβαδόν της επιφάνειας ορισμένων περιοχών που περικλείονται από καμπύλες μπορεί επίσης να εκφραστεί μέσω ολοκληρωμάτων. Προτού να αντιμετωπίσουμε περίπλοκες περιοχές, θα σας ωφελήσει μια μικρή επανάληψη στοιχειωδών γεωμετρικών τύπων.



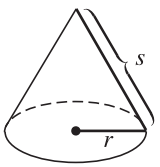
ΣΧΗΜΑ 7

Το Σχήμα 7 δείχνει μια ορθή πυραμίδα που απαρτίζεται από τρίγωνα με βάσεις μήκους l και ύψους s. Το συνολικό εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι, επομένως,

$$\frac{1}{2}ps,$$

όπου p η περίμετρος της βάσης της. Αν διαλέξουμε για βάση ένα κανονικό πολύγωνο με μεγάλο αριθμό πλευρών, βλέπουμε ότι το εμβαδόν ενός ορθού κυκλικού κώνου (Σχήμα 8) πρέπει να είναι

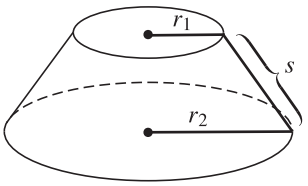
$$\frac{1}{2}(2\pi r)s = \pi rs,$$



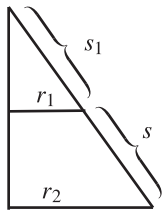
ΣΧΗΜΑ 8

όπου s είναι το «απόστημα» (πλάγιο ύψος). Τέλος, θεωρήστε τον κόλουρο κώνο με απόστημα s και ακτίνες r_1 και r_2, όπως δείχνει το Σχήμα 9(α). Συμπληρώνοντας τον κώνο, όπως στο Σχήμα 9(β), έχουμε

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_1 + s}{r_2},$$



(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 9

έτσι

$$s_1 = \frac{r_1 s}{r_2 - r_1}, \qquad s_1 + s = \frac{r_2 s}{r_2 - r_1}.$$

Συνεπώς, το εμβαδόν της (παράπλευρης) επιφάνειας είναι

$$\pi r_2(s_1 + s) - \pi r_1 s_1 = \pi s \frac{{r_2}^2 - {r_1}^2}{r_2 - r_1} = \pi s(r_1 + r_2).$$

Θεωρήστε τώρα την επιφάνεια που σχηματίζεται από την περιστροφή της γραφικής παράστασης της f γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Για μια διαμέριση $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ μπορούμε να εγγράψουμε μια ακολουθία από κόλουρους κώνους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Το συνολικό εμβαδόν επιφάνειας αυτών των κόλουρων κώνων είναι

$$\pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2}$$

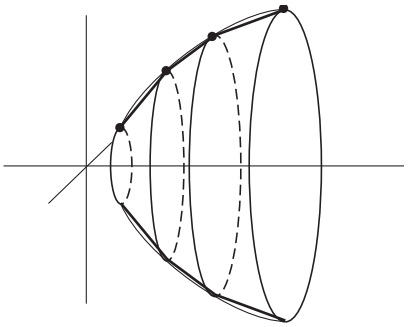
$$= \pi \sum_{i=1}^{n} [f(t_{i-1}) + f(t_i)] \sqrt{1 + \left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right)^2} (t_i - t_{i-1}).$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, αυτό είναι ίσο με

$$\pi \sum_{i=1}^{n} \big[f(t_{i-1}) + f(t_i) \big] \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\, (t_i - t_{i-1})$$

για κάποιο x_i στο (t_{i-1}, t_i). Ανατρέχοντας στο Πρόβλημα 1 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 13, συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$



ΣΧΗΜΑ 10

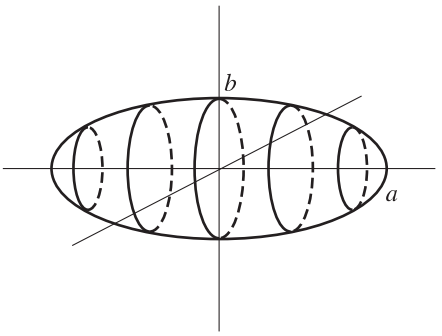
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της περιοχής που περικλείεται από τις $f(x) = x$ και $f(x) = x^2$ γύρω από τον οριζόντιο άξονα.

(β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή της ίδιας περιοχής γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.

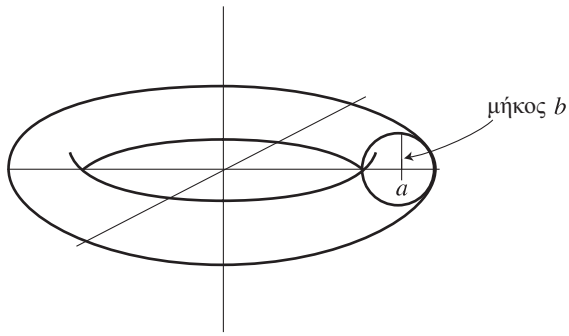
2. Βρείτε τον όγκο μιας σφαίρας ακτίνας r.

3. Όταν η έλλειψη που αποτελείται από όλα τα σημεία (x, y) με $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ περιστραφεί γύρω από τον οριζόντιο άξονα, παίρνουμε ένα «ελλειψοειδές εκ περιστροφής» (Σχήμα 11). Βρείτε τον όγκο του περικλεισμένου στερεού.



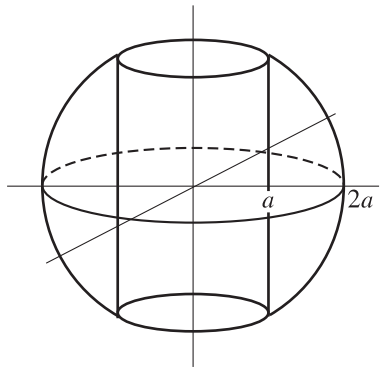
ΣΧΗΜΑ 11

4. Βρείτε τον όγκο της σπείρας (σαμπρέλας) (Σχήμα 12), που προκύπτει από την περιστροφή του κύκλου $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ $(a > b)$ γύρω από τον κατακόρυφο άξονα.



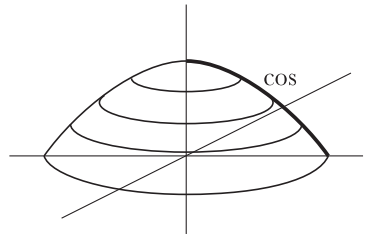
ΣΧΗΜΑ 12

5. Μια κυλινδρική οπή ακτίνας a ανοίγεται διαπερνώντας το κέντρο μιας σφαίρας ακτίνας $2a$ (Σχήμα 13). Βρείτε τον όγκο του εναπομένοντος στερεού.



ΣΧΗΜΑ 13

6. (α) Για το στερεό που φαίνεται στο Σχήμα 14, βρείτε τον όγκο με τη μέθοδο των κελυφών.



ΣΧΗΜΑ 14

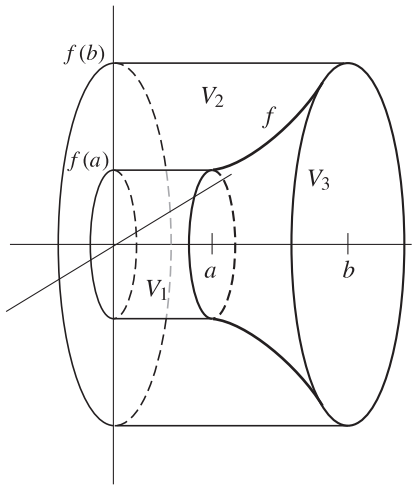
(β) Ο εν λόγω όγκος μπορεί επίσης να υπολογισθεί με τη μέθοδο των δίσκων. Διατυπώστε το ολοκλήρωμα που πρέπει να υπολογισθεί σε αυτήν την περίπτωση. Παρατηρήστε ότι είναι πιο πολύπλοκο. Το επόμενο πρόβλημα ασχολείται με ένα ερώτημα που μπορεί να διατυπωθεί λόγω αυτού του προβλήματος.

7. Το Σχήμα 15 δείχνει έναν κύλινδρο ύψους b και ακτίνας $f(b)$, διαιρεμένο σε τρία στερεά, ένα εκ των οποίων, το V_1, είναι κύλινδρος ύψους a και ακτίνας $f(a)$. Αν η f είναι 1-1, τότε μια σύγκριση της μεθόδου των δίσκων με τη μέθοδο των κελυφών για τον υπολογισμό των όγκων μάς κάνει να πιστεύουμε ότι

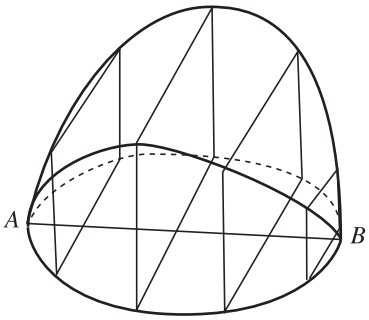
$$\pi b f(b)^2 - \pi a f(a)^2 - \pi \int_a^b f(x)^2\,dx = \text{ όγκος } V_2$$

$$= 2\pi \int_{f(a)}^{f(b)} y f^{-1}(y)\,dy.$$

Αποδείξτε το αναλυτικά, χρησιμοποιώντας τον τύπο για το $\int f^{-1}$ από το Πρόβλημα 19-16, η πιο απλά εκτελώντας ένα ένα τα βήματα από τα οποία προέκυψε αυτός ο τύπος.



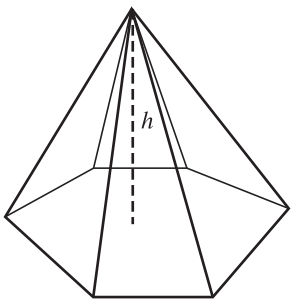
ΣΧΗΜΑ 15



ΣΧΗΜΑ 16

8. (α) Το Σχήμα 16 δείχνει ένα στερεό με κυκλική βάση ακτίνας a. Κάθε επίπεδο κάθετο προς τη διάμετρο AB τέμνει το στερεό κατά ένα τετράγωνο. Χρησιμοποιώντας συλλογισμούς παρόμοιους με αυτούς που χρησιμοποιήθηκαν ήδη σε αυτό το Παράρτημα, εκφράστε τον όγκο του στερεού υπό μορφή ολοκληρώματος και υπολογίστε το.

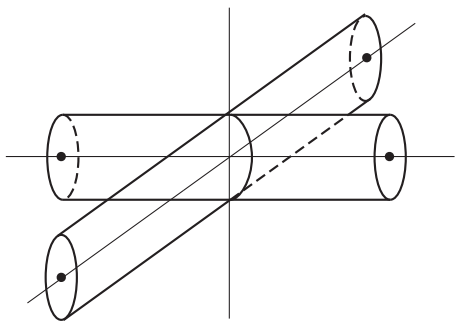
(β) Λύστε το ίδιο πρόβλημα, αν κάθε τέτοιο επίπεδο τέμνει το στερεό κατά ένα ισόπλευρο τρίγωνο.



ΣΧΗΜΑ 17

9. Βρείτε τον όγκο μιας πυραμίδας (Σχήμα 17) συναρτήσει του ύψους της h και του εμβαδού A της βάσης της.

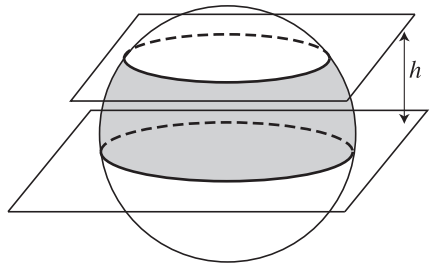
10. Βρείτε τον όγκο του στερεού που είναι η τομή των δύο κυλίνδρων στο Σχήμα 18. Υπόδειξη: Βρείτε την τομή αυτού του στερεού με κάθε οριζόντιο επίπεδο.



ΣΧΗΜΑ 18

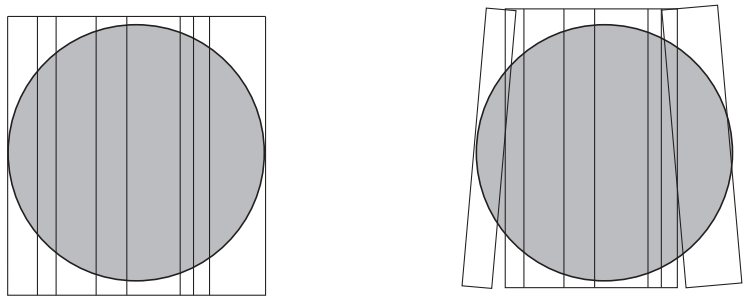
11. (α) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας σφαίρας ακτίνας r είναι $4\pi r^2$.

(β) Αποδείξτε, γενικότερα, ότι το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας που φαίνεται στο Σχήμα 19 είναι $2\pi rh$. (Σημειώστε ότι δεν εξαρτάται από τη θέση των επιπέδων, αλλά μόνο από το h).



ΣΧΗΜΑ 19

(γ) Μια κυκλική λασπόλιμνη μπορεί να καλυφθεί από ένα σύνολο παράλληλων σανίδων που έχουν μήκους τουλάχιστον ίσο με την ακτίνα του κύκλου, όπως στο Σχήμα 20(α). Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να καλυφθεί με τις ίδιες σανίδες αν δεν τοποθετηθούν παράλληλα η μία στην άλλη, όπως στο (β).



(α) (β)

ΣΧΗΜΑ 20

12. (α) Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής του Προβλήματος 19-3.

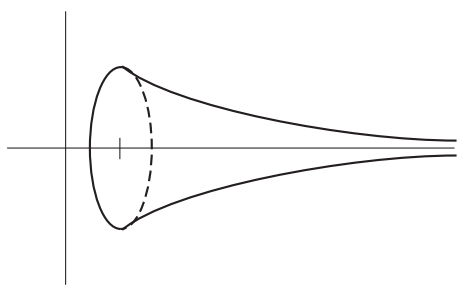
(β) Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της «σαμπρέλας» του Προβλήματος 19-4.

13. Η γραφική παράσταση της $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$ περιστρέφεται γύρω από τον οριζόντιο άξονα (Σχήμα 21).

(α) Βρείτε τον όγκο της περικλεισμένης «άπειρης τρομπέτας».

(β) Δείξτε ότι το εμβαδόν της επιφάνειάς της είναι άπειρο.

(γ) Υποθέτουμε ότι γεμίζουμε την τρομπέτα με την πεπερασμένη ποσότητα μπογιάς που βρέθηκε στο μέρος (α). Φαίνεται έτσι ότι καλύψαμε το άπειρο εσωτερικό εμβαδόν της επιφάνειας με πεπερασμένη μόνο ποσότητα μπογιάς. Πώς είναι αυτό δυνατόν;



ΣΧΗΜΑ 21

ΜΕΡΟΣ 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ

Μια από τις πιο ξεχωριστές σειρές
στην αλγεβρική ανάλυση είναι η ακόλουθη:

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots n}x^n$$
$$+ \cdots$$

Όταν ο m είναι ένας θετικός ακέραιος
αριθμός, το άθροισμα της σειράς,
που είναι πεπερασμένο, μπορεί να εκφραστεί,
όπως είναι γνωστό, από το $(1 + x)^m$.
Όταν ο m δεν είναι ακέραιος,
η σειρά συνεχίζεται επ' άπειρον,
και συγκλίνει ή αποκλίνει ανάλογα
με τις τιμές που παίρνουν
οι ποσότητες m και x.
Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε
την ίδια ισότητα

$$(1 + x)^m = 1 + \frac{m}{1}x$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots \text{ κτλ.}$$

... Υποτίθεται ότι η αριθμητική ισότητα
θα ισχύει όποτε η σειρά συγκλίνει, αλλά
αυτό δεν έχει έως τώρα αποδειχθεί.

NIELS HENRIK ABEL

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Από κάποια σκοπιά, οι «στοιχειώδεις συναρτήσεις» δεν είναι καθόλου στοιχειώδεις. Αν p είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

τότε η τιμή $p(x)$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα για κάθε αριθμό x. Αυτό δεν είναι καθόλου αλήθεια για συναρτήσεις όπως οι $\sin$, $\log$ ή $\exp$. Προς το παρόν, για να βρούμε το $\log x = \int_1^x 1/t\, dt$ κατά προσέγγιση, πρέπει να υπολογίσουμε μερικά άνω ή κάτω αθροίσματα, και να εξασφαλίσουμε ότι το σφάλμα που θα κάνουμε, αν δεχθούμε ένα τέτοιο άθροισμα για $\log x$, δεν θα είναι πολύ μεγάλο. Ο υπολογισμός του $e^x = \log^{-1}(x)$ θα παρουσίαζε ακόμα περισσότερες δυσκολίες: θα έπρεπε να υπολογίσουμε το $\log a$ για πολλές τιμές του a, μέχρι να βρούμε έναν αριθμό a τέτοιον ώστε ο $\log a$ να είναι κατά προσέγγιση x —τότε ο a θα ήταν μια προσέγγιση του e^x.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα φτάσουμε σε σημαντικά θεωρητικά αποτελέσματα που ανάγουν τον υπολογισμό του $f(x)$ για πολλές συναρτήσεις f στον υπολογισμό τιμών πολυωνυμικών συναρτήσεων. Η μέθοδος στηρίζεται στην εύρεση πολυωνυμικών συναρτήσεων που είναι καλές προσεγγίσεις της f. Για να μαντέψουμε τη μορφή που θα έχει ένα κατάλληλο πολυώνυμο είναι χρήσιμο να εξετάσουμε κατ' αρχήν τις ίδιες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις, με περισσότερη προσοχή.

Έστω ότι

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Είναι ενδιαφέρον, και μάλιστα πολύ σημαντικό για τον σκοπό μας, να παρατηρήσουμε ότι οι συντελεστές a_i μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των τιμών της p και των διαφόρων παραγώγων της στο 0. Για να ξεκινήσουμε, παρατηρούμε ότι

$$p(0) = a_0.$$

Αν παραγωγίσουμε την αρχική έκφραση της $p(x)$, παίρνουμε

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Επομένως,

$$p'(0) = p^{(1)}(0) = a_1.$$

Παραγωγίζοντας και πάλι, παίρνουμε

$$p''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \cdots + n(n-1) \cdot a_n x^{n-2}.$$

Άρα,

$$p''(0) = p^{(2)}(0) = 2a_2.$$

Γενικά, θα έχουμε

$$p^{(k)}(0) = k!\, a_k \quad \text{ή} \quad a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}.$$

Αν συμφωνήσουμε να ισχύει $0! = 1$ εξ ορισμού, και θυμηθούμε τον συμβολισμό $p^{(0)} = p$, τότε αυτός ο τύπος ισχύει και για $k = 0$.

Αν είχαμε ξεκινήσει με μια συνάρτηση p γραμμένη ως «πολυώνυμο του $(x-a)$»,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n,$$

η ίδια διαδικασία θα μας έδινε

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι f είναι μια συνάρτηση (όχι αναγκαστικά πολυώνυμο), τέτοια ώστε να υπάρχουν όλες οι

$$f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a).$$

Θέτουμε

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \le k \le n,$$

και ορίζουμε

$$P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

Το πολυώνυμο $P_{n,a}$ λέγεται **πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο a**. (Θα έπρεπε ίσως να χρησιμοποιήσουμε μια ακόμα πιο σύνθετη έκφραση, ας πούμε $P_{n,a,f}$, για να υποδηλώσουμε την εξάρτηση από την f. Μερικές φορές αυτός ο ακριβέστερος συμβολισμός θα φανεί χρήσιμος.) Το πολυώνυμο Taylor έχει οριστεί έτσι ώστε

$$P_{n,a}{}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{για } 0 \le k \le n\cdot.$$

Ακριβέστερα, είναι το μοναδικό πολυώνυμο *βαθμού* $\le n$ με αυτήν την ιδιότητα.

Αν και οι συντελεστές του $P_{n,a,f}$ φαίνονται να εξαρτώνται από την f με έναν μάλλον πολύπλοκο τρόπο, οι πιο σημαντικές στοιχειώδεις συναρτήσεις έχουν πολύ απλά πολυώνυμα Taylor. Ας θεωρήσουμε πρώτα τη συνάρτηση sin. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= 0,\\
\sin'(0) &= \cos 0 = 1,\\
\sin''(0) &= -\sin 0 = 0,\\
\sin'''(0) &= -\cos 0 = -1,\\
\sin^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0.
\end{aligned}$$

Από το σημείο αυτό και πέρα, οι παράγωγοι επαναλαμβάνονται κυκλικά ανά 4. Οι αριθμοί

$$a_k = \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}$$

είναι

$$0,\ 1,\ 0,\ -\frac{1}{3!},\ 0,\ \frac{1}{5!},\ 0,\ -\frac{1}{7!},\ 0,\ \frac{1}{9!},\ \ldots.$$

Επομένως το πολυώνυμο Taylor $P_{2n+1,0}$ βαθμού $2n+1$ της sin στο 0 είναι

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(Φυσικά, $P_{2n+1,0} = P_{2n+2,0}$).

Το πολυώνυμο Taylor $P_{2n,0}$ βαθμού $2n$ της cos στο 0 είναι (αφήνουμε σε σας τους υπολογισμούς)

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Το πολυώνυμο Taylor της $\exp$ υπολογίζεται ακόμα πιο εύκολα. Αφού $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ για κάθε k, το πολυώνυμο Taylor βαθμού n στο 0 είναι

$$P_{n,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Το πολυώνυμο Taylor της $\log$ πρέπει να υπολογιστεί σε κάποιο σημείο $a \neq 0$, αφού η $\log$ ούτε καν ορίζεται στο 0. Η συνηθισμένη επιλογή είναι $a = 1$. Τότε

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{x}, & \log'(1) &= 1\cdot \\ \log''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & \log''(1) &= -1\cdot \\ \log'''(x) &= \frac{2}{x^3}, & \log'''(1) &= 2\cdot \end{aligned}$$

και γενικά

$$\log^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}, \quad \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,.$$

Επομένως το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της $\log$ στο 1 είναι

$$P_{n,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

Συχνά είναι πιο βολικό να εξετάσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \log(1+x)$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να διαλέξουμε $a = 0$. Έχουμε

$$f^{(k)}(x) = \log^{(k)}(1+x),$$

άρα

$$f^{(k)}(0) = \log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,.$$

Επομένως το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο 0 είναι

$$P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Υπάρχει μια ακόμα στοιχειώδης συνάρτηση της οποίας το πολυώνυμο Taylor είναι σημαντικό —η $\arctan$. Αρχίζουμε τους υπολογισμούς των παραγώγων

$$\begin{aligned} \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & \arctan'(0) &= 1\cdot \\ \arctan''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, & \arctan''(0) &= 0\cdot \\ \arctan'''(x) &= \frac{(1+x^2)^2\cdot(-2) + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}, & \arctan'''(0) &= -2. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αυτός ο χειρωνακτικός τρόπος υπολογισμού δεν μπορεί να μας οδηγήσει πουθενά. Ο υπολογισμός των πολυωνύμων Taylor της $\arctan$ θα είναι όμως πολύ εύκολος, αφού εξετάσουμε τις ιδιότητες των πολυωνύμων Taylor πιο προσεκτικά —αν και το πολυώνυμο Taylor $P_{n,a,f}$ ορίστηκε με μόνη απαίτηση να έχει τις ίδιες πρώτες n παραγώγους στο a με την f, η σχέση ανάμεσα στην f και στο $P_{n,a,f}$ θα αποδειχθεί τελικά πολύ βαθύτερη.

Μια ένδειξη για τη στενότερη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην f και τα πολυώνυμα Taylor της f αποκαλύπτεται αν εξετάσουμε το πολυώνυμο Taylor βαθμού 1, που είναι το

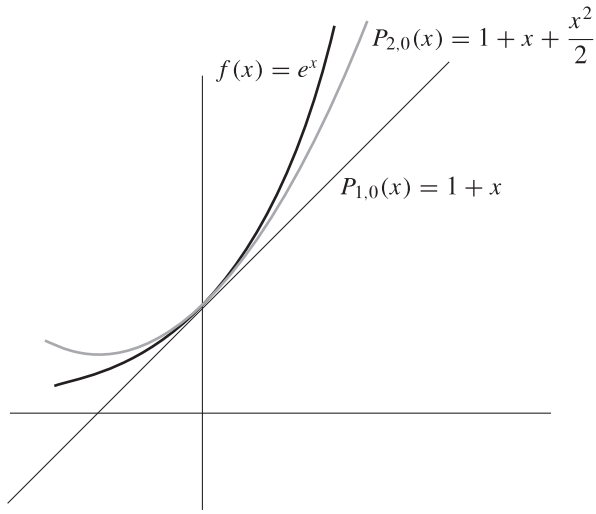
$$P_{1,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Τώρα, από τον ορισμό της $f'(a)$, έχουμε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = 0.$$



ΣΧΗΜΑ 1

Με άλλα λόγια, όταν το x πλησιάζει το a, η διαφορά $f(x) - P_{1,a}(x)$ όχι μόνο γίνεται μικρή, αλλά γίνεται μικρή ακόμα και σε σύγκριση με το $x - a$. Το Σχήμα 1 δείχνει τη γραφική παράσταση της $f(x) = e^x$ και της

$$P_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$

που είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 1 της f στο 0. Το διάγραμμα δείχνει επίσης τη γραφική παράσταση του

$$P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

που είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 της f στο 0. Καθώς το x πλησιάζει το 0, η διαφορά $f(x) - P_{2,0}(x)$ φαίνεται να μικραίνει ακόμα γρηγορότερα από τη διαφορά $f(x) - P_{1,0}(x)$. Έτσι όπως διατυπώθηκε, αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι πολύ ακριβής, αλλά είμαστε τώρα έτοιμοι να του δώσουμε μια συγκεκριμένη έννοια. Μόλις τώρα παρατηρήσαμε ότι γενικά

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{1,a}(x)}{x - a} = 0.$$

Για $f(x) = e^x$ και $a = 0$ αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_{1,0}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, με διπλή εφαρμογή του Κανόνα του l'Hôpital, βλέπουμε ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Έτσι, αν και η $f(x) - P_{1,0}(x)$ γίνεται μικρή σε σύγκριση με το x, καθώς το x τείνει στο 0, *δεν* γίνεται μικρή συγκρινόμενη με το x^2. Με το $P_{2,0}(x)$ η κατάσταση είναι τελείως

διαφορετική· ο πρόσθετος όρος $x^2/2$ μας αποζημιώνει με τον καλύτερο τρόπο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0.$$

Αυτό το συμπέρασμα ισχύει γενικά —αν οι $f'(a)$ και $f''(a)$ υπάρχουν, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{2,a}(x)}{(x-a)^2}=0\cdot.$$

Στην πραγματικότητα, ο ανάλογος ισχυρισμός για το $P_{n,a}$ είναι επίσης σωστός.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι f είναι μια συνάρτηση για την οποία οι

$$f'(a),\dots,f^{(n)}(a)$$

όλες υπάρχουν. Θέτουμε

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad 0\le k\le n,$$

και ορίζουμε

$$P_{n,a}(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n.$$

Τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν γράψουμε αναλυτικά το $P_{n,a}(x)$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(x)-\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i}{(x-a)^n}-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Θα βοηθήσει να εισαγάγουμε τις καινούργιες συναρτήσεις

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\quad\text{και}\quad g(x)=(x-a)^n\cdot$$

οπότε πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$Q^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\quad k\le n-1,$$
$$g^{(k)}(x)=n!(x-a)^{n-k}/(n-k)!\,.$$

Άρα

$$\lim_{x\to a}[f(x)-Q(x)]=f(a)-Q(a)=0,$$
$$\lim_{x\to a}[f'(x)-Q'(x)]=f'(a)-Q'(a)=0,$$
$$\vdots$$
$$\lim_{x\to a}[f^{(n-2)}(x)-Q^{(n-2)}(x)]=f^{(n-2)}(a)-Q^{(n-2)}(a)=0.$$

και

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to a} g^{(n-2)}(x) = 0.$$

Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε $n-1$ φορές τον Κανόνα του l'Hôpital και να πάρουμε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-Q^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-a)}.$$

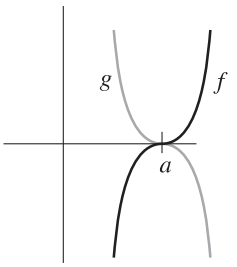
Αφού το Q είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$, η $(n-1)$-οστή του παράγωγος είναι μια σταθερά· για την ακρίβεια, $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a)$. Άρα

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{n!\,(x-a)}$$

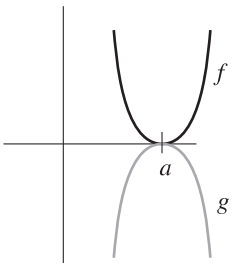
και αυτό το τελευταίο όριο είναι το $f^{(n)}(a)/n!$ από τον ορισμό της $f^{(n)}(a)$. ▮

Μια απλή συνέπεια του Θεωρήματος 1 μας επιτρέπει να τελειοποιήσουμε τον έλεγχο για τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 11. Αν το a είναι κρίσιμο σημείο της f, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 11-5, η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο a αν $f''(a) > 0$, και τοπικό μέγιστο στο a αν $f''(a) < 0$. Αν $f''(a) = 0$ δεν είμαστε σε θέση να αποφανθούμε, αλλά φαίνεται λογικό το πρόσημο της $f'''(a)$ να μας δίνει κάποια πληροφορία· και αν $f'''(a) = 0$, τότε το πρόσημο της $f^{(4)}(a)$ πρέπει να παίζει κάποιο ρόλο. Ακόμα πιο γενικά, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί τι συμβαίνει όταν

$$(*) \qquad \begin{aligned} &f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \\ &f^{(n)}(a) \neq 0. \end{aligned}$$



(α) n άρτιος



(β) n περιττός

ΣΧΗΜΑ 2

Μπορούμε να μαντέψουμε το πώς έχουν τα πράγματα, εξετάζοντας τις συναρτήσεις

$$f(x) = (x-a)^n,$$
$$g(x) = -(x-a)^n,$$

που ικανοποιούν την $(*)$. Παρατηρούμε (Σχήμα 2) ότι, αν ο n είναι περιττός, τότε το a δεν είναι σημείο τοπικού μεγίστου ούτε τοπικού ελαχίστου για την f ή την g. Από την άλλη πλευρά, αν ο n είναι άρτιος, τότε η f, με θετική n-οστή παράγωγο, έχει τοπικό ελάχιστο στο a, ενώ η g, με αρνητική n-οστή παράγωγο, έχει τοπικό μέγιστο στο a. Από όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $(*)$ αυτές είναι περίπου οι απλούστερες που διαθέτουμε· παρ' όλα αυτά, υποδεικνύουν τη γενική κατάσταση. Πράγματι, όλη η ουσία της επόμενης απόδειξης βρίσκεται στο γεγονός ότι κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί την $(*)$ μοιάζει πάρα πολύ με μια από αυτές τις συναρτήσεις, με μια έννοια που γίνεται σαφής από το Θεώρημα 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Έστω ότι

$$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$
$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(1) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(a) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a.
(2) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(a) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο a.
(3) Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε ελάχιστο στο a.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προφανώς, η υπόθεση ότι $f(a) = 0$ δεν είναι σε βάρος της γενικότητας, γιατί ούτε οι υποθέσεις ούτε το συμπέρασμα επηρεάζονται αν η f αντικατασταθεί από την $f - f(a)$. Τότε, αφού οι πρώτες $n-1$ παράγωγοι της f στο a είναι 0, το πολυώνυμο Taylor $P_{n,a}$ της f είναι

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 1 είναι ότι

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right].$$

Επομένως, αν το x είναι αρκετά κοντά στο a, έχουμε ότι το

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \quad \text{έχει το ίδιο πρόσημο με το} \quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο n είναι άρτιος. Σε αυτήν την περίπτωση, $(x-a)^n > 0$ για κάθε $x \neq a$. Αφού το $f(x)/(x-a)^n$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f^{(n)}(a)/n!$ για x αρκετά κοντά στο a, έπεται ότι το $f(x)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $f^n(a)/n!$ για x αρκετά κοντά στο a. Αν $f^{(n)}(a) > 0$, αυτό σημαίνει ότι

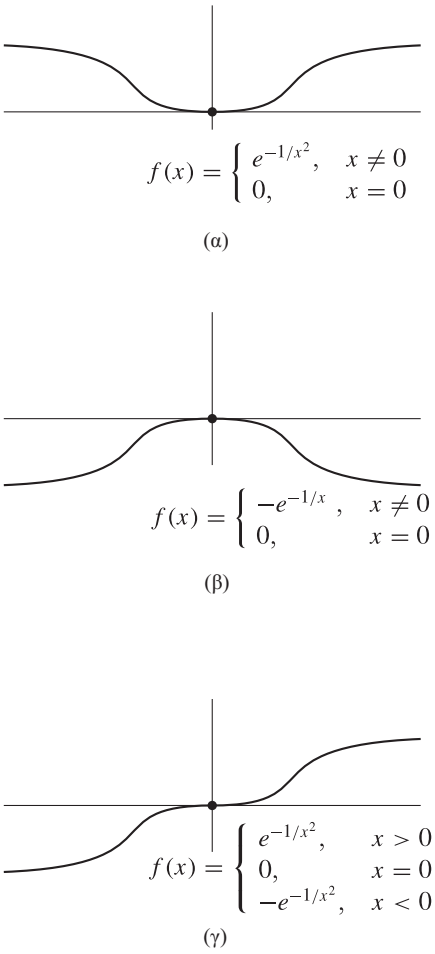
$$f(x) > 0 = f(a)$$

για x κοντά στο a. Επομένως, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο a. Μια ίδια ακριβώς απόδειξη είναι δυνατή και στην περίπτωση $f^{(n)}(a) < 0$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο n είναι περιττός. Τα ίδια επιχειρήματα δείχνουν ότι, αν το x είναι αρκετά κοντά στο a, τότε το

$$\frac{f(x)}{(x-a)^n} \quad \text{έχει πάντα το ίδιο πρόσημο.}$$

Αλλά $(x-a)^n > 0$ για $x > a$ και $(x-a)^n < 0$ για $x < a$. Άρα η $f(x)$ έχει *διαφορετικά* πρόσημα για $x > a$ και $x < a$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f δεν έχει ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο a. ∎



ΣΧΗΜΑ 3

Αν και το Θεώρημα 2 λύνει το πρόβλημα των τοπικών μεγίστων και ελαχίστων σχεδόν για κάθε συνάρτηση που εμφανίζεται στην πράξη, έχει κάποιους θεωρητικούς περιορισμούς, γιατί το $f^{(k)}(a)$ μπορεί να είναι 0 για *κάθε* k. Αυτό συμβαίνει (Σχήμα 3(α)) για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

που έχει ελάχιστο στο 0, καθώς επίσης και για την αντίθετη αυτής της συνάρτησης (Σχήμα 3(β)), που έχει μέγιστο στο 0. Ακόμα (Σχήμα 3(γ)), αν

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-1/x^2}, & x < 0, \end{cases}$$

τότε $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε k, αλλά η f δεν έχει ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο στο 0.

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1 εκφράζεται συχνά μέσω της σημαντικής έννοιας της «τάξης ισότητας». Δύο συναρτήσεις f και g είναι **ίσες μέχρι τη *n*-οστή τάξη στο *a*** αν

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Στη γλώσσα αυτού του ορισμού, το Θεώρημα 1 λέει ότι το πολυώνυμο Taylor $P_{n,a,f}$ είναι ίσο με την f στο a μέχρι την n-οστή τάξη. Θα μπορούσαμε κάλλιστα να έχουμε σχεδιάσει το πολυώνυμο Taylor έτσι ώστε να ικανοποιεί αυτήν ακριβώς την απαίτηση, γιατί υπάρχει το πολύ ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ με αυτήν την ιδιότητα. Αυτός ο ισχυρισμός είναι συνέπεια του ακόλουθου στοιχειώδους θεωρήματος:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Έστω P και Q δύο πολυώνυμα ως προς $(x-a)$, βαθμού $\leq n$, και ας υποθέσουμε ότι τα P και Q είναι ίσα μέχρι τη n-οστή τάξη στο a. Τότε $P = Q$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $R = P - Q$. Αφού το R είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq n$, αρκεί να δείξουμε ότι, αν το

$$R(x) = b_0 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

ικανοποιεί την

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

τότε $R = 0$. Τώρα, από τις υποθέσεις για την R, είναι φανερό ότι

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^i} = 0 \quad \text{για } 0 \leq i \leq n.$$

Για $i = 0$, αυτή η συνθήκη απλώς λέει ότι $\lim_{x\to a} R(x) = 0$. Αλλά

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} R(x) &= \lim_{x\to a}[b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n] \\ &= b_0.\end{aligned}$$

Άρα $b_0 = 0$ και

$$R(x) = b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Επομένως,

$$\frac{R(x)}{x-a} = b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}$$

και

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{x-a} = b_1.$$

Άρα $b_1 = 0$ και

$$R(x) = b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, βρίσκουμε ότι

$$b_0 = \cdots = b_n = 0. \blacksquare$$

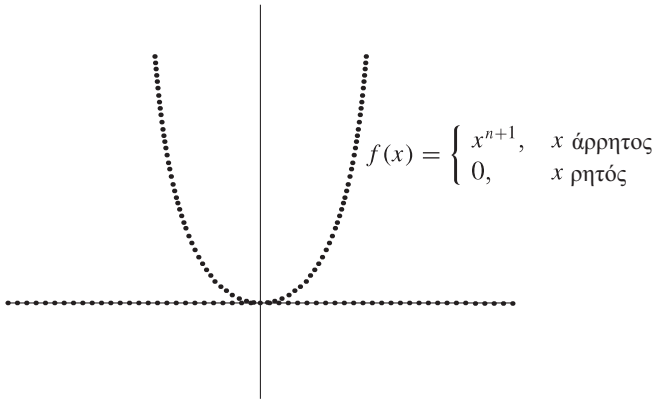
ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο a, και ας υποθέσουμε ότι P είναι ένα πολυώνυμο ως προς $(x-a)$ βαθμού $\leq n$, που ισούται με την f μέχρι τη n-οστή τάξη στο a. Τότε $P = P_{n,a,f}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού τα P και $P_{n,a,f}$ είναι και τα δύο ίσα με την f μέχρι τη n-οστή τάξη στο a, είναι εύκολο να δούμε ότι το P ισούται με το $P_{n,a,f}$ μέχρι τη n-οστή τάξη στο a. Επομένως, $P = P_{n,a,f}$ από το Θεώρημα. $\blacksquare$

Με την πρώτη ματιά, αυτό το πόρισμα φαίνεται να έχει υποθέσεις πολύπλοκες χωρίς να υπάρχει λόγος. Θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς ότι η ύπαρξη του πολυωνύμου P αυτομάτως σημαίνει ότι η f είναι αρκετά παραγωγίσιμη ώστε να υπάρχει το $P_{n,a,f}$. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο. Για παράδειγμα (Σχήμα 4), ας υποθέσουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ άρρητος} \\ 0, & x \text{ ρητός.} \end{cases}$$

Αν $P(x) = 0$, τότε το P είναι προφανώς πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ που ισούται με την f μέχρι τη n-οστή τάξη στο 0. Από την άλλη πλευρά, η $f'(a)$ δεν υπάρχει για κανένα $a \neq 0$, άρα η $f''(0)$ δεν ορίζεται.



ΣΧΗΜΑ 4

Όταν όμως η f έχει n παραγώγους στο a, το πόρισμα μας δίνει μια χρήσιμη μέθοδο για να βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor της f. Θυμηθείτε, συγκεκριμένα, ότι η πρώτη μας απόπειρα να βρούμε το πολυώνυμο Taylor της $\arctan$ κατέληξε σε αποτυχία. Η εξίσωση

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

μας οδηγεί σε μια μέθοδο που μας δίνει ελπίδες να βρούμε ένα πολυώνυμο κοντά στην $\arctan$ —να διαιρέσουμε το 1 με $1+t^2$, και να πάρουμε ένα πολυώνυμο μαζί με κάποιο υπόλοιπο:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Αυτός ο τύπος, που ελέγχεται εύκολα αν πολλαπλασιάσουμε και τις δύο πλευρές με $1+t^2$, δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\arctan x &= \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - \cdots + (-1)^n t^{2n}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το πόρισμά μας, το πολυώνυμο που εμφανίζεται εδώ θα είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ της $\arctan$ στο 0, αρκεί να ισχύει

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt}{x^{2n+1}} = 0.$$

Αφού

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \le \left|\int_0^x t^{2n+2}\,dt\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

αυτό είναι προφανώς αληθές. Έτσι, βρήκαμε ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ της $\arctan$ στο 0 είναι το

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Με την ευκαιρία, τώρα που έχουμε ανακαλύψει τα πολυώνυμα Taylor της $\arctan$, είναι δυνατόν να εργαστούμε κατά την αντίστροφη φορά και να βρούμε την $\arctan^{(k)}(0)$ για κάθε k: Αφού

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

και αφού αυτό το πολυώνυμο είναι, εξ ορισμού,

$$\arctan^{(0)}(0) + \arctan^{(1)}(0) + \frac{\arctan^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\arctan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

μπορούμε να βρούμε την $\arctan^{(k)}(0)$ εξισώνοντας απλώς τους συντελεστές του x^k σε αυτά τα δύο πολυώνυμα:

$$\frac{\arctan^{(k)}(0)}{k!} = 0 \quad \text{αν ο } k \text{ είναι άρτιος,}$$
$$\frac{\arctan^{(2l+1)}(0)}{(2l+1)!} = \frac{(-1)^l}{2l+1} \quad \text{ή} \quad \arctan^{(2l+1)}(0) = (-1)^l \cdot (2l)!\,.$$

Ένα ακόμα πιο ενδιαφέρον στοιχείο εμφανίζεται αν επιστρέψουμε στην αρχική εξίσωση

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt,$$

και θυμηθούμε την εκτίμηση

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \right| \le \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Όταν $|x| \le 1$, αυτή η παράσταση είναι το πολύ $1/(2n+3)$, και μπορούμε να την κάνουμε όσο μικρή θέλουμε επιλέγοντας απλώς n αρκετά μεγάλο. Με άλλα λόγια, για $|x| \le 1$ *μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα πολυώνυμα Taylor της* $\arctan$ *για να υπολογίσουμε το* $\arctan x$ *με όση ακρίβεια θέλουμε.* Τα πιο σημαντικά θεωρήματα για τα πολυώνυμα Taylor επεκτείνουν αυτό το μεμονωμένο αποτέλεσμα και σε άλλες συναρτήσεις, και τα πολυώνυμα Taylor θα παίξουν σύντομα έναν τελείως καινούργιο ρόλο. Τα θεωρήματα που αποδείξαμε έως τώρα εξέταζαν τη συμπεριφορά του πολυωνύμου Taylor $P_{n,a}$ για *σταθερό* n, καθώς το x προσεγγίζει το a. Από δω και πέρα, θα συγκρίνουμε τα πολυώνυμα Taylor $P_{n,a}$ για *σταθερό* x και διαφορετικό n. Για να προετοιμαστούμε για το θεώρημα που θα έρθει, εισάγουμε μερικούς νέους συμβολισμούς.

Αν f είναι μια συνάρτηση για την οποία υπάρχει το $P_{n,a}(x)$, ορίζουμε το **υπόλοιπο** $R_{n,a}(x)$ από την

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n,a}(x) + R_{n,a}(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x). \end{aligned}$$

Θα θέλαμε να έχουμε μια έκφραση για το $R_{n,a}(x)$, που το μέγεθός της να είναι εύκολο να εκτιμηθεί. Υπάρχει μια τέτοια έκφραση, που περιέχει ένα ολοκλήρωμα, ακριβώς όπως και στην περίπτωση της $\arctan$. Ένας τρόπος για να μαντέψουμε αυτήν την έκφραση είναι να ξεκινήσουμε με την περίπτωση $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + R_{0,a}(x).$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μάς επιτρέπει να γράψουμε

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt,$$

οπότε

$$R_{0,a}(x) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Μπορούμε από αυτόν τον τύπο να πάρουμε μια ανάλογη έκφραση για το $R_{1,a}(x)$, αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη με έναν μάλλον πονηρό τρόπο: Έστω

$$u(t) = f'(t) \quad \text{και} \quad v(t) = t - x$$

(σημειώνουμε ότι το x παριστάνει κάποιον σταθερό αριθμό στην έκφραση του $v(t)$, άρα $v'(t) = 1$)· τότε

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(t)\,dt &= \int_a^x \underset{\downarrow}{f'(t)}\cdot \underset{\downarrow}{1}\quad dt \\ &\qquad\quad \underset{u(t)}{\downarrow}\quad \underset{v'(t)}{\downarrow} \\ &= u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x \underset{\downarrow}{f''(t)}(t-x)\,dt. \\ &\qquad\qquad\quad \underset{u'(t)}{\downarrow}\quad \underset{v(t)}{\downarrow}\end{aligned}$$

Αφού $v(x) = 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \\ &= f(a) - u(a)v(a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.\end{aligned}$$

Άρα

$$R_{1,a}(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\,dt.$$

Είναι δύσκολο να εξηγήσουμε γιατί διαλέξαμε $v(t) = t - x$, και όχι $v(t) = t$. Απλώς συμβαίνει να είναι η επιλογή που μας εξυπηρετεί, κάτι που θα μπορούσε να ανακαλύψει κανείς μετά από πολλά παρόμοια αλλά μάταια τεχνάσματα. Είναι, πάντως, εύκολο να μαντέψει κανείς τώρα τον τύπο για το $R_{2,a}(x)$. Αν

$$u(t) = f''(t) \quad \text{και} \quad v(t) = \frac{-(x-t)^2}{2},$$

τότε $v'(t) = (x-t)$, οπότε

$$\begin{aligned}\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt &= u(t)v(t)\Big|_a^x - \int_a^x f'''(t)\cdot\frac{-(x-t)^2}{2}\,dt \\ &= \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \int_a^x \frac{f'''(t)}{2}(x-t)^2\,dt.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$R_{2,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(3)}(t)}{2}(x-t)^2\,dt.$$

Θα έπρεπε, τώρα, να μη δυσκολευτείτε να δώσετε μια αυστηρή απόδειξη, με επαγωγή, για το ότι, αν η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής στο $[a, x]$, τότε

$$R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

Τον τύπο αυτόν, που λέγεται η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου, είναι δυνατόν να τον εκτιμήσουμε εύκολα συναρτήσει των εκτιμήσεων της $f^{(n+1)}/n!$ στο $[a, x]$. Αν m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο της $f^{(n+1)}/n!$ στο $[a, x]$, τότε το $R_{n,a}(x)$ ικανοποιεί την

$$m\int_a^x (x-t)^n\,dt \le R_{n,a}(x) \le M\int_a^x (x-t)^n\,dt,$$

επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$R_{n,a}(x) = \alpha \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

για κάποιον αριθμό α ανάμεσα στο m και το M. Αφού έχουμε υποθέσει ότι η $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής, για κάποιο t στο (a, x) μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

το οποίο ονομάζεται μορφή Lagrange του υπολοίπου (οι χειρισμοί αυτοί θα φαίνονται οικείοι σε όσους έχουν κάνει το Πρόβλημα 13-23).

Η μορφή Lagrange του υπολοίπου είναι αυτή που θα χρειαστούμε σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις. Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε και μια απόδειξη που δεν απαιτεί να είναι η $f^{(n+1)}$ συνεχής (μια εκλέπτυνση που ομολογουμένως έχει μικρή σημασία στις περισσότερες εφαρμογές, όπου συχνά υποθέτουμε ότι η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων). Αυτή είναι η μορφή του υπολοίπου που θα επιλέξουμε κατά τη διατύπωση του επόμενου θεωρήματος (Θεώρημα του Taylor).

ΛΗΜΜΑ Έστω ότι η συνάρτηση R είναι $(n+1)$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, και

$$R^{(k)}(a) = 0 \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Τότε για οποιοδήποτε x στο $(a, b]$ έχουμε

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \quad \text{για κάποιο } t \text{ στο } (a, x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για $n = 0$, πρόκειται απλώς για το Θεώρημα Μέσης Τιμής. Θα αποδείξουμε το θεώρημα για κάθε n με επαγωγή στο n. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy και γράφουμε

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{R'(z)}{(n+2)(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{n+2}\frac{R'(z)}{(z-a)^{n+1}} \quad \text{για κάποιο } z \text{ στο } (a, x),$$

και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την υπόθεση της επαγωγής *στο* R' *για το διάστημα* $[a, z]$ οπότε και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{(x-a)^{n+2}} &= \frac{1}{n+2}\frac{(R')^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \quad \text{για κάποιο } t \text{ στο } (a, z)\\ &= \frac{R^{(n+2)}(t)}{(n+2)!}. \ \blacksquare\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ TAYLOR) Έστω ότι οι $f', \ldots, f^{(n+1)}$ ορίζονται στο $[a, x]$, και ότι το $R_{n,a}(x)$ ορίζεται από την

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,a}(x).$$

Τότε

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad \text{για κάποιο } t \text{ στο } (a, x)$$

(μορφή Lagrange του υπολοίπου).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η συνάρτηση $R_{n,a}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος από τον ίδιο τον ορισμό του πολυωνύμου Taylor, επομένως

$$\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R_{n,a}{}^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

για κάποιο t στο (a, x). Όμως

$$R_{n,a}{}^{(n+1)} = f^{(n+1)},$$

αφού το $R_{n,a} - f$ είναι πολυώνυμο βαθμού n. ∎

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Taylor στις συναρτήσεις $\sin$, $\cos$ και $\exp$ με $a = 0$, λαμβάνουμε τους εξής τύπους:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

(φυσικά, θα μπορούσαμε να πάρουμε το υπόλοιπο των $\sin$ και $\cos$ κατά μία δύναμη μεγαλύτερη).

Οι εκτιμήσεις των δύο πρώτων είναι εξαιρετικά εύκολες. Αφού

$$|\sin^{(2n+2)}(t)| \le 1 \quad \text{για κάθε } t,$$

έχουμε

$$\left| \frac{\sin^{(2n+2)}(t)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\left| \frac{\cos^{(2n+1)}(t)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις είναι εξαιρετικά ενδιαφέρουσες, γιατί (όπως αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 16) για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να πετύχουμε

$$\frac{x^n}{n!} < \varepsilon$$

διαλέγοντας n αρκετά μεγάλο (το πόσο μεγάλο θα είναι το n εξαρτάται από το x). Αυτό μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το $\sin x$ με όποιο βαθμό ακρίβειας θέλουμε, απλώς υπολογίζοντας το κατάλληλο πολυώνυμο Taylor $P_{n,0}(x)$. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\sin 2$ με ένα σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}. Αφού

$$\sin 2 = P_{2n+1,0}(2) + R, \quad \text{όπου } |R| \le \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

μπορούμε να πάρουμε το $P_{2n+1,0}(2)$ ως απάντηση, αρκεί να ισχύει

$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-4}.$$

Ένας αριθμός n με αυτήν την ιδιότητα μπορεί να βρεθεί με άμεσο έλεγχο —προφανώς, θα μας βοηθούσε ένας πίνακας με τιμές για τα $n!$ και 2^n (βλ. σελίδα 392). Σε αυτήν την περίπτωση, ο $n = 5$ είναι κατάλληλος, άρα

$$\sin 2 = P_{11,0}(2) + R$$

$$= 2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \frac{2^9}{9!} - \frac{2^{11}}{11!} + R,$$
$$\text{όπου } |R| < 10^{-4}.$$

Ακόμα ευκολότερα, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\sin 1$ κατά προσέγγιση, γιατί

$$\sin 1 = P_{2n+1,0}(1) + R, \quad \text{όπου } |R| < \frac{1}{(2n+2)!}.$$

Για να πάρουμε σφάλμα μικρότερο από ε, αρκεί να βρούμε ένα n τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{(2n+2)!} < \varepsilon,$$

και αυτό απαιτεί μόνο μια σύντομη ματιά σε έναν πίνακα παραγοντικών. (Επίσης, οι διάφοροι όροι του $P_{2n+1,0}(1)$ είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογιστούν.)

Για πολύ μικρά x, οι εκτιμήσεις γίνονται ακόμα ευκολότερες. Για παράδειγμα,

$$\sin \frac{1}{10} = P_{2n+1,0}\left(\frac{1}{10}\right) + R, \quad \text{όπου } |R| < \frac{1}{10^{2n+2}(2n+2)!}.$$

Για να πάρουμε $|R| < 10^{-10}$ μπορούμε σαφώς να πάρουμε $n = 4$ (και θα μπορούσαμε ίσως να τα βγάλουμε πέρα και με $n = 3$). Αυτές οι μέθοδοι χρησιμοποιούνται στην πράξη για να υπολογίσουμε πίνακες των $\sin$ και $\cos$. Ένας υπολογιστής με μεγάλη ταχύτητα μπορεί να υπολογίσει το $P_{2n+1,0}(x)$ για πολλά διαφορετικά x σχεδόν σε χρόνο μηδέν. Σήμερα οι υπολογιστές, ακόμα και τα φθηνά κομπιουτεράκια, υπολογίζουν τις τιμές αυτών των συναρτήσεων «σε πραγματικό χρόνο», χρησιμοποιώντας όμως ειδικές μεθόδους που είναι ακόμη πιο γρήγορες.

Η εκτίμηση του υπολοίπου για την e^x είναι λίγο πιο δύσκολη. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα, ας υποθέσουμε ότι $x \geq 0$ (οι εκτιμήσεις για $x \leq 0$ γίνονται στο Πρόβλημα 15). Στο διάστημα $[0, x]$ η μέγιστη τιμή της e^t είναι e^x, γιατί η $\exp$ είναι αύξουσα, άρα

$$R_{n,0} \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αφού μας είναι ήδη γνωστό ότι $e < 4$, έχουμε

$$\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!},$$

που μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε αν διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο. Το πόσο μεγάλο θα είναι το n εξαρτάται από το x (και ο παράγοντας 4^x θα δυσκολέψει τα πράγματα). Για μια ακόμα φορά, οι εκτιμήσεις είναι ευκολότερες για μικρά x. Αν $0 \leq x \leq 1$, τότε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R, \quad \text{όπου } 0 < R < \frac{4}{(n+1)!}.$$

Πιο συγκεκριμένα, αν $n = 4$, τότε

$$0 < R < \frac{4}{5!} < \frac{1}{10},$$

άρα

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + R, \quad \text{όπου } 0 < R < \frac{1}{10}$$
$$= 2 + \frac{17}{24}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$2 < e < 3.$$

(Από αυτό προκύπτει στη συνέχεια ότι

$$0 < R < \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

το οποίο μας επιτρέπει να βελτιώσουμε ελαφρώς την εκτίμηση του R.) Παίρνοντας $n = 7$ μπορείτε να δείτε ότι τα 3 πρώτα δεκαδικά ψηφία του e είναι

$$e = 2.718\ldots$$

(μπορείτε να ελέγξετε ότι για $n = 7$ έχουμε αυτόν τον βαθμό ακρίβειας, αλλά θα ήταν σκληρό να επιμείνουμε να κάνετε πραγματικά τους υπολογισμούς).

Η συνάρτηση $\arctan$ είναι επίσης σημαντική, αλλά όπως ίσως θυμάστε, είναι πολύ δύσκολο να δοθεί μια έκφραση για την $\arctan^{(k)}(x)$, με αποτέλεσμα οι εκφράσεις μας για τη μορφή του υπολοίπου να είναι μάλλον άχρηστες. Από την άλλη πλευρά, ο τρόπος με τον οποίο υπολογίσαμε το πολυώνυμο Taylor της $\arctan$ μας έδωσε αυτομάτως και έναν τύπο για το υπόλοιπο:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Όπως έχουμε ήδη εκτιμήσει,

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Για την ώρα, θα θεωρήσουμε μόνον αριθμούς x με $|x| \leq 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο όρος του υπολοίπου μπορεί προφανώς να γίνει όσο μικρός θέλουμε, αν πάρουμε n αρκετά μεγάλο. Ειδικότερα,

$$\arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R, \quad \text{όπου } |R| < \frac{1}{2n+3}.$$

Με αυτήν την εκτίμηση είναι εύκολο να βρούμε ένα n που να κάνει το υπόλοιπο μικρότερο από κάθε δοθέντα αριθμό· από την άλλη πλευρά, το n θα είναι συνήθως τόσο μεγάλο που οι υπολογισμοί θα είναι απελπιστικά επίπονοι. Για να πάρουμε ένα υπόλοιπο $< 10^{-4}$, για παράδειγμα, πρέπει να πάρουμε $n > (10^4 - 3)/2$. Και είναι πραγματικά κρίμα, γιατί $\arctan 1 = \pi/4$, δηλαδή το πολυώνυμο Taylor της $\arctan$ θα μας επέτρεπε να υπολογίσουμε το π. Για καλή μας τύχη, με κάποια τεχνάσματα είμαστε σε θέση να ξεπεράσουμε αυτές τις δυσκολίες. Αφού

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3},$$

για σχετικά μικρότερα x θα χρειάζονται πολύ μικρότερα n. Το τέχνασμα για τον υπολογισμό του π είναι να εκφράσουμε το $\arctan 1$ συναρτήσει του $\arctan x$ για μικρότερα x. Στο Πρόβλημα 6 υποδεικνύουμε έναν κατάλληλο τρόπο για να γίνει κάτι τέτοιο.

Από τους υπολογισμούς στη σελίδα 375, βλέπουμε ότι για $x \geq 0$ έχουμε

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}$$

όπου

$$\left| \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

και αν $-1 < x < 0$, μπορούμε να βρούμε μια ελαφρώς πιο σύνθετη εκτίμηση (Πρόβλημα 16). Για αυτήν τη συνάρτηση, το υπόλοιπο μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε αν διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο, υπό τον όρο ότι $-1 < x \leq 1$.

Η συμπεριφορά των υπολοίπων για τις $\arctan$ και $f(x) = \log(x+1)$ αλλάζει τελείως όταν $|x| > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση οι εκτιμήσεις

$$|R_{2n+1,0}(x)| < \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \quad \text{για την } \arctan,$$
$$|R_{n,0}(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x > 0) \text{ για την } f,$$

είναι άχρηστες γιατί, όταν $|x| > 1$, τα φράγματα x^m/m γίνονται μεγάλα καθώς μεγαλώνει το m. Αυτή η δυσκολία είναι αναπόφευκτη, και δεν οφείλεται απλώς και μόνο στο ότι οι εκτιμήσεις μας ίσως είναι ατελείς. Είναι εύκολο να βρούμε εκτιμήσεις προς την αντίθετη κατεύθυνση που δείχνουν ότι τα υπόλοιπα παραμένουν μεγάλα. Για να πάρουμε μια τέτοια εκτίμηση για την $\arctan$, παρατηρούμε ότι, αν το t βρίσκεται στο $[0, x]$ (ή στο $[x, 0]$ αν $x < 0$), τότε

$$1 + t^2 \le 1 + x^2 \le 2x^2, \quad \text{αν } |x| \ge 1,$$

άρα

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \ge \frac{1}{2x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n+6}.$$

Για να πάρουμε μια παρόμοια εκτίμηση για την $\log(1+x)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

οπότε παίρνουμε

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt.$$

Αν $x > 0$, τότε για t στο $[0, x]$ έχουμε

$$1 + t \le 1 + x \le 2x, \quad \text{αν } x \ge 1,$$

άρα

$$\int_0^x \frac{t^n}{t+1}\, dt \ge \frac{1}{2x} \int_0^x t^n\, dt = \frac{x^n}{2n+2}.$$

Αυτές οι εκτιμήσεις δείχνουν ότι, αν $|x| > 1$, τότε τα υπόλοιπα γίνονται μεγάλα όταν το n γίνεται μεγάλο. Με άλλα λόγια, για $|x| > 1$, τα πολυώνυμα Taylor των $\arctan$ και f *είναι άχρηστα όσον αφορά στον υπολογισμό των* $\arctan x$ *και* $\log(x+1)$. Αυτό δεν είναι και τόσο φοβερό, γιατί οι τιμές αυτών των δυο συναρτήσεων μπορούν να βρεθούν για κάθε x, αν είναι γνωστές για όλα τα x με $|x| < 1$.

Η ίδια κατάσταση εμφανίζεται με πιο θεαματικό τρόπο για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Έχουμε ήδη επισημάνει ότι $f^{(k)}(0) = 0$ για κάθε φυσικό αριθμό k. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο Taylor $P_{n,0}$ της f είναι

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0.$$

Με άλλα λόγια, ο όρος υπολοίπου $R_{n,0}(x)$ είναι πάντοτε ίσος με $f(x)$, άρα το πολυώνυμο Taylor είναι άχρηστο για τον υπολογισμό του $f(x)$, εκτός αν $x = 0$. Προς το τέλος, θα δώσουμε κάποια εξήγηση για τη συμπεριφορά αυτής της συνάρτησης, που δίνει μια τόσο συνταρακτική περιγραφή των περιορισμών του Θεωρήματος του Taylor.

Η λέξη «υπολογίζω» χρησιμοποιήθηκε τόσες πολλές φορές σε σύνδεση με τις εκτιμήσεις μας για το υπόλοιπο, που θα μπορούσε κανείς να παρεξηγήσει τη σημασία του Θεωρήματος του Taylor. Είναι αλήθεια ότι το Θεώρημα Taylor είναι ένα σχεδόν ιδανικό υπολογιστικό εργαλείο (παρά την παταγώδη αποτυχία του στο προηγούμενο παράδειγμα), αλλά έχει εξίσου σημαντικές θεωρητικές συνέπειες. Τις περισσότερες από αυτές θα τις δούμε σε επόμενα κεφάλαια, αλλά θα δώσουμε εδώ δύο αποδείξεις που δείχνουν με ποιους τρόπους μπορεί να χρησιμοποιηθεί το Θεώρημα Taylor. Το πρώτο παράδειγμα θα κάνει μεγάλη εντύπωση σε όσους παρακολούθησαν την απόδειξη, στο Κεφάλαιο 16, ότι ο π είναι άρρητος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Ο e είναι άρρητος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ξέρουμε ότι, για κάθε n,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n, \quad \text{όπου } 0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Έστω ότι ο e ήταν ρητός, ας πούμε $e = a/b$, όπου οι a και b είναι θετικοί ακέραιοι. Διαλέγουμε $n > b$ και ακόμα $n > 3$. Τότε

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

άρα

$$\frac{n!\,a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n!R_n.$$

Όλοι οι όροι σε αυτήν την εξίσωση, εκτός από τον $n!R_n$, είναι ακέραιοι (η αριστερή πλευρά είναι ακέραιος γιατί $n > b$). Επομένως, και ο $n!R_n$ πρέπει να είναι ακέραιος. Αλλά

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!},$$

άρα

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

πράγμα αδύνατο για ακέραιο αριθμό. ∎

Το δεύτερο παράδειγμα είναι απλώς μια άμεση απόδειξη ενός αποτελέσματος που αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 15: Αν

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0, \end{aligned}$$

τότε $f = 0$. Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε πρώτα ότι η $f^{(k)}$ υπάρχει για κάθε k· πραγματικά,

$$\begin{aligned} f^{(3)} &= (f'')' = -f', \\ f^{(4)} &= (f^{(3)})' = (-f')' = -f'' = f, \end{aligned}$$

$$f^{(5)} = (f^{(4)})' = f',$$
κτλ.

Αυτό δείχνει ότι όχι μόνο υπάρχουν όλες οι $f^{(k)}$, αλλά και ότι υπάρχουν το πολύ 4 διαφορετικές: οι $f, f', -f, -f'$. Αφού $f(0) = f'(0) = 0$, όλες οι $f^{(k)}(0)$ είναι 0. Τώρα, το Θεώρημα του Taylor μας λέει ότι για κάθε n

$$f(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^n$$

για κάποιο t στο $[0, x]$. Κάθε συνάρτηση $f^{(n+1)}$ είναι συνεχής (γιατί η $f^{(n+2)}$ υπάρχει), άρα για κάθε x υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M \quad \text{για } 0 \leq t \leq x, \text{ και } \textit{κάθε } n$$

(μπορούμε να προσθέσουμε τη φράση «και για *κάθε n*» γιατί υπάρχουν μόνο τέσσερις διαφορετικές $f^{(k)}$). Άρα

$$|f(x)| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε n, και αφού το $|x|^n/n!$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε αν πάρουμε το n αρκετά μεγάλο, αυτό δείχνει ότι $|f(x)| \leq \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$· επομένως, $f(x) = 0$.

Τα προβλήματα στα οποία θα τεθεί σε εφαρμογή το Θεώρημα Taylor σε επόμενα κεφάλαια συνδέονται στενά με την προσπάθεια υπολογισμού που μας απασχόλησε σε ένα μεγάλο τμήμα αυτού του κεφαλαίου. Αν το υπόλοιπο $R_{n,a}(x)$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε με επιλογή αρκετά μεγάλου n, τότε το $f(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με όση ακρίβεια θέλουμε, χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα $P_{n,a}(x)$. Καθώς απαιτούμε όλο και μεγαλύτερη ακρίβεια, πρέπει να προσθέτουμε όλο και περισσότερους όρους. Αν είμαστε διατεθειμένοι να προσθέσουμε άπειρους όρους (τουλάχιστον θεωρητικά!), τότε θα μπορούσαμε να αγνοήσουμε τελείως το υπόλοιπο. Θα υπήρχαν «άπειρα αθροίσματα» της μορφής

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots, \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad \text{αν } |x| \leq 1, \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{αν } -1 < x \leq 1.
\end{aligned}$$

Είμαστε σχεδόν έτοιμοι για αυτό το βήμα. Μόνο ένα εμπόδιο παραμένει—δεν έχουμε ορίσει έως τώρα τι είναι ένα άπειρο άθροισμα. Στα Κεφάλαια 22 και 23 περιέχονται οι απαραίτητοι ορισμοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor (του βαθμού που ζητείται, και στο σημείο που υποδεικνύουμε) για τις παρακάτω συναρτήσεις:

(i) $f(x) = e^{e^x}$ βαθμού 3, στο 0.

(ii) $f(x) = e^{\sin x}$ βαθμού 3, στο 0.

(iii) $\sin$ βαθμού $2n$, στο $\dfrac{\pi}{2}$.

(iv) $\cos$ βαθμού $2n$, στο π.

(v) $\exp$ βαθμού n, στο 1.

(vi) $\log$ βαθμού n, στο 2.

(vii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ βαθμού 4, στο 0.

(viii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ βαθμού 4, στο 1.

(ix) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ βαθμού $2n+1$, στο 0.

(x) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ βαθμού n, στο 0.

2. Γράψτε το καθένα από τα πολυώνυμα ως προς x που ακολουθούν, ως πολυώνυμο του $(x-3)$ (αρκεί να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor στο 3, του ίδιου βαθμού με το αρχικό πολυώνυμο. Γιατί;)

(i) $x^2 - 4x - 9$.

(ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$.

(iii) x^5.

(iv) $ax^2 + bx + c$.

3. Για καθέναν από τους αριθμούς που ακολουθούν, γράψτε ένα άθροισμα (χρησιμοποιώντας συμβολισμό $\sum$) που να τον προσεγγίζει με τη ζητούμενη κάθε φορά ακρίβεια. Για να ελαχιστοποιήσετε τους άχρηστους υπολογισμούς, συμβουλευτείτε τους πίνακες του 2^n και του $n!$ στην επόμενη σελίδα.

(i) $\sin 1$ σφάλμα $< 10^{-17}$.

(ii) $\sin 2$ σφάλμα $< 10^{-12}$.

(iii) $\sin \dfrac{1}{2}$ σφάλμα $< 10^{-20}$.

(iv) e σφάλμα $< 10^{-4}$.

(v) e^2 σφάλμα $< 10^{-5}$.

n	2^n	$n!$
1	2	1
2	4	2
3	8	6
4	16	24
5	32	120
6	64	720
7	128	5.040
8	256	40.320
9	512	362.880
10	1.024	3.628.800
11	2.048	39.916.800
12	4.096	479.001.600
13	8.192	6.227.020.800
14	16.384	87.178.291.200
15	32.768	1.307.674.368.000
16	65.536	20.922.789.888.000
17	131.072	355.687.428.096.000
18	262.144	6.402.373.705.728.000
19	524.888	121.645.100.408.832.000
20	1.048.576	2.432.902.008.176.640.000

∗**4.** Αυτό το πρόβλημα είναι όμοιο με το προηγούμενο, μόνο που τα σφάλματα που απαιτούνται είναι τόσο μικρά που δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι πίνακες. Θα χρειαστεί να σκεφτείτε λίγο, και σε μερικές περιπτώσεις ίσως πρέπει να συμβουλευτείτε την απόδειξη στο Κεφάλαιο 16, ότι το $x^n/n!$ μπορεί να γίνει μικρό αν διαλέξουμε μεγάλο n —η απόδειξη ουσιαστικά δίνει μια μέθοδο για να βρίσκουμε το κατάλληλο n. Στο προηγούμενο πρόβλημα ήταν δυνατόν να βρούμε σχετικά μικρά αθροίσματα· και μάλιστα, μπορούσαμε να βρούμε το μικρότερο n που κάνει την εκτίμηση του υπολοίπου που δίνει το Θεώρημα Taylor μικρότερη από το σφάλμα που θέλαμε. Αλλά σε αυτό το πρόβλημα, το να βρείτε *οποιοδήποτε* συγκεκριμένο άθροισμα είναι ένας πραγματικός θρίαμβος (αρκεί να μπορείτε να αποδείξετε ότι το άθροισμά σας δουλεύει).

(i) $\sin 1$ σφάλμα $< 10^{-(10^{10})}$.

(ii) e σφάλμα $< 10^{-1{,}000}$.

(iii) $\sin 10$ σφάλμα $< 10^{-20}$.

(iv) e^{10} σφάλμα $< 10^{-30}$.

(v) $\arctan \dfrac{1}{10}$ σφάλμα $< 10^{-(10^{10})}$.

5. (α) Στο Πρόβλημα 11-41 δείξατε ότι η εξίσωση $x^2 = \cos x$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο Taylor του cos για να δείξετε ότι οι λύσεις είναι κατά προσέγγιση $\pm\sqrt{2/3}$, και βρείτε φράγματα για το σφάλμα. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο Taylor πέμπτου βαθμού για να πάρετε μια καλύτερη προσέγγιση.

(β) Εκτιμήστε με τον ίδιο τρόπο τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 = x \sin x + \cos^2 x$.

6. (α) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 15-9, ότι

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3},$$
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

(β) Δείξτε ότι $\pi = 3,14159\ldots$. (Κάθε νέος μαθηματικός θα έπρεπε να επαληθεύσει μερικά δεκαδικά ψηφία του π μόνος του, αλλά ο σκοπός αυτής της άσκησης δεν είναι να σας ρίξει σε έναν κυκεώνα υπολογισμών. Αν χρησιμοποιήσετε τη δεύτερη έκφραση του (α) μέρους, τα πρώτα 5 δεκαδικά ψηφία του π υπολογίζονται με πολύ λίγη προσπάθεια.)

7. Έστω ότι a_i και b_i είναι οι συντελεστές των πολυωνύμων Taylor στο a για τις f και g, αντίστοιχα. Με άλλα λόγια, $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ και $b_i = g^{(i)}(a)/i!$. Βρείτε, συναρτήσει των a_i και b_i τους συντελεστές c_i των πολυωνύμων Taylor στο a για τις εξής συναρτήσεις:

(i) $f + g$.

(ii) fg.

(iii) f'.

(iv) $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

(v) $k(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

8. (α) Αποδείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \sin(x^2)$ βαθμού $4n+2$ στο 0 είναι

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Υπόδειξη: αν P είναι το πολυώνυμο Taylor της $\sin$ βαθμού $2n+1$ στο 0, τότε $\sin x = P(x) + R(x)$, όπου $\lim\limits_{x\to 0} R(x)/x^{2n+1} = 0$. Τί μας λέει αυτό για το $\lim\limits_{x\to 0} R(x^2)/x^{4n+2}$;

(β) Βρείτε την $f^{(k)}(0)$ για κάθε k.

(γ) Γενικά, αν $f(x) = g(x^m)$, βρείτε την $f^{(k)}(0)$ ως συνάρτηση των παραγώγων της g στο 0.

Οι ιδέες αυτού του προβλήματος μπορούν να επεκταθούν σημαντικά, με τρόπους τους οποίους διερευνούμε στα επόμενα τρία προβλήματα.

9. (α) Το Πρόβλημα 7(i) ισοδυναμεί με την εξίσωση

$$P_{n,a,f+g} = P_{n,a,f} + P_{n,a,g}.$$

Δώστε μια πιο άμεση απόδειξη γράφοντας

$$f(x) = P_{n,a,f}(x) + R_{n,a,f}(x)$$
$$g(x) = P_{n,a,g}(x) + R_{n,a,g}(x),$$

και χρησιμοποιώντας το προφανές γεγονός σχετικά με το $R_{n,a,f} + R_{n,a,g}$.

(β) Ομοίως, το Πρόβλημα 7(ii) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι

$$P_{n,a,fg} = [P_{n,a,f} \cdot P_{n,a,g}]_n,$$

όπου με $[P]_n$ συμβολίζουμε την **αποκοπή** του P στον βαθμό n, το άθροισμα όλων των όρων του P βαθμού $\leq n$ [όταν το P είναι γραμμένο ως πολυώνυμο του $x-a$]. Δώστε ξανά μια πιο άμεση απόδειξη, χρησιμοποιώντας τα προφανή γεγονότα σχετικά με τα γινόμενα στα οποία εμπλέκονται όροι της μορφής R_n.

(γ) Αποδείξτε ότι αν p και q είναι πολυώνυμα του $x-a$ και $\lim_{x\to 0} R(x)/(x-a)^n = 0$, τότε

$$p(q(x)+R(x)) = p(q(x)) + \bar{R}(x)$$

όπου

$$\lim_{x\to 0} \bar{R}(x)/(x-a)^n = 0.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι αν το p είναι πολυώνυμο του $x-a$ με όρους βαθμού μόνο $> n$, και το q είναι πολυώνυμο του $x-a$ με σταθερό όρο 0, τότε όλοι οι όροι του $p(q(x-a))$ έχουν βαθμό $> n$.

(δ) Αν $a = 0$ και $b = g(a) = 0$, τότε

$$P_{n,a,f\circ g} = [P_{n,b,f} \circ P_{n,a,g}]_n.$$

(Το Πρόβλημα 8 είναι μια ειδική περίπτωση.)

(ε) Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει στην πραγματικότητα για κάθε a και οποιαδήποτε τιμή $g(a)$. Υπόδειξη: Θεωρήστε τις $F(x) = f(x+g(a))$, $G(x) = g(x+a)$ και $H(x) = G(x) - g(a)$.

(στ) Αν $g(a) = 0$, τότε

$$P_{n,a,\frac{1}{1-g}} = \left[1 + P_{n,a,g} + (P_{n,a,g})^2 + \cdots + (P_{n,a,g})^n\right]_n.$$

10. Για τις ακόλουθες εφαρμογές του Προβλήματος 9, υποθέτουμε για ευκολία ότι $a = 0$, και γράφουμε απλώς $P_{n,f}$ αντί για $P_{n,a,f}$.

(α) Για $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sin x$, βρείτε το $P_{5,f+g}(x)$.

(β) Για τις ίδιες f και g, βρείτε το $P_{5,fg}$.

(γ) Βρείτε το $P_{5,\tan}(x)$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε πρώτα το Πρόβλημα 9(στ) και την τιμή του $P_{5,\cos}(x)$ για να βρείτε το $P_{5,1/\cos}(x)$. (Απάντηση: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$)

(δ) Βρείτε το $P_{4,f}$ για $f(x) = e^{2x}\cos x$. (Απάντηση: $1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{24}x^4$)

(ε) Βρείτε το $P_{5,f}$ για $f(x) = \sin x/\cos 2x$. (Απάντηση: $x + \frac{11}{6}x^3 + \frac{361}{120}x^5$)

(στ) Βρείτε το $P_{6,f}$ για $f(x) = x^3/[(1+x^2)e^x]$. (Απάντηση: $x^3 - x^4 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{6}x^6$)

11. Οι υπολογισμοί αυτού του είδους μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε όρια που διαφορετικά θα προσπαθούσαμε να βρούμε μέσω μιας επίπονης χρήσης του Κανόνα του l'Hôpital. Βρείτε τα ακόλουθα:

(α) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{N(x)}{D(x)}.$$

Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα τα $P_{3,0,N}(x)$ και $P_{3,0,D}(x)$ για τον αριθμητή και παρανομαστή $N(x)$ και $D(x)$.

(β) $$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{e^x}{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x^2}{x - \sin x}.$$

Υπόδειξη: Για τον όρο $e^x/(1+x)$, γράψτε πρώτα $1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.

(γ) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

(δ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2 \sin^2 x}$.

(ε) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin(x^2)}$.

(στ) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)(\arctan x) - x^2}{1-\cos(x^2)}$.

12. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Ξεκινώντας με το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ της $\sin x$, μαζί με την εκτίμηση του υπολοίπου που υπολογίσαμε στη σελίδα 385, δείξτε ότι

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right) + R_{2n,0,f}(x)$$

όπου

$$|R_{2n,0,f}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+2)!},$$

και χρησιμοποιήστε το για να συμπεράνετε ότι

$$\int_0^1 f \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) dx = \frac{1703}{1800} \approx .946$$

με σφάλμα μικρότερο από 10^{-3}.

13. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

(α) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο 0, υπολογίστε την $f^{(k)}(0)$, και δώστε μια εκτίμηση για το υπόλοιπο $R_{n,0,f}$.

(β) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_0^1 f$ με σφάλμα μικρότερο από 10^{-4}.

14. Εκτιμήστε το $\displaystyle\int_0^{0,1} \exp(x^2)\, dx$ με σφάλμα μικρότερο από 10^{-5}.

15. Αποδείξτε ότι, αν $x \leq 0$, τότε το υπόλοιπο $R_{n,0}$ για την e^x ικανοποιεί την

$$|R_{n,0}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

16. Αποδείξτε ότι, αν $-1 < x \leq 0$, τότε το υπόλοιπο $R_{n,0}$ για την $\log(1+x)$ ικανοποιεί την

$$|R_{n,0}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}.$$

∗**17.** (α) Δείξτε ότι, αν $|g'(x)| \leq M|x-a|^n$ για $|x-a| < \delta$, τότε $|g(x) - g(a)| \leq M|x-a|^{n+1}/(n+1)$ για $|x-a| < \delta$.

(β) Χρησιμοποιήστε το (α) μέρος για να δείξετε ότι, αν $\lim_{x\to a} g'(x)/(x-a)^n = 0$, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{(x-a)^{n+1}} = 0.$$

(γ) Δείξτε ότι, αν $g(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x)$, τότε $g'(x) = f'(x) - P_{n-1,a,f'}(x)$.

(δ) Δώστε μια επαγωγική απόδειξη του Θεωρήματος 1, χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον Κανόνα του l'Hôpital.

18. Συμπεράνετε το Θεώρημα 1 ως πόρισμα του Θεωρήματος του Taylor, με οποιαδήποτε μορφή υπολοίπου (Το τίμημα είναι ότι θα χρειαστεί να υποθέσετε μια παράγωγο παραπάνω από ό,τι στις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.)

19. Για την απόδειξη του Θεωρήματος του Taylor με τη μέθοδο Lagrange χρησιμοποιούμε την εξής τεχνική. Θεωρούμε έναν σταθερό αριθμό x και γράφουμε

$$(*) \quad f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + S(t)$$

για $S(t) = R_{n,t}(x)$. Αυτός ο συμβολισμός αποτελεί προειδοποίηση πως θα θεωρήσουμε το δεξιό μέλος ως την τιμή μιας συνάρτησης για δοθέν t, και στη συνέχεια θα γράψουμε το γεγονός ότι η παράγωγος αυτής της συνάρτησης είναι 0, αφού ισούται με τη σταθερή συνάρτηση της οποίας η τιμή είναι πάντα $f(x)$. Για να βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε τους ρόλους των x και t, ελέγξτε ότι, αν

$$g(t) = \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

τότε

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1) + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= -\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k. \end{aligned}$$

(α) Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} 0 = f'(t) &+ \left[-f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right] \\ &+ \left[\frac{-f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right] \\ &+ \cdots \\ &+ \left[\frac{-f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \\ &+ S'(t), \end{aligned}$$

και παρατηρήστε ότι όλο αυτό συμπτύσσεται στο

$$S'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} S(x) &= R_{n,x}(x) = 0, \\ S(a) &= R_{n,a}(x), \end{aligned}$$

εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy στις συναρτήσεις S και $h(t) = (x-t)^{n+1}$ στο $[a, x]$ για να λάβετε τη μορφή Lagrange του υπολοίπου (στην πραγματικότητα ο Lagrange χειρίστηκε με διαφορετικό τρόπο αυτό το τμήμα του συλλογισμού).

(β) Ομοίως, εφαρμόστε το κανονικό Θεώρημα Μέσης Τιμής στην S για να λάβετε τον περίεργο υβριδικό τύπο

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a),$$

ο οποίος ονομάζεται μορφή Cauchy του υπολοίπου.

20. Συμπεράνετε τις μορφές Cauchy και Lagrange του υπολοίπου από την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου της σελίδας 383, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 13-23. Θα πληρώσετε το ίδιο τίμημα, όπως και στο Πρόβλημα 18.

Ξέρω μόνο μια περίπτωση χρήσης της μορφής Cauchy του υπολοίπου. Το επόμενο πρόβλημα αποτελεί προετοιμασία για αυτήν την εξέλιξη.

21. Για κάθε αριθμό α, και κάθε φυσικό αριθμό n, ορίζουμε τον «διωνυμικό συντελεστή»

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!},$$

και ορίζουμε, ως συνήθως, ότι $\binom{\alpha}{0} = 1$. Αν ο α δεν είναι ακέραιος, τότε το $\binom{\alpha}{n}$ δεν είναι ποτέ 0, και το πρόσημό του εναλλάσσεται για $n > \alpha$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n για την $f(x) = (1+x)^\alpha$ στο 0 είναι

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k,$$

και ότι οι μορφές Cauchy και Lagrange του υπολοίπου είναι:

Μορφή Cauchy:

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x(x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \\ &= (n+1)\binom{\alpha}{n+1}x(1+t)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n, \quad t \text{ στο } (0,x) \text{ ή } (x,0). \end{aligned}$$

Μορφή Lagrange

$$\begin{aligned} R_{n,0}(x) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1} \\ &= \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+t)^{\alpha-n-1}, \quad t \text{ στο } (0,x) \text{ ή } (x,0). \end{aligned}$$

Οι εκτιμήσεις για αυτά τα υπόλοιπα είναι αρκετά δύσκολες στον χειρισμό, και τις αφήνουμε για το Πρόβλημα 23-21.

22. (α) Έστω ότι η f είναι διπλά παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ και ότι $|f(x)| \le M_0$ για όλα τα $x > 0$, ενώ $|f''(x)| \le M_2$ για όλα τα $x > 0$. Χρησιμοποιήστε το κατάλληλο πολυώνυμο Taylor για να αποδείξετε ότι για όλα τα $x > 0$ έχουμε

$$|f'(x)| \le \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2 \qquad \text{για όλα τα } h > 0.$$

(β) Δείξτε ότι για όλα τα $x > 0$ έχουμε

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη μικρότερη τιμή της έκφρασης που εμφανίζεται στο (α).

(γ) Αν η f είναι διπλά παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, η f'' είναι φραγμένη και η $f(x)$ τείνει στο 0 όταν $x \to \infty$, τότε επίσης και η $f'(x)$ τείνει στο 0 όταν $x \to \infty$.

(δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ και το $\lim_{x\to\infty} f''(x)$, τότε $\lim_{x\to\infty} f''(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (Συγκρίνετε με το Πρόβλημα 11-34.)

23. (α) Αποδείξτε ότι, αν η $f''(a)$ υπάρχει, τότε

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}.$$

Το όριο στα δεξιά καλείται η *κατά Schwarz δεύτερη παράγωγος* της f στο a. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο Taylor $P_{2,a}(x)$ με $x = a + h$ και με $x = a - h$.

(β) Έστω $f(x) = x^2$ για $x \geq 0$, και $-x^2$ για $x \leq 0$. Δείξτε ότι το

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) + f(0-h) - 2f(0)}{h^2}$$

υπάρχει, αν και η $f''(0)$ δεν υπάρχει.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f έχει ένα τοπικό μέγιστο στο a και η κατά Schwarz δεύτερη παράγωγος της f στο a υπάρχει, τότε είναι ≤ 0.

(δ) Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $f'''(a)$, τότε

$$\frac{f'''(a)}{3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h) - 2hf'(a)}{h^3}.$$

24. Χρησιμοποιήστε το πολυώνυμο Taylor $P_{1,a,f}$, μαζί με το υπόλοιπο, για να αποδείξετε μια ασθενή μορφή του Θεωρήματος 2 του Παραρτήματος του Κεφαλαίου 11: Αν $f'' > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται *πάντοτε* πάνω από την εφαπτομένη της f, εκτός από το σημείο επαφής.

∗**25.** Στο Πρόβλημα 18-43 παρουσιάσαμε μια μάλλον πολύπλοκη απόδειξη για το ότι $f = 0$ αν $f'' - f = 0$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Δώστε μια άλλη απόδειξη, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Taylor. (Αυτό το πρόβλημα είναι στην πραγματικότητα μια πρώτη αψιμαχία πριν δώσετε τη μάχη με τη γενική περίπτωση στο Πρόβλημα 26, και έχει σκοπό να σας πείσει ότι το Θεώρημα του Taylor είναι ένα καλό εργαλείο για να αντιμετωπίζουμε τέτοια προβλήματα, παρ' όλο που σε ειδικές περιπτώσεις τα τεχνάσματα αποβαίνουν πιο αποτελεσματικά.)

∗∗**26.** Θεωρούμε μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

για κάποιους αριθμούς $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Έχουμε ήδη εξετάσει με λεπτομέρειες κάποιες ειδικές περιπτώσεις, είτε στο κείμενο είτε σε άλλα προβλήματα· συγκεκριμένα, έχουμε βρει όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f' = f$, ή την $f'' + f = 0$, ή την $f'' - f = 0$. Το τέχνασμα στο Πρόβλημα 18-42 μας δίνει τη δυνατότητα να βρίσκουμε πολλές λύσεις για τέτοιες εξισώσεις, αλλά δεν μας λέει αν αυτές είναι οι μόνες λύσεις. Χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα *μοναδικότητας*, με το οποίο θα μας εφοδιάσει αυτό το πρόβλημα. Στο τέλος θα βρείτε μερικές (αναγκαστικά περιγραφικές) παρατηρήσεις για τη γενική λύση.

(α) Αποδείξτε τον εξής τύπο για την $f^{(n+1)}$ (ας συμφωνήσουμε ότι το «a_{-1}» θα είναι 0):

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{j-1} + a_{n-1}a_j) f^{(j)}.$$

(β) Συμπεράνετε έναν τύπο για την $f^{(n+2)}$.

Ο τύπος στο (β) μέρος δεν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί· μπήκε στο πρόβλημα για να σας πείσει ότι ένας γενικός τύπος για την $f^{(n+k)}$ είναι εκτός θέματος. Από την άλλη πλευρά, όπως δείχνει το μέρος (γ), δεν είναι πολύ δύσκολο να κάνουμε κάποιες εκτιμήσεις για το μέγεθος του $f^{(n+k)}(x)$.

(γ) Έστω $N = \max(1, |a_0|, \ldots, |a_{n-1}|)$. Τότε $|a_{j-1} + a_{n-1}a_j| \leq 2N^2$. Αυτό σημαίνει ότι

$$f^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^1 f^{(j)}, \quad \text{όπου } |b_j{}^1| \leq 2N^2.$$

Δείξτε ότι

$$f^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^2 f^{(j)}, \quad \text{όπου } |b_j{}^2| \leq 4N^3,$$

και, πιο γενικά,

$$f^{(n+k)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j{}^k f^{(j)}, \quad \text{όπου } |b_j{}^k| \leq 2^k N^{k+1}.$$

(δ) Συμπεράνετε από το μέρος (γ) ότι, για κάθε δοθέντα αριθμό x, υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|f^{(n+k)}(x)| \leq M \cdot 2^k N^{k+1} \quad \text{για κάθε } k.$$

(ε) Υποθέστε τώρα ότι $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{M \cdot 2^{k+1} N^{k+2} |x|^{n+k+1}}{(n+k+1)!} \leq \frac{M \cdot |2Nx|^{n+k+1}}{(n+k+1)!},$$

και συμπεράνετε ότι $f = 0$.

(στ) Δείξτε ότι, αν f_1 και f_2 είναι και οι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$f^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{(j)},$$

και ${f_1}^{(j)}(0) = {f_2}^{(j)}(0)$ για $0 \leq j \leq n-1$, τότε $f_1 = f_2$.

Με άλλα λόγια, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης καθορίζονται από τις «αρχικές συνθήκες» (τις τιμές $f^{(j)}(0)$ για $0 \leq j \leq n-1$). Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε *όλες* τις λύσεις, αν μπορούμε να βρούμε αρκετές λύσεις ώστε να δίνουν οποιοδήποτε δοθέν σύνολο αρχικών συνθηκών. Αν η εξίσωση

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0 = 0$$

έχει n διακεκριμένες ρίζες $\rho_1, \ldots, \rho_n$, τότε κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = c_1 e^{\rho_1 x} + \cdots + c_n e^{\rho_n x}$$

είναι λύση, και

$$\begin{aligned} f(0) &= c_1 + \cdots + c_n, \\ f'(0) &= \rho_1 c_1 + \cdots + \rho_n c_n, \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(0) &= {\rho_1}^{n-1} c_1 + \cdots + {\rho_n}^{n-1} c_n. \end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα, κάθε λύση είναι της μορφής αυτής, γιατί μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σύνολο αριθμών στα αριστερά διαλέγοντας κατάλληλα τα c, αλλά δεν θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε αυτόν τον τελευταίο ισχυρισμό. (Είναι ένα καθαρά αλγεβρικό αποτέλεσμα, που μπορείτε εύκολα να το ελέγξετε για $n = 2$ ή 3.) Αυτές οι παρατηρήσεις ισχύουν ακόμα και αν κάποιες από τις ρίζες είναι πολλαπλές, καθώς και στην πιο γενική κατάσταση που μελετάμε στο Κεφάλαιο 27.

****27.** (α) Έστω ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ με $f(a) = f(b)$ και ότι για όλα τα x στο (a, b) η κατά Schwarz δεύτερη παράγωγος της f στο x είναι 0 (Πρόβλημα 23). Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $[a, b]$. Υπόδειξη: Έστω ότι $f(x) > f(a)$ για κάποιο x στο (a, b). Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \varepsilon(x - a)(b - x)$$

με $g(a) = g(b) = f(a)$. Για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$ θα έχουμε $g(x) > g(a)$, και έτσι η g θα έχει μέγιστο y στο (a, b). Τώρα χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 23(γ) (η κατά Schwarz δεύτερη παράγωγος του $(x - a)(b - x)$ είναι απλώς η συνήθης δεύτερη παράγωγος).

(β) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$ με κατά Schwarz δεύτερη παράγωγο 0 σε όλα τα σημεία του (a, b), τότε η f είναι γραμμική.

***28.** (α) Έστω $f(x) = x^4 \sin 1/x^2$ για $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f = 0$ μέχρι τη 2η τάξη στο 0, αν και η $f''(0)$ δεν υπάρχει.

Αυτό το παράδειγμα είναι κάπως πιο σύνθετο, αλλά και αρκετά πιο εντυπωσιακό από το παράδειγμα στο κείμενο, γιατί για $a \neq 0$ υπάρχουν και η $f'(a)$ και η $f''(a)$. Έτσι, για κάθε αριθμό a υπάρχει ένας άλλος αριθμός $m(a)$ τέτοιος ώστε

$$(*) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{m(a)}{2}(x - a)^2 + R_a(x),$$
$$\text{όπου } \lim_{x \to a} \frac{R_a(x)}{(x - a)^2} = 0\cdot.$$

Συγκεκριμένα, $m(a) = f''(a)$ για $a \neq 0$, και $m(0) = 0$. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση m που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο δεν είναι συνεχής.

(β) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, έτσι ώστε η $(*)$ να ισχύει για όλα τα a με $m(a) = 0$. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 27 για να δείξετε ότι $f''(a) = m(a) = 0$ για όλα τα a.

(γ) Τώρα, υποθέστε ότι η $(*)$ ισχύει για όλα τα a, και ότι η m είναι συνεχής. Αποδείξτε ότι για όλα τα a η δεύτερη παράγωγος $f''(a)$ υπάρχει και ισούται με το $m(a)$.

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21 Ο e ΕΙΝΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΣ

Ήταν τόσο εύκολη η απόδειξη ότι ο e είναι άρρητος, που σε αυτό το προαιρετικό κεφάλαιο θα επιχειρήσουμε έναν πιο δύσκολο άθλο, να αποδείξουμε ότι ο αριθμός e δεν είναι απλώς άρρητος, αλλά κάτι πολύ χειρότερο. Το πώς θα μπορούσε ένας αριθμός να είναι ακόμα χειρότερος από άρρητος θα φανεί αν διατυπώσουμε λίγο διαφορετικά τους ορισμούς. Ένας αριθμός x είναι άρρητος αν δεν γίνεται να γράψουμε $x = a/b$ για οποιουσδήποτε ακέραιους a και b, με $b \neq 0$. Το ίδιο είναι να πει κανείς ότι ο x δεν ικανοποιεί καμία εξίσωση

$$bx - a = 0$$

με τους a και b ακέραιους, εκτός αν $a = 0, b = 0$. Κάτω από αυτό το πρίσμα, το γεγονός ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος δεν μοιάζει να είναι τρομερή ατέλεια. Αντίθετα, φαίνεται ότι ο $\sqrt{2}$ μετά βίας καταφέρνει να είναι άρρητος —αν και ο $\sqrt{2}$ δεν είναι λύση μιας εξίσωσης

$$a_1 x + a_0 = 0,$$

είναι λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 2 = 0,$$

που είναι υψηλότερου βαθμού. Το Πρόβλημα 2-18 μας δείχνει πώς να παράγουμε πολλούς άρρητους αριθμούς x που ικανοποιούν μεγαλύτερου βαθμού εξισώσεις

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

με τους a_i ακέραιους και όχι όλους 0. Ένας αριθμός που ικανοποιεί μια «αλγεβρική» εξίσωση αυτού του είδους λέγεται **αλγεβρικός αριθμός**, και πρακτικώς όλοι οι αριθμοί που έχουμε συναντήσει έως τώρα ορίζονται μέσω λύσεων αλγεβρικών εξισώσεων (ο π και ο e είναι οι μεγάλες εξαιρέσεις στην περιορισμένη μαθηματική εμπειρία μας). Όλες οι ρίζες, όπως οι

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt[10]{3}, \quad \sqrt[4]{7},$$

είναι προφανώς αλγεβρικοί αριθμοί, και ακόμα πιο σύνθετοι συνδυασμοί, όπως ο

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{5} + \sqrt[4]{1 + \sqrt{2}}} + \sqrt[5]{6}$$

είναι αλγεβρικοί (αν και δεν θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε). **Υπερβατικοί** λέγονται οι αριθμοί που δεν μπορούν να προκύψουν από τη διαδικασία επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων. Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου μάς λέει ότι ο e ανήκει σε αυτήν την ανώμαλη κατηγορία αριθμών.

Η απόδειξη ότι ο e είναι υπερβατικός βρίσκεται σαφώς στα πλαίσια των δυνατοτήτων μας· θεωρητικά θα μπορούσε να γίνει και πριν από το Κεφάλαιο 20. Έχοντας όμως κάνει αυτήν την απόδειξη, θα μπορούμε δικαιολογημένα να κατατάξουμε τους εαυτούς μας σε μια κλάση παραπάνω από αυτήν των αρχάριων στη μελέτη των ανώτερων μαθηματικών. Ενώ πολλές αποδείξεις για το άρρητο ενός αριθμού βασίζονται σε στοιχειώδεις μόνο ιδιότητες των αριθμών, η απόδειξη ότι ένας αριθμός είναι υπερβατικός συνήθως περιέχει και κάποια βαθιά επιχειρήματα. Ακόμα και οι χρονολογίες που συνδέονται με

την υπερβατικότητα του e είναι εντυπωσιακά πρόσφατες —η πρώτη απόδειξη ότι ο e είναι υπερβατικός, οφειλόμενη στον Hermite, χρονολογείται από το 1873. Η απόδειξη που θα δώσουμε εδώ είναι απλούστευση της αρχικής, και οφείλεται στον Hilbert.

Πριν επιχειρήσουμε την ίδια την απόδειξη, δεν θα ήταν άσχημη ιδέα να σκιαγραφήσουμε τη στρατηγική, η οποία βασίζεται σε μια ιδέα που χρησιμοποιήθηκε ακόμα και στην απόδειξη για το ότι ο e είναι άρρητος. Δύο χαρακτηριστικά της παράστασης

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n$$

ήταν καθοριστικά για να δείξουμε ότι ο e είναι άρρητος: Από τη μια, ο αριθμός

$$1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

μπορεί να γραφεί ως κλάσμα p/q με $q \leq n!$ (οπότε ο $n!\,(p/q)$ είναι ακέραιος)· από την άλλη πλευρά, $0 < R_n < 3/(n+1)!$ (άρα ο $n!R_n$ δεν είναι ακέραιος). Αυτά τα δύο στοιχεία δείχνουν ότι ο e μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε καλά από ρητούς αριθμούς. Φυσικά, με ρητούς αριθμούς μπορούμε να προσεγγίσουμε αυθαίρετα κοντά οποιονδήποτε αριθμό x —αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ρητός αριθμός r με $|x - r| < \varepsilon$· το πρόβλημα, όμως, είναι ότι πιθανόν να χρειαστεί να επιτρέψουμε έναν πολύ μεγάλο παρονομαστή για το r, τόσο μεγάλο ίσως όσο και το $1/\varepsilon$. Για τον e βλέπουμε ότι δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο: υπάρχει ένα κλάσμα p/q που απέχει το πολύ $3/(n+1)!$ από τον e, του οποίου ο παρονομαστής q είναι το πολύ $n!$. Αν δείτε προσεκτικά την απόδειξη ότι ο e είναι άρρητος, θα πεισθείτε πως η μόνη ιδιότητα του e που χρησιμοποιήθηκε είναι αυτή. Ο αριθμός e δεν είναι σε καμία περίπτωση μοναδικός από αυτήν την άποψη· για να μιλήσουμε γενικά, όσο *καλύτερα* προσεγγίζεται ένας αριθμός από ρητούς τόσο *χειρότερος* είναι (μερικά στοιχεία που συνηγορούν σε αυτόν τον ισχυρισμό παρουσιάζονται στο Πρόβλημα 3). Η απόδειξη της υπερβατικότητας του e στηρίζεται σε μια φυσιολογική επέκταση αυτής της ιδέας: όχι μόνο ο e, αλλά και κάθε πεπερασμένος αριθμός δυνάμεων $e, e^2, \ldots, e^n$ μπορεί να προσεγγιστεί ταυτόχρονα και εξαιρετικά καλά από ρητούς αριθμούς. Στην απόδειξή μας θα ξεκινήσουμε με την υπόθεση ότι ο e είναι αλγεβρικός, δηλαδή

$$(*) \quad a_n e^n + \cdots + a_1 e + a_0 = 0, \quad a_0 \neq 0$$

για κάποιους ακέραιους $a_0, \ldots, a_n$. Για να φτάσουμε σε αντίφαση, θα βρούμε στη συνέχεια κάποιους ακέραιους M, $M_1, \ldots, M_n$ και κάποιους «μικρούς» αριθμούς $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} e^1 &= \frac{M_1 + \varepsilon_1}{M}, \\ e^2 &= \frac{M_2 + \varepsilon_2}{M}, \\ &\vdots \\ e^n &= \frac{M_n + \varepsilon_n}{M}. \end{aligned}$$

Το πόσο μικρά πρέπει να είναι τα ε θα φανεί όταν αυτές οι εκφράσεις αντικατασταθούν στην εξίσωση $(*)$ που υποθέσαμε. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με M παίρνουμε

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n] = 0.$$

Ο πρώτος όρος που βρίσκεται μέσα σε αγκύλες είναι ακέραιος, και θα διαλέξουμε τα M έτσι ώστε ο όρος να είναι αναγκαστικά *μη μηδενικός* ακέραιος. Θα καταφέρουμε επίσης να βρούμε ε τόσο μικρά ώστε

$$|\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_n a_n| < \tfrac{1}{2}.$$

και αυτό θα οδηγήσει στην αντίφαση που ζητάμε —το άθροισμα ενός μη μηδενικού ακεραίου και ενός αριθμού με απόλυτη τιμή μικρότερη από $\frac{1}{2}$ δεν μπορεί να είναι μηδέν!

Ως βασική στρατηγική, όλα αυτά φαίνονται πολύ λογικά και αρκετά άμεσα. Το αξιοσημείωτο κομμάτι της απόδειξης θα είναι ο τρόπος που ορίζονται τα M και τα ε. Για να διαβάσετε την απόδειξη, θα πρέπει να ξέρετε μερικά πράγματα για τη συνάρτηση γάμμα! (Αυτή η συνάρτηση ορίστηκε στο Πρόβλημα 19-40.)

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Ο e είναι υπερβατικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι υπήρχαν ακέραιοι $a_0, \ldots, a_n$, με $a_0 \neq 0$, τέτοιοι ώστε

$$(*) \quad a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Ορίζουμε τους αριθμούς M, $M_1, \ldots, M_n$ και $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ως εξής:

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$
$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx,$$
$$\varepsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx.$$

Ο μη ορισμένος προς το παρόν αριθμός p παριστάνει έναν πρώτο αριθμό* τον οποίο θα διαλέξουμε αργότερα. Παρά την απαγορευτική τους όψη, με λίγη δουλειά αυτές οι τρεις εκφράσεις θα φανούν πολύ πιο λογικές. Συγκεντρώνουμε την προσοχή μας πρώτα στο M. Αν γίνουν οι πολλαπλασιασμοί στην παράσταση

$$[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)],$$

παίρνουμε ένα πολυώνυμο

$$x^n + \cdots \pm n!$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν αυτό υψωθεί στην p-οστή δύναμη γίνεται ένα ακόμα πιο πολύπλοκο πολυώνυμο

$$x^{np} + \cdots \pm (n!)^p.$$

Έτσι, ο M μπορεί να πάρει τη μορφή

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} \frac{1}{(p-1)!} C_\alpha \int_0^\infty x^{p-1+\alpha} e^{-x}\,dx,$$

όπου οι C_α είναι ακέραιοι, και $C_0 = \pm(n!)^p$. Αλλά

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx = k!.$$

Άρα

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!}.$$

Τώρα, για $\alpha = 0$ παίρνουμε τον όρο

$$\pm(n!)^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = \pm(n!)^p.$$

*Ο όρος «πρώτος αριθμός» ορίστηκε στο Πρόβλημα 2-17. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια σπουδαία ιδιότητα των πρώτων αριθμών, αν και δεν αποδεικνύεται σε αυτό το βιβλίο: αν p είναι ένας πρώτος αριθμός που δεν διαιρεί τον ακέραιο a, και δεν διαιρεί τον ακέραιο b, τότε ο p δεν διαιρεί ούτε τον ab. Στην Προτεινόμενη Βιβλιογραφία δίνονται παραπομπές για αυτό το θεώρημα (που είναι καθοριστικό για την απόδειξη ότι η ανάλυση ενός ακεραίου σε πρώτους παράγοντες είναι μοναδική). Θα χρησιμοποιήσουμε ακόμα το συμπέρασμα του Προβλήματος 2-17(δ), ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί —ζητάμε από τον αναγνώστη να διακρίνει σε ποια ακριβώς σημεία χρειάζεται αυτή η πληροφορία.

Θα θεωρήσουμε τώρα μόνο πρώτους $p > n$· τότε αυτός ο όρος είναι ένας ακέραιος που *δεν* διαιρείται με p. Από την άλλη πλευρά, αν $\alpha > 0$, τότε

$$C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!} = C_\alpha (p+\alpha-1)(p+\alpha-2)\cdot\ldots\cdot p,$$

που *διαιρείται* με p. Άρα ο ίδιος ο M είναι ένας ακέραιος που *δεν διαιρείται* με p.

Ας εξετάσουμε τώρα τον M_k. Έχουμε

$$\begin{aligned} M_k &= e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-x}}{(p-1)!}\,dx \\ &= \int_k^\infty \frac{x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!}\,dx. \end{aligned}$$

Αυτή μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια έκφραση που μοιάζει πάρα πολύ με το M, με την αντικατάσταση

$$\begin{aligned} u &= x-k \\ du &= dx. \end{aligned}$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης αλλάζουν σε 0 και ∞, και

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdot\ldots\cdot u\cdot\ldots\cdot(u+k-n)]^p e^{-u}}{(p-1)!}\,du.$$

Υπάρχει μια πολύ σημαντική διαφορά ανάμεσα σε αυτήν την έκφραση και την αντίστοιχη για το M. Ο όρος στην αγκύλη περιέχει τον παράγοντα u στην k-οστή θέση. Έτσι, η p-οστή δύναμη περιέχει τον παράγοντα u^p. Αυτό σημαίνει ότι και ολόκληρη η παράσταση

$$(u+k)^{p-1}[(u+k-1)\cdot\ldots\cdot(u+k-n)]^p$$

είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, *του οποίου κάθε όρος* έχει βαθμό τουλάχιστον p. Έτσι,

$$M_k = \sum_{\alpha=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_\alpha \int_0^\infty u^{p-1+\alpha} e^{-u}\,du = \sum_{\alpha=1}^{np} D_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

όπου οι D_α είναι ακέραιοι. Παρατηρήστε ότι η άθροιση αρχίζει με $\alpha = 1$· σε αυτήν την περίπτωση, *κάθε* όρος στο άθροισμα διαιρείται με p. Έτσι, κάθε M_k είναι ένας ακέραιος που *διαιρείται* με p.

Τώρα είναι φανερό ότι

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Αντικαθιστώντας στην $(*)$ και πολλαπλασιάζοντας με M παίρνουμε

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n] = 0.$$

Μαζί με την απαίτηση ότι $p > n$, ας συμφωνήσουμε ότι ισχύει και $p > |a_0|$. Αυτό σημαίνει ότι και ο M και ο a_0 δεν διαιρούνται με p, άρα και ο $a_0 M$ δεν διαιρείται με p. Αφού κάθε M_k διαιρείται με p, έπεται ότι ο

$$a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$$

δεν διαιρείται με p. Ειδικότερα είναι ένας *μη μηδενικός* ακέραιος.

Για να καταλήξουμε σε μια αντίφαση από την εξίσωση $(*)$ που υποθέσαμε, και να αποδείξουμε ότι ο e είναι υπερβατικός, αρκεί μόνο να δείξουμε ότι ο

$$|a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n|$$

μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε, με επιλογή αρκετά μεγάλου p. Αρκεί, προφανώς, να δείξουμε ότι κάθε $|\varepsilon_k|$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Αυτό δεν χρειάζεται τίποτα παραπάνω από μερικές απλές εκτιμήσεις· για το υπόλοιπο της απόδειξης θυμηθείτε ότι ο n είναι κάποιος σταθερός αριθμός (ο βαθμός της πολυωνυμικής εξίσωσης $(*)$ που υποθέσαμε). Για να αρχίσουμε, αν $1 \le k \le n$, τότε

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\le e^k \int_0^k \frac{|x^{p-1}[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p|\, e^{-x}}{(p-1)!}\, dx \\ &\le e^n \int_0^n \frac{n^{p-1}|(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)|^p e^{-x}}{(p-1)!}\, dx. \end{aligned}$$

Έστω τώρα A η μέγιστη τιμή του $|(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)|$ για x στο $[0,n]$. Τότε

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^n e^{-x}\, dx \\ &\le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^\infty e^{-x}\, dx \\ &= \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \\ &\le \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!} = \frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}. \end{aligned}$$

Αλλά τα n και A είναι σταθερά. Άρα το $(nA)^p/(p-1)!$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε αν κάνουμε το p αρκετά μεγάλο. ∎

Αυτή η απόδειξη, όπως και η απόδειξη ότι ο π είναι άρρητος, αξίζει κάποια φιλοσοφικά σχόλια. Με την πρώτη ματιά, τα επιχειρήματα φαίνονται αρκετά «προχωρημένα» — αν μη τι άλλο χρησιμοποιούμε ολοκληρώματα, και μάλιστα ολοκληρώματα από 0 ως ∞. Τελικά όμως, όπως πολλοί μαθηματικοί έχουν παρατηρήσει, τα ολοκληρώματα μπορούν να εξαφανιστούν τελείως από την απόδειξη· τα μόνα ολοκληρώματα που είναι αναγκαία στην απόδειξη είναι της μορφής

$$\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx$$

για ακέραια k, και αυτά τα ολοκληρώματα είναι δυνατόν να αντικατασταθούν με $k!$ όποτε εμφανίζονται. Έτσι το M, για παράδειγμα, θα μπορούσε εξ αρχής να οριστεί ως

$$M = \sum_{\alpha=0}^{np} C_\alpha \frac{(p-1+\alpha)!}{(p-1)!},$$

όπου C_α είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου

$$[(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n)]^p.$$

Αν αυτή η ιδέα αναπτυχθεί συστηματικά, παίρνει κανείς μια «τελείως στοιχειώδη» απόδειξη ότι ο e είναι υπερβατικός, που βασίζεται μόνο στο γεγονός ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Δυστυχώς, αυτή η «στοιχειώδης» απόδειξη είναι δυσκολότερη στην κατανόηση από την αρχική —η όλη δομή της απόδειξης πρέπει να κρυφτεί, μόνο και μόνο για να εξαφανιστούν λίγα σύμβολα ολοκλήρωσης! Αυτή η κατάσταση δεν είναι καθόλου γνώρισμα του συγκεκριμένου θεωρήματος —οι «στοιχειώδεις» αποδείξεις είναι συχνά πιο δύσκολες από τις «προχωρημένες». Η απόδειξή μας ότι ο π είναι άρρητος είναι μια ανάλογη περίπτωση. Πιθανότατα δεν θυμάστε τίποτα για αυτήν την απόδειξη, εκτός από το ότι

ανακατεύτηκαν κάποιες πολύπλοκες συναρτήσεις. Υπάρχει μια πιο προχωρημένη αλλά πολύ πιο καθαρή στη σύλληψη της απόδειξη, που δείχνει ότι ο π είναι *υπερβατικός*, ένα δεδομένο που έχει μεγάλο ιστορικό, αλλά και ουσιαστικό, ενδιαφέρον. Ένα από τα κλασικά προβλήματα των ελληνικών μαθηματικών ήταν αυτό της κατασκευής, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με εκείνο ενός κύκλου ακτίνας 1. Αυτή απαιτεί την κατασκευή ενός ευθυγράμμου τμήματος με μήκος $\sqrt{\pi}$, που μπορεί να γίνει αν μπορεί να κατασκευαστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους π. Οι Έλληνες δεν μπορούσαν με κανένα τρόπο να αποφανθούν για το αν είναι κατασκευάσιμο ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, αλλά, ακόμα και με τα μέσα των μοντέρνων μαθηματικών, το πρόβλημα ήταν άλυτο έως το 1882. Εκείνη τη χρονιά ο Lindemann απέδειξε ότι ο π είναι υπερβατικός· αφού το μήκος οποιουδήποτε ευθυγράμμου τμήματος, κατασκευάσιμου με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια των $+$, $\cdot$, $-$, $\div$ και $\sqrt{\ }$, και επομένως είναι αλγεβρικός αριθμός, έχουμε μια απόδειξη ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους π δεν μπορεί να κατασκευαστεί.

Η απόδειξη ότι ο π είναι υπερβατικός απαιτεί μια σεβαστή ποσότητα μαθηματικών γνώσεων που είναι πολύ προχωρημένες για να συζητηθούν σε αυτό το βιβλίο. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη δεν είναι πολύ πιο δύσκολη από αυτήν της υπερβατικότητας του e. Ουσιαστικά, η απόδειξη για τον π είναι ίδια με αυτή για τον e. Αυτός ο τελευταίος ισχυρισμός σίγουρα θα σας εκπλήξει. Η απόδειξη ότι ο e είναι υπερβατικός φαίνεται να βασίζεται τόσο πολύ στις ιδιαίτερες ιδιότητες του e, ώστε είναι σχεδόν απίστευτο πως με κάποιες μετατροπές θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για τον π· στο κατω-κάτω, τι δουλειά έχει ο e με τον π; Περιμένετε και θα δείτε!

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Αποδείξτε ότι, αν ο $\alpha > 0$ είναι αλγεβρικός, τότε και η $\sqrt{\alpha}$ είναι αλγεβρικός αριθμός.

(β) Αποδείξτε ότι αν ο α είναι αλγεβρικός και ο r ρητός, τότε ο $\alpha + r$ και ο αr είναι αλγεβρικοί.

Το μέρος (β) μπορεί στην πραγματικότητα να πάρει πολύ πιο ισχυρή μορφή: το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο αλγεβρικών αριθμών είναι αλγεβρικός αριθμός. Αυτό το δεδομένο είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί εδώ, μπορούμε όμως να εξετάσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις:

2. Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ και ο $\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$ είναι αλγεβρικοί, βρίσκοντας συγκεκριμένες αλγεβρικές εξισώσεις που να τις ικανοποιούν. (Θα χρειαστείτε εξισώσεις 4ου βαθμού.)

∗**3.** (α) Έστω α ένας αλγεβρικός αριθμός που δεν είναι ρητός. Έστω ότι ο α ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

και ότι δεν υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση μικρότερου βαθμού με αυτήν την ιδιότητα. Δείξτε ότι $f(p/q) \neq 0$ για κάθε ρητό αριθμό p/q. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 3-7(β).

(β) Τώρα δείξτε ότι $|f(p/q)| \geq 1/q^n$ για κάθε ρητό αριθμό p/q με $q > 0$. Υπόδειξη: Γράψτε το $f(p/q)$ ως κλάσμα με τον κοινό παρονομαστή q^n.

(γ) Έστω $M = \sup\{\,|f'(x)| : |x-\alpha| < 1\,\}$. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για να αποδείξετε ότι, αν p/q είναι ένας ρητός αριθμός με $|\alpha - p/q| < 1$, τότε $|\alpha - p/q| > 1/Mq^n$. (Επεται ότι για $c = \min(1, 1/M)$ έχουμε $|\alpha - p/q| > c/q^n$ για κάθε ρητό p/q.)

∗**4.** Θέτουμε

$$\alpha = 0,11000100000000000000001000\ldots,$$

όπου τα 1 εμφανίζονται στην $n!$ θέση, για κάθε n. Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 3 για να αποδείξετε ότι ο α είναι υπερβατικός. (Για κάθε n, δείξτε ότι ο α δεν είναι ρίζα μιας εξίσωσης βαθμού n.)

Αν και το Πρόβλημα 4 αναφέρει έναν μόνο ειδικό υπερβατικό αριθμό, είναι φανερό ότι μπορεί εύκολα κανείς να κατασκευάσει άπειρους άλλους αριθμούς α που δεν ικανοποιούν την $|\alpha - p/q| > c/q^n$ για οποιαδήποτε c και n. Αυτού του είδους οι αριθμοί μελετήθηκαν πρώτα από τον Liouville (1809-1882), και η ανισότητα στο Πρόβλημα 3 συχνά αποκαλείται ανισότητα του Liouville. Κανένας από τους υπερβατικούς αριθμούς που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αλλά για πολύ καιρό οι υπερβατικοί αριθμοί του Liouville ήταν οι μόνοι γνωστοί! Η κατάσταση μεταβλήθηκε με πολύ δραστικό τρόπο από τη δουλειά του Cantor (1845-1918) που έδειξε, χωρίς να περιγράψει ούτε έναν διαφορετικό υπερβατικό αριθμό, ότι οι *πιο* πολλοί αριθμοί είναι υπερβατικοί. Τα επόμενα δύο προβλήματα μας εισάγουν στις ιδέες που μας επιτρέπουν να κατανοούμε τέτοιους ισχυρισμούς. Ο βασικός ορισμός με τον οποίο πρέπει να εργαστούμε είναι ο εξής: Ένα σύνολο A λέγεται **αριθμήσιμο** αν τα στοιχεία του γίνεται να διαταχθούν σε μια ακολουθία

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots .$$

Το προφανές παράδειγμα (στην πραγματικότητα, λίγο-πολύ το Πλατωνικό αρχέτυπο) ενός αριθμήσιμου συνόλου είναι το $\mathbf{N}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών. Είναι φανερό ότι το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών είναι επίσης αριθμήσιμο:

$$2, 4, 6, 8, \ldots .$$

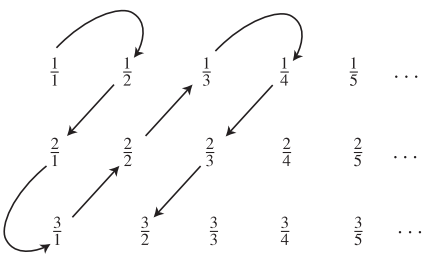
Ίσως σας εντυπωσιάσει κάπως περισσότερο το γεγονός ότι το $\mathbf{Z}$, το σύνολο όλων των ακεραίων (θετικοί, αρνητικοί και 0) είναι και αυτό αριθμήσιμο, αλλά βλέποντας θα πεισθείτε:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots .$$

Τα επόμενα δύο προβλήματα, τα οποία σκιαγραφούν τις βασικές ιδιότητες των αριθμήσιμων συνόλων, στην πραγματικότητα είναι μια σειρά από παραδείγματα που δείχνουν ότι (1) υπάρχουν πολύ περισσότερα αριθμήσιμα σύνολα από όσα θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί και (2) ότι, παρ' όλα αυτά, μερικά σύνολα δεν είναι αριθμήσιμα.

∗**5.** (α) Δείξτε ότι, αν το A και το B είναι αριθμήσιμα, τότε είναι και το $A \cup B = \{ x : x \text{ ανήκει στο } A \text{ ή } x \text{ ανήκει στο } B \}$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ίδιο τέχνασμα που δούλεψε για το $\mathbf{Z}$.

(β) Δείξτε ότι το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο (αυτό είναι στ' αλήθεια αρκετά εντυπωσιακό· χρησιμοποιήστε την εξής «οπτική» απόδειξη:)



(γ) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των ζευγών (m, n) ακεραίων είναι αριθμήσιμο. (Αυτό στην πράξη είναι το ίδιο με το μέρος (β).)

(δ) Αν τα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι αριθμήσιμα, αποδείξτε ότι το

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

είναι επίσης αριθμήσιμο. (Χρησιμοποιήστε ξανά το ίδιο τέχνασμα όπως στο μέρος (β).)

(ε) Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των τριάδων (l, m, n) ακεραίων είναι αριθμήσιμο. (Η τριάδα (l, m, n) μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός ζεύγους (l, m) και ενός αριθμού n.)

(στ) Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των n-άδων $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ είναι αριθμήσιμο. (Αν έχετε κάνει το μέρος (ε), μπορείτε να κάνετε και αυτό, χρησιμοποιώντας επαγωγή.)

(ζ) Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των ριζών πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού n με ακέραιους συντελεστές είναι αριθμήσιμο. (Το μέρος (στ) δείχνει ότι το σύνολο όλων αυτών των πολυωνυμικών συναρτήσεων μπορούμε να το διατάξουμε σε μια ακολουθία, και καθεμιά από αυτές τις συναρτήσεις έχει το πολύ n ρίζες.)

(η) Τώρα χρησιμοποιήστε τα μέρη (δ) και (ζ) για να αποδείξετε ότι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

∗**6.** Αφού τόσα πολλά σύνολα αποδεικνύονται αριθμήσιμα, είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1 *δεν* είναι αριθμήσιμο. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει τρόπος να καταγράψουμε όλους αυτούς τους πραγματικούς αριθμούς σε μια ακολουθία

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots\\ \alpha_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots\\ \alpha_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots\\ &\ldots\end{aligned}$$

(στα δεξιά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό με δεκαδικά ψηφία). Για να το αποδείξουμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι υπήρχε ένας τέτοιος κατάλογος και ας πάρουμε τον δεκαδικό

$$0, \bar{a}_{11}\bar{a}_{22}\bar{a}_{33}\bar{a}_{44}\ldots,$$

όπου $\bar{a}_{nn} = 5$ αν $a_{nn} \neq 5$ και $\bar{a}_{nn} = 6$ αν $a_{nn} = 5$. Δείξτε ότι αυτός ο αριθμός δεν μπορεί να βρίσκεται στον κατάλογο, φτάνοντας έτσι σε άτοπο.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα Προβλήματα 5 και 6 ως εξής: Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο. Αν το σύνολο των υπερβατικών αριθμών ήταν επίσης αριθμήσιμο, τότε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών θα ήταν και αυτό αριθμήσιμο, από το Πρόβλημα 5(α), και επομένως το σύνολο των πραγματικών αριθμών μεταξύ 0 και 1 θα ήταν αριθμήσιμο. Αλλά αυτό είναι ψευδές. Άρα, το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο και το σύνολο των υπερβατικών αριθμών δεν είναι («υπάρχουν περισσότεροι υπερβατικοί αριθμοί από ό,τι αλγεβρικοί»). Τα δύο προβλήματα που απομένουν εξηγούν περαιτέρω πόσο σημαντικό είναι να διακρίνουμε τα σύνολα που είναι αριθμήσιμα από αυτά που δεν είναι.

∗**7.** Έστω f μια μη φθίνουσα συνάρτηση στο $[0, 1]$. Θυμηθείτε (Πρόβλημα 8-8) ότι το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και το $\lim_{x\to a^-} f(x)$ υπάρχουν και τα δύο.

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ αποδείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένοι μόνο ως προς το πλήθος αριθμοί a στο $[0, 1]$ με $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) > \varepsilon$. Υπόδειξη: Υπάρχουν, μάλιστα, το πολύ $[f(1) - f(0)]/\varepsilon$ τέτοιοι αριθμοί.

(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι αριθμήσιμο. Υπόδειξη: Αν $\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) > 0$, τότε είναι $> 1/n$ για κάποιον φυσικό αριθμό n.

Αυτό το πρόβλημα δείχνει ότι μια μη φθίνουσα συνάρτηση είναι αυτομάτως συνεχής στα περισσότερα σημεία. Με την παραγωγισιμότητα, η κατάσταση

είναι πολύ πιο δύσκολο να αναλυθεί, είναι όμως και πιο ενδιαφέρουσα. Μια μη φθίνουσα συνάρτηση μπορεί να μην είναι παραγωγίσιμη σε ένα μη αριθμήσιμο σύνολο σημείων, αλλά και πάλι ισχύει ότι οι μη φθίνουσες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στα περισσότερα σημεία (με μια διαφορετική έννοια της λέξης «περισσότερα»). Στην αναφορά [38] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας δίνεται μια κομψή απόδειξη, που χρησιμοποιεί το Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου του Προβλήματος 8-20. Για αυτούς που έχουν λύσει το Πρόβλημα 9 στο Παράρτημα του Κεφαλαίου 11, δίνουμε μια εφαρμογή των ιδεών που αναπτύξαμε σε αυτό το πρόβλημα στην παραγωγισιμότητα: αν η f είναι κυρτή, τότε η f είναι παραγωγίσιμη, εκτός από αυτά τα σημεία στα οποία η δεξιά της παράγωγος f_+' είναι ασυνεχής· αλλά η συνάρτηση f_+' είναι αύξουσα, άρα μια κυρτή συνάρτηση είναι αυτομάτως παραγωγίσιμη εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων.

∗**8.** (α) Το Πρόβλημα 11-70 έδειξε ότι, αν κάθε σημείο είναι σημείο τοπικού μεγίστου για μια *συνεχή* συνάρτηση f, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. Υποθέστε τώρα ότι αφαιρούμε την υπόθεση της συνέχειας. Αποδείξτε ότι η f έχει μόνο ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών. Υπόδειξη: Για κάθε x διαλέξτε *ρητούς* αριθμούς a_x και b_x τέτοιους ώστε $a_x < x < b_x$ και το x να είναι σημείο μεγίστου για την f στο (a_x, b_x). Τότε κάθε τιμή $f(x)$ είναι η μέγιστη τιμή της f σε κάποιο διάστημα (a_x, b_x). Πόσα τέτοια διαστήματα υπάρχουν;

(β) Τώρα συμπεράνετε το Πρόβλημα 11-70(α) ως πόρισμα.

(γ) Αποδείξτε το αποτέλεσμα του Προβλήματος 11-70(β) με όμοιο τρόπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22 ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Η έννοια της (άπειρης) ακολουθίας είναι τόσο φυσιολογική στη σύλληψή της που θα έμπαινε κανείς στον πειρασμό να αποφύγει ακόμα και να την ορίσει. Συχνά γράφουμε απλώς «μια ακολουθία

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots »$$

όπου οι τρεις τελείες υποδηλώνουν ότι οι αριθμοί a_i συνεχίζουν προς τα δεξιά «επ' άπειρον». Δεν είναι δύσκολο, όμως, να δοθεί και ένας αυστηρός ορισμός της ακολουθίας: το σημαντικό σημείο όσον αφορά μια ακολουθία είναι ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός a_n. Αλλά αυτό είναι ακριβώς το είδος της αντιστοιχίας που τυποποιούν οι συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το **N**.

Από τη σκοπιά αυτού του ορισμού, μια ακολουθία θα έπρεπε να συμβολίζεται με ένα μόνο γράμμα, ας πούμε a, και οι συγκεκριμένες τιμές της με

$$a(1), a(2), a(3), \ldots,$$

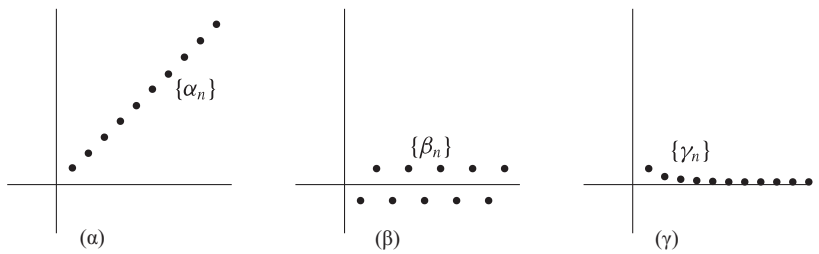
αλλά αντί για αυτό, σχεδόν πάντα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός με δείκτες

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

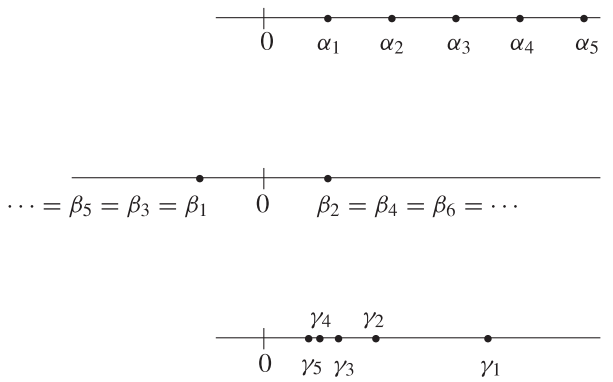
η δε ακολουθία συνήθως συμβολίζεται με ένα σύμβολο σαν το $\{a_n\}$. Έτσι, με $\{n\}$, $\{(-1)^n\}$ και $\{1/n\}$ συμβολίζονται οι ακολουθίες α, β και γ που ορίζονται από τις

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n, \\ \beta_n &= (-1)^n, \\ \gamma_n &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Μια ακολουθία, όπως όλες οι συναρτήσεις, μπορεί να σχεδιαστεί (Σχήμα 1), αλλά η γραφική παράσταση συνήθως είναι ελάχιστα αποκαλυπτική, γιατί πολύ λίγα στοιχεία για τη συνάρτηση χωράνε στο χαρτί.

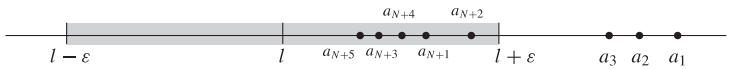


ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

Μπορούμε να πάρουμε μια πιο εύχρηστη παράσταση μιας ακολουθίας, αν απλώς τοποθετήσουμε τα σημεία $a_1, a_2, a_3, \ldots$ πάνω σε μια ευθεία (Σχήμα 2). Μια τέτοια εικόνα δείχνει προς τα πού «πηγαίνει» η ακολουθία. Η ακολουθία $\{\alpha_n\}$ «πηγαίνει στο άπειρο», η ακολουθία $\{\beta_n\}$ «πετάγεται πίσω-μπρος από το -1 στο 1» και η ακολουθία $\{\gamma_n\}$ «συγκλίνει στο 0». Από τις τρεις φράσεις μέσα σε εισαγωγικά, η τελευταία είναι η βασική έννοια που σχετίζεται με τις ακολουθίες, και θα οριστεί ακριβώς (ο ορισμός περιγράφεται στο Σχήμα 3).



ΣΧΗΜΑ 3

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει στο** $\boldsymbol{l}$ (ο συμβολισμός είναι $\lim_{n\to\infty} a_n = l$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε, για κάθε φυσικό αριθμό n,

$$\text{αν } n > N, \text{ τότε } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Εκτός από τον όρο που χρησιμοποιήθηκε σε αυτόν τον ορισμό, λέμε μερικές φορές ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ **τείνει στο** $\boldsymbol{l}$ ή έχει **όριο το** $\boldsymbol{l}$. Λέμε ότι μια ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει**, αν συγκλίνει στο l για κάποιο l, και ότι αν δεν συγκλίνει **αποκλίνει**.

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{\gamma_n\}$ συγκλίνει στο 0, αρκεί να παρατηρήσουμε το ακόλουθο. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $1/N < \varepsilon$. Τότε, αν $n > N$ έχουμε

$$\gamma_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad \text{άρα } |\gamma_n - 0| < \varepsilon.$$

Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

πιθανότατα θα φανεί λογικό μετά από λίγη σκέψη (λέει απλώς ότι η $\sqrt{n+1}$ είναι πρακτικά το ίδιο με τη $\sqrt{n}$ για μεγάλα n), αλλά μια μαθηματική απόδειξη μπορεί και να μην είναι τελείως προφανής. Για να εκτιμήσουμε το $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ χρησιμοποιούμε ένα αλγεβρικό τέχνασμα:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Μπορούμε ακόμα να εκτιμήσουμε το $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ στο διάστημα $[n, n+1]$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} &= f'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{για κάποιο } x \text{ στο } (n, n+1)\\ &< \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Οποιαδήποτε από αυτές τις δύο εκτιμήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε το παραπάνω όριο· η λεπτομερής απόδειξη αφήνεται σε σας, ως απλή αλλά χρήσιμη άσκηση.

Το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3}{4}$$

φαίνεται επίσης λογικό, γιατί οι όροι που περιέχουν το n^3 είναι οι πιο σημαντικοί όταν το n είναι μεγάλο. Αν θυμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος 7-9, θα μαντέψετε αμέσως το τέχνασμα που μετατρέπει αυτήν την ιδέα σε απόδειξη —αν διαιρέσουμε αριθμητή και παρονομαστή με n^3 παίρνουμε

$$\frac{3n^3+7n^2+1}{4n^3-8n+63}=\frac{3+\dfrac{7}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{4-\dfrac{8}{n^2}+\dfrac{63}{n^3}}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την παράσταση, βρίσκουμε εύκολα το όριο, ιδιαίτερα αν χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα στοιχεία:

Αν τα $\lim_{n\to\infty} a_n$ και $\lim_{n\to\infty} b_n$ υπάρχουν και τα δύο, τότε

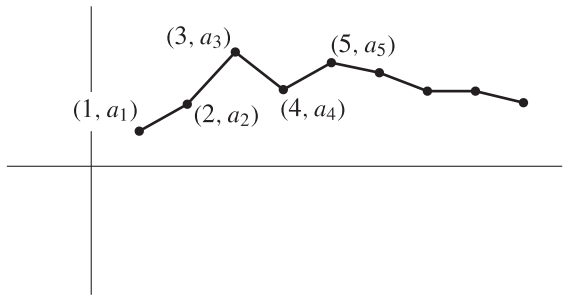
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,\\ \lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.\end{aligned}$$

Αν, επιπλέον, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, τότε $b_n \neq 0$ για όλα τα n τα μεγαλύτερα από κάποιο N, και

$$\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \lim_{n\to\infty} a_n / \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Αν θα θέλαμε να είμαστε τελείως αυστηροί, η διατύπωση της τρίτης πρότασης θα έπρεπε να είναι ακόμα πιο πολύπλοκη. Όπως τη δώσαμε, μελετάμε το όριο της ακολουθίας $\{c_n\}=\{a_n/b_n\}$, όπου οι αριθμοί c_n μπορεί να μην ορίζονται καν για μερικά $n<N$. Αυτό όμως δεν πειράζει στ' αλήθεια —θα μπορούσαμε να ορίσουμε το c_n όπως μας αρέσει για τέτοια n —γιατί το όριο μιας ακολουθίας δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την ακολουθία σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων).

Αν και τα παραπάνω είναι πολύ χρήσιμα, δεν θα μπούμε στον κόπο να τα διατυπώσουμε ως θεώρημα —δεν θα πρέπει να συναντήσετε καμία δυσκολία στο να τα αποδείξετε μόνοι σας, γιατί ο ορισμός του $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ είναι τελείως ίδιος με τους προηγούμενους ορισμούς των ορίων, ιδιαίτερα με τον $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$.



ΣΧΗΜΑ 4

Η ομοιότητα ανάμεσα στους ορισμούς των $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ είναι στην πραγματικότητα πιο στενή από μια απλή αναλογία· είναι δυνατόν να ορίσουμε το πρώτο με βάση το δεύτερο. Αν f είναι η συνάρτηση που η γραφική της παράσταση (Σχήμα 4) αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα σημεία στη γραφική παράσταση της ακολουθίας $\{a_n\}$, δηλαδή

$$f(x) = (a_{n+1} - a_n)(x - n) + a_n \qquad n \le x \le n + 1,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

Αντίστροφα, αν η f ικανοποιεί την $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$, και θέσουμε $a_n = f(n)$, τότε $\lim_{x\to\infty} a_n = l$.

Αυτή η δεύτερη παρατήρηση συχνά είναι πολύ χρήσιμη. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $0 < a < 1$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Για να το αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x \log a} = 0,$$

γιατί $\log a < 0$, άρα το $x \log a$ είναι αρνητικό και μεγάλο, κατά απόλυτη τιμή, για μεγάλα x. Παρατηρήστε ότι ουσιαστικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{αν } |a| < 1\cdot$$

αφού, αν $a < 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n |a|^n = 0.$$

Η συμπεριφορά της λογαριθμικής συνάρτησης δείχνει ακόμα ότι, αν $a > 1$, τότε το a^n γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το n μεγαλώνει. Αυτός ο ισχυρισμός παίρνει συχνά τη μορφή

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty, \quad a > 1,$$

ή ακόμα λέμε μερικές φορές ότι η $\{a^n\}$ τείνει στο ∞. Γράφουμε επίσης ισότητες σαν την

$$\lim_{n\to\infty} (-a^n) = -\infty,$$

και λέμε ότι η $\{-a^n\}$ τείνει στο $-\infty$. Παρατηρήστε, όμως, ότι αν $a < -1$, τότε το $\lim_{n\to\infty} a^n$ δεν υπάρχει, ούτε και με αυτήν την ευρύτερη έννοια.

Παρά τη σύνδεση που κάναμε με μια γνωστή έννοια, είναι πιο σημαντικό να παριστούμε τη σύγκλιση με βάση την εικόνα της ακολουθίας ως συνόλου σημείων πάνω στην ευθεία (Σχήμα 3). Υπάρχει και άλλη μια σχέση ανάμεσα στα όρια συναρτήσεων και τα όρια ακολουθιών που έχει να κάνει με *αυτήν* την εικόνα. Αυτή η σχέση είναι λιγότερο προφανής, αλλά πολύ πιο ενδιαφέρουσα από αυτές που έχουμε αναφέρει —αντί να ορίσουμε

τα όρια ακολουθιών με τη βοήθεια των ορίων συναρτήσεων, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το c, εκτός ίσως από το ίδιο το c, με

$$\lim_{x\to c} f(x) = l.$$

Έστω ότι $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε

(1) κάθε a_n να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού της f,

(2) κάθε $a_n \neq c$,

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

Τότε για την ακολουθία $\{f(a_n)\}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Αντιστρόφως, αν αυτό είναι αλήθεια για κάθε ακολουθία $\{a_n\}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες, τότε $\lim_{x\to c} f(x) = l$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lim_{x\to c} f(x) = l$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x,

$$\text{αν } 0 < |x - c| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Αν η ακολουθία $\{a_n\}$ έχει $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, τότε (Σχήμα 3) υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε,

$$\text{αν } n > N, \text{ τότε } |a_n - c| < \delta.$$

Από τον τρόπο που διαλέξαμε το δ, αυτό σημαίνει ότι

$$|f(a_n) - l| < \varepsilon,$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

Ας υποθέσουμε, αντιστρόφως, ότι $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ για κάθε ακολουθία $\{a_n\}$ με $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. Αν *δεν* ίσχυε ότι $\lim_{x\to c} f(x) = l$, θα υπήρχε κάποιο $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για *κάθε* $\delta > 0$ να υπάρχει κάποιο x με

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{αλλά} \quad |f(x) - l| > \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για κάθε n θα υπήρχε ένας αριθμός x_n τέτοιος ώστε

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - l| > \varepsilon.$$

Τώρα η ακολουθία $\{x_n\}$ προφανώς συγκλίνει στο c αλλά, αφού $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ για κάθε n, η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ δεν συγκλίνει στο l. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση, άρα πρέπει να ισχύει ότι $\lim_{x\to c} f(x) = l$. ∎

Το Θεώρημα 1 μας παρέχει πολλά παραδείγματα συγκλινουσών ακολουθιών. Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ που ορίζονται από τις

$$a_n = \sin\left(13 + \frac{1}{n^2}\right)$$

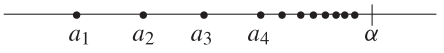
$$b_n = \cos\left(\sin\left(1 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)\right),$$

προφανώς συγκλίνουν στους $\sin(13)$ και $\cos(\sin(1))$, αντίστοιχα. Είναι όμως σημαντικό να έχουμε στη διάθεσή μας και κάποια κριτήρια, όχι αυτού του είδους, που να εγγυώνται τη σύγκλιση ακολουθιών. Υπάρχει ένα σημαντικό κριτήριο που είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, αλλά αποτελεί τη βάση για όλα τα άλλα αποτελέσματα. Αυτό το κριτήριο διατυπώνεται με βάση κάποιες έννοιες που ορίστηκαν για συναρτήσεις, επομένως εφαρμόζονται και στις ακολουθίες: μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **αύξουσα** αν $a_{n+1} > a_n$ για κάθε n, **μη φθίνουσα** αν $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε n, και **άνω φραγμένη** αν υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$ για κάθε n· παρόμοιοι ορισμοί υπάρχουν για ακολουθίες φθίνουσες, μη αύξουσες και κάτω φραγμένες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Αν η $\{a_n\}$ είναι μη φθίνουσα και άνω φραγμένη, τότε η $\{a_n\}$ συγκλίνει (το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν η $\{a_n\}$ είναι μη αύξουσα και κάτω φραγμένη).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το σύνολο A που αποτελείται από όλους τους αριθμούς a_n είναι, εξ υποθέσεως, άνω φραγμένο, άρα το A έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα α. Ισχυριζόμαστε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (Σχήμα 5). Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάποιος a_N που ικανοποιεί την $\alpha - a_N < \varepsilon$, γιατί ο α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Τότε για $n > N$ έχουμε

$$a_n \geq a_N, \quad \text{άρα} \quad \alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon.$$



ΣΧΗΜΑ 5

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ∎

Η υπόθεση ότι η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη είναι βέβαια απαραίτητη στο Θεώρημα 2: αν η $\{a_n\}$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε (είτε είναι η $\{a_n\}$ μη φθίνουσα είτε όχι) η $\{a_n\}$ σαφώς αποκλίνει. Με την πρώτη ματιά, ίσως φανεί ότι δεν είναι και τόσο δύσκολο να πει κανείς αν μια μη φθίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη, και επομένως αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει ή όχι. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εμφανιστούν τέτοιες ακολουθίες με πολύ φυσικό τρόπο και, όπως θα δούμε, το ερώτημα αν συγκλίνουν ή όχι δεν είναι καθόλου τετριμμένο. Προς το παρόν προσπαθήστε, αν θέλετε, να δείτε αν η επόμενη (προφανώς αύξουσα) ακολουθία είναι ή δεν είναι άνω φραγμένη:

$$1,\ 1+\tfrac{1}{2},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4},\ \ldots.$$

Αν και το Θεώρημα 2 αφορά μια πολύ ειδική κλάση ακολουθιών, είναι πιο χρήσιμο από ό,τι ίσως φαίνεται αρχικά, γιατί μπορούμε πάντα να αντλήσουμε από μια τυχαία ακολουθία $\{a_n\}$ μια άλλη ακολουθία που να είναι είτε μη αύξουσα ή μη φθίνουσα. Για να γίνουμε πιο ακριβείς, ορίζουμε μια **υπακολουθία** της ακολουθίας $\{a_n\}$ να είναι μια ακολουθία της μορφής

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots,$$

όπου οι n_j είναι φυσικοί αριθμοί με

$$n_1 < n_2 < n_3 \cdots.$$

ΣΧΗΜΑ 6

Τότε κάθε ακολουθία περιέχει μια υπακολουθία που είναι είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα. Υπάρχει το ενδεχόμενο να ταλαιπωρηθείτε πολύ προσπαθώντας να αποδείξετε αυτόν τον ισχυρισμό, αν και η απόδειξη είναι πολύ σύντομη αν σας έρθει η σωστή ιδέα, και αξίζει να καταγραφεί ως λήμμα.

ΛΗΜΜΑ Κάθε ακολουθία $\{a_n\}$ περιέχει μια υπακολουθία που είναι μη φθίνουσα ή μη αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ονομάστε έναν φυσικό αριθμό n «σημείο κορυφής» της ακολουθίας $\{a_n\}$ αν $a_m < a_n$ για κάθε $m > n$ (Σχήμα 6).

Περίπτωση 1. Η ακολουθία έχει άπειρα σημεία κορυφής. Σε αυτήν την περίπτωση, αν $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ είναι τα σημεία κορυφής, τότε $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \cdots$, άρα η $\{a_{n_k}\}$ είναι η ζητούμενη (μη αύξουσα) υπακολουθία.

Περίπτωση 2. Η ακολουθία έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων κορυφής. Σε αυτήν την περίπτωση, παίρνουμε ένα n_1 μεγαλύτερο από όλα τα σημεία κορυφής. Αφού το

n_1 δεν είναι σημείο κορυφής, υπάρχει κάποιο $n_2 > n_1$ με $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Αφού το n_2 δεν είναι σημείο κορυφής (είναι μεγαλύτερο από το n_1 άρα μεγαλύτερο από όλα τα σημεία κορυφής) υπάρχει κάποιο $n_3 > n_2$ τέτοιο ώστε $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τη ζητούμενη (μη φθίνουσα) υπακολουθία. ∎

Αν υποθέσουμε ότι η αρχική ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, συλλέγουμε ένα επιπλέον πόρισμα καθ' οδόν.

ΠΟΡΙΣΜΑ (ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-WEIERSTRASS)

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Χωρίς πρόσθετες υποθέσεις, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε περισσότερο: είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ακολουθίες που να έχουν πολλές, ακόμα και άπειρες, υπακολουθίες που να συγκλίνουν σε διαφορετικούς αριθμούς (βλ. Πρόβλημα 3). Υπάρχει μια λογική υπόθεση που μπορούμε να προσθέσουμε, και μας δίνει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση ακολουθίας. Αν και αυτή η συνθήκη δεν είναι απαραίτητη για τη δουλειά μας, απλουστεύει πολλές αποδείξεις. Επιπλέον, αυτή η συνθήκη παίζει βασικό ρόλο σε πιο προχωρημένα μαθηματικά, και αξίζει για αυτόν και μόνο τον λόγο να την αναφέρουμε.

Αν μια ακολουθία συγκλίνει, οπότε οι όροι της βρίσκονται τελικά όλοι κοντά στον ίδιο αριθμό, τότε η διαφορά δύο οποιωνδήποτε τέτοιων όρων πρέπει να είναι πολύ μικρή. Για να ακριβολογούμε, αν $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ για κάποιο l, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα N τέτοιο ώστε $|a_n - l| < \varepsilon/2$ για $n > N$. Τώρα αν $n > N$ και $m > N$, τότε

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αυτή η τελευταία ανισότητα, $|a_n - a_m| < \varepsilon$, που δεν περιέχει το όριο l, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση μιας συνθήκης (το κριτήριο του Cauchy) που είναι προφανώς αναγκαία για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε, για κάθε m και n,

$$\text{αν } m, n > N, \text{ τότε } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

(Αυτή η συνθήκη γράφεται συνήθως στη μορφή $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$.)

Η ομορφιά του κριτηρίου του Cauchy έγκειται στο ότι είναι ικανό να βεβαιώσει τη σύγκλιση μιας ακολουθίας. Μετά από την προκαταρκτική εργασία που κάναμε, δεν μένουν και πολλά για να το αποδείξουμε αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Μια ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy αν συγκλίνει. Η απόδειξη του αντιστρόφου ισχυρισμού περιέχει μόνο ένα μικρό τέχνασμα: να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy $\{a_n\}$ είναι φραγμένη. Αν πάρουμε $\varepsilon = 1$ στον ορισμό της ακολουθίας Cauchy, βρίσκουμε ότι υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε

$$|a_m - a_n| < 1 \qquad \text{για } m, n > N.$$

Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι

$$|a_m - a_{N+1}| < 1 \qquad \text{για κάθε } m > N.$$

Άρα η $\{a_m : m > N\}$ είναι φραγμένη· αφού υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους άλλα a_i, ολόκληρη η ακολουθία είναι φραγμένη.

Το πόρισμα του Λήμματος μας εξασφαλίζει τότε ότι κάποια υπακολουθία της $\{a_n\}$ συγκλίνει.

Μόνο ένα σημείο απομένει, που η απόδειξή του αφήνεται σε σας: αν μια υπακολουθία μιας ακολουθίας Cauchy συγκλίνει, τότε και η ίδια η ακολουθία Cauchy συγκλίνει. ∎

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Επαληθεύστε καθένα από τα όρια που ακολουθούν:

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = 0.$ Υπόδειξη: Θα πρέπει τουλάχιστον να μπορείτε να αποδείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2} = 0.$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

(v) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0.$

(vi) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$

(viii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max(a,b), \qquad a,b \geq 0.$

(ix) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0,$ όπου $\alpha(n)$ είναι το πλήθος των πρώτων που διαιρούν το n. Υπόδειξη: Το γεγονός ότι κάθε πρώτος είναι ≥ 2 δίνει μια πολύ απλή εκτίμηση του πόσο μικρό πρέπει να είναι το $\alpha(n)$.

∗(x) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}.$

2. Βρείτε τα ακόλουθα όρια:

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}.$

(ii) $\lim_{n\to\infty} n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b}.$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}.$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}\sin(n^n)}{n+1}.$

(v) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$

(vi) $\lim_{n\to\infty} nc^n, \qquad |c| < 1.$

(vii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!}.$

3. (α) Τί μπορούμε να πούμε για την ακολουθία $\{a_n\}$ αν συγκλίνει και αν κάθε a_n είναι ακέραιος;

(β) Βρείτε όλες τις συγκλίνουσες υπακολουθίες της ακολουθίας 1, −1, 1, −1, 1, −1, ... (Υπάρχουν άπειρες, αν και μόνο δύο είναι τα πιθανά όρια αυτών των υπακολουθιών.)

(γ) Βρείτε όλες τις συγκλίνουσες υπακολουθίες της ακολουθίας 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, ... (Υπάρχουν άπειρα το πλήθος όρια που μπορούν να έχουν αυτές οι υπακολουθίες.)

(δ) Θεωρούμε την ακολουθία

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \ldots.$$

Για ποιους αριθμούς α υπάρχει ακολουθία που συγκλίνει στο α;

4. (α) Αποδείξτε ότι, αν μια υπακολουθία μιας ακολουθίας Cauchy συγκλίνει, τότε το ίδιο συμβαίνει και με την αρχική ακολουθία Cauchy.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει.

5. (α) Αποδείξτε ότι, αν $0 < a < 2$, τότε $a < \sqrt{2a} < 2$.

(β) Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots$$

συγκλίνει.

(γ) Βρείτε το όριό της. Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι αν $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, τότε $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n} = \sqrt{2l}$, από το Θεώρημα 1.

6. Έστω $0 < a_1 < b_1$ και ορίζουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ συγκλίνουν.

(β) Αποδείξτε ότι και οι δύο έχουν το ίδιο όριο.

7. Στο Πρόβλημα 2-16 είδαμε ότι οποιαδήποτε ρητή προσέγγιση k/l του $\sqrt{2}$ μπορεί να αντικατασταθεί από μια καλύτερη προσέγγιση $(k + 2l)/(k + l)$. Ειδικότερα, ξεκινώντας με $k = l = 1$, παίρνουμε

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \ldots\ .$$

(α) Αποδείξτε ότι αυτή η ακολουθία δίνεται αναδρομικά από την

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Αυτό δίνει την αποκαλούμενη *ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα*

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε ξεχωριστά τις υπακολουθίες $\{a_{2n}\}$ και $\{a_{2n+1}\}$.

(γ) Αποδείξτε ότι, για δύο τυχαίους φυσικούς αριθμούς a και b,

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}.$$

8. Αναγνωρίστε τη συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos n!\,\pi x)^{2k})$. (Έχει αναφερθεί πολλές φορές σε αυτό το βιβλίο.)

9. Πολλά εντυπωσιακά στην όψη όρια υπολογίζονται εύκολα (ιδιαίτερα από αυτόν που τα κατασκευάζει), γιατί ουσιαστικά είναι άνω ή κάτω αθροίσματα ολοκληρωμάτων, μεταμφιεσμένα. Με αυτήν την παρατήρηση ως υπόδειξη, υπολογίστε τα παρακάτω όρια. (Προειδοποίηση: ο κατάλογος περιέχει ένα «μαύρο πρόβατο» που υπολογίζεται με στοιχειώδεις συλλογισμούς.)

(i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \cdots + \sqrt[n]{e^{2n}}}{n}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \right)$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} \right)$.

(v) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{n}{(n+n)^2} \right)$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2} \right)$.

10. Όρια σαν το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ και το $\lim_{n\to\infty} a^n$ υπολογίζονται με χρήση στοιχείων για τη συμπεριφορά της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης, αλλά αυτή η προσέγγιση μάλλον δεν είναι ικανοποιητική, γιατί οι ακέραιες ρίζες και δυνάμεις γίνεται να οριστούν και χωρίς την εκθετική συνάρτηση. Μερικές από τις γνωστές «στοιχειώδεις» αποδείξεις τέτοιων ορίων περιγράφονται εδώ· τα βασικά εργαλεία είναι ανισότητες που προκύπτουν από το διωνυμικό θεώρημα, και συγκεκριμένα η

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \qquad \text{για } h > 0\cdot$$

και, για το μέρος (ε), η

$$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2, \qquad \text{για } h > 0.$$

(α) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ αν $a > 1$, θέτοντας $a = 1 + h$, όπου $h > 0$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ αν $0 < a < 1$.

(γ) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ αν $a > 1$, θέτοντας $\sqrt[n]{a} = 1 + h$ και κάνοντας μια εκτίμηση για το h.

(δ) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ αν $0 < a < 1$.

(ε) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

11. (α) Αποδείξτε ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι πάντα φραγμένη.

(β) Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και ότι κάποιο $a_n > 0$. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών a_n έχει ένα μέγιστο στοιχείο.

12. (α) Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

(β) Αν

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n,$$

δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα, και ότι κάθε $a_n \geq 0$. Άρα υπάρχει κάποιος αριθμός

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

Αυτός ο αριθμός, γνωστός ως αριθμός του Euler, έχει αποδειχθεί αλεξίσφαιρος· δεν είναι γνωστό ούτε καν αν ο γ είναι ρητός.

13. (α) Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο $[1, \infty)$. Δείξτε ότι

$$f(1) + \cdots + f(n-1) < \int_1^n f(x)\,dx < f(2) + \cdots + f(n).$$

(β) Επιλέξτε τώρα $f = \log$ και δείξτε ότι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}.$$

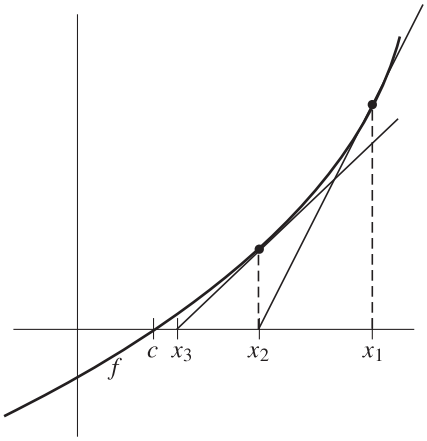
Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι το $\sqrt[n]{n!}$ είναι περίπου ίσο με n/e, με την έννοια ότι ο λόγος αυτών των δύο ποσοτήτων είναι κοντά στο 1 για μεγάλα n. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε ότι το $n!$ είναι κοντά στο $(n/e)^n$ με αυτήν την έννοια· και μάλιστα, αυτό δεν ισχύει. Θα θέλαμε πολύ μια εκτίμηση του $n!$, ακόμα και για συγκεκριμένους υπολογισμούς, γιατί το $n!$ δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε εύκολα ούτε με τους λογαριθμικούς πίνακες. Το κλασικό (και δύσκολο) θεώρημα που μας δίνει τις κατάλληλες πληροφορίες θα βρεθεί στο Πρόβλημα 27-19.

14. (α) Δείξτε ότι η εφαπτομένη ευθεία στη γραφική παράσταση της f στο $(x_1, f(x_1))$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο $(x_2, 0)$, όπου

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

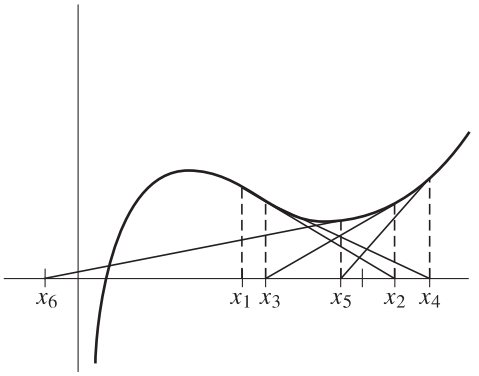


ΣΧΗΜΑ 7

Αυτό το σημείο τομής μπορεί να θεωρηθεί ως χονδρική προσέγγιση του σημείου όπου η γραφική παράσταση της f τέμνει τον οριζόντιο άξονα. Αν τώρα ξεκινήσουμε με το x_2 και επαναλάβουμε τη διαδικασία για να πάρουμε το x_3, και κατόπιν, με χρήση του x_3 να πάρουμε το x_4 κτλ., έχουμε μια ακολουθία $\{x_n\}$ που ορίζεται επαγωγικά μέσω της

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Το Σχήμα 7 υπαινίσσεται ότι η $\{x_n\}$ θα συγκλίνει σε κάποιον αριθμό c με $f(c) = 0$. Αυτή η διαδικασία καλείται *μέθοδος του Newton* για τον υπολογισμό μιας ρίζας της f. Στο υπόλοιπο του προβλήματος αυτού, θα θεμελιώσουμε ορισμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες η μέθοδος του Newton είναι αποτελεσματική (το Σχήματα 8 και 9 δείχνουν δύο περιπτώσεις όπου δεν είναι). Μερικά δεδομένα για την κυρτότητα μπορεί να είναι χρήσιμα· βλ. Κεφάλαιο 11, Παράρτημα.



ΣΧΗΜΑ 8

(β) Έστω ότι $f,'\ f'' > 0$, και ότι διαλέγουμε x_1 έτσι ώστε $f(x_1) > 0$. Δείξτε ότι $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > c$.

(γ) Έστω $\delta_k = x_k - c$. Τότε

$$\delta_k = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)}$$

για κάποιο ξ_k στο (c, x_k). Δείξτε ότι

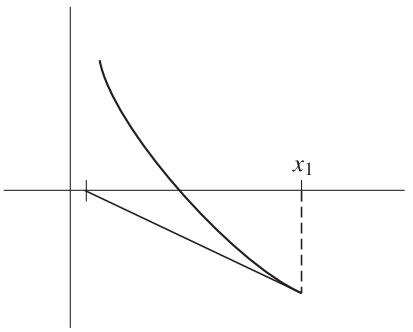
$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)} - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Συμπεράνετε ότι

$$\delta_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(\xi_k)f'(x_k)} \cdot f''(\eta_k)(x_k - \xi_k)$$

για κάποιο η_k στο (c, x_k), και μετά ότι

$$(*) \qquad \delta_{k+1} \le \frac{f''(\eta_k)}{f'(x_k)}{\delta_k}^2.$$



ΣΧΗΜΑ 9

(δ) Έστω $m = f'(c) = \inf f'$ στο $[c, x_1]$ και έστω $M = \sup f''$ στο $[c, x_1]$. Δείξτε ότι η μέθοδος Newton είναι επιτυχής αν $x_1 - c < m/M$.

(ε) Ποιος είναι ο τύπος για τα x_{n+1} όταν $f(x) = x^2 - A$;
Αν πάρουμε $A = 2$ και $x_1 = 1,4$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,4 \\ x_2 &= 1,4142857 \\ x_3 &= 1,4142136 \\ x_4 &= 1,4142136, \end{aligned}$$

που είναι ήδη ακριβές μέχρι το 7ο δεκαδικό ψηφίο! Σημειώστε ότι ο αριθμός των σωστών δεκαδικών ψηφίων τουλάχιστον διπλασιαζόταν κάθε φορά. Αυτό, ουσιαστικά, είναι εξασφαλισμένο από την ανισότητα $(*)$ όταν $M/m < 1$.

15. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Newton για να υπολογίσετε προσεγγιστικά τις ρίζες των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \tan x - \cos^2 x$ κοντά στο 0.

(ii) $f(x) = \cos x - x^2$ κοντά στο 0.

(iii) $f(x) = x^3 + x - 1$ στο $[0, 1]$.

(iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ στο $[0, 1]$.

∗**16.** Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = l.$$

Υπόδειξη: Αυτό το πρόβλημα μοιάζει πολύ με το Πρόβλημα 13-40 (ουσιαστικά είναι μια ειδική περίπτωση).

17. (α) Αποδείξτε ότι αν $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = l$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n/n = l$. Υπόδειξη: Βλ. το προηγούμενο πρόβλημα.

(β) Έστω ότι η f είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to\infty}\big(f(x+1) - f(x)\big) = l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = l$. Υπόδειξη: Θεωρήστε ότι τα a_n και b_n είναι το inf και το sup της f στο $[n, n+1]$.

∗**18.** Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε n και ότι $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Υπόδειξη: Εδώ χρειάζονται παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που δουλεύουν στο Πρόβλημα 16, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται πολλαπλασιασμός αντί για πρόσθεση, μαζί με το γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ για $a > 0$.

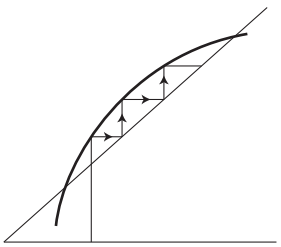
19. (α) Έστω ότι $\{a_n\}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι το $\lim_{n\to\infty} a_n$ βρίσκεται και αυτό στο $[0, 1]$.

(β) Βρείτε μια συγκλίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$ σημείων του $(0, 1)$ τέτοια ώστε το $\lim_{n\to\infty} a_n$ να μην ανήκει στο $(0, 1)$.

20. Έστω ότι η f είναι συνεχής και ότι η ακολουθία

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots$$

συγκλίνει στο l. Αποδείξτε ότι το l είναι «σταθερό σημείο» της f, δηλαδή $f(l) = l$. Υπόδειξη: Δύο ειδικές περιπτώσεις έχουν ήδη εμφανιστεί.



ΣΧΗΜΑ 10

21. (α) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και ότι $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$. Το Πρόβλημα 7-11 δείχνει ότι η f έχει ένα σταθερό σημείο (με την ορολογία του Προβλήματος 20). Αν η f είναι *αύξουσα*, τότε μπορούμε να διατυπώσουμε μια πολύ πιο ισχυρή πρόταση: Για κάθε x στο $[0, 1]$, η ακολουθία

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ldots$$

έχει όριο (που είναι αναγκαστικά σταθερό σημείο, από το Πρόβλημα 20). Αποδείξτε αυτόν τον ισχυρισμό, εξετάζοντας τη συμπεριφορά της ακολουθίας για $f(x) > x$ και $f(x) < x$, ή κοιτάζοντας το Σχήμα 10. Ένα διάγραμμα αυτού του είδους χρησιμοποιεί ο Littlewood στο *Mathematician's Miscellany* για να κάνει κήρυγμα υπέρ των σχημάτων: «Για τον επαγγελματία η μόνη απόδειξη που χρειάζεται είναι [αυτό το Σχήμα]».

∗(β) Έστω ότι f και g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$, με $0 \le f(x) \le 1$ και $0 \le g(x) \le 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$, οι οποίες ικανοποιούν την $f \circ g = g \circ f$. Έστω, ακόμα, ότι η f είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η f και η g έχουν ένα κοινό σταθερό σημείο· με άλλα λόγια, υπάρχει ένας αριθμός l τέτοιος ώστε $f(l) = l = g(l)$. Υπόδειξη: Ξεκινήστε επιλέγοντας ένα σταθερό σημείο της g.

Για πολύ καιρό οι μαθηματικοί αρέσκονταν να ερωτούν εάν το συμπέρασμα του μέρους (β) ισχύει χωρίς την υπόθεση ότι η f είναι αύξουσα. Δύο ανεξάρτητες ανακοινώσεις όμως στα *Notices* της American Mathematical Society, Τεύχος 14, Αριθμός 2 δίνουν αντιπαραδείγματα, οπότε επρόκειτο για ένα ευθύς εξ αρχής μάλλον ανόητο πρόβλημα.

Το τέχνασμα στο Πρόβλημα 20 είναι τελικά πολύ πιο χρήσιμο από ό,τι δείχνει, και μερικά από τα πιο σημαντικά «θεωρήματα σταθερού σημείου» βασίζονται στο να πάρουμε ακολουθίες της μορφής $x,\ f(x),\ f(f(x)),\ \ldots$. Μια ειδική, αλλά αντιπροσωπευτική, περίπτωση τέτοιου θεωρήματος παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 23 (για το οποίο μας προετοιμάζει το επόμενο πρόβλημα).

22. (α) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 2-5 για να δείξετε ότι αν $c \ne 1$, τότε

$$c^m + c^{m+1} + \cdots + c^n = \frac{c^m - c^{n+1}}{1 - c}.$$

(β) Έστω ότι $|c| < 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{m,n\to\infty} (c^m + \cdots + c^n) = 0.$$

(γ) Έστω ότι $\{x_n\}$ είναι ακολουθία με $|x_n - x_{n+1}| \leq c^n$, όπου $0 < c < 1$. Αποδείξτε ότι η $\{x_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy.

23. Έστω ότι f είναι συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \qquad \text{για κάθε } x \text{ και } y,$$

όπου $c < 1$. (Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται *συστολή*.)

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

(β) Αποδείξτε ότι η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο.

(γ) Εξετάζοντας την ακολουθία

$$x,\ f(x),\ f(f(x)),\ \ldots,$$

για τυχαίο x, αποδείξτε ότι η f έχει πράγματι ένα σταθερό σημείο. (Αυτό το αποτέλεσμα, σε ένα γενικότερο πλαίσιο, είναι γνωστό ως «λήμμα της συστολής»).

24. (α) Αποδείξτε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη και $|f'| < 1$, τότε η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο.

(β) Αποδείξτε ότι αν $|f'(x)| \leq c < 1$ για όλα τα x, τότε η f έχει σταθερό σημείο.

(γ) Δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι η υπόθεση $|f'(x)| \leq 1$ δεν είναι αρκετή για να εξασφαλίσει την ύπαρξη σταθερού σημείου της f.

25. Αυτό το πρόβλημα είναι, κατά κάποιον τρόπο, το αντίστροφο του προηγουμένου. Έστω b_n μια ακολουθία που ορίζεται από τις $b_1 = a$, $b_{n+1} = f(b_n)$. Αποδείξτε ότι, αν το $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ υπάρχει, και η f' είναι συνεχής στο b, τότε $|f'(b)| \leq 1$ (με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε ήδη $b_n = b$ για κάποιο n). Υπόδειξη: Αν $|f'(b)| > 1$, τότε $|f'(x)| > 1$ για όλα τα x σε ένα διάστημα γύρω από το b, και τα b_n θα βρίσκονται σε αυτό το διάστημα για αρκετά μεγάλο n. Εξετάστε τώρα την f στο διάστημα $[b, b_n]$.

26. Αυτό το πρόβλημα διερευνά για ποια $a > 0$ το σύμβολο

$$a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

έχει νόημα. Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $b_1 = a$, $b_{n+1} = a^{b_n}$, πότε υπάρχει το $b = \lim_{n\to\infty} b_n$; Παρατηρήστε ότι αν υπάρχει το b, τότε $a^b = b$ από το Πρόβλημα 20.

(α) Αν υπάρχει το b, τότε το a μπορεί να γραφεί με τη μορφή $y^{1/y}$ για κάποιο y. Περιγράψτε τη γραφική παράσταση της $g(y) = y^{1/y}$ και συμπεράνετε ότι $0 < a \leq e^{1/e}$.

(β) Έστω ότι $1 \leq a \leq e^{1/e}$. Δείξτε ότι η $\{b_n\}$ είναι αύξουσα και ότι επίσης $b_n \leq e$. Αυτό αποδεικνύει ότι το b υπάρχει (καθώς και ότι $b \leq e$).

Η ανάλυση για $a < 1$ είναι πιο δύσκολη.

(γ) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 25, δείξτε ότι, αν υπάρχει το b, τότε $e^{-1} \leq b \leq e$. Δείξτε έπειτα ότι $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$.

Από τώρα και στο εξής θα υποθέτουμε ότι $e^{-e} \leq a < 1$.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{a^x}{\log x}$$

είναι φθίνουσα στο $(0, 1)$.

(ε) Έστω b ο μοναδικός αριθμός για τον οποίο $a^b = b$. Δείξτε ότι $a < b < 1$. Χρησιμοποιώντας το μέρος (ε), δείξτε ότι, αν $0 < x < b$, τότε $x < a^{a^x} < b$. Συμπεράνετε ότι το $l = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$ υπάρχει και ότι $a^{a^l} = l$.

(στ) Χρησιμοποιώντας το μέρος (ε), δείξτε ότι $l = b$.

(ζ) Τέλος, δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = b$, έτσι ώστε $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

27. Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία που είναι φραγμένη, και ας θέσουμε

$$y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\{y_n\}$ συγκλίνει. Το όριο $\lim_{n\to\infty} y_n$ συμβολίζεται με $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ ή $\limsup_{n\to\infty} x_n$, και λέγεται το **limit superior** ή **άνω όριο** της ακολουθίας $\{x_n\}$.

(β) Βρείτε το $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ για καθεμιά από τις:

(i) $x_n = \dfrac{1}{n}$.

(ii) $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

(iii) $x_n = (-1)^n \left[1 + \dfrac{1}{n}\right]$.

(iv) $x_n = \sqrt[n]{n}$.

(γ) Ορίστε το $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ (ή $\liminf_{n\to\infty} x_n$) και αποδείξτε ότι

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

(δ) Αποδείξτε ότι το $\lim_{n\to\infty} x_n$ υπάρχει αν και μόνο αν $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ και ότι σε αυτήν την περίπτωση $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$.

(ε) Θυμηθείτε τον ορισμό, στο Πρόβλημα 8-18, του $\overline{\lim}\, A$ για ένα φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι, αν οι αριθμοί x_n είναι διακεκριμένοι, τότε $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim}\, A$, όπου $A = \{x_n : n \text{ στο } \mathbf{N}\}$.

28. Στο Παράρτημα του Κεφαλαίου 8 ορίσαμε την ομοιόμορφη συνέχεια συνάρτησης σε ένα διάστημα. Αν η $f(x)$ είναι ορισμένη μόνο για ρητούς x, η έννοια αυτή εξακολουθεί να έχει νόημα: Θα λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα διάστημα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, έτσι ώστε αν οι x και y είναι ρητοί αριθμοί σε αυτό το διάστημα και $|x - y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(α) Έστω x τυχαίο (ρητό ή άρρητο) σημείο του διαστήματος και έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία από *ρητά* σημεία του διαστήματος, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ συγκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι το όριο της ακολουθίας $\{f(x_n)\}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $\{x_n\}$.

Θα σημειώνουμε αυτό το όριο με $\bar{f}(x)$, έτσι ώστε η $\bar{f}$ είναι μια επέκταση της f σε όλο το διάστημα.

(γ) Αποδείξτε ότι η επέκταση $\bar{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα.

29. Έστω $a > 0$, και για ρητό x έστω $f(x) = a^x$, όπως ορίζεται με τον συνήθη αλγεβρικό τρόπο. Αυτό το πρόβλημα δείχνει απευθείας ότι η f μπορεί να επεκταθεί σε μια συνεχή $\bar{f}$ σε όλη την ευθεία. Το Πρόβλημα 28 παρέχει τον αναγκαίο μηχανισμό.

(α) Για ρητούς $x < y$ δείξτε ότι $a^x < a^y$ για $a > 1$ και $a^x > a^y$ για $a < 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 10, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $|a^x - 1| < \varepsilon$ για ρητούς x αρκετά κοντά στο 0.

(γ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $a^x - a^y = a^y(a^{x-y} - 1)$, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα, με την έννοια του Προβλήματος 28.

(δ) Δείξτε ότι η επέκταση της $\bar{f}$ στο Πρόβλημα 28, είναι αύξουσα για $a > 1$ και φθίνουσα για $a < 1$ και ικανοποιεί την $\bar{f}(x + y) = \bar{f}(x)\bar{f}(y)$.

∗**30.** Το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass συνήθως διατυπώνεται, και αποδεικνύεται, τελείως διαφορετικά από ό,τι στο κείμενο —η κλασική διατύπωση χρησιμοποιεί την έννοια των οριακών σημείων. Ένα σημείο x λέγεται **οριακό σημείο** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα σημείο a στο A με $|x - a| < \varepsilon$ αλλά $x \neq a$.

(α) Βρείτε όλα τα οριακά σημεία των εξής συνόλων.

(i) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \text{ στο } \mathbf{N}\right\}$.

(ii) $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n \text{ και } m \text{ στο } \mathbf{N}\right\}$.

(iii) $\left\{(-1)^n\left[1 + \dfrac{1}{n}\right] : n \text{ στο } \mathbf{N}\right\}$.

(iv) $\mathbf{Z}$.

(v) $\mathbf{Q}$.

(β) Αποδείξτε ότι το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άπειρα σημεία a του A που ικανοποιούν την $|x - a| < \varepsilon$.

(γ) Αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}\, A$ είναι το μεγαλύτερο οριακό σημείο του A, και το $\underline{\lim}\, A$ είναι το μικρότερο.

Η συνηθισμένη μορφή του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass μας λέει ότι, αν A είναι ένα άπειρο σύνολο αριθμών που περιέχεται σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε κάποιο σημείο του $[a, b]$ είναι οριακό σημείο του A. Αποδείξτε το με δύο τρόπους:

(δ) Χρησιμοποιώντας τη μορφή που έχουμε ήδη αποδείξει στο κείμενο. Υπόδειξη: Αφού το A είναι άπειρο, υπάρχουν διακεκριμένοι αριθμοί $x_1, x_2, x_3, \ldots$ στο A.

(ε) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Κιβωτισμένων Διαστημάτων. Υπόδειξη: Αν το $[a, b]$ διαιρεθεί σε δύο διαστήματα, τουλάχιστον ένα πρέπει να περιέχει άπειρα σημεία του A.

31. (α) Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για να αποδείξετε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι άνω φραγμένη στο $[a, b]$. Υπόδειξη: Αν η f δεν είναι άνω φραγμένη, τότε υπάρχουν σημεία x_n στο $[a, b]$ με $f(x_n) > n$.

(β) Επίσης, χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για να αποδείξετε ότι, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό (βλ. Κεφάλαιο 8, Παράρτημα).

****32.** (α) Έστω $\{a_n\}$ η ακολουθία

$$\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{2}{4},\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{1}{5},\ \tfrac{2}{5},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{2}{6},\ \ldots.$$

Έστω ότι $0 \leq a < b \leq 1$. Θέτουμε $N(n, a, b)$ το πλήθος των ακεραίων $j \leq n$, για τους οποίους το a_j ανήκει στο (a, b). (Έτσι, $N(2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 2$, και $N(4, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = 3$.) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n; a, b)}{n} = b - a.$$

(β) Μια ακολουθία $\{a_n\}$ αριθμών στο $[0, 1]$ λέγεται **ομοιόμορφα κατανεμημένη** στο $[0, 1]$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, a, b)}{n} = b - a$$

για κάθε a και b με $0 \leq a < b \leq 1$. Αποδείξτε ότι, αν s είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$, και η $\{a_n\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$, τότε

$$\int_0^1 s = \lim_{n\to\infty} \frac{s(a_1) + \cdots + s(a_n)}{n}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι αν η $\{a_n\}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1]$ και η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, τότε

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_1) + \cdots + f(a_n)}{n}.$$

****33.** (α) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε το $\lim_{y\to a} f(y)$ να υπάρχει για κάθε a στο $[0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ αποδείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος μόνο σημεία a στο $[0, 1]$ με $|\lim_{y\to a} f(y) - f(a)| > \varepsilon$. Υπόδειξη: Δείξτε ότι το σύνολο αυτών των σημείων δεν μπορεί να έχει ένα οριακό σημείο x, δείχνοντας ότι το $\lim_{y\to x} f(y)$ δεν θα υπήρχε.

(β) Αποδείξτε ότι, με την ορολογία του Προβλήματος 21-5, το σύνολο των σημείων όπου η f είναι ασυνεχής είναι αριθμήσιμο. Αυτό απαντά οριστικά στο ερώτημα του Προβλήματος 6-17. Αν η f έχει μόνο αιρόμενες ασυνέχειες, τότε η f είναι συνεχής εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων και, ειδικότερα, η f δεν μπορεί να είναι παντού ασυνεχής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23 ΣΕΙΡΕΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε τις ακολουθίες με την πρόθεση να μελετήσουμε τα «αθροίσματά» τους

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

σε αυτό το κεφάλαιο. Αυτό όμως δεν είναι κάτι που γίνεται τελείως άμεσα, γιατί το άθροισμα απείρων το πλήθος αριθμών δεν έχει μέχρι τώρα οριστεί. Αυτό που μπορούμε να ορίσουμε είναι τα «μερικά αθροίσματα»

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$

ενώ το άπειρο άθροισμα θα πρέπει ίσως να οριστεί με τη βοήθεια αυτών των μερικών αθροισμάτων. Για καλή μας τύχη, ο μηχανισμός για να διαμορφώσουμε αυτόν τον ορισμό έχει ήδη αναπτυχθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για να υπάρχουν κάποιες ελπίδες για τον υπολογισμό του απείρου αθροίσματος $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ τα μερικά αθροίσματα s_n θα έπρεπε να παριστάνουν όλο και πιο κοντινές προσεγγίσεις καθώς το n γίνεται όλο και πιο μεγάλο. Ο τελευταίος ισχυρισμός ισοδυναμεί με κάτι παραπάνω από έναν ακατάστατο ορισμό ορίων: το «άπειρο άθροισμα» $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ πρέπει να είναι το $\lim_{n\to\infty} s_n$. Αυτή η προσέγγιση αφήνει αναγκαστικά αόριστο το «άθροισμα» πολλών ακολουθιών, γιατί η ακολουθία $\{s_n\}$ μπορεί ευκολότατα να μην έχει όριο. Για παράδειγμα, η ακολουθία

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

με $a_n = (-1)^{n+1}$ δίνει την καινούργια ακολουθία

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1, \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 0, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1, \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \\ &\ldots, \end{aligned}$$

για την οποία το $\lim_{n\to\infty} s_n$ δεν υπάρχει. Αν και υπάρχουν κάποιες έξυπνες επεκτάσεις του ορισμού που δίνουμε εδώ (βλ. Προβλήματα 12 και 24-20), μοιάζει αναπόφευκτο το ότι μερικές ακολουθίες δεν θα έχουν αθροίσματα. Για αυτόν το λόγο, ένας γενικά αποδεκτός ορισμός του αθροίσματος μιας ακολουθίας θα έπρεπε να περιέχει, ως ουσιαστική συνιστώσα, κάποια ορολογία που να διακρίνει τις ακολουθίες των οποίων τα αθροίσματα μπορούν να οριστούν από τις λιγότερο τυχερές ακολουθίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **αθροίσιμη** αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει, όπου

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το $\lim_{n\to\infty} s_n$ συμβολίζεται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{(λιγότερο τυπικά, με } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\text{)}$$

και λέγεται το **άθροισμα** της ακολουθίας $\{a_n\}$.

Η ορολογία που εγκαινιάσαμε σε αυτόν τον ορισμό αντικαθίσταται συνήθως με λιγότερο ακριβείς εκφράσεις· ο ίδιος ο τίτλος αυτού του κεφαλαίου είναι παρμένος από αυτήν την καθημερινή γλώσσα. Ένα άπειρο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συνήθως λέγεται *σειρά*, όπου η λέξη «σειρά» δίνει έμφαση στη σχέση που υπάρχει με την ακολουθία $\{a_n\}$. Αντί να λέμε ότι η $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη ή όχι, λέμε συνήθως ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή όχι. Αυτή η ορολογία είναι κατά κάποιον τρόπο ιδιόρρυθμη, γιατί το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ στην καλύτερη περίπτωση συμβολίζει έναν αριθμό (άρα δεν μπορεί να «συγκλίνει»), ενώ δεν συμβολίζει απολύτως τίποτα αν η $\{a_n\}$ δεν είναι αθροίσιμη. Παρ' όλα αυτά, αυτή η μη τυπική γλώσσα είναι εύχρηστη και καθιερωμένη, και είναι απίθανο να οδηγήσει σε λογικές παρανοήσεις.

Μερικές στοιχειώδεις αριθμητικές πράξεις μεταξύ απείρων σειρών είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Είναι μια απλή άσκηση να δείξετε ότι, αν οι $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι αθροίσιμες, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Προς το παρόν αυτές οι ισότητες δεν είναι και πολύ ενδιαφέρουσες, γιατί δεν έχουμε παραδείγματα αθροίσιμων ακολουθιών (εκτός από τα τετριμμένα παραδείγματα στα οποία οι όροι είναι τελικά όλοι 0). Προτού παρουσιάσουμε μια αθροίσιμη ακολουθία, θα αναφέρουμε κάποιες γενικές συνθήκες αθροισιμότητας.

Υπάρχει μια αναγκαία και ικανή συνθήκη αθροισιμότητας που μπορούμε να την αναφέρουμε αμέσως. Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη αν και μόνο αν η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει, το οποίο συμβαίνει, σύμφωνα με το Θεώρημα 22-3, αν και μόνο αν $\lim_{m,n\to\infty}(s_m - s_n) = 0$. Αυτή η συνθήκη μπορεί να μεταγλωττιστεί με τη βοήθεια της αρχικής ακολουθίας ως εξής:

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ CAUCHY Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη αν και μόνο αν

$$\lim_{m,n\to\infty}(a_{n+1} + \cdots + a_m) = 0.$$

Αν και το κριτήριο του Cauchy έχει θεωρητική αξία, δεν είναι πολύ χρήσιμο για να αποφανθούμε για την αθροισιμότητα κάποιας συγκεκριμένης ακολουθίας. Μια απλή όμως συνέπεια του κριτηρίου του Cauchy μας παρέχει μια *αναγκαία* συνθήκη αθροισιμότητας που είναι πολύ σημαντική ώστε να αξίζει να αναφερθεί ρητά.

Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΜΗΔΕΝΙΣΜΟΥ Αν η $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη, τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Αυτή η συνθήκη προκύπτει από το κριτήριο του Cauchy αν πάρουμε $m = n + 1$· αποδεικνύεται όμως και απευθείας ως εξής: Αν $\lim_{n\to\infty} s_n = l$, τότε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}\\ &= l - l = 0.\end{aligned}$$

Δυστυχώς, αυτή η συνθήκη απέχει πολύ από το να είναι ικανή. Για παράδειγμα, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, αλλά η ακολουθία $\{1/n\}$ δεν είναι αθροίσιμη· πράγματι, η ομαδοποίηση των αριθμών $1/n$ που ακολουθεί, δείχνει ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ δεν είναι φραγμένη:

$$1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}(2\text{ όροι, καθένας} \geq \frac{1}{4})} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}(4\text{ όροι, καθένας} \geq \frac{1}{8})} + \underbrace{\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}(8\text{ όροι, καθένας} \geq \frac{1}{16})} + \cdots.$$

Η μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το παράδειγμα —ένα έξυπνο κόλπο που θα μπορούσε κανείς να μην το σκεφτεί ποτέ— φανερώνει την ανάγκη για κάποιες πιο τυποποιημένες μεθόδους προσέγγισης αυτών των προβλημάτων. Αυτές οι μέθοδοι θα αναπτυχθούν σύντομα (μια από αυτές θα μας δώσει μια άλλη απόδειξη του ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ δεν συγκλίνει) αλλά είναι απαραίτητο να δώσουμε πρώτα μερικά παραδείγματα σειρών που συγκλίνουν.

Η πιο σημαντική από όλες τις σειρές είναι η «γεωμετρική σειρά»

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots.$$

Μόνο οι περιπτώσεις $|r| < 1$ είναι ενδιαφέρουσες, γιατί αν $|r| \geq 1$ οι όροι της σειράς δεν τείνουν στο 0. Αυτές τις σειρές μπορούμε να τις χειριστούμε, γιατί τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

μπορούν να πάρουν απλούστερη μορφή. Οι δύο ισότητες

$$\begin{aligned}s_n &= 1 + r + r^2 + \cdots + r^n\\ rs_n &= \quad r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1}\end{aligned}$$

οδηγούν στην

$$s_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

ή

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

(η διαίρεση με $1 - r$ επιτρέπεται γιατί δεν εξετάζουμε την περίπτωση $r = 1$). Τώρα $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, αφού $|r| < 1$. Έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}, \qquad |r| < 1.$$

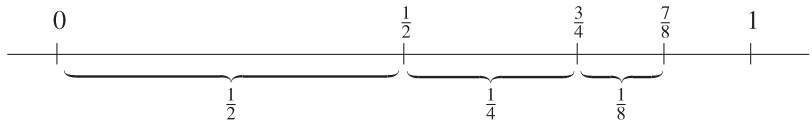
Ειδικότερα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

δηλαδή,

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots = 1,$$

ένα άπειρο άθροισμα που μπορούμε πάντοτε να θυμόμαστε από την εικόνα στο Σχήμα 1.



ΣΧΗΜΑ 1

Ειδικές καθώς είναι, οι γεωμετρικές σειρές αποτελούν κλασικά παραδείγματα από τα οποία θα εξάγουμε σπουδαία κριτήρια αθροισιμότητας.

Για λίγο θα εξετάσουμε μόνο ακολουθίες $\{a_n\}$ με όλα τα $a_n \geq 0$. Τέτοιες ακολουθίες λέγονται **μη αρνητικές**. Αν $\{a_n\}$ είναι μια μη αρνητική ακολουθία, τότε η ακολουθία $\{s_n\}$ είναι προφανώς μη φθίνουσα. Αυτή η παρατήρηση, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 22-2, μας δίνει ένα απλούστατο τεστ αθροισιμότητας:

ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ ΦΡΑΓΜΕΝΟΥ Μια μη αρνητική ακολουθία $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των μερικών αθροισμάτων s_n είναι φραγμένο.

Από μόνο του, αυτό το κριτήριο δεν βοηθά και πολύ —το να αποφασίσουμε αν το σύνολο όλων των s_n είναι φραγμένο ή όχι είναι ακριβώς αυτό που δεν είμαστε σε θέση να κάνουμε. Από την άλλη πλευρά, αν έχουμε ήδη στη διάθεσή μας κάποια άλλη συγκλίνουσα σειρά για να συγκρίνουμε, αυτό το κριτήριο μπορεί να μας δώσει ένα αποτέλεσμα που η ευκολία του είναι τελείως δυσανάλογη με τη σημασία του (είναι η βάση για όλα σχεδόν τα άλλα κριτήρια).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ) Έστω ότι

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τότε, αν η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει και για την $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$
$$t_n = b_1 + \cdots + b_n,$$

τότε

$$0 \leq s_n \leq t_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Αλλά η $\{t_n\}$ είναι φραγμένη, αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Άρα και η $\{s_n\}$ είναι φραγμένη· επομένως, από το κριτήριο του φραγμένου, η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. ∎

Πολύ συχνά το κριτήριο σύγκρισης χρησιμοποιείται για να αναλύσουμε πολύπλοκες στην όψη σειρές, στις οποίες το μεγαλύτερο μέρος της πολυπλοκότητας είναι μη ουσιώδες. Για παράδειγμα, η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2}$$

συγκλίνει γιατί

$$0 \leq \frac{2 + \sin^3(n+1)}{2^n + n^2} < \frac{3}{2^n},$$

και η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

είναι συγκλίνουσα (γεωμετρική) σειρά.

Ομοίως, θα περίμενε κανείς από τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + \sin^2 n^3}$$

να συγκλίνει, γιατί ο n-οστός όρος της σειράς στην πράξη ισούται με $1/2^n$ για μεγάλο n, ενώ θα περιμέναμε από τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

να αποκλίνει, γιατί το $(n+1)/(n^2+1)$ είναι πρακτικά ίσο με $1/n$ για μεγάλα n. Αυτά τα δεδομένα μπορούν να εξαχθούν απευθείας από το επόμενο θεώρημα, που είναι ένα άλλο είδος «κριτηρίου σύγκρισης».

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ) Αν $a_n, b_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c \neq 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Επειδή $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = c$, υπάρχει κάποιο N έτσι ώστε

$$a_n \leq 2cb_n \qquad \text{για } n \geq N.$$

Αλλά η ακολουθία $2c \sum_{n=N}^{\infty} b_n$ σίγουρα συγκλίνει. Τότε, το Θεώρημα 1 δείχνει ότι η $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και αυτό συνεπάγεται σύγκλιση όλης της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, η οποία έχει μόνο πεπερασμένο πλήθος επιπρόσθετων όρων.

Το αντίστροφο προκύπτει αμέσως, αφού ισχύει επίσης $\lim_{n\to\infty} b_n/a_n = 1/c \neq 0$. ∎

Το κριτήριο σύγκρισης μας δίνει και άλλα σημαντικά κριτήρια όπου χρησιμοποιούμε ως καταλύτες σειρές που έχουμε ήδη μελετήσει. Αν διαλέξουμε τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, την *κατ' εξοχήν* συγκλίνουσα σειρά, παίρνουμε το πιο σημαντικό από όλα τα κριτήρια αθροισιμότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΛΟΓΟΥ) Έστω $a_n > 0$ για κάθε n, και ας υποθέσουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $r < 1$. Από την άλλη πλευρά, αν $r > 1$, τότε οι όροι a_n δεν είναι φραγμένοι, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. (Παρατηρήστε ότι για αυτόν το λόγο είναι ουσιαστικό να βρούμε το $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ και όχι το $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$!)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι $r < 1$. Διαλέγουμε έναν αριθμό s με $r < s < 1$. Η υπόθεση

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$$

μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει κάποιος N τέτοιος ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s \qquad \text{για } n \geq N.$$

Αυτό μπορεί να γραφεί και ως

$$a_{n+1} \leq sa_n \qquad \text{για } n \geq N.$$

Άρα

$$\begin{aligned} a_{N+1} &\leq sa_N, \\ a_{N+2} &\leq sa_{N+1} \leq s^2 a_N, \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq s^k a_N. \end{aligned}$$

Αφού η $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_N s^k = a_N \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ συγκλίνει, το κριτήριο σύγκρισης δείχνει ότι η

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{N+k}$$

συγκλίνει. Από αυτό έπεται η σύγκλιση ολόκληρης της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Η περίπτωση $r > 1$ είναι ακόμα πιο εύκολη. Αν $1 < s < r$, τότε υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq s \qquad \text{για } n \geq N,$$

που σημαίνει ότι

$$a_{N+k} \geq a_N s^k \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

οπότε οι όροι της σειράς δεν είναι φραγμένοι. ∎

Ως απλή εφαρμογή του κριτηρίου λόγου, ας εξετάσουμε τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$. Αν θέσουμε $a_n = 1/n!$ παίρνουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ συγκλίνει. Αν αντί για αυτήν πάρουμε τη σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$, όπου r είναι κάποιος σταθερός θετικός αριθμός, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{r^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{r}{n+1} = 0,$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} r^n/n!$ συγκλίνει. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n!} = 0,$$

κάτι που έχει ήδη αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 16 (η απόδειξη που είχαμε δώσει εκεί βασιζόταν στις ίδιες ιδέες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο κριτήριο λόγου). Τέλος, αν θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n} = \lim_{n\to\infty} r \cdot \frac{n+1}{n} = r,$$

γιατί $\lim_{n\to\infty} (n+1)/n = 1$. Αυτό δείχνει ότι, αν $0 \le r < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ συγκλίνει, και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0.$$

(Αυτό το αποτέλεσμα προφανώς ισχύει και όταν $-1 < r \le 0$.) Είναι μια καλή άσκηση να αποδείξετε απευθείας αυτό το όριο, χωρίς να χρησιμοποιήσετε ενδιαμέσως το κριτήριο λόγου.

Αν και το κριτήριο λόγου έχει τεράστια θεωρητική σημασία, ως πραγματικό εργαλείο είναι συχνά απογοητευτικό. Ένα μειονέκτημα του κριτηρίου λόγου είναι το γεγονός ότι το $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ μπορεί να μην υπολογίζεται εύκολα, ή και να μην υπάρχει. Μια πιο σοβαρή αδυναμία που εμφανίζεται με εξοργιστική συχνότητα είναι ότι το όριο θα μπορούσε να είναι ίσο με 1. Η περίπτωση $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ είναι ακριβώς αυτή που είναι απροσδιόριστη: η $\{a_n\}$ μπορεί να μην είναι αθροίσιμη (για παράδειγμα, αν $a_n = 1/n$), αλλά μπορεί και να είναι. Το αμέσως επόμενο κριτήριό μας θα δείξει, π.χ., ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)^2$ συγκλίνει, αν και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Αυτό το κριτήριο μας παρέχει μια τελείως διαφορετική μέθοδο για να αποφαινόμαστε για τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών —όπως και το κριτήριο λόγου, είναι μια άμεση συνέπεια του κριτηρίου σύγκρισης, αλλά η σειρά που διαλέγουμε για τη σύγκριση είναι τελείως πρωτότυπη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 (ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ) Έστω ότι η f είναι θετική και φθίνουσα στο $[1, \infty)$, και ότι $f(n) = a_n$ για κάθε n. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν το όριο

$$\int_1^{\infty} f = \lim_{A\to\infty} \int_1^A f$$

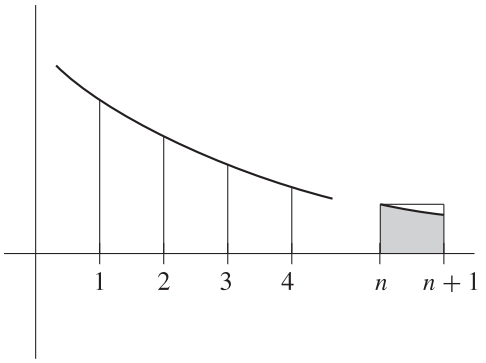
υπάρχει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η ύπαρξη του $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση της σειράς

$$\int_1^2 f + \int_2^3 f + \int_3^4 f + \cdots.$$

Τώρα, αφού η f είναι φθίνουσα έχουμε (Σχήμα 2)

$$f(n+1) < \int_n^{n+1} f < f(n).$$



ΣΧΗΜΑ 2

Το πρώτο μισό αυτής της διπλής ανισότητας δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ μπορεί να συγκριθεί με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$, πράγμα που αποδεικνύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ (και επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) συγκλίνει αν υπάρχει το $\lim_{A\to\infty} \int_1^A$.

Το δεύτερο μισό της ανισότητας δείχνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f$ μπορεί να συγκριθεί με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $\lim_{A\to\infty} \int_1^A f$ πρέπει να υπάρχει αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. ∎

Θα δώσουμε μόνο ένα παράδειγμα εφαρμογής του κριτηρίου του ολοκληρώματος, το οποίο όμως λύνει το πρόβλημα της σύγκλισης, για άπειρες το πλήθος σειρές ταυτόχρονα. Αν $p > 0$, η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ είναι ισοδύναμη, από το κριτήριο του ολοκληρώματος, με την ύπαρξη του

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx.$$

Τώρα

$$\int_1^A \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(p-1)} \cdot \dfrac{1}{A^{p-1}} + \dfrac{1}{p-1}, & p \neq 1 \\ \log A, & p = 1. \end{cases}$$

Αυτό δείχνει ότι το $\lim_{A\to\infty} \int_1^A 1/x^p\, dx$ υπάρχει αν $p > 1$, αλλά όχι αν $p \leq 1$. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ συγκλίνει ακριβώς όταν $p > 1$. Ειδικότερα, η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει.

Τα κριτήρια που μελετήσαμε έως τώρα εφαρμόζονται μόνο σε μη αρνητικές ακολουθίες, μπορούμε όμως να εξετάσουμε και τις μη θετικές ακολουθίες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Πραγματικά, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} -a_n\right),$$

ό,τι έχουμε πει για τις μη αρνητικές ακολουθίες μεταφέρεται αυτομάτως και στις μη θετικές. Οι ακολουθίες που περιέχουν και θετικούς και αρνητικούς όρους είναι μια άλλη ιστορία.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μια ακολουθία που περιέχει και θετικούς και αρνητικούς όρους, μπορούμε αντί για αυτή να εξετάσουμε την ακολουθία $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, που όλοι οι όροι της είναι μη αρνητικοί. Αν ανέμελα αγνοήσουμε την εκδοχή να έχουμε πετάξει όλες τις ενδιαφέρουσες πληροφορίες για την αρχική ακολουθία, μπορούμε να προχωρήσουμε πλέκοντας το εγκώμιο εκείνων των ακολουθιών που με αυτήν τη διαδικασία μετατρέπονται σε συγκλίνουσες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέγεται **απολύτως συγκλίνουσα** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλίνουσα. (Μιλώντας πιο τυπικά, η ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **απολύτως αθροίσιμη** αν η ακολουθία $\{|a_n|\}$ είναι αθροίσιμη.)

Αν και δεν έχουμε το δικαίωμα να περιμένουμε πολλά πράγματα από αυτόν τον ορισμό, αποδεικνύεται εξαιρετικά σημαντικός. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι ο ορισμός τουλάχιστον δεν είναι τελείως άχρηστος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά είναι συγκλίνουσα. Επίσης, μια σειρά συγκλίνει απολύτως, αν και μόνο αν η σειρά που σχηματίζεται από τους θετικούς της όρους και η σειρά που σχηματίζεται από τους αρνητικούς της όρους, συγκλίνουν και οι δύο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε από το κριτήριο του Cauchy,

$$\lim_{m,n\to\infty} (|a_{n+1}| + \cdots + |a_m|) = 0.$$

Αφού

$$|a_{n+1} + \cdots + a_m| \le |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|,$$

έπεται ότι

$$\lim_{m,n\to\infty} (a_{n+1} + \cdots + a_m) = 0,$$

άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, θέτουμε

$$a_n{}^+ = \begin{cases} a_n, & \text{αν } a_n \ge 0 \\ 0, & \text{αν } a_n \le 0, \end{cases}$$

$$a_n{}^- = \begin{cases} a_n, & \text{αν } a_n \le 0 \\ 0, & \text{αν } a_n \ge 0, \end{cases}$$

οπότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ είναι η σειρά που σχηματίζουν οι θετικοί όροι της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ είναι η σειρά που σχηματίζουν οι αρνητικοί της όροι.

Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$ συγκλίνουν και οι δύο, τότε η

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n{}^+ - (a_n{}^-)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^-$$

επίσης συγκλίνει, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

Από την άλλη πλευρά, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε, όπως έχουμε ήδη αποδείξει, συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Άρα οι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^+ = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{-} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\right)$$

συγκλίνουν και οι δύο. ∎

Από το Θεώρημα 5 έπεται ότι κάθε συγκλίνουσα σειρά με θετικούς όρους μπορεί να μας δώσει άπειρες άλλες συγκλίνουσες σειρές, αρκεί να βάλουμε αρνητικά πρόσημα στην τύχη. Δεν κατασκευάζονται όμως όλες οι συγκλίνουσες σειρές με αυτόν τον τρόπο —υπάρχουν σειρές που συγκλίνουν αλλά δεν συγκλίνουν απολύτως. Τέτοιες σειρές λέγονται **υπό συνθήκη συγκλίνουσες**. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο σύγκλισης που να εφαρμόζεται ειδικά σε ακολουθίες με θετικούς και αρνητικούς όρους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ LEIBNIZ) Έστω ότι

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0,$$

και ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots$$

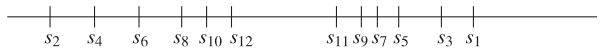
συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Το Σχήμα 3 περιγράφει τις σχέσεις που θα αποδείξουμε ότι ισχύουν ανάμεσα στα μερικά αθροίσματα:

(1) $s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots$,

(2) $s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots$,

(3) $s_k \leq s_l$ αν k άρτιος και l περιττός.



ΣΧΗΜΑ 3

Για να αποδείξουμε τις πρώτες δύο ανισότητες, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (1)\quad s_{2n+2} &= s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \\ &\geq s_{2n}, \qquad \text{αφού } a_{2n+1} \geq a_{2n+2} \\ (2)\quad s_{2n+3} &= s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \\ &\leq s_{2n+1}, \qquad \text{αφού } a_{2n+2} \geq a_{2n+3}. \end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την τρίτη ανισότητα, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-1} - a_{2n} \\ &\leq s_{2n-1} \qquad \text{αφού } a_{2n} \geq 0. \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε μια ειδική περίπτωση της (3), αλλά αν πάρουμε υπόψη τις (1) και (2) η γενική περίπτωση είναι εύκολη: αν ο k είναι άρτιος και ο l περιττός, επιλέγουμε n τέτοιο ώστε

$$2n \geq k \quad \text{και} \quad 2n - 1 \geq l\cdot$$

τότε

$$s_k \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_l,$$

που αποδεικνύει την (3).

Τώρα, η ακολουθία $\{s_{2n}\}$ συγκλίνει, γιατί είναι μη φθίνουσα και άνω φραγμένη (από το s_l για τυχαίο l περιττό). Έστω

$$\alpha = \sup\{s_{2n}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n}.$$

Ομοίως, έστω

$$\beta = \inf\{s_{2n+1}\} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}.$$

Από την (3) έπεται ότι $\alpha \le \beta$. Αφού

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

τελικά πρέπει να ισχύει $\alpha = \beta$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} s_n$. ∎

Το κλασικό παράδειγμα που παίρνουμε από το Θεώρημα 6 είναι η σειρά

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \cdots,$$

η οποία είναι συγκλίνουσα αλλά *όχι* απολύτως συγκλίνουσα (γιατί η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ δεν συγκλίνει). Αν συμβολίσουμε το άθροισμα αυτής της σειράς με x, τα τεχνάσματα που ακολουθούν οδηγούν σε ένα τελείως παράλογο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
x &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \\
&= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \\
&\quad \text{(το μοντέλο εδώ είναι ότι κάθε θετικός όρος ακολουθείται από δύο αρνητικούς)} \\
&= (1 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6}) - \tfrac{1}{8} + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10}) - \tfrac{1}{12} + (\tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14}) - \tfrac{1}{16} + \cdots \\
&= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \cdots \\
&= \tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots) \\
&= \tfrac{1}{2}x,
\end{aligned}$$

άρα $x = x/2$, που σημαίνει ότι $x = 0$. Από την άλλη πλευρά, είναι εύκολο να δούμε ότι $x \neq 0$: το μερικό άθροισμα s_2 είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ και η απόδειξη του Θεωρήματος του Leibniz μας βεβαιώνει ότι $x \ge s_2$.

Αυτή η αντίφαση έχει τη βάση της σε ένα βήμα που θεωρεί δεδομένο το ότι όσες πράξεις ισχύουν για πεπερασμένα αθροίσματα αναγκαστικά θα έχουν το ανάλογό τους και για άπειρα αθροίσματα. Είναι αλήθεια ότι η ακολουθία

$$\{b_n\} = 1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{6},\ -\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{10},\ -\tfrac{1}{12},\ \ldots$$

περιέχει όλους τους αριθμούς της ακολουθίας

$$\{a_n\} = 1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ -\tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5},\ -\tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{7},\ -\tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{9},\ -\tfrac{1}{10},\ \tfrac{1}{11},\ -\tfrac{1}{12},\ \ldots.$$

Πραγματικά, η $\{b_n\}$ είναι μια **αναδιάταξη** της $\{a_n\}$ με την εξής ακριβή έννοια: κάθε $b_n = a_{f(n)}$ όπου f είναι μια συνάρτηση που «μεταθέτει» τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή, κάθε φυσικός αριθμός m είναι $f(n)$ για ακριβώς ένα n. Στο παράδειγμά μας

$f(2m+1) = 3m+1$ (οι όροι $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots$ πηγαίνουν στην 1η, 4η, 7η, … θέση),

$f(4m) = 3m$ (οι όροι $-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{12}, \ldots$ πηγαίνουν στην 3η, 6η, 9η, … θέση),

$f(4m+2) = 3m+2$ (οι όροι $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{10}, \ldots$ πηγαίνουν στη 2η, 5η, 8η, … θέση).

Φυσικά, δεν υπάρχει κανένας λόγος να υποθέσουμε ότι το $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι ίσο με το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: αυτά τα αθροίσματα είναι, εξ ορισμού, τα $\lim_{n\to\infty}(b_1+\cdots+b_n)$ και $\lim_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)$, άρα η συγκεκριμένη διάταξη των όρων πρέπει να διαδραματίζει κάποιο ρόλο. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ δεν αποτελεί εξαίρεση από αυτήν την άποψη· πραγματικά, η συμπεριφορά της είναι η τυπική των σειρών που δεν συγκλίνουν απολύτως —το επόμενο συμπέρασμα (που είναι περισσότερο ένα μεγάλο αντιπαράδειγμα παρά ένα θεώρημα) δείχνει πόσο κακές είναι οι υπό συνθήκη συγκλίνουσες σειρές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως, τότε για κάθε αριθμό α υπάρχει μια αναδιάταξη $\{b_n\}$ της $\{a_n\}$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Συμβολίζουμε με $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ τη σειρά που σχηματίζεται από τους θετικούς όρους της $\{a_n\}$ και με $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ τη σειρά των αρνητικών όρων. Από το Θεώρημα 5 προκύπτει ότι τουλάχιστον μία από αυτές τις σειρές αποκλίνει. Στην πραγματικότητα, και οι δύο πρέπει να αποκλίνουν, γιατί αν η μια έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα και η άλλη όχι, τότε η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ θα είχε και αυτή μη φραγμένα μερικά αθροίσματα, κάτι που αντιφάσκει με την υπόθεση ότι συγκλίνει.

Έστω τώρα α ένας αριθμός. Υποθέτουμε, για να απλουστεύσουμε, ότι $\alpha > 0$ (η απόδειξη για $\alpha < 0$ θα είναι μια απλή τροποποίηση). Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ δεν συγκλίνει, υπάρχει ένας αριθμός N τέτοιος ώστε

$$\sum_{n=1}^{N} p_n > \alpha.$$

Επιλέγουμε ως N_1 το *μικρότερο* N με αυτήν την ιδιότητα. Αυτό σημαίνει ότι

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n \le \alpha,$$

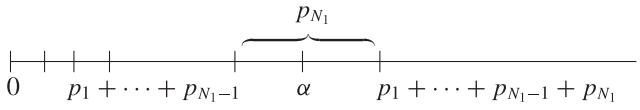
$$\text{αλλά}\quad (2)\quad \sum_{n=1}^{N_1} p_n > \alpha.$$

Τότε αν

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N_1} p_n,$$

έχουμε

$$S_1 - \alpha \le p_{N_1}.$$



ΣΧΗΜΑ 4

Αυτή η σχέση, που είναι προφανής από το Σχήμα 4, έπεται άμεσα από την ισότητα (1):

$$S_1 - \alpha \le S_1 - \sum_{n=1}^{N_1-1} p_n = p_{N_1}.$$

Στο άθροισμα S_1 προσθέτουμε ακριβώς τόσους αρνητικούς όρους ώστε να πάρουμε ένα καινούργιο άθροισμα T_1, μικρότερο από α. Με άλλα λόγια, διαλέγουμε τον μικρότερο ακέραιο M_1 για τον οποίο

$$T_1 = S_1 + \sum_{n=1}^{M_1} q_n < \alpha.$$

Όπως πριν, έχουμε

$$\alpha - T_1 \le -q_{M_1}.$$

Συνεχίζουμε τώρα αυτήν τη διαδικασία επ' άπειρον, παίρνοντας αθροίσματα διαδοχικά μεγαλύτερα και μικρότερα από α, κάθε φορά διαλέγοντας το μικρότερο δυνατό N_k ή M_k. Η ακολουθία

$$p_1, \dots, p_{N_1}, q_1, \dots, q_{M_1}, p_{N_1+1}, \dots, p_{N_2}, \dots$$

είναι μια αναδιάταξη της $\{a_n\}$. Τα μερικά αθροίσματα αυτής της αναδιάταξης αυξάνουν μέχρι το S_1, μετά φθίνουν μέχρι το T_1, μετά αυξάνουν μέχρι το S_2, μετά φθίνουν μέχρι το T_2, κτλ. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε απλώς ότι τα $|S_k - \alpha|$ και $|T_k - \alpha|$ είναι μικρότερα ή ίσα από p_{N_k} ή $-q_{M_k}$, αντίστοιχα, και ότι αυτοί οι όροι, ως μέλη της αρχικής ακολουθίας $\{a_n\}$, πρέπει να τείνουν στο 0, αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. ∎

Μαζί με το Θεώρημα 7, το επόμενο θεώρημα ολοκληρώνει τη διάκριση ανάμεσα στις υπό συνθήκη και τις απολύτως συγκλίνουσες σειρές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, και $\{b_n\}$ είναι τυχαία αναδιάταξη της $\{a_n\}$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και αυτή (απολύτως), και

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Συμβολίζουμε τα μερικά αθροίσματα της $\{a_n\}$ με s_n, και τα μερικά αθροίσματα της $\{b_n\}$ με t_n.

Παίρνουμε ένα $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, υπάρχει κάποιος N τέτοιος ώστε

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \right| < \varepsilon.$$

Επίσης, αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, μπορούμε να διαλέξουμε και ένα N τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| - (|a_1| + \cdots + |a_N|) < \varepsilon,$$

δηλαδή, τέτοιο ώστε

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots < \varepsilon.$$

Διαλέγουμε τώρα M τόσο μεγάλο ώστε καθένας από τους $a_1, \ldots, a_N$ να εμφανίζεται ανάμεσα στους $b_1, \ldots, b_M$. Τότε για $m > M$, η διαφορά $t_m - s_N$ είναι το άθροισμα κάποιων a_i, *στα οποία δεν περιέχονται οι* $a_1, \ldots, a_N$. Επομένως,

$$|t_m - s_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots .$$

Έτσι, αν $m > M$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - t_m \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N - (t_m - s_N) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_N \right| + |t_m - s_N| \\ &< \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει στο $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Για να δείξουμε ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως, σημειώστε ότι η $\{|b_n|\}$ είναι μια αναδιάταξη της $\{|a_n|\}$. Αφού η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει απολύτως, από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος, συγκλίνει απολύτως και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. ∎

Η απόλυτη σύγκλιση είναι εξίσου σημαντική όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε δύο σειρές. Αντίθετα από ό,τι συμβαίνει με την πρόσθεση, όπου έχουμε τον απλό τύπο

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; + \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

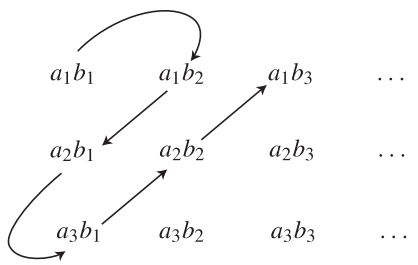
δεν υπάρχει ένας τόσο προφανής υποψήφιος τύπος για το γινόμενο

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right) = (a_1 + a_2 + \cdots) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots).$$

Θα φαινόταν ότι θα έπρεπε να αθροίσουμε όλα τα γινόμενα $a_i b_j$. Η δυσκολία είναι πως αυτά σχηματίζουν μια διδιάστατη διάταξη, παρά μια ακολουθία:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \ldots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \ldots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Παρ' όλα αυτά, όλα τα στοιχεία αυτής της διάταξης μπορούν να διαταχθούν σε μια ακολουθία. Η εικόνα που ακολουθεί δείχνει έναν τρόπο να γίνει αυτό, και φυσικά υπάρχουν και πολλοί (άπειροι) άλλοι τρόποι.



Έστω ότι η $\{c_n\}$ είναι μία από αυτές τις ακολουθίες που περιέχουν το κάθε γινόμενο $a_i b_j$ μία φορά. Τότε θα μπορούσαμε, ως αδαείς, να περιμένουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Αλλά αυτό *δεν* είναι αληθές (βλ. Πρόβλημα 10), και ούτε μας εκπλήσσει πραγματικά, αφού δεν έχουμε πει τίποτε για τη συγκεκριμένη διάταξη των όρων. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το αποτέλεσμα αυτό πράγματι ισχύει όταν δεν ενδιαφέρει η διάταξη των όρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 Αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν απολύτως, και η $\{c_n\}$ είναι οποιαδήποτε ακολουθία που περιέχει τα γινόμενα $a_i b_j$ για κάθε ζεύγος (i, j), τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Κατ' αρχήν σημειώστε ότι η ακολουθία

$$p_L = \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j|$$

συγκλίνει, αφού οι $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι απολύτως συγκλίνουσες, και αφού το όριο ενός γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων. Επομένως, η $\{p_L\}$ είναι ακολουθία Cauchy, που σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, αν L και L' είναι αρκούντως μεγάλα, τότε

$$\left| \sum_{i=1}^{L'} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L'} |b_j| - \sum_{i=1}^{L} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{L} |b_j| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$(1) \qquad \sum_{i \text{ ή } j > L} |a_i| \cdot |b_j| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Υποθέστε τώρα ότι ο N είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τόσο μεγάλος ώστε οι όροι c_n για $n \leq N$ να περιλαμβάνουν κάθε όρο $a_i b_j$ για $i, j \leq L$. Τότε η διαφορά

$$\sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j$$

αποτελείται από όρους $a_i b_j$ με $i > L$ ή $j > L$, και άρα

$$(2) \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} c_n - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| \leq \sum_{i \text{ ή } j > L} |a_i| \cdot |b_j| < \varepsilon \qquad \text{από την (1).}$$

Αλλά αφού το όριο ενός γινομένου είναι το γινόμενο των ορίων, έχουμε επίσης ότι

$$(3) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right| < \varepsilon$$

για αρκούντως μεγάλο L. Κατά συνέπεια, αν διαλέξουμε το L και μετά το N αρκούντως μεγάλα, θα έχουμε ότι

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{N} c_n \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j - \sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j \right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{L} a_i \cdot \sum_{j=1}^{L} b_j - \sum_{n=1}^{N} c_n\right|$$
$$< 2\varepsilon \qquad \text{από τις (2) και (3),}$$

το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα. ∎

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα θεωρήματά μας που ασχολούνταν μόνο με την αθροισιμότητα, το αποτέλεσμα αυτό μας λέει κάτι για τα ίδια τα αθροίσματα. Μιλώντας γενικά, δεν υπάρχει λόγος να υποθέτουμε ότι ένα δοθέν άπειρο άθροισμα μπορεί να «εκτιμηθεί» από κάτι απλούστερο. Πολλές, όμως, απλές παραστάσεις εξισώνονται με άπειρα αθροίσματα αν χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Taylor. Το Κεφάλαιο 20 μας προσφέρει πολλά παραδείγματα συναρτήσεων για τις οποίες

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_{n,a}(x),$$

όπου $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$. Αυτό είναι σαφώς ισοδύναμο με την

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i,$$

που με τη σειρά της σημαίνει ότι

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i.$$

Ως ειδικά παραδείγματα έχουμε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad |x| \le 1,$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, \quad -1 < x \le 1.$$

(Παρατηρήστε ότι οι σειρές των $\arctan x$ και $\log(1+x)$ δεν συγκλίνουν καν για $|x| > 1$· επιπλέον, όταν $x = -1$, η σειρά για την $\log(1+x)$ γίνεται

$$-1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \cdots$$

η οποία δεν συγκλίνει.)

Για συγκεκριμένες τιμές του x προκύπτουν πολύ εντυπωσιακά αποτελέσματα:

$$0 = \pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \cdots,$$
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$
$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

Αν συγκρίνουμε τις σειρές των $\sin x$ και $\cos x$ λίγο πιο προσεκτικά, καταλαβαίνουμε ότι θα μπορούσαν ίσως να επιτευχθούν πολύ πιο σημαντικά αποτελέσματα. Η σειρά της $\cos x$ είναι ακριβώς αυτή που θα παίρναμε αν παραγωγίζαμε και τις δύο πλευρές της ισότητας

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

όρο προς όρο, αγνοώντας το γεγονός ότι ποτέ δεν αποδείξαμε τίποτα σχετικό με τις παραγώγους απείρων αθροισμάτων. Ομοίως, αν παραγωγίσουμε τυπικά (δηλαδή χωρίς αιτιολόγηση) και τα δύο μέλη του τύπου για την $\cos x$ παίρνουμε τον τύπο $\cos'(x) = -\sin x$, και αν παραγωγίσουμε τον τύπο για την e^x παίρνουμε $\exp'(x) = \exp(x)$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι αυτή η όρο προς όρο παραγώγιση απείρων αθροισμάτων είναι πραγματικά δυνατή σε ορισμένες σημαντικές περιπτώσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμιά από τις σειρές που ακολουθούν. Τα εργαλεία που θα χρειαστείτε είναι το Θεώρημα του Leibniz και τα κριτήρια σύγκρισης, λόγου και ολοκληρώματος. Μερικά παραδείγματα έχουν επιλεγεί με μια δόση κακεντρέχειας· δύο σειρές που μοιάζουν αρκετά μπορεί να χρειάζονται διαφορετικά κριτήρια (μπορεί όμως και όχι). Η υπόδειξη στο τέλος σας συμβουλεύει για τα κριτήρια που μπορείτε να χρησιμοποιήσετε.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2}$.

(ii) $\displaystyle 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$.

(iii) $\displaystyle 1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}}$. (Η άθροιση αρχίζει με $n = 2$, απλώς για να αποφύγουμε τον παράλογο όρο που παίρνουμε για $n = 1$).

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$.

(vii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

(viii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$.

(ix) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

(x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^k}$.

(xi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

(xii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(\log n)^n}$.

(xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$.

(xiv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

(xv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$.

(xvi) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$.

(xvii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(\log n)}$.

(xviii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(xix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

(xx) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο σύγκρισης για τα (i), (v), (vi), (ix), (x), (xi), (xiii), (xiv), (xvii), το κριτήριο λόγου για τα (vii), (xviii), (xix), (xx), και το κριτήριο του ολοκληρώματος για τα (viii), (xv), (xvi).

Τα επόμενα δύο προβλήματα εξετάζουν, με υποδείξεις, κάποιες σειρές που απαιτούν πιο λεπτή ανάλυση από ό,τι αυτές του Προβλήματος 1.

∗**2.** (α) Αν έχετε λύσει με επιτυχία τα παραδείγματα (xix) και (xx) από το Πρόβλημα 1, θα πρέπει να έγινε σαφές ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a^n n!/n^n$ συγκλίνει για $a < e$ και αποκλίνει για $a > e$. Για $a = e$ το κριτήριο λόγου αποτυγχάνει· δείξτε ότι τελικά η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^n n!/n^n$ αποκλίνει, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 22-13.

(β) Εξετάστε πότε η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n/a^n n!$ συγκλίνει, καταφεύγοντας και πάλι στο Πρόβλημα 22-13 όπου το κριτήριο λόγου αποτυγχάνει.

∗**3.** Στο Πρόβλημα 1 παρουσιάστηκαν οι δύο σειρές $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-k}$ και $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-n}$, από τις οποίες η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. Η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}},$$

που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτές τις δύο, αναλύεται στα μέρη (α) και (β).

(α) Δείξτε ότι το $\int_1^\infty e^y/y^y\,dy$ υπάρχει, θεωρώντας τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(e/n)^n$.

(β) Δείξτε ότι η

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$$

συγκλίνει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μια κατάλληλη αντικατάσταση και το μέρος (α).

(γ) Δείξτε ότι η

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log(\log n)}}$$

αποκλίνει, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του ολοκληρώματος. Υπόδειξη: Κάντε την ίδια αντικατάσταση όπως στο μέρος (β), και δείξτε απευθείας ότι το ολοκλήρωμα που προκύπτει αποκλίνει.

4. Αποφασίστε κατά πόσο η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+1/n}}$ συγκλίνει.

5. (α) Αποδείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει απολύτως, το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^3$.

∗(β) Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει για την υπό συνθήκη σύγκλιση.

6. Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα γύρω από το 0, και έστω $a_n = f(1/n)$ (για αρκετά μεγάλο n).

(α) Αποδείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει, τότε $f(0) = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $f'(0)$ και η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει, τότε $f'(0) = 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $f''(0)$ και $f(0) = f'(0) = 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει.

(δ) Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει. Πρέπει να υπάρχει το $f'(0)$;

(ε) Έστω ότι $f(0) = f'(0) = 0$. Πρέπει να συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$;

7. (α) Έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία ακεραίων με $0 \le a_n \le 9$. Αποδείξτε ότι το $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n}$ υπάρχει (και βρίσκεται μεταξύ 0 και 1). (Αυτός, βέβαια, είναι ο αριθμός που συμβολίζουμε συνήθως με $0, a_1a_2a_3a_4\ldots$).

(β) Έστω ότι $0 \le x \le 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μια ακολουθία ακεραίων $\{a_n\}$ με $0 \le a_n \le 9$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n} = x$. Υπόδειξη: Για παράδειγμα, $a_1 = [10x]$ (όπου με $[y]$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι $\le y$).

(γ) Δείξτε ότι, αν η $\{a_n\}$ είναι περιοδική, δηλαδή είναι της μορφής $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1, a_2, \ldots$ τότε ο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ είναι ρητός αριθμός (και βρείτε τον). Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει φυσικά αν η $\{a_n\}$ είναι τελικά περιοδική, δηλαδή αν η ακολουθία $\{a_{N+k}\}$ είναι περιοδική για κάποιο N.

(δ) Αποδείξτε ότι, αν ο $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ είναι ρητός, τότε η $\{a_n\}$ είναι τελικά περιοδική. (Ρίξτε μια ματιά στη διαδικασία υπολογισμού του δεκαδικού αναπτύγματος του p/q —διαιρώντας το p με q βάσει του γνωστού αλγορίθμου διαίρεσης ακεραίων.).

8. Έστω ότι η $\{a_n\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Leibniz. Χρησιμοποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος του Leibniz για να πάρετε την εξής εκτίμηση:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - [a_1 - a_2 + \cdots \pm a_N] \right| < a_{N+1}.$$

9. (α) Αποδείξτε ότι, αν $a_n \geq 0$ και $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $r < 1$, και αποκλίνει αν $r > 1$. (Η απόδειξη μοιάζει πολύ με αυτήν του κριτηρίου λόγου.) Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως «κριτήριο ρίζας». Γενικότερα, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν υπάρχει κάποιο $s < 1$ τέτοιο ώστε όλες, εκτός από πεπερασμένο πλήθος, οι ρίζες $\sqrt[n]{a_n}$ να είναι $\leq s$, και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει αν άπειρες το πλήθος $\sqrt[n]{a_n}$ είναι ≥ 1. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως «εκλεπτυσμένο κριτήριο ρίζας» (υπάρχει και ένα όμοιο εκλεπτυσμένο κριτήριο λόγου). Έπεται ότι, με τον συμβολισμό του Προβλήματος 22-27, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ και αποκλίνει αν $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$· δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα αν $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

(β) Αποδείξτε ότι αν δουλεύει το κριτήριο λόγου, τότε δουλεύει και το κριτήριο ρίζας. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ένα πρόβλημα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε σειρές για τις οποίες το κριτήριο λόγου αποτυγχάνει, ενώ το κριτήριο ρίζας όχι. Για παράδειγμα, το κριτήριο ρίζας αποδεικνύει ότι η σειρά

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + (\tfrac{1}{3})^3 + \cdots$$

συγκλίνει, αν και οι λόγοι των διαδοχικών όρων δεν τείνουν σε κάποιο όριο. Τα περισσότερα παραδείγματα αυτού του τύπου είναι μάλλον τεχνητά, αλλά το κριτήριο ρίζας είναι αναμφίβολα ένα σημαντικό θεωρητικό εργαλείο

10. Για δύο ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$, έστω $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k}$. (Τότε η c_n είναι το άθροισμα των όρων της n-στής διαγωνίου στην εικόνα της σελίδας 440.) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ καλείται το *γινόμενο Cauchy* των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$ δείξτε ότι $|c_n| \geq 1$ και επομένως, το γινόμενο Cauchy δεν συγκλίνει.

11. (α) Θεωρούμε το σύνολο A των φυσικών αριθμών που *δεν* περιέχουν το 9 στη συνήθη τους (με βάση το 10) αναπαράσταση. Δείξτε ότι το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών του A *συγκλίνει*. Υπόδειξη: Πόσους αριθμούς ανάμεσα στο 1 και το 9 περιέχει το A; Πόσους ανάμεσα στο 10 και το 99; κτλ.

(β) Αν B είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών που δεν έχουν *και τα 10 ψηφία* $0, \ldots, 9$ στη συνήθη τους αναπαράσταση, τότε το άθροισμα των αντιστρόφων των αριθμών του B συγκλίνει. (Άρα «οι περισσότεροι» ακέραιοι πρέπει να έχουν και τα 10 ψηφία στην αναπαράστασή τους.)

12. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **αθροίσιμη κατά Cesaro**, με άθροισμα Cesaro l, αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = l$$

(όπου $s_k = a_1 + \cdots + a_k$). Το Πρόβλημα 22-16 δείχνει ότι μια αθροίσιμη ακολουθία είναι αυτομάτως αθροίσιμη κατά Cesaro, με άθροισμα ίσο με το άθροισμα Cesaro. Βρείτε μια ακολουθία που *δεν* είναι αθροίσιμη, αλλά *είναι* αθροίσιμη κατά Cesaro.

13. Έστω ότι $a_n > 0$ και ότι η $\{a_n\}$ είναι αθροίσιμη κατά Cesaro. Έστω ακόμη ότι η ακολουθία $\{na_n\}$ είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Υπόδειξη: Αν $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ και $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i$, αποδείξτε ότι η $s_n - \frac{n}{n+1}\sigma_n$ είναι φραγμένη.

14. Αυτό το πρόβλημα σκιαγραφεί μια εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 8 που δεν βασίζεται στο κριτήριο του Cauchy.

(α) Έστω ότι $a_n \geq 0$ για κάθε n. Έστω $\{b_n\}$ μια αναδιάταξη της $\{a_n\}$, και έστω $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, και $t_n = b_1 + \cdots + b_n$. Δείξτε ότι για κάθε n υπάρχει κάποιο m με $s_n \leq t_m$.

(β) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αν υπάρχει το $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(γ) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

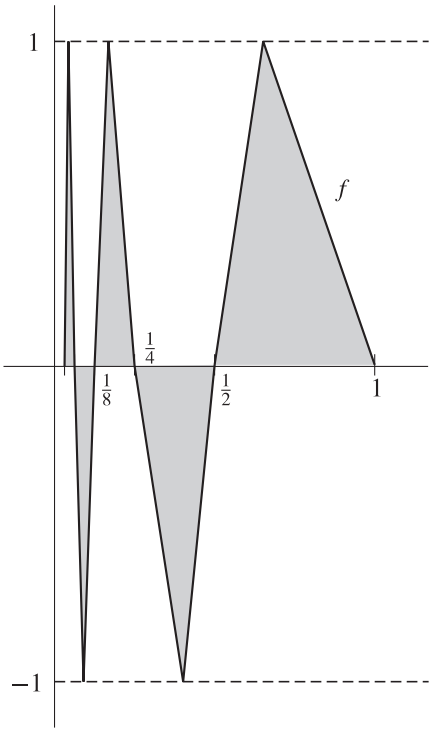
(δ) Τώρα αντικαταστήστε τη συνθήκη $a_n \geq 0$ με την υπόθεση ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, χρησιμοποιώντας το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 5.

15. (α) Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, και $\{b_n\}$ είναι οποιαδήποτε υπακολουθία της $\{a_n\}$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (απολύτως).

(β) Δείξτε ότι αυτό δεν ισχύει αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απολύτως.

∗(γ) Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots).$$



ΣΧΗΜΑ 5

16. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι απολύτως συγκλίνουσα, τότε $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

∗**17.** Το Πρόβλημα 19-43 δείχνει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty (\sin x)/x\, dx$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι το $\int_0^\infty |(\sin x)/x|\, dx$ αποκλίνει.

∗**18.** Βρείτε μια συνεχή συνάρτηση f με $f(x) \ge 0$ για κάθε x, τέτοια ώστε το $\int_0^\infty f(x)\, dx$ να υπάρχει, αλλά το $\lim_{x\to\infty} f(x)$ να μην υπάρχει.

∗**19.** Έστω $f(x) = x \sin 1/x$ για $0 < x \le 1$ και $f(0) = 0$. Θυμηθείτε τον ορισμό του $\ell(f, P)$ από το Πρόβλημα 13-25. Δείξτε ότι το σύνολο των $\ell(f, P)$ με P διαμέριση του $[0, 1]$ δεν είναι φραγμένο (άρα η f έχει «άπειρο μήκος»). Υπόδειξη: Δοκιμάστε διαμερίσεις της μορφής

$$P = \left\{0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \ldots, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}, 1\right\}.$$

20. Έστω f η συνάρτηση που φαίνεται στο Σχήμα 5. Βρείτε το $\int_0^1 f$, καθώς και το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας στο Σχήμα 5.

∗**21.** Σε αυτό το πρόβλημα θα θεμελιώσουμε τη «διωνυμική σειρά»

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

για κάθε α, δείχνοντας ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$. Η απόδειξη γίνεται σε διαδοχικά βήματα, και χρησιμοποιεί τις μορφές Cauchy και Lagrange όπως τις βρήκαμε στο Πρόβλημα 20-21.

(α) Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} r^k$ πράγματι συγκλίνει για $|r| < 1$ (αυτό βέβαια δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι συγκλίνει στο $(1+r)^\alpha$). Ειδικότερα, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} r^n = 0$ για $|r| < 1$.

(β) Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 \le x < 1$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$, χρησιμοποιώντας τη μορφή Lagrange του υπολοίπου, και παρατηρώντας ότι $(1+t)^{\alpha-n-1} \le 1$ για $n+1 > \alpha$.

(γ) Τώρα έστω ότι $-1 < x < 0$. Ο αριθμός t στη μορφή Cauchy του υπολοίπου ικανοποιεί την $-1 < x < t \le 0$. Δείξτε ότι

$$|x(1+t)^{\alpha-1}| \le |x|M, \qquad \text{όπου } M = \max(1, (1+x)^{\alpha-1}),$$

και

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| = |x|\left(\frac{1-t/x}{1+t}\right) \le |x|.$$

Χρησιμοποιώντας τη μορφή Cauchy του υπολοίπου, και το γεγονός ότι

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{n},$$

δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$.

22. (α) Έστω ότι τα μερικά αθροίσματα της ακολουθίας $\{a_n\}$ είναι φραγμένα, και ότι $\{b_n\}$ είναι μια ακολουθία με $b_n \geq b_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. Αυτό είναι γνωστό ως *κριτήριο του Dirichlet*. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Λήμμα του Abel (Πρόβλημα 19-36) για να ελέγξετε το κριτήριο του Cauchy.

(β) Συμπεράνετε το Θεώρημα του Leibniz από αυτό το αποτέλεσμα.

(γ) Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 15-33, ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx)/n$ συγκλίνει αν το x δεν είναι της μορφής $2k\pi$ με k ακέραιο (οπότε είναι φανερό ότι αποκλίνει).

(δ) Αποδείξτε το *κριτήριο του Abel*: Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\{b_n\}$ είναι μια ακολουθία είτε μη φθίνουσα είτε μη αύξουσα και φραγμένη, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. Υπόδειξη: Θεωρήστε την $b_n - b$, όπου $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

∗**23.** Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ (το «Θεώρημα Συμπύκνωσης του Cauchy»). Παρατηρήστε πως το γεγονός ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει, είναι μια ειδική περίπτωση, γιατί αν η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ συνέκλινε, τότε το ίδιο θα συνέβαινε και με την $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (1/2^n)$· αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμεύσει ως υπόδειξη.

∗**24.** (α) Αποδείξτε ότι αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$ συγκλίνουν, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^{\alpha}$ συγκλίνει για κάθε $\alpha > \frac{1}{2}$.

∗**25.** Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα και κάθε $a_n > 0$. Αποδείξτε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$. Υπόδειξη: Γράψτε το κριτήριο του Cauchy και βεβαιωθείτε πως χρησιμοποιείτε το ότι η $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα.

∗**26.** Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε τα μερικά αθροίσματα s_n είναι φραγμένα, και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Μπαίνει κανείς στον πειρασμό να υποθέσει ότι το φραγμένο των μερικών αθροισμάτων, μαζί με τη συνθήκη $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, εξασφαλίζουν τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για να δείξετε ότι αυτό *δεν* ισχύει. Ως υπόδειξη, παρατηρήστε ότι κάποια *υπακολουθία* των μερικών αθροισμάτων θα πρέπει να συγκλίνει· πρέπει να επιτρέψετε με κάποιον τρόπο να συμβαίνει κάτι

τέτοιο, χωρίς να αφήσετε την ίδια την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων να συγκλίνει.

27. Δείξτε ότι, αν $a_n \geq 0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ επίσης αποκλίνει. Υπόδειξη: Συγκρίνετε τα μερικά αθροίσματα. Ισχύει το αντίστροφο;

28. Έστω $b_n > 0$. Λέμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *συγκλίνει* αν η ακολουθία $p_n = \prod_{i=1}^{n} b_i$ συγκλίνει και $\lim_{n\to\infty} p_n \neq 0$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η b_n τείνει στο 1.

(β) Αποδείξτε ότι το $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n$ συγκλίνει.

(γ) Για $a_n \geq 0$, αποδείξτε ότι το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 27 για τη μία συνεπαγωγή και μια απλή εκτίμηση για τον $\log(1+a)$ για την αντίστροφη συνεπαγωγή.

Τα υπόλοιπα μέρη αυτού του Προβλήματος δείχνουν ότι η υπόθεση $a_n \geq 0$ είναι απαραίτητη.

(δ) Χρησιμοποιήστε τη σειρά Taylor του $\log(1+x)$ για να δείξετε ότι για αρκετά μικρό x έχουμε

$$\tfrac{1}{4}x^2 \leq x - \log(1+x) \leq \tfrac{3}{4}x^2.$$

Συμπεράνετε ότι αν όλα τα $a_n > -1$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$. Ομοίως, αν όλα τα $a_n > -1$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Cauchy.

(ε) Δείξτε ότι η

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

συγκλίνει, αλλά η

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

αποκλίνει.

(στ) Θεωρούμε την ακολουθία

$$\{a_n\} = \underbrace{1, -\tfrac{1}{2}}_{\text{1 ζεύγος}}, \underbrace{\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{4}}_{\text{3 ζεύγη}}, \underbrace{\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{6}, \ldots}_{\text{5 ζεύγη}} \quad \ldots$$

(συγκρίνετε με το Πρόβλημα 26). Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αλλά

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=1.$$

29. (α) Υπολογίστε το $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(β) Υπολογίστε το $\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n})$ για $|x|<1$.

30. Το ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ αποκλίνει σχετίζεται με το εξής αξιοσημείωτο γεγονός: Κάθε θετικός ρητός αριθμός x γράφεται ως *πεπερασμένο* άθροισμα *διακεκριμένων* αριθμών της μορφής $1/n$. Η ιδέα της απόδειξης φαίνεται από τον εξής υπολογισμό για το $\frac{27}{31}$: Επειδή

$$\begin{aligned}\tfrac{27}{31}-\tfrac{1}{2}&=\tfrac{23}{62}\\ \tfrac{23}{62}-\tfrac{1}{3}&=\tfrac{7}{186}\\ \tfrac{7}{186}&<\tfrac{1}{4},\dots,\tfrac{1}{26}\\ \tfrac{7}{186}-\tfrac{1}{27}&=\tfrac{1}{1674}\end{aligned}$$

έχουμε

$$\tfrac{27}{31}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{1674}.$$

Παρατηρήστε ότι οι αριθμητές 23, 7, 1 των διαφορών φθίνουν.

(α) Αποδείξτε ότι, αν $1/(n+1)<x<1/n$ για κάποιο n, τότε ο αριθμητής σε αυτού του είδους τον υπολογισμό πάντοτε φθίνει. Συμπεράνετε ότι ο x μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένο άθροισμα διαφορετικών αριθμών $1/k$.

(β) Αποδείξτε τώρα το αποτέλεσμα για όλα τα x, χρησιμοποιώντας την απόκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Οι σκέψεις που κάναμε στο τέλος του προηγουμένου κεφαλαίου υποδεικνύουν έναν άλλο τρόπο θεώρησης των σειρών. Η προσοχή μας θα μετατοπιστεί από συγκεκριμένα απειροαθροίσματα σε ισότητες σαν την

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

που αφορούν αθροίσματα ποσοτήτων που εξαρτώνται από το x. Με άλλα λόγια, ενδιαφερόμαστε για *συναρτήσεις* που ορίζονται από εξισώσεις της μορφής

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

(στο προηγούμενο παράδειγμα $f_n(x) = x^{n-1}/(n-1)!$). Σε αυτήν την περίπτωση, η $\{f_n\}$ θα είναι μια ακολουθία συναρτήσεων: για κάθε x παίρνουμε μια ακολουθία αριθμών $\{f_n(x)\}$, και $f(x)$ είναι το άθροισμα αυτής της ακολουθίας. Για να μελετήσουμε αναλυτικά τέτοιες συναρτήσεις είναι βέβαια απαραίτητο να θυμόμαστε ότι κάθε άθροισμα

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

είναι, εξ ορισμού, το όριο της ακολουθίας

$$f_1(x),\ f_1(x) + f_2(x),\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x),\ \ldots.$$

Αν ορίσουμε μια καινούργια ακολουθία συναρτήσεων $\{s_n\}$ με

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n,$$

τότε μπορούμε να εκφράσουμε τα παραπάνω με μεγαλύτερη συντομία, γράφοντας

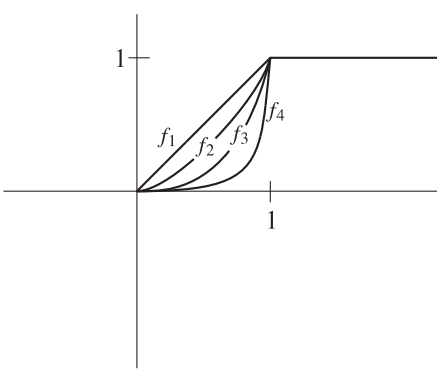
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x).$$

Θα επικεντρώσουμε λοιπόν για λίγο την προσοχή μας σε συναρτήσεις που ορίζονται ως όρια,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

και όχι σε συναρτήσεις που ορίζονται ως απειροαθροίσματα. Ο βασικός κορμός των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για τέτοιες συναρτήσεις συνοψίζεται εύκολα στα εξής: Τίποτα από ό,τι θα ήλπιζε κανείς να ισχύει δεν ισχύει στην πραγματικότητα —αντί για αυτό, έχουμε μια ενδιαφέρουσα συλλογή από αντιπαραδείγματα. Το πρώτο από αυτά δείχνει ότι, ακόμα και αν κάθε f_n είναι συνεχής, η συνάρτηση f μπορεί να μην είναι! Αντίθετα από ό,τι ίσως περιμένετε, οι συναρτήσεις f_n θα είναι πολύ απλές. Το Σχήμα 1 δείχνει τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

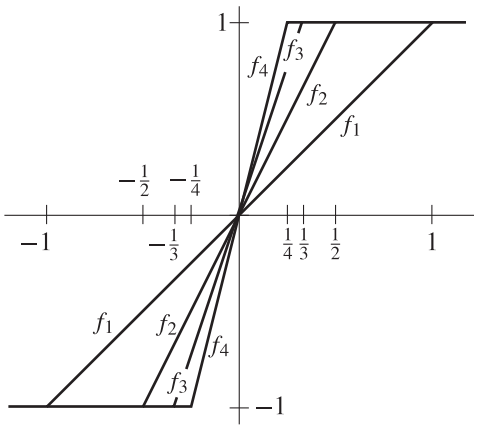
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 1

Αυτές οι συναρτήσεις είναι όλες συνεχείς, αλλά η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ δεν είναι συνεχής· πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 2

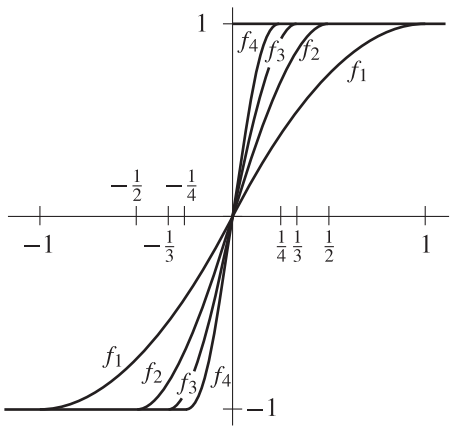
Ένα άλλο παράδειγμα του ίδιου φαινομένου παρουσιάζεται στο Σχήμα 2. Οι συναρτήσεις f_n ορίζονται από την

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \le -\dfrac{1}{n} \\ nx, & -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αν $x < 0$, τότε το $f_n(x)$ είναι τελικά (δηλαδή για αρκετά μεγάλα n) ίσο με -1, και αν $x > 0$, τότε το $f_n(x)$ είναι τελικά 1, ενώ $f_n(0) = 0$ για κάθε n. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Δηλαδή, για μια ακόμα φορά, η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ δεν είναι συνεχής.



ΣΧΗΜΑ 3

Αμβλύνοντας τις γωνίες στα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε ακόμα να φτιάξουμε μια ακολουθία *παραγωγίσιμων* συναρτήσεων $\{f_n\}$ για την οποία η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ δεν είναι συνεχής. Μια τέτοια ακολουθία είναι εύκολο να οριστεί με τύπο:

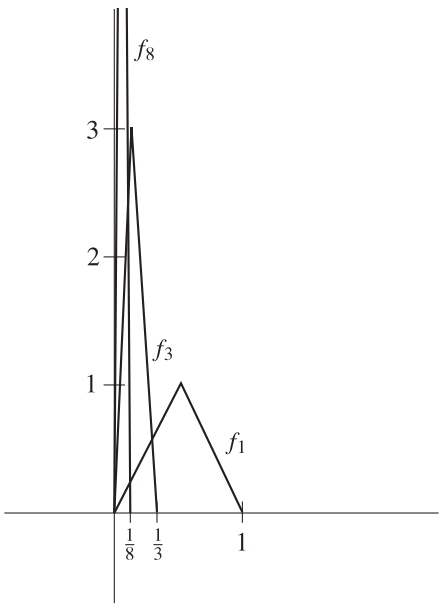
$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \le -\dfrac{1}{n} \\ \sin\left(\dfrac{n\pi x}{2}\right), & -\dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le x. \end{cases}$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες (Σχήμα 3), αλλά και πάλι έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

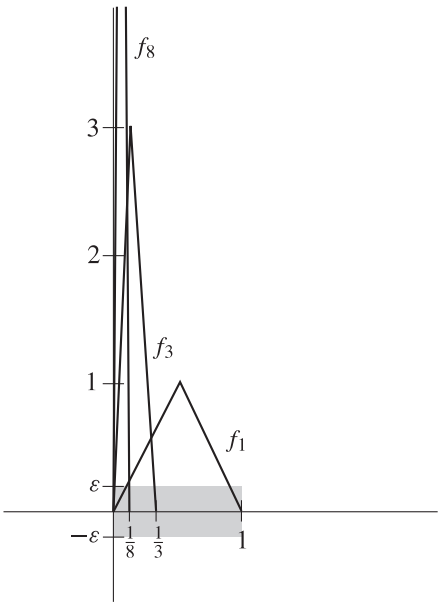
Η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα δεν είναι όμως οι μόνες ιδιότητες που εμφανίζουν προβλήματα. Μια άλλη δυσκολία περιγράφεται από την ακολουθία $\{f_n\}$ που φαίνεται στο Σχήμα 4: Στο διάστημα $[0, 1/n]$ η γραφική παράσταση της f_n σχηματίζει ένα ισοσκελές τρίγωνο ύψους n, ενώ $f_n(x) = 0$ για $x \ge 1/n$. Αυτές οι συναρτήσεις γίνεται να οριστούν αυστηρά ως εξής:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 2n - 2n^2x, & \dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



ΣΧΗΜΑ 4

Επειδή αυτή η ακολουθία μεταβάλλεται τόσο ακανόνιστα κοντά στο 0, αρχικά το μαθηματικό μας ένστικτο θα έπρεπε να μας υποδεικνύει ότι το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ δεν υπάρχει πάντα. Όμως, το όριο υπάρχει για όλα τα x, και μάλιστα η συνάρτηση $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι συνεχής. Πραγματικά, αν $x > 0$, τότε το $f_n(x)$ είναι τελικά 0, άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, και ακόμα, $f_n(0) = 0$ για κάθε n, άρα θα είναι οπωσδήποτε και $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. Με



ΣΧΗΜΑ 5

άλλα λόγια, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε x. Από την άλλη πλευρά, το ολοκλήρωμα σύντομα αποκαλύπτει την παράξενη συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας· έχουμε

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2},$$

αλλά

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

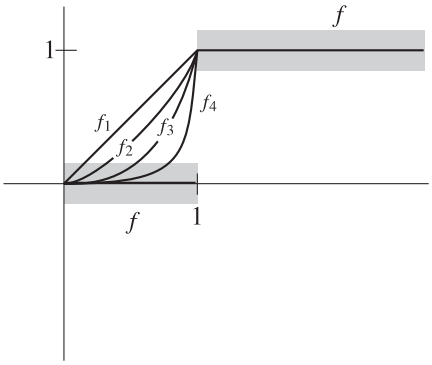
Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Αυτή η συγκεκριμένη ακολουθία συναρτήσεων συμπεριφέρεται με έναν τρόπο που ποτέ δεν είχαμε φανταστεί όταν αρχίσαμε να μελετάμε συναρτήσεις που ορίζονται με όρια. Αν και ισχύει ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } [0, 1],$$

οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_n δεν «τείνουν» στη γραφική παράσταση της f με την έννοια του να βρίσκονται κοντά της —αν, όπως στο Σχήμα 5, ζωγραφίσουμε μια ταινία γύρω από την f συνολικού πλάτους 2ε (επιτρέποντας ένα πλάτος ίσο με ε από πάνω και από κάτω), τότε οι γραφικές παραστάσεις των f_n δεν περιέχονται εξ ολοκλήρου σε αυτήν την ταινία, όσο μεγάλο και αν διαλέξουμε το n. Βέβαια, για κάθε x υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε το σημείο $(x, f_n(x))$ να βρίσκεται σε αυτήν την ταινία για $n > N$· αυτός ο ισχυρισμός αντιστοιχεί ακριβώς στο γεγονός ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Αλλά είναι ανάγκη να διαλέγουμε όλο και μεγαλύτερα N καθώς παίρνουμε το x όλο και πιο κοντά στο 0, και κανένα N δεν θα είναι κατάλληλο για όλα τα x ταυτόχρονα.



ΣΧΗΜΑ 6

Η ίδια κατάσταση συμβαίνει, αν και λιγότερο κραυγαλέα, με καθένα από τα παραδείγματα που δώσαμε πιο πριν. Το Σχήμα 6 περιγράφει αυτό το σημείο για την ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

Έχουμε σχεδιάσει μια λωρίδα συνολικού πλάτους 2ε γύρω από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Αν $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, αυτή η λωρίδα αποτελείται από δύο κομμάτια, που δεν περιέχουν σημεία με δεύτερη συντεταγμένη ίση με $\frac{1}{2}$· αφού κάθε συνάρτηση f_n παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$, η γραφική παράσταση της f_n δεν βρίσκεται μέσα σε αυτήν τη λωρίδα. Πάλι, για κάθε σημείο x υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε το $(x, f_n(x))$ να βρίσκεται στη λωρίδα για $n > N$· αλλά είναι αδύνατο να βρούμε ένα N που να δουλεύει για όλα τα x ταυτόχρονα.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι ακριβώς η ίδια κατάσταση συμβαίνει με όλα τα άλλα παραδείγματα. Σε κάθε περίπτωση έχουμε μια συνάρτηση f και μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όλες ορισμένες στο ίδιο σύνολο A, τέτοιες ώστε

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } A.$$

Αυτό σημαίνει ότι

> για κάθε $\varepsilon > 0$, και για κάθε x στο A, υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε αν $n > N$, τότε $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Αλλά σε κάθε περίπτωση διαλέγουμε διαφορετικά N για διαφορετικά x, και σε κάθε περίπτωση *δεν* ισχύει ότι

> για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για κάθε x στο A, αν $n > N$, τότε $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

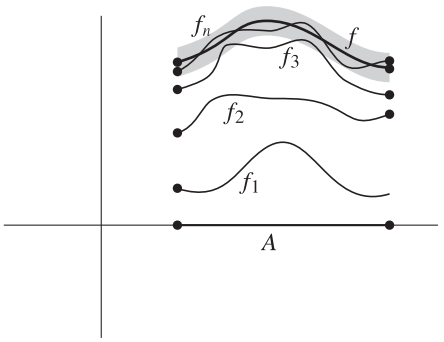
Αν και αυτή η συνθήκη διαφέρει από την πρώτη μόνο σε μια μικρή μετατόπιση της φράσης «για κάθε x στο A», έχει τελείως διαφορετική σημασία. Αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ ικανοποιεί αυτήν τη δεύτερη συνθήκη, τότε οι γραφικές παραστάσεις των f_n τελικά βρίσκονται κοντά στη γραφική παράσταση της f, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7. Αυτή η συνθήκη είναι τελικά που κάνει τη μελέτη των οριακών συναρτήσεων εφικτή.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία από συναρτήσεις ορισμένες στο A, και f συνάρτηση επίσης ορισμένη στο A. Τότε η f λέγεται το **ομοιόμορφο όριο της** $\{f_n\}$ **στο** A, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για όλα τα x στο A,

$$\text{αν } n > N, \text{ τότε } |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Λέμε ακόμα ότι η $\{f_n\}$ **συγκλίνει ομοιόμορφα στην** f **στο** A, ή ότι η f_n **τείνει στην** f **ομοιόμορφα στο** A.



ΣΧΗΜΑ 7

Σε αντιπαράθεση με αυτόν τον ορισμό, αν ξέρουμε μόνο ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } A,$$

τότε λέμε ότι η $\{f_n\}$ **συγκλίνει κατά σημείο στην** f **στο** A. Προφανώς, η ομοιόμορφη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση (αλλά όχι αντίστροφα!).

Δεν είναι καθόλου δύσκολο να συγκεντρώσουμε μαρτυρίες για τη χρησιμότητα της ομοιόμορφης σύγκλισης. Τα ολοκληρώματα αποτελούν ένα εξαιρετικά εύκολο θέμα: από το Σχήμα 7 είναι σχεδόν προφανές ότι, αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε το ολοκλήρωμα της f_n μπορεί να έρθει όσο κοντά θέλουμε στο ολοκλήρωμα της f. Μιλώντας πιο αυστηρά, έχουμε το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι $\{f_n\}$ ακολουθία από συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και έστω ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ σε μια συνάρτηση f που είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } [a, b].$$

Άρα, αν $n > N$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx \right| \\ &\le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ &\le \int_a^b \varepsilon\,dx \\ &= \varepsilon(b - a).\end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \quad \blacksquare$$

Η αντιμετώπιση της συνέχειας είναι λίγο πιο δύσκολη, αφού περιλαμβάνει ένα «$\varepsilon/3$-επιχείρημα», μια εκτίμηση του $|f(x) - f(x+h)|$ σε τρία βήματα. Αν $\{f_n\}$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, τότε υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε

$$(1) \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$(2) \qquad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ακόμα, αφού η f_n είναι συνεχής, για αρκετά μικρό h έχουμε

$$(3) \qquad |f_n(x) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Από τις (1), (2) και (3) θα συμπεράνουμε ότι $|f(x) - f(x+h)| < \varepsilon$. Για να πάρουμε όμως την (3), θα πρέπει να περιορίσουμε το μέγεθος του $|h|$, αφού πρώτα επιλέξουμε το n· είναι λοιπόν εντελώς απαραίτητο να υπάρχει κάποιο n που να ικανοποιεί την (2), όσο μικρό και αν είναι το $|h|$ —ακριβώς αυτό είναι το σημείο όπου η ομοιόμορφη σύγκλιση μπαίνει στην απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Έστω ότι $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο $[a, b]$, και έστω ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ στην f. Τότε και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για κάθε x στο $[a, b]$ πρέπει να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Θα ασχοληθούμε μόνο με x στο (a, b)· οι περιπτώσεις $x = a$ και $x = b$ απαιτούν τις συνηθισμένες απλές τροποποιήσεις.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$, υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε

$$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{για κάθε } y \text{ στο } [a, b].$$

Ειδικότερα, για κάθε h τέτοιο ώστε το $x + h$ να βρίσκεται στο $[a, b]$, έχουμε

$$(1) \qquad |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$
$$(2) \qquad |f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τώρα η f_n είναι συνεχής, άρα υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|h| < \delta$ να ισχύει

$$(3) \qquad |f_n(x) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Άρα, αν $|h| < \delta$, τότε

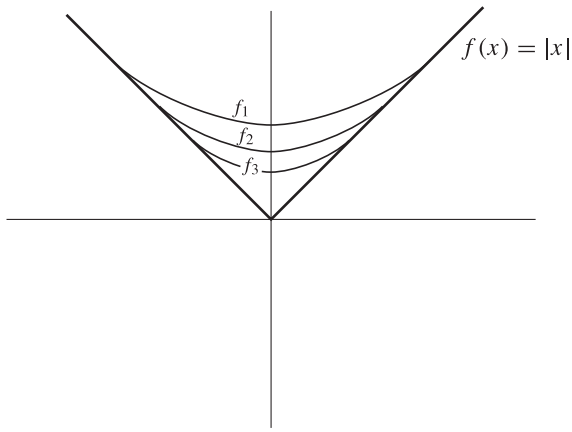
$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= |f(x+h) - f_n(x+h) + f_n(x+h) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x. ∎

Μετά από τις δύο αξιοσημείωτες επιτυχίες που μας προσέφεραν τα Θεωρήματα 1 και 2, η περίπτωση της παραγωγισιμότητας μοιάζει πολύ απογοητευτική. Αν κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη, και αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δεν ισχύει αναγκαστικά

ότι και η f είναι παραγωγίσιμη. Για παράδειγμα, το Σχήμα 8 δείχνει ότι υπάρχει μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\{f_n\}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = |x|$. Ακόμα και αν η f *είναι* παραγωγίσιμη, μπορεί να μην ισχύει ότι

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\cdot$$



ΣΧΗΜΑ 8

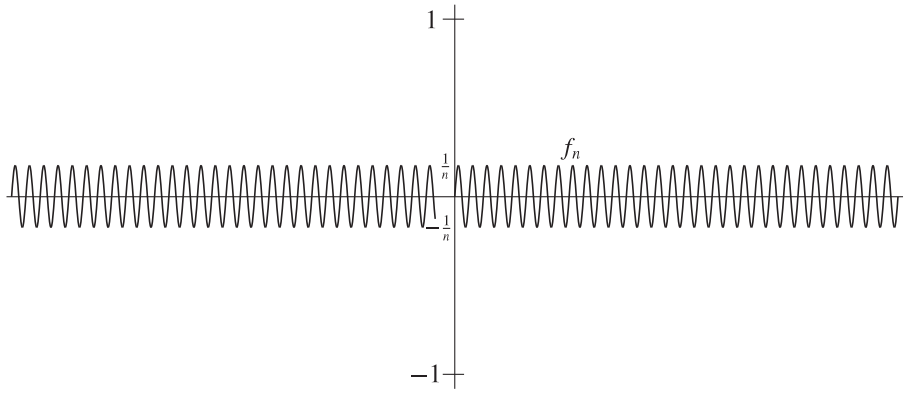
και αυτό δεν προκαλεί καμία έκπληξη, αν σκεφτούμε ότι λείες συναρτήσεις μπορεί να προσεγγίζονται από συναρτήσεις που ταλαντώνονται πολύ έντονα. Για παράδειγμα (Σχήμα 9), αν

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2x),$$

τότε η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = 0$, αλλά

$$f_n'(x) = n\cos(n^2x),$$

και το $\lim_{n\to\infty} n\cos(n^2x)$ δεν υπάρχει πάντοτε (για παράδειγμα, δεν υπάρχει αν $x = 0$).



ΣΧΗΜΑ 9

Ανεξάρτητα από αυτά τα παραδείγματα, το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μάς εγγυάται ότι κάποιου τύπου θεώρημα για τις παραγώγους θα πρέπει να υπάρχει, ως συνέπεια του Θεωρήματος 1· η κρίσιμη υπόθεση είναι ότι η $\{f_n'\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε *κάποια* συνεχή συνάρτηση).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Έστω ότι $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$, με ολοκληρώσιμες παραγώγους f_n', και έστω ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει (κατά σημείο) στην f. Έστω, ακόμα, ότι η $\{f_n'\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ σε κάποια συνεχή συνάρτηση g. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1 στο διάστημα $[a, x]$, βλέπουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$\begin{aligned}\int_a^x g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n' \\ &= \lim_{n\to\infty} [f_n(x) - f_n(a)] \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Αφού η g είναι συνεχής, έπεται ότι $f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ για κάθε x στο διάστημα $[a, b]$. ∎

Τώρα που έχουμε αποδείξει τα βασικά αποτελέσματα για τα ομοιόμορφα όρια, είναι φανερό το πώς πρέπει να χειριστούμε συναρτήσεις που ορίζονται ως απειροαθροίσματα,

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots .$$

Αυτή η ισότητα σημαίνει ότι

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_1(x) + \cdots + f_n(x),$$

και τα προηγούμενα θεωρήματά μας εφαρμόζονται, αν η καινούργια ακολουθία

$$f_1,\ f_1 + f_2,\ f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Αφού αυτή είναι και η μόνη περίπτωση που πρόκειται να μας απασχολήσει, την απομονώνουμε με έναν ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **συγκλίνει ομοιόμορφα** (πιο τυπικά: η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι **ομοιόμορφα αθροίσιμη**) **στην f στο A**, αν η ακολουθία

$$f_1,\ f_1 + f_2,\ f_1 + f_2 + f_3,\ \ldots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε καθένα από τα Θεωρήματα 1, 2 και 3 στις ομοιόμορφα συγκλίνουσες σειρές· τα συμπεράσματα διατυπώνονται σε ένα κοινό πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$.

(1) Αν κάθε f_n είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι συνεχής στο $[a, b]$.

(2) Αν η f και κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n.$$

Ακόμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει (κατά σημείο) στην f στο $[a, b]$, και η f_n έχει ολοκληρώσιμη παράγωγο f_n' και η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ σε κάποια συνεχή συνάρτηση, τότε

(3) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (1) Αν κάθε f_n είναι συνεχής, το ίδιο ισχύει και για κάθε $f_1 + \cdots + f_n$, και η f είναι το ομοιόμορφο όριο της ακολουθίας f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3, \ldots$, άρα η f είναι συνεχής από το Θεώρημα 2.

(2) Αφού η f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3, \ldots$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, από το Θεώρημα 1 έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_1 + \cdots + f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_1 + \cdots + \int_a^b f_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n .\end{aligned}$$

(3) Κάθε συνάρτηση $f_1 + \cdots + f_n$ είναι παραγωγίσιμη, με παράγωγο $f_1' + \cdots + f_n'$, και η f_1', $f_1' + f_2'$, $f_1' + f_2' + f_3', \ldots$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση, από την υπόθεση. Συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 3 ότι

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{n\to\infty} [f_1'(x) + \cdots + f_n'(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \ \blacksquare\end{aligned}$$

Προς το παρόν αυτό το πόρισμα δεν είναι πολύ χρήσιμο, γιατί φαίνεται πολύ δύσκολο να προβλέψουμε πότε η ακολουθία f_1, $f_1 + f_2$, $f_1 + f_2 + f_3, \ldots$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα. Η πιο σημαντική συνθήκη που μας εγγυάται την ομοιόμορφη σύγκλιση δίνεται από το επόμενο θεώρημα· η απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη, γιατί ο τρόπος με τον οποίο έχουν επιλεγεί οι πολύ απλές του υποθέσεις είναι ευφυής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4
(ΤΟ *M*-ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΤΟΥ WEIERSTRASS) Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία από συναρτήσεις ορισμένες στο A και έστω ότι $\{M_n\}$ ακολουθία από αριθμούς τέτοιους ώστε

$$|f_n(x)| \le M_n \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } A.$$

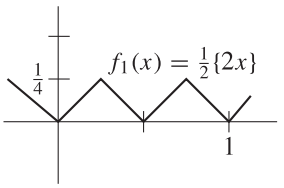
Έστω ακόμα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει. Τότε, για κάθε x στο A, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (και μάλιστα συγκλίνει απολύτως), και η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A στη συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

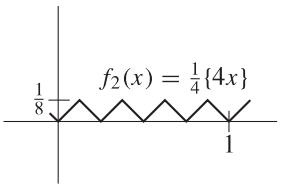
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για κάθε x στο A, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης· επομένως η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απολύτως). Επίσης, για κάθε x στο A έχουμε

$$\begin{aligned}\big| f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_N(x)] \big| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n .\end{aligned}$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, ο αριθμός $\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n$ μπορεί να γίνει όσο μικρός θέλουμε, αν επιλέξουμε το N αρκετά μεγάλο. ∎

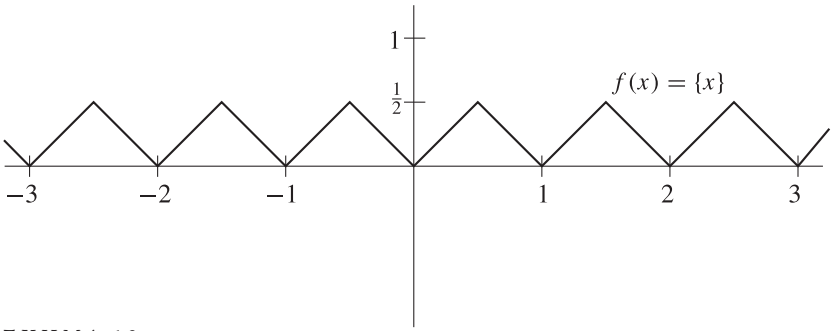


(α)



(β)

ΣΧΗΜΑ 11



ΣΧΗΜΑ 10

Η ακολουθία $\{f_n\}$ που θα ορίσουμε τώρα, μας δίνει μια απλή εφαρμογή του M-κριτηρίου του Weierstrass. Συμβολίζουμε με $\{x\}$ την απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο (η γραφική παράσταση της $f(x) = \{x\}$ εμφανίζεται στο Σχήμα 10). Ορίζουμε τώρα

$$f_n(x) = \frac{1}{10^n}\{10^n x\}.$$

Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 φαίνονται στο Σχήμα 11 (αλλά, για να απλουστεύσουμε τις εικόνες, έχουμε αντικαταστήσει το 10^n με 2^n). Αυτή η ακολουθία συναρτήσεων έχει οριστεί έτσι ώστε το M-κριτήριο του Weierstrass να εφαρμόζεται αυτομάτως: Προφανώς

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{10^n} \qquad \text{για κάθε } x,$$

και η $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10^n$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα· αφού κάθε f_n είναι συνεχής, από το πόρισμα προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

είναι επίσης συνεχής. Το Σχήμα 12 δείχνει τη γραφική παράσταση των πρώτων μερικών αθροισμάτων $f_1 + \cdots + f_n$. Καθώς το n μεγαλώνει, οι γραφικές παραστάσεις σχεδιάζονται με όλο και μεγαλύτερη δυσκολία, και το απειροάθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι αδύνατον να σχεδιαστεί, όπως φαίνεται και από το επόμενο θεώρημα (που περιλαμβάνεται στο κείμενο περισσότερο ως μια ενδιαφέρουσα όψη του θέματος, την οποία μπορείτε να παραλείψετε αν σας φανεί δύσκολη).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\{10^n x\}$$

είναι παντού συνεχής και πουθενά παραγωγίσιμη!

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η f είναι συνεχής· αυτό είναι το μόνο τμήμα της απόδειξης στο οποίο χρειάζεται η ομοιόμορφη σύγκλιση. Θα αποδείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο a, για τυχαίο a, κατασκευάζοντας μια συγκεκριμένη ακολουθία $\{h_m\}$ που τείνει στο 0, για την οποία το

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

δεν υπάρχει. Προφανώς, αρκεί να εξετάσουμε μόνο εκείνους τους αριθμούς a που ικανοποιούν την $0 < a \leq 1$.

Έστω ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του a είναι

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots .$$

Θέτουμε $h_m = 10^{-m}$ αν $a_m \neq 4$ ή 9, και $h_m = -10^{-m}$ αν $a_m = 4$ ή 9 (η αιτιολόγηση αυτών των δύο εξαιρέσεων θα φανεί σύντομα). Τότε

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \cdot \frac{\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}}{\pm 10^{-m}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}].\end{aligned}$$

Αυτή η σειρά στην πραγματικότητα είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα, γιατί αν $n \geq m$, τότε ο $10^n h_m$ είναι ακέραιος, άρα

$$\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για $n < m$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}10^n a &= \text{ακέραιος} + 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots a_m \dots \\ 10^n(a+h_m) &= \text{ακέραιος} + 0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots (a_m \pm 1)\dots\end{aligned}$$

(για να ισχύει η δεύτερη ισότητα είναι ουσιαστικό το ότι διαλέξαμε $h_m = -10^{-m}$ όταν $a_m = 9$). Έστω τώρα ότι

$$0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots a_m \cdots \leq \tfrac{1}{2}.$$

Τότε θα είναι και

$$0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots (a_m \pm 1)\cdots \leq \tfrac{1}{2}$$

(στην ειδική περίπτωση $m = n+1$, η δεύτερη ανισότητα ισχύει γιατί διαλέξαμε $h_m = -10^{-m}$ όταν $a_m = 4$). Αυτό σημαίνει ότι

$$\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\} = \pm 10^{n-m},$$

και ακριβώς η ίδια ισότητα ισχύει όταν $0, a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots > \frac{1}{2}$. Έτσι, για $n < m$ έχουμε

$$10^{m-n}[\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}] = \pm 1.$$

Με άλλα λόγια, το

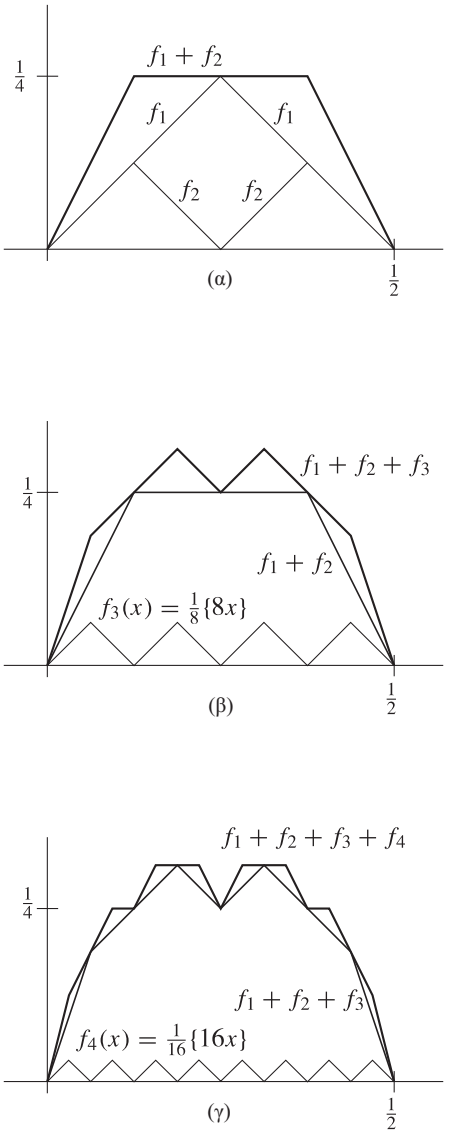
$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

είναι το άθροισμα $m-1$ αριθμών, καθένας από τους οποίους είναι ± 1. Αλλά όταν προσθέτουμε $+1$ ή -1 σε έναν αριθμό, μεταβάλλεται από περιττό σε άρτιο και αντίστροφα. Άρα το άθροισμα $m-1$ αριθμών, που καθένας τους είναι ± 1, είναι ένας *άρτιος ακέραιος* αν ο m είναι περιττός, και ένας *περιττός ακέραιος* αν ο m είναι άρτιος. Επομένως, η ακολουθία των πηλίκων

$$\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m}$$

δεν μπορεί να συγκλίνει, γιατί είναι ακολουθία ακεραίων, διαδοχικά άρτιων και περιττών. ∎

Εκτός από τον ρόλο που έπαιξε στο προηγούμενο θεώρημα, το M-κριτήριο του Weierstrass είναι ένα ιδανικό εργαλείο για να αναλύουμε συναρτήσεις που συμπεριφέρονται πολύ καλά. Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με συναρτήσεις της μορφής



ΣΧΗΜΑ 12

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

οι οποίες περιγράφονται και από την ισότητα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

όπου $f_n(x) = a_n(x-a)^n$. Ένα τέτοιο απειροάθροισμα συναρτήσεων που εξαρτώνται μόνο από δυνάμεις του $(x-a)$ λέγεται **δυναμοσειρά με κέντρο το a**. Για να απλουστεύσουμε τα πράγματα, θα ενδιαφερόμαστε συνήθως για δυναμοσειρές με κέντρο το 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Μια πολύ σημαντική κατηγορία δυναμοσειρών είναι αυτές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

όπου f είναι μια συνάρτηση με παραγώγους κάθε τάξης στο $a\cdot$ μια τέτοια σειρά λέγεται η **σειρά Taylor της f στο a**. Βέβαια, δεν ισχύει αναγκαστικά ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Αυτή η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι όροι υπολοίπου ικανοποιούν την $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$.

Μας είναι ήδη γνωστό ότι μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ δεν συγκλίνει αναγκαστικά για όλα τα x. Για παράδειγμα, η δυναμοσειρά

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

συγκλίνει μόνο για $|x| \leq 1$, ενώ η δυναμοσειρά

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

συγκλίνει μόνο για $-1 < x \leq 1$. Μπορούμε ακόμα να κατασκευάσουμε και δυναμοσειρά που να συγκλίνει μόνο για $x = 0$. Για παράδειγμα, η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

δεν συγκλίνει για $x \neq 0$. Πράγματι, οι λόγοι

$$\frac{(n+1)!\,(x^{n+1})}{n!\,x^n} = (n+1)x$$

δεν είναι φραγμένοι για κανένα $x \neq 0$. Αν όμως μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάποιο $x_0 \neq 0$, τότε μπορούμε να πούμε πολλά για τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για $|x| < |x_0|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Έστω ότι η σειρά

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$$

συγκλίνει, και έστω a οποιοσδήποτε αριθμός με $0 < a < |x_0|$. Τότε στο $[-a, a]$ η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

συγκλίνει ομοιόμορφα (και απολύτως). Ακόμα, το ίδιο ισχύει και για τη σειρά

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Τέλος, η f είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

για κάθε x με $|x| < |x_0|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$ συγκλίνει, οι όροι $a_n {x_0}^n$ συγκλίνουν στο 0. Άρα είναι οπωσδήποτε φραγμένοι: υπάρχει κάποιος αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|a_n {x_0}^n| = |a_n| \cdot |{x_0}^n| \le M \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, αν κάποιο x ανήκει στο $[-a, a]$, τότε $|x| \le |a|$, άρα

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= |a_n| \cdot |x^n| \\ &\le |a_n| \cdot |a^n| \\ &= |a_n| \cdot |x_0|^n \cdot \left| \frac{a}{x_0} \right|^n \qquad \text{(αυτό είναι το έξυπνο βήμα)} \\ &\le M \left| \frac{a}{x_0} \right|^n. \end{aligned}$$

Αλλά $|a/x_0| < 1$, άρα η (γεωμετρική) σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{a}{x_0} \right|^n = M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{a}{x_0} \right|^n$$

συγκλίνει. Παίρνοντας τους $M \cdot |a/x_0|^n$ ως τους αριθμούς M_n στο M-κριτήριο του Weierstrass, έπεται ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.

Για να αποδείξουμε τον ίδιο ισχυρισμό για την $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |n a_n x^{n-1}| &= n|a_n| \cdot |x^{n-1}| \\ &\le n|a_n| \cdot |a^{n-1}| \\ &= \frac{|a_n|}{|a|} \cdot |x_0|^n \, n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n \\ &\le \frac{M}{|a|} n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n. \end{aligned}$$

Αφού $|a/x_0| < 1$, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{|a|} n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n = \frac{M}{|a|} \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{a}{x_0} \right|^n$$

συγκλίνει (αυτό αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 23 ως εφαρμογή του κριτηρίου λόγου). Μια ακόμα εφαρμογή του M-κριτηρίου του Weierstrass αποδεικνύει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a, a]$.

Τέλος, από το πόρισμά μας παίρνουμε πρώτα ότι η g είναι συνεχής, και έπειτα ότι

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{για } x \text{ στο } [-a, a].$$

Αφού θα μπορούσαμε να έχουμε επιλέξει οποιονδήποτε αριθμό a με $0 < a < |x_0|$, το συμπέρασμά μας ισχύει για κάθε x με $|x| < |x_0|$. ∎

Είμαστε τώρα σε θέση να χειριστούμε με άνεση τις δυναμοσειρές. Οι περισσότερες αλγεβρικές πράξεις είναι σε ικανοποιητικό βαθμό άμεσες συνέπειες των γενικών θεωρημάτων για τις σειρές. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι οι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ είναι δύο δυναμοσειρές που συγκλίνουν για κάποιο x_0. Τότε, για $|x| < |x_0|$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n + b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

Έτσι, η σειρά $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ συγκλίνει επίσης για $|x| < |x_0|$, και $h = f + g$ για αυτά τα x.

Η αντιμετώπιση των γινομένων είναι ελαφρώς πιο πολύπλοκη. Αν $|x| < |x_0|$, τότε γνωρίζουμε ότι οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν *απολύτως*. Έτσι, από το Θεώρημα 23-9 έπεται ότι το γινόμενο $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ δίνεται από το

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i x^i b_j x^j,$$

όπου τα στοιχεία $a_i x^i b_j x^j$ διατάσσονται με οποιονδήποτε τρόπο. Ειδικότερα, μπορούμε να διαλέξουμε τη διάταξη

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{για } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Αυτό είναι το «γινόμενο Cauchy» που εισήχθη στο Πρόβλημα 23-10. Έτσι, το γινόμενο Cauchy $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ επίσης συγκλίνει για $|x| < |x_0|$ και $h = fg$ για αυτά τα x.

Τέλος, έστω ότι $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, όπου $a_0 \neq 0$, έτσι ώστε $f(0) = a_0 \neq 0$. Τότε, μπορούμε να προσπαθήσουμε να βρούμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ η οποία παριστά την $1/f$. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots .$$

Εφόσον η αριστερή πλευρά αυτής της εξίσωσης θα δοθεί από το γινόμενο Cauchy, θέλουμε να έχουμε τις

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= 0 \\ &\cdots \end{aligned}$$

Αφού $a_0 \neq 0$, μπορούμε να λύσουμε την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις ως προς b_0. Μετά μπορούμε να λύσουμε τη δεύτερη ως προς b_1, κτλ. Φυσικά, μας μένει ακόμα να αποδείξουμε ότι η νέα σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ πράγματι συγκλίνει για κάποιο $x \neq 0$. Αυτό αφήνεται ως άσκηση (Πρόβλημα 18).

Το Θεώρημα 6 μας δίνει για τις παραγώγους όλες τις πληροφορίες που θα χρειαστούμε. Ειδικότερα, αν εφαρμοστεί στις σειρές

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots , \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots , \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots , \end{aligned}$$

δίνει ακριβώς τα αποτελέσματα που περιμένουμε. Καθεμιά από αυτές συγκλίνει για κάθε x_0, άρα τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 6 ισχύουν για κάθε x:

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \cdots = \cos x, \\ \cos'(x) &= -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \cdots = -\sin x, \\ \exp'(x) &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \cdots = \exp(x). \end{aligned}$$

Με τις συναρτήσεις $\arctan$ και $f(x) = \log(1+x)$ η κατάσταση είναι λίγο πιο μπλεγμένη. Αφού η σειρά

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

συγκλίνει για $x_0 = 1$, συγκλίνει επίσης και για $|x| < 1$, και

$$\arctan'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{για } |x| < 1.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η σειρά τυχαίνει να συγκλίνει και για $x = -1$. Όμως, ο τύπος της παραγώγου δεν είναι σωστός για $x = 1$ ή $x = -1$. Στην πραγματικότητα, η σειρά

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

αποκλίνει για $x = 1$ και $x = -1$. Παρατηρήστε ότι αυτό δεν αντιφάσκει με το Θεώρημα 6, το οποίο ισχυρίζεται ότι η παράγωγος δίνεται από τον αναμενόμενο τύπο, μόνο για $|x| < |x_0|$.

Αφού η σειρά

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

συγκλίνει για $x_0 = 1$, συγκλίνει επίσης για $|x| < 1$, και

$$\frac{1}{1+x} = \log'(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad \text{για } |x| < 1.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η αρχική σειρά δεν συγκλίνει για $x = -1$· και επίσης, η σειρά της παραγώγου δεν συγκλίνει για $x = 1$.

Όλα όσα ισχύουν για μια δυναμοσειρά, αυτομάτως ισχύουν και για την παράγωγό της στα σημεία όπου η παράγωγος παριστάνεται με δυναμοσειρά. Αν η

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα $(-R, R)$, τότε από το Θεώρημα 6 συνεπάγεται ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

για κάθε x στο $(-R, R)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6 για μια ακόμα φορά, βρίσκουμε ότι

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

και συνεχίζοντας με επαγωγή βρίσκουμε ότι

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Έτσι, αν μια συνάρτηση ορίζεται από μια δυναμοσειρά που συγκλίνει σε ένα διάστημα $(-R, R)$, τότε αυτομάτως παραγωγίζεται άπειρες φορές σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι

$$f^{(k)}(0) = k!\, a_k,$$

άρα

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Με άλλα λόγια, *μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά με κέντρο το* 0 *είναι πάντοτε η σειρά Taylor στο* 0 *της συνάρτησης την οποία ορίζει*.

Με αυτήν τη χαρούμενη νότα θα ήταν εύκολο να ολοκληρώσουμε τη μελέτη των δυναμοσειρών και των σειρών Taylor. Μια προσεκτική όμως εκτίμηση της κατάστασης θα αποκαλύψει αρκετά, αδιευκρίνιστα έως τώρα, σημεία.

Οι σειρές Taylor των $\sin$, $\cos$ και $\exp$ είναι όσο ικανοποιητικές θα θέλαμε: συγκλίνουν για κάθε x, και παραγωγίζονται όρο προς όρο για κάθε x. Η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \log(1+x)$ είναι κάπως λιγότερο ευχάριστη, γιατί συγκλίνει μόνο για $-1 < x \leq 1$, αλλά αυτή η αδυναμία είναι αναγκαίο επακόλουθο της φύσης των δυναμοσειρών. Αν η σειρά Taylor της f συγκλίνει για κάποιο x_0 με $|x_0| > 1$, τότε θα συγκλίνει στο διάστημα $(-|x_0|, |x_0|)$, και σε αυτό το διάστημα η συνάρτηση που ορίζει θα είναι παραγωγίσιμη, επομένως συνεχής. Αλλά αυτό είναι αδύνατο, γιατί δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ όπου είναι ίση με $\log(1+x)$.

Η σειρά Taylor της $\arctan$ είναι ακόμα πιο δυσνόητη —φαίνεται ότι δεν υπάρχει μια λογική εξήγηση για την άρνηση αυτής της σειράς να συγκλίνει όταν $|x| > 1$. Ένα ακόμα πιο εντυπωσιακό παράδειγμα αυτής της μυστηριώδους συμπεριφοράς δίνει η συνάρτηση $f(x) = 1/(1+x^2)$, μια άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, που είναι το πιο φυσιολογικό πράγμα μετά από μια πολυωνυμική συνάρτηση. Η σειρά Taylor της f δίνεται από την

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots .$$

Αν $|x| \geq 1$, η σειρά Taylor δεν συγκλίνει. Γιατί; Ποιο αόρατο εμπόδιο δεν αφήνει τη σειρά Taylor να επεκταθεί πέρα από το 1 και το -1; Το να κάνει κανείς τέτοιες ερωτήσεις είναι πάντα επικίνδυνο, γιατί μπορεί να καταλήξει σε μια αντιπαθητική απάντηση: συμβαίνει γιατί συμβαίνει —έτσι έχουν τα πράγματα! Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει μια εξήγηση, η οποία όμως δεν μπορεί να δοθεί αυτήν τη στιγμή: Αν και το πρόβλημα αφορά τους πραγματικούς αριθμούς, μπορεί να απαντηθεί εμπνευσμένα μόνο αν τοποθετηθεί σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Θα χρειαστεί λοιπόν να αφιερώσουμε δύο κεφάλαια σε τελείως καινούργιο υλικό, μέχρι να ολοκληρώσουμε τη μελέτη των σειρών Taylor στο Κεφάλαιο 27.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες $\{f_n\}$, βρείτε το κατά σημείο όριο της $\{f_n\}$ (αν υπάρχει) στο διάστημα που υποδεικνύουμε, και εξετάστε αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε αυτήν τη συνάρτηση.

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, στο $[0,1]$.

(ii) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ x-n, & x \geq n, \end{cases}$ στο $[a,b]$, και στο $\mathbf{R}$.

(iii) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n}$, στο $(1,\infty)$.

(iv) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, στο $[-1,1]$.

(v) $f_n(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{n}$, στο $\mathbf{R}$.

2. Αυτό το πρόβλημα ζητά τα ίδια πράγματα όπως και το Πρόβλημα 1, αλλά οι συναρτήσεις του δεν είναι και τόσο εύκολες. Μερικές υποδείξεις δίνονται στο τέλος:

(i) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ στο $[0,1]$.

(ii) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$ στο $[0,\infty)$.

(iii) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ στο $[a,\infty)$, $a > 0$.

(iv) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ στο $\mathbf{R}$.

(v) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ στο $[a,\infty)$, $a > 0$.

(vi) $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}$ στο $[0,\infty)$.

(vii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ στο $[a,\infty)$, $a > 0$.

(viii) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ στο $[0,\infty)$ και στο $(0,\infty)$.

Υποδείξεις: (i) Για κάθε n, βρείτε το μέγιστο του $|f - f_n|$ στο $[0,1]$. (ii) Για κάθε n, θεωρήστε το $|f(x) - f_n(x)|$ για μεγάλο x. (iii) Θεώρημα Μέσης Τιμής. (iv) Δώστε μια ξεχωριστή εκτίμηση του $|f(x) - f_n(x)|$ για μικρό $|x|$. (vii) Χρησιμοποιήστε το (v).

3. Βρείτε τη σειρά Taylor στο 0 για καθεμιά από τις συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}, \quad a \neq 0.$

(ii) $f(x) = \log(x-a), \quad a < 0.$

(iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2}.$ (Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 20-21.)

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(v) $f(x) = \arcsin x.$

4. Βρείτε καθένα από τα επόμενα απειροαθροίσματα.

(i) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots.$

(ii) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots$ για $|x| < 1$.

Υπόδειξη: Με τι είναι ίσο το $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$;

(iii) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3\cdot 2} + \dfrac{x^4}{4\cdot 3} - \dfrac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots$ για $|x| < 1$.

Υπόδειξη: Παραγωγίστε.

5. Υπολογίστε τα πιο κάτω απειροαθροίσματα. (Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι $f(a)$ όπου a είναι κάποιος προφανής αριθμός και $f(x)$ δίνεται από κάποια δυναμοσειρά. Για να βρείτε την τιμή των διαφόρων δυναμοσειρών, επεξεργαστείτε τις μέχρι να εμφανιστεί κάποια γνωστή σειρά.)

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$

(v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}.$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}.$

6. Αν $f(x) = (\sin x)/x$ για $x \neq 0$ και $f(0) = 1$, βρείτε την $f^{(k)}(0)$. Υπόδειξη: Βρείτε τη δυναμοσειρά της f.

7. Σε αυτό το πρόβλημα εξάγουμε τη διωνυμική σειρά $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $|x| < 1$ χωρίς την εργασία που κάναμε στο Πρόβλημα 23-21, αν και θα χρησιμοποιήσουμε κάτι που αποδείχθηκε στο μέρος (α) εκείνου του προβλήματος —η σειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ συγκλίνει για $|x| < 1$.

(α) Αποδείξτε ότι $(1 + x) f'(x) = \alpha f(x)$ για $|x| < 1$.

(β) Τώρα δείξτε ότι κάθε συνάρτηση f που ικανοποιεί το μέρος (α) είναι της μορφής $f(x) = c(1+x)^\alpha$ για κάποια σταθερά c, και χρησιμοποιήστε αυτό το στοιχείο για να πάρετε τη διωνυμική σειρά. Υπόδειξη: Εξετάστε την $g(x) = f(x)/(1 + x)^\alpha$.

8. Έστω ότι f_n μη αρνητικές φραγμένες συναρτήσεις στο A και έστω $M_n = \sup f_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A, είναι αλήθεια ότι συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$; (ένα αντίστροφο του M-κριτηρίου του Weierstrass).

9. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$.

10. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$ για $a > 0$. Υπόδειξη: $\lim_{h \to 0} (\sin h)/h = 1$.

(β) Θεωρώντας το άθροισμα από το N μέχρι το ∞ για $x = 2/(\pi 3^N)$, δείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, \infty)$.

11. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^4 x^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$ για $a > 0$. Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα το μέγιστο του $nx/(1 + n^4 x^2)$ στο $[0, \infty)$.

(β) Δείξτε ότι

$$f\left(\frac{1}{N}\right) \geq \frac{N}{2} \sum_{n \geq \sqrt{N}} \frac{1}{n^3},$$

και χρησιμοποιώντας ένα ολοκλήρωμα για να προσεγγίσετε το άθροισμα, δείξτε ότι $f(1/N^2) \geq 1/4$. Συμπεράνετε ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbf{R}$.

(γ) Τί συμβαίνει με τη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2};$$

12. (α) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 15-33 και το Λήμμα του Abel (Πρόβλημα 19-36) για να λάβετε μια «ομοιόμορφη συνθήκη Cauchy», αποδεικνύοντας ότι για $\varepsilon > 0$, το

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right|$$

μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό σε ολόκληρο το διάστημα $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ αν επιλέξουμε αρκετά μεγάλο m (και n). Συμπεράνετε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ για $\varepsilon > 0$.

(β) Για $x = \pi/N$, με N μεγάλο, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \sin kx \right| = \left| \sum_{k=0}^{N} \sin kx \right| \geq \frac{N}{\pi}.$$

Συμπεράνετε ότι

$$\left| \sum_{k=N}^{2N} \frac{\sin kx}{k} \right| \geq \frac{1}{2\pi},$$

και ότι η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$.

13. (α) Έστω ότι η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάθε x σε ένα διάστημα $(-R, R)$ και ότι $f(x) = 0$ για κάθε x στο $(-R, R)$. Αποδείξτε ότι κάθε $a_n = 0$. (Αν θυμάστε τον τύπο για τα a_n, αυτό είναι εύκολο.)

(β) Έστω ότι ξέρουμε μόνο πως $f(x_n) = 0$ για κάποια ακολουθία $\{x_n\}$ με $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Αποδείξτε πάλι ότι κάθε $a_n = 0$. Υπόδειξη: Πρώτα δείξτε ότι $f(0) = a_0 = 0$, μετά ότι $f'(0) = a_1 = 0$, κτλ.

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι, αν $f(x) = e^{-1/x^2} \sin 1/x$ για $x \neq 0$, τότε η f δεν είναι δυνατόν να γραφεί ως δυναμοσειρά. Δείχνει ακόμα ότι μια συνάρτηση που ορίζεται με δυναμοσειρά δεν μπορεί να είναι 0 για $x \leq 0$ και όχι μηδέν για $x > 0$ —άρα μια δυναμοσειρά δεν μπορεί να περιγράψει την κίνηση ενός σωματιδίου που ήταν ακίνητο μέχρι τη χρονική στιγμή 0 και μετά άρχισε να κινείται!

(γ) Έστω ότι η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και η $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνουν για κάθε x μέσα σε ένα διάστημα που περιέχει το 0 και ότι $f(t_m) = g(t_m)$ για κάποια ακολουθία $\{t_m\}$ που συγκλίνει στο 0. Δείξτε ότι $a_n = b_n$ για κάθε n.

14. Αποδείξτε ότι, αν η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $a_n = 0$ για κάθε n περιττό, και αν η f είναι περιττή συνάρτηση, τότε $a_n = 0$ για κάθε n άρτιο.

15. Δείξτε ότι η δυναμοσειρά της $f(x) = \log(1 - x)$ συγκλίνει μόνο για $-1 \leq x < 1$, και ότι η δυναμοσειρά της $g(x) = \log[(1 + x)/(1 - x)]$ συγκλίνει μόνο για x στο $(-1, 1)$.

∗**16.** Θυμηθείτε ότι η ακολουθία Fibonacci $\{a_n\}$ ορίζεται από τις $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(α) Δείξτε ότι $a_{n+1}/a_n \leq 2$.

(β) Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots .$$

Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να αποδείξετε ότι η $f(x)$ συγκλίνει αν $|x| < 1/2$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $|x| < 1/2$, τότε

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}.$$

Υπόδειξη: Αυτή η ισότητα γράφεται και ως $f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1$.

(δ) Διασπάστε σε μερικά κλάσματα το $1/(x^2 + x - 1)$ και χρησιμοποιήστε τη δυναμοσειρά της $1/(x - a)$, για να πάρετε μια άλλη δυναμοσειρά για την f.

(ε) Αφού οι δύο δυναμοσειρές που παίρνουμε για την f πρέπει να είναι ίδιες (είναι και οι δύο η σειρά Taylor της συνάρτησης), συμπεράνετε ότι

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

17. Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Έστω ότι γνωρίζουμε μόνο ότι $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ για κάποια c_n, αλλά δεν γνωρίζουμε πώς να πολλαπλασιάζουμε, εν γένει, σειρές. Χρησιμοποιήστε τον τύπο του Leibniz (Πρόβλημα 10-20) για να δείξετε απευθείας ότι αυτή η σειρά για την fg είναι πράγματι το γινόμενο Cauchy των σειρών της f και g.

18. Έστω ότι η $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάποιο x_0 και ότι $a_0 \neq 0$. Χάριν απλότητας, θα υποθέσουμε ότι $a_0 = 1$. Έστω $\{b_n\}$ η ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά από τις

$$b_0 = 1$$
$$b_n = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k a_{n-k}.$$

Ο σκοπός αυτού του προβλήματος, είναι να δείξει ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνει επίσης για κάποιο $x \neq 0$, έτσι ώστε παριστά την $1/f$ για αρκετά μικρά $|x|$.

(α) Αν $|a_n {x_0}^n| \leq M$, δείξτε ότι

$$|b_n {x_0}^n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k {x_0}^k|.$$

(β) Διαλέξτε M έτσι ώστε $|a_n {x_0}^n| \leq M$ και $M/(M^2 - 1) \leq 1$. Δείξτε ότι

$$|b_n {x_0}^n| \leq M^{2n}.$$

(γ) Συμπεράνετε ότι το $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ συγκλίνει για $|x|$ αρκετά μικρό.

∗**19.** Έστω ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Ξέρουμε ότι η σειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ πρέπει να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ για $0 < a < 1$, αλλά μπορεί να μη συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1, 1]$· και μάλιστα, μπορεί να μη συγκλίνει καν στο σημείο -1 (για παράδειγμα, αν $f(x) = \log(1 + x)$). Όμως, ένα όμορφο θεώρημα του Abel δείχνει ότι η σειρά *συγκλίνει* ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και, ειδικότερα, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Αποδείξτε το Θεώρημα του Abel με την παρατήρηση ότι αν $|a_m + \cdots + a_n| < \varepsilon$, τότε $|a_m x^m + \cdots + a_n x^n| < \varepsilon$, από το Λήμμα του Abel. (Πρόβλημα 19-36.)

20. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ λέγεται **Abel αθροίσιμη** αν το $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ υπάρχει· το Πρόβλημα 19 δείχνει ότι κάθε αθροίσιμη ακολουθία είναι αναγκαστικά Abel αθροίσιμη. Βρείτε μια ακολουθία που είναι Abel αθροίσιμη, αλλά δεν είναι αθροίσιμη. Υπόδειξη: Ανατρέξτε στον κατάλογο των σειρών Taylor μέχρι να βρείτε μια που δεν συγκλίνει στο 1, αν και η συνάρτηση που παριστάνει είναι συνεχής στο 1.

21. (α) Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 19, βρείτε τα πιο κάτω απειροαθροίσματα:

(i) $\dfrac{1}{2 \cdot 1} - \dfrac{1}{3 \cdot 2} + \dfrac{1}{4 \cdot 3} - \dfrac{1}{5 \cdot 4} + \cdots$.

(ii) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$.

(β) Έστω ότι $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ είναι το γινόμενο Cauchy δύο συγκλινουσών δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, και υποθέτουμε απλώς ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, πράγματι, συγκλίνει στο γινόμενο $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

22. (α) Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\frac{1}{2}\log(x + 1)$ στο $[-a, a]$ για $0 < a < 1$, αλλά στο 1 συγκλίνει στο $\log 2$. (Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει με το Θεώρημα του Abel (Πρόβλημα 19);)

23. (α) Έστω ότι $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία από φραγμένες (όχι αναγκαστικά συνεχείς) συναρτήσεις στο $[a, b]$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

(β) Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη φραγμένη συνάρτηση στο $[a, b]$.

24. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f' είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων. (Αφού ξέρουμε ήδη παραδείγματα ασυνεχών παραγώγων, έχουμε ακόμα ένα παράδειγμα στο οποίο το κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι συνεχής συνάρτηση.)

25. Βρείτε μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\{f_n\}$ που συγκλίνει στη (μη ολοκληρώσιμη) συνάρτηση f που είναι 1 στους ρητούς και 0 στους άρρητους. Υπόδειξη: Κάθε f_n θα είναι 0 εκτός από λίγα σημεία.

26. (α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι το ομοιόμορφο όριο της $\{f_n\}$ στο $[a,b]$ και κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε το ίδιο ισχύει και για την f. (Επομένως, μια από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1 δεν χρειαζόταν.)

(β) Στο Θεώρημα 3 υποθέσαμε μόνο ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f. Δείξτε ότι οι υπόλοιπες υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι η $\{f_n\}$ πράγματι συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(γ) Έστω ότι στο Θεώρημα 3 δεν δεχόμαστε πως η $\{f_n\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f, αλλά μόνο ότι η $f_n(x_0)$ συγκλίνει για κάποιο x_0 στο $[a,b]$. Δείξτε ότι η f_n πράγματι συγκλίνει (ομοιόμορφα) σε κάποια f (με $f' = g$).

(δ) Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$.

27. Έστω ότι f_n συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-1/n} f_n = \int_0^1 f.$$

Ισχύει το ίδιο αν η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη;

28. (α) Έστω ότι $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ που τείνει στο 0 κατά σημείο. Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι έχουμε $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0$ για όλα τα n και για όλα τα x στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι η $\{f_n\}$ τείνει στο 0 ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Υπόδειξη: Υποθέστε πως όχι, διαλέξτε κατάλληλη ακολουθία σημείων x_n στο $[a,b]$, και εφαρμόστε το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

(β) Αποδείξτε το Θεώρημα του Dini: Αν η $\{f_n\}$ είναι μια μη αύξουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ η οποία τείνει κατά σημείο σε συνεχή συνάρτηση f, τότε η $\{f_n\}$ τείνει στην f ομοιόμορφα στο $[a,b]$. (Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν η $\{f_n\}$ είναι μη φθίνουσα ακολουθία.)

(γ) Ισχύει το Θεώρημα του Dini αν η f δεν είναι συνεχής; Τί συμβαίνει αν το $[a,b]$ αντικατασταθεί από το ανοικτό διάστημα (a,b);

29. (α) Έστω ότι $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο $[a,b]$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Αποδείξτε ότι, αν το x_n τείνει στο x, τότε η $f_n(x_n)$ τείνει στο $f(x)$.

(β) Ισχύει το ίδιο χωρίς την υπόθεση ότι οι f_n είναι συνεχείς;

(γ) Αποδείξτε το αντίστροφο του μέρους (α): αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία με την ιδιότητα η $f_n(x_n)$ να τείνει στην $f(x)$ όποτε το x_n τείνει στο x, τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a,b]$. Υπόδειξη: Αν όχι, υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ και μια ακολουθία x_n έτσι ώστε $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$ για άπειρα το πλήθος διαφορετικά x_n. Τώρα, χρησιμοποιήστε το θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

30. Σε αυτό το πρόβλημα περιγράφουμε μια τελείως διαφορετική προσέγγιση στο ολοκλήρωμα· επομένως, δεν είναι δίκαιο να χρησιμοποιήσουμε πληροφορίες που έχουμε ήδη μάθει για τα ολοκληρώματα.

(α) Έστω s μια κλιμακωτή συνάρτηση στο $[a,b]$, δηλαδή η s είναι σταθερή στο (t_{i-1},t_i) για κάποια διαμέριση $\{t_0,\ldots,t_n\}$ του $[a,b]$. Ορίζουμε το $\int_a^b s$ ως $\sum_{i=1}^{n} s_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ όπου s_i είναι η (σταθερή) τιμή της s στο (t_{i-1},t_i). Δείξτε ότι αυτός ο ορισμός δεν εξαρτάται από τη διαμέριση $\{t_0,\ldots,t_n\}$.

(β) Μια συνάρτηση f λέγεται **κανονικοποιημένη** στο $[a, b]$ αν είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας κλιμακωτών συναρτήσεων $\{s_n\}$ στο $[a, b]$. Δείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει, για κάθε $\varepsilon > 0$, κάποιο N τέτοιο ώστε για $m, n > N$ να έχουμε $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(γ) Δείξτε ότι η ακολουθία των αριθμών $\left\{\int_a^b s_n\right\}$ θα είναι ακολουθία Cauchy.

(δ) Έστω ότι $\{t_n\}$ μια άλλη ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων στο $[a, b]$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα N τέτοιο ώστε για $n > N$ να έχουμε $|s_n(x) - t_n(x)| < \varepsilon$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(ε) Συμπεράνετε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να *ορίσουμε* το $\int_a^b f$ ως $\lim_{n\to\infty} s_n$ για οποιαδήποτε ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων $\{s_n\}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Το μόνο ερώτημα που απομένει είναι: Ποιες συναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες;

∗(στ) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη. Υπόδειξη: Για να βρείτε μια κλιμακωτή συνάρτηση s στο $[a, b]$ με $|f(x) - s(x)| < \varepsilon$ για κάθε x στο $[a, b]$, θεωρήστε όλα τα y για τα οποία υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση στο $[a, y]$.

(ζ) Κάθε κλιμακωτή συνάρτηση s έχει την ιδιότητα ότι τα $\lim_{x\to a^+} s(x)$ και $\lim_{x\to a^-} s(x)$ υπάρχουν για κάθε a. Συμπεράνετε ότι κάθε κανονικοποιημένη συνάρτηση έχει την ίδια ιδιότητα, και βρείτε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση που δεν είναι κανονικοποιημένη. (Αντίστροφα, ισχύει επίσης ότι κάθε συνάρτηση f με την ιδιότητα ότι τα $\lim_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim_{x\to a^-} f(x)$ υπάρχουν για κάθε a είναι κανονικοποιημένη.)

∗**31.** Βρείτε μια ακολουθία $\{f_n\}$ που συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ για την οποία $\lim_{n\to\infty}$ (μήκος της f_n στο $[0, 1]$) $\neq$ μήκος της f στο $[0, 1]$. (Το μήκος ορίζεται στο Πρόβλημα 13-25, αλλά στο απλούστερο δυνατό παράδειγμα εμφανίζονται συναρτήσεις για τις οποίες το μήκος της γραφικής τους παράστασης είναι προφανές.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25 ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Με την εξαίρεση των τελευταίων παραγράφων του προηγουμένου κεφαλαίου, αυτό το βιβλίο επιδόθηκε σε μια προπαγάνδιση των πραγματικών αριθμών. Όμως, οι πραγματικοί αριθμοί έχουν ένα μεγάλο ελάττωμα —δεν ισχύει ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση έχει ρίζα. Το πιο απλό και αξιοσημείωτο παράδειγμα μας το δίνει το γεγονός ότι δεν υπάρχει αριθμός x που να ικανοποιεί την $x^2+1=0$. Αυτή η αδυναμία είναι τόσο σοβαρή, που από πολύ παλιά οι μαθηματικοί αισθάνθηκαν την ανάγκη να «επινοήσουν» έναν αριθμό i με την ιδιότητα $i^2+1=0$. Για πολύ καιρό, η κατάσταση του «αριθμού» i ήταν μάλλον μυστηριώδης: αφού δεν υπάρχει ένας αριθμός x που να ικανοποιεί την $x^2+1=0$, είναι παράλογο να λέμε «έστω i ο αριθμός που ικανοποιεί την $i^2+1=0$». Και όμως, η αποδοχή του «φανταστικού» αριθμού i στην οικογένεια των αριθμών έμοιαζε να απλοποιεί κατά πολύ αρκετούς αλγεβρικούς υπολογισμούς, ιδιαίτερα όταν οι «μιγαδικοί αριθμοί» $a+bi$ (για a και b στο $\mathbf{R}$) επετράπησαν, και όλοι οι νόμοι των αριθμητικών υπολογισμών που απαριθμήσαμε στο Κεφάλαιο 1 υποτέθηκε ότι ισχύουν. Για παράδειγμα, κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

γίνεται να λυθεί τυπικά και δίνει

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Αν $b^2-4ac\geq 0$, οι τύποι δίνουν σωστές λύσεις· αν επιτρέψουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, οι τύποι αυτοί έχουν έννοια σε όλες τις περιπτώσεις. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x^2+x+1=0$$

δεν έχει πραγματική λύση, αφού

$$x^2+x+1=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}>0, \quad \text{για κάθε } x.$$

Αλλά ο τύπος για τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης υποδεικνύει τις «λύσεις»

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{και} \quad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Αν συμφωνήσουμε το $\sqrt{-3}$ να σημαίνει $\sqrt{3\cdot(-1)}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$, τότε αυτοί οι αριθμοί θα ήταν οι

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i \quad \text{και} \quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι αυτοί οι, προς το παρόν τελείως τυπικοί, αριθμοί ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2+x+1=0.$$

Μπορούμε ακόμα να «λύσουμε» δευτεροβάθμιες εξισώσεις που οι συντελεστές τους είναι οι ίδιοι μιγαδικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x^2+x+1+i=0$$

θα έπρεπε να έχει τις λύσεις

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1+i)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2},$$

όπου το σύμβολο $\sqrt{-3-4i}$ σημαίνει έναν μιγαδικό αριθμό $\alpha + \beta i$ που το τετράγωνό του είναι $-3-4i$. Για να ισχύει

$$(\alpha+\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -3-4i$$

θα πρέπει

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= -3, \\ 2\alpha\beta &= -4. \end{aligned}$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις λύνονται εύκολα για πραγματικούς α και β· και μάλιστα υπάρχουν δύο δυνατές λύσεις

$$\begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{matrix} \quad \text{και} \quad \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 2. \end{matrix}$$

Άρα οι δύο «τετραγωνικές ρίζες» του $-3-4i$ είναι οι $1-2i$ και $-1+2i$. Δεν υπάρχει κάποιος εύλογος τρόπος για να αποφασίσουμε ποια από αυτές τις δύο θα έπρεπε να λέγεται $\sqrt{-3-4i}$ και ποια $-\sqrt{-3-4i}$. Η συμβατική χρήση του $\sqrt{x}$ έχει έννοια μόνο για πραγματικό $x \geq 0$, οπότε με $\sqrt{x}$ συμβολίζουμε την (πραγματική) μη αρνητική ρίζα. Για αυτόν το λόγο, η λύση

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$$

πρέπει να θεωρείται σύντμηση του:

$$x = \frac{-1+r}{2}, \quad \text{όπου } r \text{ είναι μια από τις τετραγωνικές ρίζες του } -3-4i.$$

Με αυτήν τη συμφωνία καταλήγουμε στις λύσεις

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1+1-2i}{2} = -i, \\ x &= \frac{-1-1+2i}{2} = -1+i. \end{aligned}$$

Όπως εύκολα μπορείτε να ελέγξετε, αυτοί οι αριθμοί μάς δίνουν πράγματι τυπικές λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + x + 1 + i = 0.$$

Για κυβικές εξισώσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί είναι εξίσου χρήσιμοι. Κάθε κυβική εξίσωση

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (a \neq 0)$$

με πραγματικούς συντελεστές a, b, c και d, έχει, όπως ξέρουμε, μια πραγματική ρίζα α, και αν διαιρέσουμε το $ax^3 + bx^2 + cx + d$ με $x - \alpha$ παίρνουμε ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο που οι ρίζες του είναι οι άλλες ρίζες της $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Οι ρίζες αυτού του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί. Άρα, μια κυβική εξίσωση θα έχει ή τρεις πραγματικές ρίζες ή μία πραγματική και 2 μιγαδικές ρίζες. Η ύπαρξη της πραγματικής ρίζας εξασφαλίζεται από το θεώρημά μας ότι κάθε εξίσωση περιττού βαθμού έχει μια πραγματική ρίζα· δεν είναι όμως απαραίτητο να προσφύγουμε σε αυτό το θεώρημα (που δεν έχει καμία απολύτως αξία αν οι συντελεστές είναι μιγαδικοί). Στην περίπτωση της κυβικής εξίσωσης μπορούμε, με κάποια ευστροφία, να βρούμε ακόμα και τύπους που να δίνουν όλες τις ρίζες. Δίνουμε την απόδειξη που ακολουθεί, όχι μόνο γιατί παρουσιάζει με ενδιαφέροντα τρόπο την ευφυΐα των παλαιότερων μαθηματικών, αλλά γιατί είναι μια ακόμα ένδειξη για τη σπουδαιότητα των μιγαδικών αριθμών (οτιδήποτε και αν είναι τελικά αυτοί).

Για να λύσουμε την πιο γενική κυβική εξίσωση, προφανώς αρκεί να εξετάσουμε μόνο εξισώσεις της μορφής

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Είναι επίσης δυνατόν να απαλειφθεί ο όρος που περιέχει το x^2, με ένα πολύ απλό τέχνασμα. Αν θέσουμε

$$x = y - \frac{b}{3},$$

τότε

$$x^3 = y^3 - by^2 + \frac{b^2 y}{3} - \frac{b^3}{27},$$
$$x^2 = y^2 - \frac{2by}{3} + \frac{b^2}{9},$$

άρα

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + bx^2 + cx + d \\ &= \left(y^3 - by^2 + \frac{b^2 y}{3} - \frac{b^3}{27}\right) + \left(by^2 - \frac{2b^2 y}{3} + \frac{b^3}{9}\right) + \left(cy - \frac{bc}{3}\right) + d \\ &= y^3 + \left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right) y + \left(\frac{b^3}{9} - \frac{b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right). \end{aligned}$$

Τώρα το δεξιό μέλος δεν περιέχει όρο με y^2. Αν μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως προς y, μπορούμε να βρούμε και το $x\cdot$ αυτό δείχνει ότι αρκεί να μελετήσουμε κατ' αρχήν μόνο εξισώσεις της μορφής

$$x^3 + px + q = 0.$$

Στην ειδική περίπτωση $p = 0$ παίρνουμε την εξίσωση $x^3 = -q$. Θα δούμε αργότερα ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει πράγματι κυβική ρίζα, και μάλιστα έχει τρεις, άρα αυτή η εξίσωση έχει τρεις λύσεις. Η περίπτωση $p \neq 0$, από την άλλη πλευρά, απαιτεί έναν τελείως πρωτότυπο χειρισμό. Θέτουμε

$$(*) \qquad x = w - \frac{p}{3w}$$

Τότε

$$\begin{aligned} 0 = x^3 + px + q &= \left(w - \frac{p}{3w}\right)^3 + p\left(w - \frac{p}{3w}\right) + q \\ &= w^3 - \frac{3w^2 p}{3w} + \frac{3wp^2}{9w^2} - \frac{p^3}{27w^3} + pw - \frac{p^2}{3w} + q \\ &= w^3 - \frac{p^3}{27w^3} + q. \end{aligned}$$

Αυτή η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$27(w^3)^2 + 27q(w^3) - p^3 = 0,$$

που είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς w^3(!!).

Άρα

$$\begin{aligned} w^3 &= \frac{-27q \pm \sqrt{(27)^2 q^2 + 4 \cdot 27 p^3}}{2 \cdot 27} \\ &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{aligned}$$

Θυμηθείτε ότι αυτό στην πραγματικότητα σημαίνει:

$$w^3 = -\frac{q}{2} + r, \quad \text{όπου } r \text{ είναι μια τετραγωνική ρίζα του } \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$w = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Αυτή η εξίσωση σημαίνει ότι ο w είναι κάποια κυβική ρίζα του $-q/2 + r$, όπου r είναι μια τετραγωνική ρίζα του $q^2/4 + p^3/27$. Αυτό επιτρέπει έξι δυνατά w, αλλά αν τα αντικαταστήσουμε στην $(*)$, παίρνουμε

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \; - \; \frac{p}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

οπότε προκύπτουν 3 μόνο διαφορετικές τιμές του x! Ένα ακόμα πιο εντυπωσιακό γνώρισμα αυτής της λύσης εμφανίζεται αν μελετήσουμε μια κυβική εξίσωση που όλες της οι ρίζες είναι πραγματικές· ο τύπος που μόλις αποδείξαμε μπορεί και πάλι να περιέχει μιγαδικούς αριθμούς με έναν ουσιαστικό τρόπο. Για παράδειγμα, οι ρίζες της

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

είναι 4, $-2 + \sqrt{3}$ και $-2 - \sqrt{3}$. Από την άλλη πλευρά, ο τύπος που αποδείξαμε παραπάνω (με $p = -15$, $q = -4$) δίνει ως λύση το

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} - \frac{-15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11i} \; + \; \frac{15}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + 11i}}. \end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i, \end{aligned}$$

δηλαδή μια από τις κυβικές ρίζες του $2 + 11i$ είναι η $2 + i$. Έτσι, μια από τις λύσεις της εξίσωσης είναι το

$$\begin{aligned} x &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \\ &= 2 + i + \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= 2 + i + \frac{90 - 45i}{36 + 9} \\ &= 4 \; (!). \end{aligned}$$

Οι άλλες ρίζες υπολογίζονται και αυτές αν είναι γνωστές οι υπόλοιπες κυβικές ρίζες του $2 + 11i$. Το γεγονός ότι έστω μία από αυτές τις πραγματικές ρίζες προκύπτει από μια παράσταση που περιέχει μιγαδικούς αριθμούς είναι αρκετά εντυπωσιακό για να υποδείξει ότι η χρήση των μιγαδικών αριθμών δεν μπορεί να είναι τελείως ανούσια. Πάντως, οι τύποι που δίνουν τις λύσεις των δευτεροβάθμιων και κυβικών εξισώσεων μπορούν να δοθούν συναρτήσει πραγματικών αριθμών μόνο.

Ας υποθέσουμε ότι συμφωνούμε, για την ώρα, να γράφουμε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς ως $a + bi$, γράφοντας τον πραγματικό αριθμό a ως $a + 0i$ και τον αριθμό i ως $0 + 1i$. Οι γνωστοί νόμοι της αριθμητικής και η σχέση $i^2 = -1$, δείχνουν ότι

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Έτσι, μια ισότητα όπως η

$$(1 + 2i) \cdot (3 + 1i) = 1 + 7i$$

μπορεί να θεωρηθεί απλώς ως σύντμηση για τις *δύο* ισότητες

$$1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1,$$
$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7.$$

Θα μπορούσαμε να παραφράσουμε τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$ με πραγματικούς συντελεστές ως εξής:

$$\text{Αν } \begin{cases} u^2 - v^2 = b^2 - 4ac, \\ uv = 0, \end{cases}$$
(δηλαδή, αν $(u + vi)^2 = b^2 - 4ac$),

$$\text{τότε } \begin{cases} a\left[\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{v}{2a}\right)^2\right] + b\left[\dfrac{-b+u}{2a}\right] + c = 0, \\ a\left[2\left(\dfrac{-b+u}{2a}\right)\left(\dfrac{v}{2a}\right)\right] + b\left[\dfrac{v}{2a}\right] = 0, \end{cases}$$
$$\left(\text{δηλαδή, τότε } a\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+u+vi}{2a}\right) + c = 0\right).$$

Δεν είναι πολύ δύσκολο να ελέγξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, χωρίς να χρειαστεί να γράψουμε ούτε ένα «i», αλλά η πολυπλοκότητα της ίδιας της διατύπωσης για πραγματικούς αριθμούς θα έπρεπε να σας πείθει ότι οι ισότητες με μιγαδικούς αριθμούς είναι αξιόλογες συντομεύσεις για ζεύγη ισοτήτων με πραγματικούς αριθμούς. (Αν δεν έχετε πεισθεί ακόμα, προσπαθήστε να παραφράσετε τη λύση της κυβικής εξίσωσης.) Αν όμως θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με συνέπεια, είναι απαραίτητο να διατυπώσουμε έναν λογικό ορισμό.

Σε όλη αυτήν τη συζήτηση, αφήσαμε ανοικτή μια δυνατότητα. Όλες οι μαθηματικές ιδιότητες ενός μιγαδικού αριθμού $a + bi$ καθορίζονται πλήρως από τους πραγματικούς αριθμούς a και b· κάθε μαθηματικό αντικείμενο με την ίδια αυτή ιδιότητα μπορεί λογικά να χρησιμεύσει για να ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς. Ο προφανής υποψήφιος είναι το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) πραγματικών αριθμών. Θα *ορίσουμε* κατά συνέπεια έναν μιγαδικό αριθμό ως ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών, και με όμοιο τρόπο θα *ορίσουμε* τι εννοούμε όταν μιλάμε για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μιγαδικός αριθμός είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών. Αν $z = (a, b)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ο a λέγεται το **πραγματικό μέρος** του z, και ο b λέγεται το **φανταστικό μέρος** του z. Το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbf{C}$. Αν (a, b) και (c, d) είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, ορίζουμε

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c).$$

(Το $+$ και το $\cdot$ που εμφανίζονται στην αριστερή πλευρά είναι νέα σύμβολα που τώρα ορίζονται, ενώ το $+$ και το $\cdot$ στο δεξιό μέλος είναι οι γνωστές μας πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών).

Όταν αναφέραμε για πρώτη φορά τους μιγαδικούς αριθμούς, θεωρούσαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ταυτόχρονα και μιγαδικοί· αν πάρουμε τοις μετρητοίς τον ορισμό μας, αυτό δεν είναι σωστό —ένας πραγματικός αριθμός δεν είναι ζεύγος πραγματικών αριθμών, όπως και να το κάνουμε. Όμως αυτή η δυσκολία δεν μας προκαλεί μεγάλη ενόχληση. Παρατηρήστε ότι

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0+0)=(a+b,0),$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0,a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0).$$

Αυτό δείχνει ότι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $(a,0)$ συμπεριφέρονται, ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών, ακριβώς όπως οι πραγματικοί, με τη δική τους πρόσθεση και πολλαπλασιασμό. Για αυτόν το λόγο, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση να συμβολίζουμε το $(a,0)$ απλώς με a. Αν δώσουμε έναν ακόμα ορισμό, θα είμαστε σε θέση να επαναφέρουμε τον γνωστό συμβολισμό $a+bi$ για τους μιγαδικούς αριθμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

$$\boldsymbol{i}=(0,1).$$

Παρατηρήστε ότι $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ (η τελευταία ισότητα στηρίζεται στη σύμβαση που κάναμε). Ακόμα

$$\begin{aligned}(a,b)&=(a,0)+(0,b)\\&=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)\\&=a+bi.\end{aligned}$$

Ίσως αισθάνεστε ότι ο ορισμός ήταν μια πολύπλοκη επινόηση που μοναδικό σκοπό είχε να ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως «εκφράσεις της μορφής $a+bi$». Αυτό ουσιαστικά είναι σωστό· υπάρχει μια πολύ ισχυρά θεμελιωμένη προκατάληψη στα σύγχρονα μαθηματικά ότι τα καινούργια αντικείμενα πρέπει να ορίζονται ως κάτι συγκεκριμένο, όχι ως «εκφράσεις». Όμως, είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι μαθηματικοί είχαν πραγματικά προβλήματα με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών, μέχρις ότου προτάθηκε ο σύγχρονος ορισμός. Επιπλέον, ο ακριβής ορισμός τονίζει ένα σημαντικό σημείο. Ο στόχος μας όταν εισαγάγαμε τους μιγαδικούς αριθμούς ήταν να αποφύγουμε την υποχρέωση να παραφράζουμε προτάσεις για τους μιγαδικούς αριθμούς σε προτάσεις για τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να δουλεύουμε με τους μιγαδικούς αριθμούς ακριβώς όπως δουλεύαμε με τους ρητούς ή τους πραγματικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, για τη λύση της κυβικής εξίσωσης χρειάστηκε να γράψουμε $x=w-p/3w$, άρα θέλουμε να ξέρουμε αν ο $1/w$ έχει έννοια. Επίσης, το w^3 βρέθηκε με την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, που απαιτεί αρκετές άλλες αλγεβρικές πράξεις. Με λίγα λόγια, πιθανότατα θα χρειαστεί τώρα ή κάποια άλλη στιγμή να χρησιμοποιήσουμε όλους τους μετασχηματισμούς που είναι δυνατοί στους πραγματικούς αριθμούς. Ασφαλώς, δεν θέλουμε να σταματάμε κάθε στιγμή και να δικαιολογούμε κάθε βήμα. Ευτυχώς, αυτό δεν είναι αναγκαίο. Αφού όλοι οι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί που εκτελούνται στους πραγματικούς αριθμούς είναι δικαιολογημένοι από τις ιδιότητες του Κεφαλαίου 1, αρκεί να ελέγξουμε ότι αυτές οι ιδιότητες ισχύουν και για τους μιγαδικούς αριθμούς. Στις περισσότερες περιπτώσεις αυτό είναι πολύ εύκολο, και αυτά τα στοιχεία δεν θα καταγραφούν ως τυπικά θεωρήματα. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της Π1,

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$$

χρειάζεται μόνο να εφαρμόσουμε τον ορισμό της πρόσθεσης για μιγαδικούς αριθμούς. Το αριστερό μέλος γίνεται

$$([a+c]+e,[b+d]+f),$$

και το δεξιό μέλος γίνεται

$$(a + [c + e], b + [d + f]).$$

Αυτά τα δύο είναι ίσα, αφού η I1 ισχύει για πραγματικούς αριθμούς. Είναι καλή ιδέα να ελέγξετε τις I2–I6 και την I8 και την I9. Παρατηρήστε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί που παίζουν τους ρόλους του 0 και του 1 στις I2 και I6 είναι ο $(0, 0)$ και ο $(1, 0)$ αντίστοιχα. Δεν είναι δύσκολο να μαντέψετε τι είναι ο $-(a, b)$, αλλά το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του (a, b) που απαιτεί η I7 είναι κάπως πιο περίπλοκο: αν $(a, b) \neq (0, 0)$, τότε $a^2 + b^2 \neq 0$ και

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0).$$

Αυτό θα μπορούσαμε να το έχουμε μαντέψει με δύο τρόπους. Για να βρούμε τα (x, y) με

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$$

αρκεί να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} ax - by &= 1, \\ bx + ay &= 0. \end{aligned}$$

Οι λύσεις είναι $x = a/(a^2+b^2)$, $y = -b/(a^2+b^2)$. Μπορούμε επίσης να ισχυριστούμε ότι, αν το $1/(a + bi)$ σημαίνει πραγματικά κάτι, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Από τη στιγμή που η ύπαρξη των αντιστρόφων έχει αποδειχθεί (αφού με κάποια μέθοδο μαντέψαμε τον αντίστροφο), έπεται ότι αυτός ο μετασχηματισμός είναι πραγματικά σωστός· είναι άλλωστε αυτός που θυμόμαστε πιο εύκολα όταν ψάχνουμε για τον αντίστροφο ενός μιγαδικού αριθμού —ακριβώς αυτό το τέχνασμα εφαρμόσαμε για να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} \frac{15}{6 + 3i} &= \frac{15}{6 + 3i} \cdot \frac{6 - 3i}{6 - 3i} \\ &= \frac{90 - 45i}{36 + 9}. \end{aligned}$$

Αντίθετα από τις I1–I9, δεν υπάρχουν τα ανάλογα των I10–I12: είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι *δεν* υπάρχει σύνολο P *μιγαδικών* αριθμών τέτοιο ώστε οι I10–I12 να ικανοποιούνται από όλους τους *μιγαδικούς* αριθμούς. Πραγματικά, αν υπήρχε, τότε το P θα έπρεπε να περιέχει το 1 (αφού $1 = 1^2$) και το -1 (αφού $-1 = i^2$), και αυτό θα ερχόταν σε αντίφαση με την I10. Η απουσία των I10-I12 δεν πρόκειται να έχει καταστροφικές συνέπειες, σημαίνει όμως ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποια σχέση $z < w$ για μιγαδικούς z και w. Επίσης, ίσως θυμάστε ότι, στους πραγματικούς αριθμούς, οι I10–I12 χρησιμοποιήθηκαν για να δείξουμε ότι $1 + 1 \neq 0$. Ευτυχώς, το αντίστοιχο αποτέλεσμα για μιγαδικούς αριθμούς ανάγεται σε αυτό: προφανώς $(1, 0) + (1, 0) \neq (0, 0)$.

Αν και συνήθως θα γράφουμε τους μιγαδικούς αριθμούς στη μορφή $a + bi$, αξίζει να θυμόμαστε ότι το σύνολο $\mathbf{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι ακριβώς το σύνολο όλων των ζευγών από πραγματικούς αριθμούς. Παλιά αυτό το σύνολο ταυτιζόταν με το επίπεδο, και για αυτόν το λόγο το επίπεδο λέγεται συχνά «μιγαδικό επίπεδο». Ο οριζόντιος άξονας, που αποτελείται από όλα τα σημεία $(a, 0)$ με a στο $\mathbf{R}$, συχνά αποκαλείται ο *πραγματικός άξονας*, και ο κατακόρυφος άξονας λέγεται και *φανταστικός άξονας*. Με αυτήν τη γεωμετρική εικόνα συνδέονται δύο ακόμα σπουδαίοι ορισμοί.

ΟΡΙΣΜΟΣ

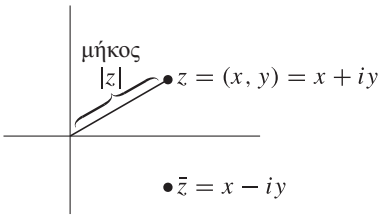
Αν $z = x + iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός (με x και y πραγματικούς), τότε ο **συζυγής** $\bar{z}$ του z ορίζεται από την

$$\bar{z} = x - iy,$$

και η **απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** $|z|$ του z ορίζεται ως

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

(Παρατηρήστε ότι $x^2 + y^2 \geq 0$, άρα η $\sqrt{x^2 + y^2}$ ορίζεται με σαφήνεια· συμβολίζει τη θετική πραγματική τετραγωνική ρίζα του $x^2 + y^2$.)



ΣΧΗΜΑ 1

Γεωμετρικά, ο $\bar{z}$ είναι απλώς ο αντικατοπτρισμός του z ως προς τον πραγματικό άξονα, ενώ $|z|$ είναι η απόσταση του z από το $(0, 0)$ (Σχήμα 1). Παρατηρήστε ότι ο συμβολισμός της απόλυτης τιμής για μιγαδικούς αριθμούς συμφωνεί με τον αντίστοιχο για πραγματικούς αριθμούς. Η **απόσταση** ανάμεσα σε δύο μιγαδικούς αριθμούς z και w ορίζεται εξίσου εύκολα ως $|z - w|$. Το θεώρημα που ακολουθεί αναφέρει όλες τις σημαντικές ιδιότητες των συζυγών και των απολύτων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω z και w μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

(1) $\bar{\bar{z}} = z$.

(2) $\bar{z} = z$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός (δηλαδή είναι της μορφής $a + 0i$, για κάποιον πραγματικό αριθμό a).

(3) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

(4) $\overline{-z} = -\bar{z}$.

(5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

(6) $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$, αν $z \neq 0$.

(7) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

(8) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

(9) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Οι ισχυρισμοί (1) και (2) είναι προφανείς. Οι ισότητες (3) και (5) ελέγχονται με απευθείας υπολογισμούς και οι (4) και (6) αποδεικνύονται με ένα τέχνασμα:

$$0 = \bar{0} = \overline{z + (-z)} = \bar{z} + \overline{-z}, \quad \text{άρα } \overline{-z} = -\bar{z},$$
$$1 = \bar{1} = \overline{z \cdot (z^{-1})} = \bar{z} \cdot \overline{z^{-1}}, \quad \text{άρα } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}.$$

Οι ισότητες (7) και (8) αποδεικνύονται και αυτές με απευθείας υπολογισμό. Το μόνο δύσκολο τμήμα του θεωρήματος είναι το (9). Αυτή η ανισότητα έχει ουσιαστικά ήδη εμφανιστεί (Πρόβλημα 4-9), αλλά θα επαναλάβουμε την απόδειξη εδώ, χρησιμοποιώντας κάπως διαφορετική ορολογία.

Είναι φανερό ότι έχουμε ισότητα στην (9) αν $z = 0$ ή $w = 0$. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι η (9) ισχύει αν $z = \lambda w$ για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό λ (εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$). Υποθέστε, από την άλλη πλευρά, ότι $z \neq \lambda w$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ, και ότι $w \neq 0$. Τότε, για κάθε πραγματικό αριθμό λ,

$$\begin{aligned}(*) \qquad 0 < |z - \lambda w|^2 &= (z - \lambda w) \cdot \overline{(z - \lambda w)} \\ &= (z - \lambda w) \cdot (\bar{z} - \lambda \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + \lambda^2 w\bar{w} - \lambda(w\bar{z} + z\bar{w}) \\ &= \lambda^2 |w|^2 + |z|^2 - \lambda(w\bar{z} + z\bar{w}).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο $w\bar{z} + z\bar{w}$ είναι πραγματικός, γιατί

$$\overline{w\bar{z} + z\bar{w}} = \bar{w}\bar{\bar{z}} + \bar{z}\bar{\bar{w}} = \bar{w}z + \bar{z}w = w\bar{z} + z\bar{w}.$$

Άρα η δεξιά πλευρά της $(*)$ είναι ένα τριώνυμο ως προς λ με πραγματικούς συντελεστές και καμία πραγματική ρίζα· επομένως η διακρίνουσά του πρέπει να είναι αρνητική. Δηλαδή

$$(w\bar{z} + z\bar{w})^2 - 4|w|^2 \cdot |z|^2 < 0\cdot$$

αφού οι $w\bar{z} + \bar{z}w$ και $|w| \cdot |z|$ είναι πραγματικοί αριθμοί, και $|w| \cdot |z| \geq 0$, έπεται ότι

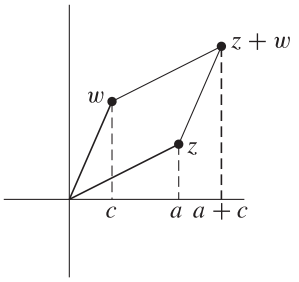
$$(w\bar{z} + z\bar{w}) < 2|w| \cdot |z|.$$

Από αυτήν την ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + (w\bar{z} + z\bar{w}) \\ &< |z|^2 + |w|^2 + 2|w| \cdot |z| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

από την οποία έπεται ότι

$$|z + w| < |z| + |w|. \quad \blacksquare$$



ΣΧΗΜΑ 2

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών έχουν και οι δύο σημαντικές γεωμετρικές ερμηνείες. Η περίπτωση της πρόσθεσης είναι απλή (Σχήμα 2). Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z = (a, b)$ και $w = (c, d)$ ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο που έχει ως δύο από τις πλευρές του τα ευθύγραμμα τμήματα από το $(0, 0)$ στο z και από το $(0, 0)$ στο w· η κορυφή απέναντι από το $(0, 0)$ είναι $z + w$ (η απόδειξη αυτού του γεωμετρικού δεδομένου αφήνεται σε σας [συγκρίνετε με το Παράρτημα 1 του Κεφαλαίου 4]).

Η ερμηνεία του πολλαπλασιασμού είναι πιο πολύπλοκη. Αν $z = 0$ ή $w = 0$, τότε $z \cdot w = 0$ (μπορούμε να δώσουμε μια υπολογιστική απόδειξη σε μια γραμμή, αλλά ακόμα και αυτή δεν χρειάζεται —ο ισχυρισμός προκύπτει, όπως έχει ήδη αποδειχθεί, από τις I1–I9), άρα μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς. Αρχίζουμε θέτοντας κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό σε μια ειδική μορφή (συγκρίνετε με το Παράρτημα 3 του Κεφαλαίου 4).

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$z = |z| \, \frac{z}{|z|}.$$

Σε αυτήν την παράσταση, το $|z|$ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, ενώ

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1,$$

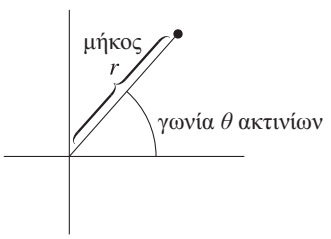
άρα ο $z/|z|$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με απόλυτη τιμή 1. Τώρα, κάθε μιγαδικός αριθμός $a = x + iy$ με $1 = |a| = x^2 + y^2$ γράφεται στη μορφή

$$a = (\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$$

για κάποιον αριθμό θ. Άρα κάθε μη μηδενικός αριθμός z μπορεί να γραφεί

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

για κάποιο $r > 0$ και κάποιον αριθμό θ. Ο αριθμός r είναι μοναδικός (ισούται με $|z|$), αλλά ο θ όχι· αν θ_0 είναι μια δυνατότητα, τότε οι άλλες είναι οι $\theta_0 + 2k\pi$ για k στο $\mathbf{Z}$ —καθένας από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **όρισμα** του z. Το Σχήμα 3 δείχνει τον z



ΣΧΗΜΑ 3

συναρτήσει των r και θ. (Για να βρούμε ένα όρισμα θ για τον $z = x + iy$ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ισότητα

$$x + iy = z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

σημαίνει ότι

$$x = |z|\cos\theta,$$
$$y = |z|\sin\theta.$$

Αν, για παράδειγμα, $x > 0$ μπορούμε να πάρουμε $\theta = \arctan y/x$· αν $x = 0$, μπορούμε να πάρουμε $\theta = \pi/2$ αν $y > 0$ και $\theta = 3\pi/2$, αν $y < 0$.)

Τώρα το γινόμενο δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi),$$

είναι

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= rs[(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)] \\ &= rs[\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)]. \end{aligned}$$

Άρα, η απόλυτη τιμή ενός γινομένου είναι το γινόμενο των απολύτων τιμών των παραγόντων, ενώ το άθροισμα δύο τυχαίων ορισμάτων των παραγόντων θα είναι ένα όρισμα του γινομένου. Για έναν μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

είναι τώρα πολύ εύκολο να αποδείξουμε επαγωγικά τον εξής πολύ σημαντικό τύπο (μερικές φορές λέγεται και Θεώρημα του De Moivre):

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \text{ για κάθε όρισμα } \theta \text{ του } z.$$

Αυτός ο τύπος περιγράφει το z^n τόσο καθαρά, που είναι εύκολο να δούμε ακριβώς πότε $z^n = w$:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει ακριβώς n μιγαδικές n-οστές ρίζες.

Ακριβέστερα, για κάθε μιγαδικό αριθμό $w \neq 0$, και κάθε φυσικό αριθμό n, υπάρχουν ακριβώς n διακεκριμένοι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την $z^n = w$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$$

για $s = |w|$ και κάποιον αριθμό ϕ. Τότε ένας μιγαδικός αριθμός

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ικανοποιεί την $z^n = w$ αν και μόνο αν

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = s(\cos\phi + i\sin\phi),$$

το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν

$$r^n = s,$$
$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Από την πρώτη εξίσωση έπεται ότι

$$r = \sqrt[n]{s},$$

όπου με $\sqrt[n]{s}$ συμβολίζουμε τη θετική πραγματική n-οστή ρίζα του s. Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει ότι για κάποιον ακέραιο k έχουμε

$$\theta = \theta_k = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Αντίστροφα, αν επιλέξουμε $r = \sqrt[n]{s}$ και $\theta = \theta_k$ για κάποιο k, τότε ο αριθμός $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ θα ικανοποιεί την $z^n = w$. Για να προσδιορίσουμε το πλήθος των n-οστών ριζών του w, αρκεί επομένως να προσδιορίσουμε πόσα τέτοια z είναι διακεκριμένα. Τώρα κάθε ακέραιος k γράφεται

$$k = nq + k'$$

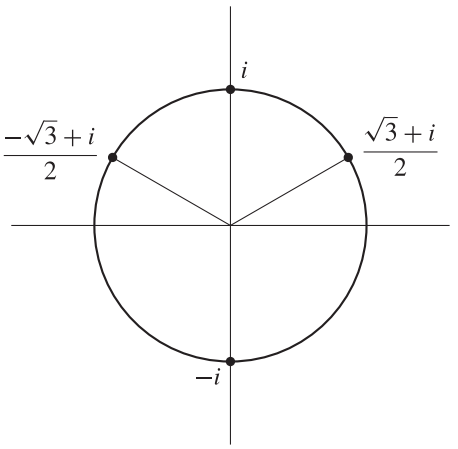
για κάποιον ακέραιο q, και κάποιον ακέραιο k' μεταξύ 0 και $n-1$. Τότε

$$\cos\theta_k + i\sin\theta_k = \cos\theta_{k'} + i\sin\theta_{k'}.$$

Αυτό δείχνει ότι κάθε z για το οποίο $z^n = w$, μπορεί να γραφεί

$$z = \sqrt[n]{s}\,(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι όλοι διαφορετικοί ανά δύο, αφού δύο τυχαία θ_k με $k = 0, \ldots, n-1$ διαφέρουν λιγότερο από 2π. ∎



ΣΧΗΜΑ 4

Στην πορεία της απόδειξης του Θεωρήματος 2, αναπτύξαμε ουσιαστικά και μια μέθοδο για να βρίσκουμε τις n-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού. Για παράδειγμα, για να βρούμε τις κυβικές ρίζες του i (Σχήμα 4) σημειώνουμε ότι $|i| = 1$ και ότι το $\pi/2$ είναι ένα όρισμα για το i. Οι κυβικές ρίζες του i είναι επομένως οι

$$1 \cdot \left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right],$$
$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6},$$
$$1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Αφού

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$$

οι κυβικές ρίζες του i είναι οι

$$\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \quad -i.$$

Γενικά, δεν μπορούμε να ελπίζουμε σε τόσο απλά αποτελέσματα. Για παράδειγμα, για να βρούμε τις κυβικές ρίζες του $2+11i$, σημειώνουμε ότι $|2+11i| = \sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125}$ και ότι το $\arctan\frac{11}{2}$ είναι ένα όρισμα για τον $2+11i$. Άρα, μια από τις κυβικές ρίζες του $2+11i$ είναι ο

$$\sqrt[6]{125}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{5}\left[\cos\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3}\right)\right].$$

Προηγουμένως είχαμε δει ότι ο $2+i$ είναι επίσης κυβική ρίζα του $2+11i$. Αφού $|2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, και το $\arctan\frac{1}{2}$ είναι ένα όρισμα του $2+i$, μπορούμε να γράψουμε αυτήν την κυβική ρίζα σαν

$$2+i = \sqrt{5}(\cos\arctan\tfrac{1}{2} + i\sin\arctan\tfrac{1}{2}).$$

Αυτές οι δύο κυβικές ρίζες είναι στην πραγματικότητα ο ίδιος αριθμός, γιατί

$$\frac{\arctan\frac{11}{2}}{3} = \arctan\frac{1}{2}$$

(μπορείτε να το ελέγξετε χρησιμοποιώντας τον τύπο στο Πρόβλημα 15-9), αλλά αυτό δεν είναι κάτι που θα μπορούσε κανείς εύκολα να παρατηρήσει!

Το γεγονός ότι κάθε μιγαδικός αριθμός έχει n-οστή ρίζα για κάθε n είναι μια ειδική μόνο περίπτωση ενός πολύ σημαντικού θεωρήματος. Ο αριθμός i ορίστηκε αρχικά για να μας δώσει μια λύση για την εξίσωση $x^2+1=0$. Στο *Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας* διατυπώνεται ο αξιοσημείωτος ισχυρισμός ότι αυτή η μοναδική προσθήκη μάς δίνει αυτομάτως λύσεις για όλες τις άλλες πολυωνυμικές εξισώσεις: κάθε εξίσωση

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \text{ στο } \mathbf{C}$$

έχει μιγαδική ρίζα!

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε μια σχεδόν πλήρη απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας· το μικρό κενό που αφήνουμε στο κείμενο μπορείτε να το συμπληρώσετε με μια άσκηση (Πρόβλημα 26-5). Η απόδειξη του θεωρήματος θα βασιστεί σε αρκετές νέες ιδέες που γεννιούνται τελείως φυσιολογικά μέσα από μια βαθύτερη μελέτη των μιγαδικών αριθμών.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Βρείτε την απόλυτη τιμή και το όρισμα (τα ορίσματα) καθενός από τους:

(i) $3+4i$.

(ii) $(3+4i)^{-1}$.

(iii) $(1+i)^5$.

(iv) $\sqrt[7]{3+4i}$.

(v) $|3+4i|$.

2. Λύστε τις ακόλουθες εξισώσεις:

(i) $x^2 + ix + 1 = 0$.

(ii) $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

(iii) $x^2 + 2ix - 1 = 0$.

(iv) $\begin{cases} ix - (1+i)y = 3, \\ (2+i)x + iy = 4 \end{cases}$.

(v) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$.

3. Περιγράψτε το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους

(i) $\bar{z} = -z$.

(ii) $\bar{z} = z^{-1}$.

(iii) $|z-a| = |z-b|$.

(iv) $|z-a| + |z-b| = c$.

(v) $|z| <$ 1 − πραγματικό μέρος του z.

4. Αποδείξτε ότι $|z| = |\bar{z}|$, και ότι το πραγματικό μέρος του z είναι $(z + \bar{z})/2$, ενώ το φανταστικό του μέρος είναι $(z - \bar{z})/2i$.

5. Αποδείξτε ότι $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$, και ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

6. Ποια είναι η οπτική σχέση ανάμεσα στον z και τον $\sqrt{i} \cdot \overline{z\sqrt{-i}}$; (Παρατηρήστε ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια απαντήσεις, γιατί οι $\sqrt{i}$ και $\sqrt{-i}$ έχουν και οι δύο δύο διαφορετικές δυνατές τιμές.) Υπόδειξη: Ποια ευθεία μεταφέρεται στον πραγματικό άξονα όταν πολλαπλασιάσουμε με $\sqrt{-i}$;

7. (α) Αποδείξτε ότι, αν $a_0, \ldots, a_{n-1}$ είναι *πραγματικοί* και ο $a + bi$ (με a και b πραγματικούς) ικανοποιεί την εξίσωση $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, τότε και ο $a - bi$ ικανοποιεί την ίδια εξίσωση. (Επομένως, οι μη πραγματικές ρίζες μιας τέτοιας εξίσωσης εμφανίζονται πάντα κατά ζεύγη, και το πλήθος αυτών των ριζών είναι άρτιο.)

(β) Συμπεράνετε ότι το $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ διαιρείται με το $z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$ (του οποίου οι συντελεστές είναι πραγματικοί).

∗**8.** (α) Έστω c ένας ακέραιος που δεν είναι το τετράγωνο άλλου ακεραίου. Αν οι a και b είναι ακέραιοι ορίζουμε ως **συζυγή** του $a + b\sqrt{c}$, και τον συμβολίζουμε με $\overline{a + b\sqrt{c}}$, τον $a - b\sqrt{c}$. Δείξτε ότι ο συζυγής είναι καλά ορισμένος, αποδεικνύοντας ότι ένας αριθμός γράφεται στη μορφή $a + b\sqrt{c}$, με a και b ακεραίους, κατά μοναδικό τρόπο.

(β) Δείξτε ότι για κάθε α και β της μορφής $a + b\sqrt{c}$, έχουμε $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha \cdot \bar{\alpha} = \alpha$ αν και μόνο αν ο α είναι ακέραιος· $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \cdot \overline{-\alpha} = -\bar{\alpha} \cdot \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$· και $\overline{\alpha^{-1}} = (\bar{\alpha})^{-1}$ αν $\alpha \neq 0$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν οι $a_0, \ldots, a_{n-1}$ είναι *ακέραιοι* και ο $z = a + b\sqrt{c}$ ικανοποιεί την εξίσωση $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, τότε και ο $\bar{z} = a - b\sqrt{c}$ ικανοποιεί αυτήν την εξίσωση.

9. Βρείτε όλες τις 4-ες ρίζες του i· εκφράστε αυτή με το μικρότερο όρισμα σε μορφή που να μην περιέχει καθόλου τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

∗**10.** (α) Αποδείξτε ότι, αν ω είναι μια n-οστή ρίζα του 1, το ίδιο ισχύει και για τον ω^k.

(β) Ένας αριθμός ω λέγεται **αρχική *n*-οστή ρίζα** του 1, αν το $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$ είναι το σύνολο όλων των n-οστών ριζών του 1. Πόσες αρχικές n-οστές ρίζες του 1 υπάρχουν για $n = 3, 4, 5, 9$;

(γ) Έστω ω μια n-οστή ρίζα του 1, με $\omega \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

∗**11.** (α) Αποδείξτε ότι αν οι $z_1, \ldots, z_k$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που περνά από το 0, τότε $z_1 + \cdots + z_k \neq 0$. Υπόδειξη: Αυτό είναι προφανές από τη γεωμετρική ερμηνεία της πρόσθεσης, αλλά είναι εύκολο να δώσουμε και μια αναλυτική απόδειξη: ο ισχυρισμός είναι φανερός αν η ευθεία είναι ο πραγματικός άξονας και με ένα τέχνασμα η γενική περίπτωση ανάγεται σε αυτήν.

(β) Δείξτε ακόμα ότι οι ${z_1}^{-1}, \ldots, {z_k}^{-1}$ βρίσκονται όλοι πάνω στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που περνά από το 0, άρα και ${z_1}^{-1} + \cdots + {z_k}^{-1} \neq 0$.

∗**12.** Αποδείξτε ότι, αν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, τότε οι z_1, z_2 και z_3 είναι κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Υπόδειξη: Θα βοηθήσει να υποθέσετε ότι ο z_1 είναι πραγματικός, και αυτό μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Γιατί;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26 ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πιθανότατα δεν θα εκπλαγείτε αν μάθετε ότι η βαθύτερη μελέτη των μιγαδικών αριθμών βασίζεται στην έννοια των συναρτήσεων. Μέχρι τώρα, συνάρτηση ήταν (διαισθητικά) ένας κανόνας που απεικόνιζε πραγματικούς αριθμούς σε κάποιους άλλους πραγματικούς αριθμούς. Αλλά δεν υπάρχει τίποτα που να μας εμποδίζει να επεκτείνουμε αυτήν την έννοια· θα μπορούσαμε εξίσου καλά να θεωρήσουμε έναν κανόνα που να απεικονίζει μιγαδικούς αριθμούς σε κάποιους άλλους μιγαδικούς αριθμούς. Ο αυστηρός ορισμός δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα (δεν θα τον τιμήσουμε καν όπως τους άλλους τυπικούς ορισμούς): συνάρτηση είναι μια συλλογή από ζεύγη μιγαδικών αριθμών που δεν περιέχει δύο διαφορετικά ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο. Αφού θεωρήσαμε τους πραγματικούς αριθμούς ως κάποιους μιγαδικούς αριθμούς, ο παλιός ορισμός είναι στην πραγματικότητα μια ειδική περίπτωση του καινούργιου. Όμως, θα καταφεύγουμε μερικές φορές σε ειδική ορολογία για να ξεκαθαρίζουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο εξετάζεται μια συνάρτηση. Μια συνάρτηση f λέγεται **πραγματική** αν το $f(z)$ είναι πραγματικός αριθμός για κάθε z στο πεδίο ορισμού της f, και **μιγαδική** για να τονίσουμε ότι δεν παίρνει αναγκαστικά μόνο πραγματικές τιμές. Ομοίως, θα το δηλώνουμε ρητά όποτε μια συνάρτηση f ορίζεται σε [ένα υποσύνολο] του $\mathbf{R}$, δηλαδή όταν το πεδίο ορισμού της f είναι [ένα υποσύνολο] του $\mathbf{R}$· στις άλλες περιπτώσεις, μερικές φορές αναφέρουμε ότι η f ορίζεται σε [ένα υποσύνολο] του $\mathbf{C}$, για να τονίσουμε το γεγονός ότι το $f(z)$ ορίζεται και για μιγαδικούς z και για πραγματικούς z.

Από το πλήθος των συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbf{C}$, μερικές είναι ιδιαίτερα σημαντικές. Επικεφαλής αυτών είναι οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

όπου $a_0, \ldots, a_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται, όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, πολυωνυμικές συναρτήσεις· περιλαμβάνουν τη συνάρτηση $f(z) = z$ (την «ταυτοτική συνάρτηση») και τις συναρτήσεις της μορφής $f(z) = a$ για κάποιον μιγαδικό αριθμό a («σταθερές συναρτήσεις»). Μια άλλη σπουδαία γενίκευση γνωστής μας συνάρτησης είναι η «συνάρτηση απόλυτης τιμής» $f(z) = |z|$ για κάθε z στο $\mathbf{C}$.

Δύο συναρτήσεις μεγάλης σημασίας για τους μιγαδικούς αριθμούς είναι η Re (η «συνάρτηση του πραγματικού μέρους») και η Im (η «συνάρτηση του φανταστικού μέρους»), που ορίζονται από τις

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x+iy) &= x, \\ \operatorname{Im}(x+iy) &= y, \end{aligned} \qquad \text{για } x \text{ και } y \text{ πραγματικούς.}$$

Η «συζυγής συνάρτηση» ορίζεται από την

$$f(z) = \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z).$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε με διάφορους τρόπους τις γνωστές πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbf{R}$ για να κατασκευάσουμε νέες μιγαδικές συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbf{C}$ —ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση

$$f(x+iy) = e^y \sin(x-y) + i x^3 \cos y.$$

Ο τύπος αυτής της συγκεκριμένης συνάρτησης περιγράφει μια διάσπαση που είναι πάντοτε δυνατή. Κάθε μιγαδική συνάρτηση f γίνεται να γραφεί στη μορφή

$$f = u + iv$$

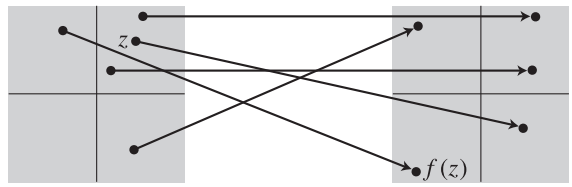
για κάποιες πραγματικές συναρτήσεις u και v —απλώς ορίζουμε ως $u(z)$ το πραγματικό μέρος του $f(z)$, και ως $v(z)$ το φανταστικό του μέρος. Αυτή η διάσπαση είναι συχνά πολύ χρήσιμη, όχι όμως πάντα· για παράδειγμα, δεν θα ήταν και πολύ βολικό να περιγράψουμε με αυτόν τον τρόπο μια πολυωνυμική συνάρτηση.

Άλλη μία συνάρτηση θα παίξει σπουδαίο ρόλο σε αυτό το κεφάλαιο. Θυμηθείτε ότι *όρισμα* ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z λέμε κάθε (πραγματικό) αριθμό θ για τον οποίο

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Υπάρχουν άπειρα ορίσματα για κάθε z, όμως ένα μόνο που να ικανοποιεί την $0 \leq \theta < 2\pi$. Αν καλέσουμε αυτό το μιγαδικό όρισμα $\theta(z)$, τότε η θ είναι μια (πραγματική) συνάρτηση (η «συνάρτηση του ορίσματος») στο $\{z \text{ στο } \mathbf{C} : z \neq 0\}$.

Οι «γραφικές παραστάσεις» των μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbf{C}$ βρίσκονται στον 4-διάστατο χώρο, επομένως μάλλον δεν είναι και πολύ χρήσιμες ως εικόνες. Αντί για αυτές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εναλλακτική παράσταση συνάρτησης που αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 4: σχεδιάζουμε δύο αντίγραφα του $\mathbf{C}$, και βέλη από τα z του ενός αντιγράφου, προς τα $f(z)$ στο άλλο αντίγραφο (Σχήμα 1).

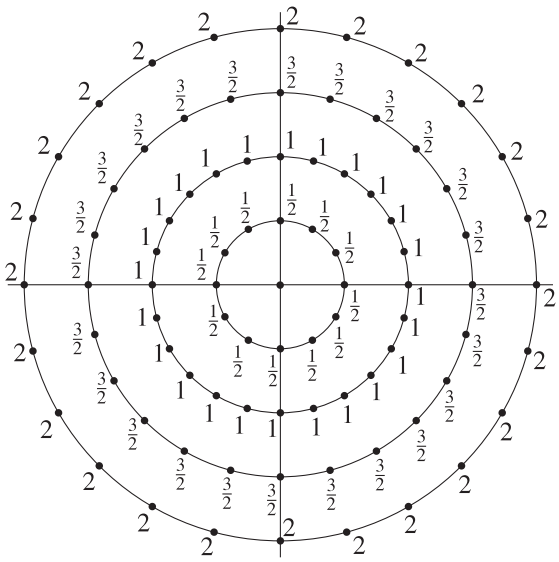


ΣΧΗΜΑ 1

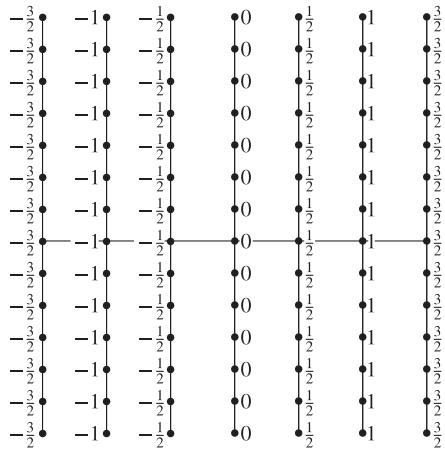
Η πιο συνηθισμένη σχηματική αναπαράσταση μιας μιγαδικής συνάρτησης παίρνεται αν σε κάθε σημείο του επιπέδου δώσουμε το όνομα $f(z)$, αντί για το z (το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τη θέση του σημείου στην εικόνα). Στο Σχήμα 2 φαίνεται αυτός ο τρόπος απεικόνισης για μερικές συναρτήσεις. Με μια τέτοια «γραφική παράσταση» αποκαλύπτονται κάποια χαρακτηριστικά της συνάρτησης πολύ καθαρά. Για παράδειγμα, η συνάρτηση απόλυτης τιμής είναι σταθερή πάνω στους κύκλους κέντρου 0, οι συναρτήσεις Re και Im είναι σταθερές πάνω στις κατακόρυφες και οριζόντιες ευθείες, αντίστοιχα, και η συνάρτηση $f(z) = z^2$ τυλίγει τον κύκλο ακτίνας r δύο φορές γύρω από τον κύκλο ακτίνας r^2.

Παρά τα προβλήματα που παρουσιάζει γενικά η απεικόνιση των μιγαδικών συναρτήσεων, είναι δυνατόν να ορίσουμε για αυτές τα ανάλογα των σημαντικών ιδιοτήτων που ορίστηκαν για τις πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού στο $\mathbf{R}$, και σε μερικές περιπτώσεις αυτές οι ιδιότητες μπορεί να περιγράφονται ευκολότερα στη μιγαδική περίπτωση. Για παράδειγμα, η έννοια του «ορίου» μπορεί να οριστεί ως εξής:

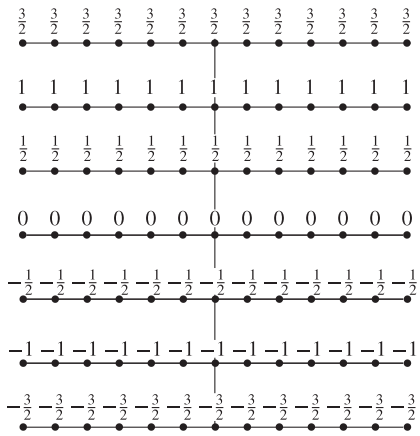
$\lim_{z\to a} f(z) = l$ σημαίνει ότι για κάθε (πραγματικό) αριθμό $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας (πραγματικός) αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε z, αν $0 < |z - a| < \delta$, τότε $|f(z) - l| < \varepsilon$.



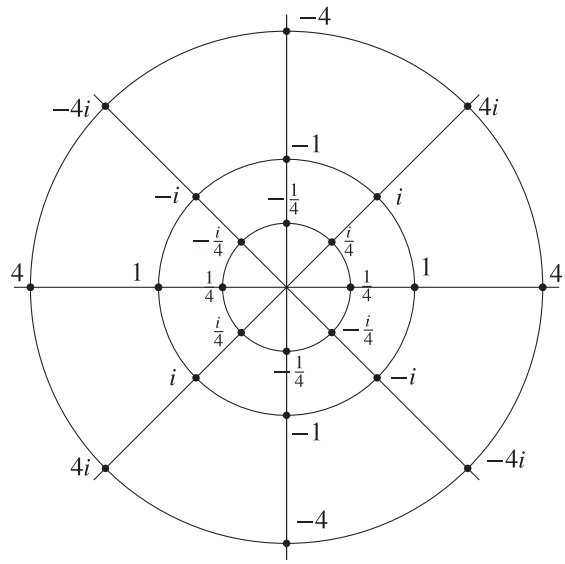
(α) $f(z) = |z|$



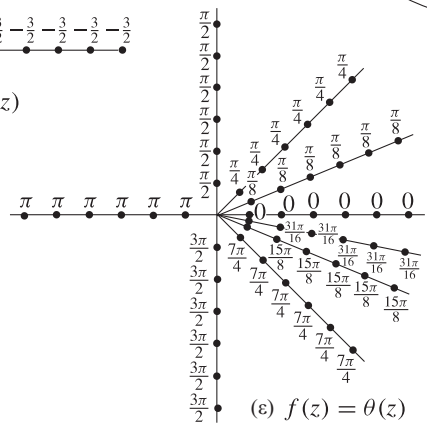
(β) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$



(γ) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$



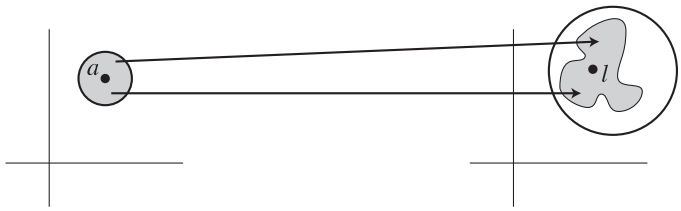
(δ) $f(z) = z^2$



(ε) $f(z) = \theta(z)$

ΣΧΗΜΑ 2

Αν και ο ορισμός διαβάζεται ακριβώς όπως και πριν, η ερμηνεία είναι κάπως διαφορετική. Αφού $|z - w|$ είναι η απόσταση ανάμεσα στους μιγαδικούς αριθμούς z και w, η ισότητα $\lim_{z \to a} f(z) = l$ σημαίνει ότι οι τιμές $f(z)$ γίνεται να βρεθούν μέσα σε οποιονδήποτε δοθέντα κύκλο κέντρου l, αρκεί το z να περιοριστεί σε έναν αρκετά μικρό κύκλο κέντρου a. Αυτός ο ισχυρισμός οπτικοποιείται πολύ εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε την παράσταση «δυο αντιτύπων» μιας συνάρτησης (Σχήμα 3).



ΣΧΗΜΑ 3

Μερικά στοιχεία για τα όρια αποδεικνύονται ακριβώς όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Συγκεκριμένα,

$$\lim_{z\to a} c = c,$$
$$\lim_{z\to a} z = a,$$
$$\lim_{z\to a}[f(z)+g(z)] = \lim_{z\to a} f(z) + \lim_{z\to a} g(z),$$
$$\lim_{z\to a} f(z)\cdot g(z) = \lim_{z\to a} f(z)\cdot \lim_{z\to a} g(z),$$
$$\lim_{z\to a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\lim_{z\to a} g(z)}, \quad \text{αν } \lim_{z\to a} g(z) \neq 0.$$

Η θεμελιώδης ιδιότητα των απολύτων τιμών πάνω στην οποία βασίζονται αυτά τα αποτελέσματα είναι η ανισότητα $|z+w| \leq |z| + |w|$, και αυτή η ανισότητα ισχύει για τους μιγαδικούς αριθμούς όπως και για τους πραγματικούς αριθμούς. Από τα παραπάνω έχουμε ήδη στα χέρια μας αρκετά όρια, αλλά μπορούμε να πάρουμε πολύ περισσότερα από το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω ότι $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ για τις πραγματικές συναρτήσεις u και v, και $l = \alpha + i\beta$ όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε $\lim_{z\to a} f(z) = l$ αν και μόνο αν

$$\lim_{z\to a} u(z) = \alpha,$$
$$\lim_{z\to a} v(z) = \beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lim_{z\to a} f(z) = l$. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε z,

$$\text{αν } 0 < |z-a| < \delta, \text{ τότε } |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Η δεύτερη ανισότητα γράφεται

$$\big|[u(z)-\alpha] + i[v(z)-\beta]\big| < \varepsilon,$$

ή

$$[u(z)-\alpha]^2 + [v(z)-\beta]^2 < \varepsilon^2.$$

Αφού οι $u(z)-\alpha$ και $v(z)-\beta$ είναι και οι δύο πραγματικοί αριθμοί, τα τετράγωνά τους είναι θετικά· επομένως από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει ότι

$$[u(z)-\alpha]^2 < \varepsilon^2 \quad \text{και} \quad [v(z)-\beta]^2 < \varepsilon^2,$$

το οποίο εξασφαλίζει ότι

$$|u(z)-\alpha| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |v(z)-\beta| < \varepsilon.$$

Δεδομένου ότι αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι

$$\lim_{z\to a} u(z) = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{z\to a} v(z) = \beta.$$

Έστω τώρα ότι αυτές οι δύο ισότητες ισχύουν. Αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε z, αν $0 < |z - a| < \delta$, τότε

$$|u(z) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |v(z) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2},$$

από το οποίο έπεται ότι

$$\begin{aligned} |f(z) - l| &= \big|[u(z) - \alpha] + i[v(z) - \beta]\big| \\ &\le |u(z) - \alpha| + |i| \cdot |v(z) - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{z \to a} f(z) = l$. ∎

Για να εφαρμόσουμε αποδοτικά το Θεώρημα 1, παρατηρούμε ότι, αφού είναι ήδη γνωστό το όριο $\lim_{z \to a} z = a$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} \operatorname{Re}(z) &= \operatorname{Re}(a), \\ \lim_{z \to a} \operatorname{Im}(z) &= \operatorname{Im}(a). \end{aligned}$$

Ένα όριο σαν το

$$\lim_{z \to a} \sin(\operatorname{Re}(z)) = \sin(\operatorname{Re}(a))$$

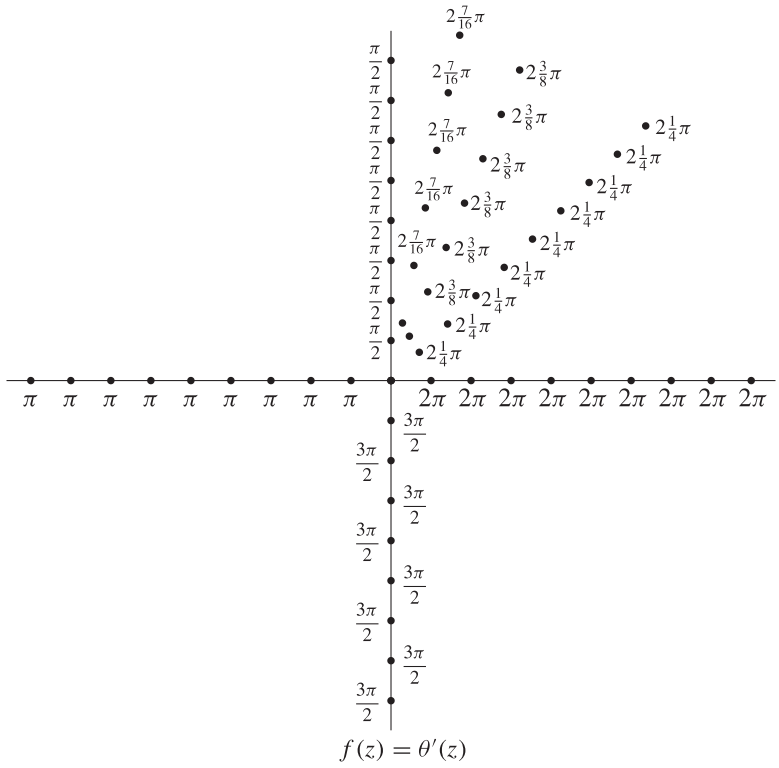
προκύπτει εύκολα, αν χρησιμοποιήσουμε τη συνέχεια της sin. Με διαδοχικές εφαρμογές αυτών των ιδιοτήτων, αποδεικνύουμε όρια σαν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} \bar{z} &= \bar{a}, \\ \lim_{z \to a} |z| &= |a|, \\ \lim_{(x+iy) \to a+bi} e^y \sin x + i x^3 \cos y &= e^b \sin a + i a^3 \cos b. \end{aligned}$$

Τώρα που έχουμε επεκτείνει την έννοια του ορίου στις μιγαδικές συναρτήσεις, μπορούμε να επεκτείνουμε και την έννοια της συνέχειας: η f είναι **συνεχής στο *a*** αν $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$, και η f είναι **συνεχής** αν η f είναι συνεχής στο a για κάθε a στο πεδίο ορισμού της f. Η προηγούμενη εργασία μας πάνω στα όρια αποδεικνύει ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι όλες συνεχείς:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \\ f(z) &= \bar{z}, \\ f(z) &= |z|, \\ f(x + iy) &= e^y \sin x + i x^3 \cos y. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δώσουμε παραδείγματα ασυνεχών συναρτήσεων, μερικές μάλιστα γεννιούνται τελείως φυσικά. Ένα ιδιαίτερα απογοητευτικό παράδειγμα είναι η «συνάρτηση του ορίσματος» θ, που είναι ασυνεχής σε όλους τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς (βλ. τη «γραφική παράσταση» στο Σχήμα 2). Ορίζοντας κατάλληλα και πάλι το θ, είναι δυνατόν να αλλάξουμε τα σημεία ασυνέχειας· για παράδειγμα (Σχήμα 4), αν με $\theta'(z)$ συμβολίσουμε το μοναδικό όρισμα του z, για το οποίο $\pi/2 \le \theta'(z) < 5\pi/2$, τότε η θ' είναι ασυνεχής στο ai για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό a. Αλλά, με όποιο τρόπο και αν ορίσουμε τη θ, πάντα θα εμφανίζονται κάποια σημεία ασυνέχειας.



ΣΧΗΜΑ 4

Η ασυνέχεια της θ έχει μεγάλη σχέση με το πρόβλημα του ορισμού μιας «συνάρτησης τετραγωνικής ρίζας», δηλαδή, μιας συνάρτησης f με την ιδιότητα $(f(z))^2 = z$ για κάθε z. Για πραγματικούς αριθμούς η συνάρτηση $\sqrt{\ }$ έχει πεδίο ορισμού τους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αν επιτρέψουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, τότε κάθε αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες (εκτός από τον 0, που έχει μόνο μία). Αν και αυτή η κατάσταση μοιάζει καλύτερη, από πολλές απόψεις είναι χειρότερη· αφού οι τετραγωνικές ρίζες του z είναι μιγαδικοί αριθμοί, δεν υπάρχει κάποιο εμφανές κριτήριο σύμφωνα με το οποίο να επιλέγουμε τη μια ρίζα ως $f(z)$, προτιμώντας την από την άλλη.

Ένας τρόπος για να ορίσουμε την f είναι ο εξής: Θέτουμε $f(0) = 0$, και για $z \neq 0$, ορίζουμε

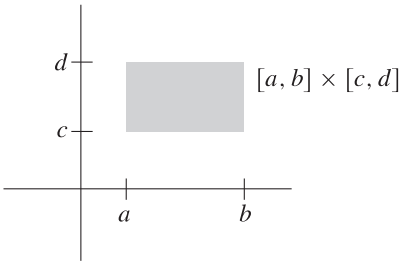
$$f(z) = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\theta(z)}{2} + i\sin\frac{\theta(z)}{2}\right).$$

Προφανώς $(f(z))^2 = z$, αλλά η συνάρτηση f είναι ασυνεχής, αφού η θ είναι ασυνεχής. Και μάλιστα, είναι αδύνατο να βρούμε μια συνεχή f τέτοια ώστε $(f(z))^2 = z$ για κάθε z. Πράγματι, είναι αδύνατο να ορίσουμε και την $f(z)$ για όλα τα z με $|z| = 1$. Για να το αποδείξουμε αυτό με εις άτοπον απαγωγή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(1) = 1$ (αφού πάντα θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την f με την $-f$). Ισχυριζόμαστε τότε ότι, για όλα τα θ με $0 \leq \theta < 2\pi$, έχουμε

$$(*) \qquad f(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}.$$

Ο αποδεικτικός συλλογισμός για αυτό αφήνεται σε σας (είναι ένα κλασικό είδος απόδειξης με χρήση ελαχίστου άνω φράγματος). Αλλά η $(*)$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 2\pi} f(\cos\theta + i\sin\theta) &= \cos\pi + i\sin\pi \\ &= -1 \\ &\neq f(1),\end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 5

αν και $\cos\theta + i\sin\theta \to 1$, όταν $\theta \to 2\pi$. Έτσι, έχουμε το άτοπο που θέλαμε. Παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύουν ότι είναι αδύνατο να ορίσουμε συνεχείς «συναρτήσεις n-οστής ρίζας» για κάθε $n \geq 2$.

Για συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις υπάρχουν σπουδαία θεωρήματα αντίστοιχα αυτών που περιγράφουν τη συμπεριφορά των πραγματικών συναρτήσεων πάνω σε κλειστά διαστήματα. Ένα φυσιολογικό ανάλογο του διαστήματος $[a, b]$ είναι το σύνολο όλων των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ με $a \leq x \leq b$ και $c \leq y \leq d$ (Σχήμα 5). Το σύνολο αυτό λέγεται **κλειστό ορθογώνιο**, και συμβολίζεται με $[a, b] \times [c, d]$.

Αν η f είναι συνεχής μιγαδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a, b]\times[c, d]$ φαίνεται εύλογο, και ισχύει πράγματι, ότι η f είναι φραγμένη στο $[a, b] \times [c, d]$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|f(z)| \leq M \quad \text{για κάθε } z \text{ στο } [a, b] \times [c, d].$$

Δεν έχει νόημα να πούμε ότι η f έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο $[a, b] \times [c, d]$ γιατί δεν υπάρχει έννοια διάταξης των μιγαδικών αριθμών. Αν όμως f είναι μια πραγματική συνάρτηση, τότε αυτός ο ισχυρισμός έχει έννοια, και ισχύει. Ειδικότερα, αν f είναι οποιαδήποτε μιγαδική συνεχής συνάρτηση στο $[a, b] \times [c, d]$, τότε η $|f|$ είναι επίσης συνεχής, άρα υπάρχει κάποιο z_0 στο $[a, b] \times [c, d]$ τέτοιο ώστε

$$|f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{για κάθε } z \text{ στο } [a, b] \times [c, d].$$

το ίδιο ισχύει και με την αντίστροφη ανισότητα. Λέμε μερικές φορές ότι «η f πιάνει το μέγιστο και ελάχιστο μέτρο της στο $[a, b] \times [c, d]$».

Τα διάφορα στοιχεία που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο δεν θα αποδειχθούν εδώ, όμως οι αποδείξεις τους σκιαγραφούνται στο Πρόβλημα 5. Υποθέτοντάς τα, όμως, μπορούμε τώρα να δώσουμε μια απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας, πράγμα που είναι όντως εκπληκτικό, μια και δεν έχουμε προλάβει να πούμε και τόσα πολλά που να διακρίνουν τις πολυωνυμικές συναρτήσεις από τις άλλες συνεχείς συναρτήσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (ΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ)

Έστω $a_0, \ldots, a_{n-1}$ τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει μιγαδικός αριθμός z τέτοιος ώστε

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0 = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Τότε η f είναι συνεχής, και το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $|f|$ που ορίζεται από την

$$|f|(z) = |f(z)| = |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0|.$$

Η απόδειξή μας βασίζεται στην παρατήρηση ότι ένα σημείο z_0 με $f(z_0) = 0$ θα έπρεπε προφανώς να είναι σημείο ελαχίστου για την $|f|$. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, θα δείξουμε πρώτα ότι η $|f|$ έχει πράγματι μια ελάχιστη τιμή *σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο*. Η απόδειξη θα είναι σχεδόν ίδια με την απόδειξη στο Κεφάλαιο 7, του ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού (με πραγματικούς συντελεστές) έχει μια ελάχιστη τιμή σε ολόκληρο το $\mathbf{R}$. Και οι δύο αποδείξεις βασίζονται στο γεγονός ότι, όταν το $|z|$ είναι μεγάλο, τότε το $|f(z)|$ είναι μεγάλο.

Αρχίζουμε γράφοντας, για $z \neq 0$,

$$f(z) = z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right),$$

οπότε

$$|f(z)| = |z|^n \cdot \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|.$$

Θέτουμε

$$M = \max(1, 2n|a_{n-1}|, \ldots, 2n|a_0|).$$

Τότε για κάθε z με $|z| \geq M$, έχουμε $|z^k| \geq |z|$ και

$$\frac{|a_{n-k}|}{|z^k|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{|z|} \leq \frac{|a_{n-k}|}{2n|a_{n-k}|} = \frac{1}{2n},$$

άρα

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{1}{2},$$

από όπου έπεται ότι

$$\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq 1 - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$|f(z)| \geq \frac{|z|^n}{2} \quad \text{για } |z| \geq M.$$

Ειδικότερα, αν $|z| \geq M$ και επιπλέον $|z| \geq \sqrt[n]{2|f(0)|}$, τότε

$$|f(z)| \geq |f(0)|.$$

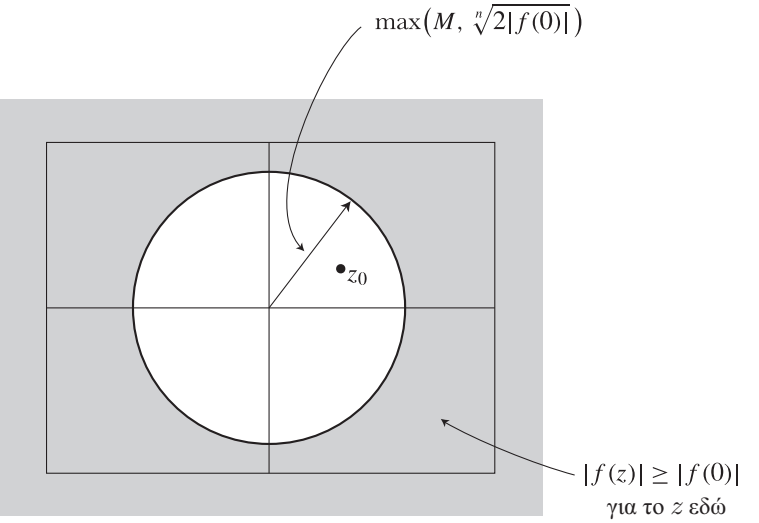
Έστω τώρα $[a, b] \times [c, d]$ ένα κλειστό ορθογώνιο (Σχήμα 6) που να περιέχει το $\{z : |z| \leq \max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|})\}$, και υποθέτουμε ότι η ελάχιστη τιμή της $|f|$ στο $[a, b]\times[c, d]$ παίρνεται στο z_0, δηλαδή

$$(1) \quad |f(z_0)| \leq |f(z)| \quad \text{για } z \text{ στο } [a, b] \times [c, d].$$

Έπεται, ειδικότερα, ότι $|f(z_0)| \leq |f(0)|$. Έτσι

$$(2) \quad \text{αν } |z| \geq \max(M, \sqrt[n]{2|f(0)|}), \text{ τότε } |f(z)| \geq |f(0)| \geq |f(z_0)|.$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) βλέπουμε ότι $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ για κάθε z, δηλαδή η $|f|$ παίρνει στο z_0 την ελάχιστη τιμή της σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.



ΣΧΗΜΑ 6

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος θα δείξουμε τώρα ότι $f(z_0) = 0$. Είναι βολικό να ορίσουμε μια συνάρτηση g με την

$$g(z) = f(z + z_0).$$

Τότε η g είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, που έχει την ελάχιστη απόλυτη τιμή της στο 0. Θέλουμε να δείξουμε ότι $g(0) = 0$.

Έστω, αντίθετα, ότι $g(0) = \alpha \neq 0$. Αν m είναι η μικρότερη θετική δύναμη του z που εμφανίζεται στην παράσταση της g, μπορούμε να γράψουμε

$$g(z) = \alpha + \beta z^m + c_{m+1}z^{m+1} + \cdots + c_n z^n,$$

όπου $\beta \neq 0$. Τώρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 25-2 υπάρχει κάποιος μιγαδικός αριθμός γ τέτοιος ώστε

$$\gamma^m = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Τότε, αν θέσουμε $d_k = c_k\gamma^k$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|g(\gamma z)| &= |\alpha + \beta\gamma^m z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots + d_n z^n| \\
&= |\alpha - \alpha z^m + d_{m+1}z^{m+1} + \cdots| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + \frac{d_{m+1}}{\alpha}z^{m+1} + \cdots\right)\right| \\
&= \left|\alpha\left(1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right)\right| \\
&= |\alpha| \cdot \left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right|.
\end{aligned}$$

Αυτή η παράσταση, στην οποία φτάσαμε με τόσους κόπους, θα μας επιτρέψει να καταλήξουμε σύντομα σε άτοπο. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν διαλέξουμε το $|z|$ αρκετά μικρό, θα έχουμε

$$\left|\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right| < 1.$$

Αν, από όλα τα z για τα οποία ισχύει αυτή η ανισότητα, διαλέξουμε κάποιο z *πραγματικό και θετικό*, τότε

$$\left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| < |z^m| = z^m.$$

Επομένως, αν $0 < z < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|1 - z^m + z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| &\leq |1 - z^m| + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\
&= 1 - z^m + \left|z^m\left[\frac{d_{m+1}}{\alpha}z + \cdots\right]\right| \\
&< 1 - z^m + z^m \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Αυτή είναι η αντίφαση που ζητούσαμε: για έναν τέτοιο αριθμό z έχουμε

$$|g(\gamma z)| < |\alpha|,$$

που αντιφάσκει με το γεγονός ότι $|\alpha|$ είναι το ελάχιστο της $|g|$ σε ολόκληρο το επίπεδο. Άρα η αρχική υπόθεση πρέπει να είναι λανθασμένη, και $g(0) = 0$. Αυτό, τέλος, σημαίνει ότι $f(z_0) = 0$. ∎

Ακόμα και αν υπολογίσουμε το ότι παραλείψαμε τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων για τις συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις, αυτή η απόδειξη μας οδήγησε σε ένα βαθύ αποτέλεσμα με ανέλπιστα λίγη προσπάθεια. Είναι φυσικό να ελπίζουμε ότι θα εμφανιστούν και άλλα ενδιαφέροντα στοιχεία αν επιδιώξουμε και άλλους συσχετισμούς με τις ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων. Το επόμενο προφανές βήμα είναι να ορίσουμε παραγώγους: μια συνάρτηση f λέγεται **παραγωγίσιμη στο *a*** αν υπάρχει το

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(a+z) - f(a)}{z}$$

και σε αυτήν την περίπτωση το όριο συμβολίζεται με $f'(a)$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \qquad \text{αν } f(z) = c, \\ f'(a) &= 1 \qquad \text{αν } f(z) = z, \\ (f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \\ \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} \qquad \text{αν } g(a) \neq 0, \\ (f \circ g)'(a) &= f'(g(a)) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Οι αποδείξεις όλων αυτών των τύπων είναι ακριβώς ίδιες όπως πριν. Ειδικότερα, έχουμε ότι, αν $f(z) = z^n$, τότε $f'(z) = nz^{n-1}$. Όμως, αυτοί οι τύποι αποδεικνύουν την παραγωγισιμότητα μόνο των ρητών συναρτήσεων. Πολλοί άλλοι προφανείς υποψήφιοι *δεν* είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Έστω, για παράδειγμα, ότι

$$f(x+iy) = x - iy \quad (\text{δηλαδή, } f(z) = \bar{z}).$$

Αν πρόκειται η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε το όριο

$$\lim_{(x+iy)\to 0} \frac{f(x+iy) - f(0)}{x+iy} = \lim_{(x+iy)\to 0} \frac{x-iy}{x+iy}$$

πρέπει να υπάρχει. Παρατηρούμε όμως ότι

$$\text{αν } y = 0, \text{ τότε } \frac{x-iy}{x+iy} = 1,$$

και

$$\text{αν } x = 0, \text{ τότε } \frac{x-iy}{x+iy} = -1\cdot$$

άρα αυτό το όριο δεν μπορεί να υπάρχει, γιατί το πηλίκο παίρνει τις τιμές 1 και -1 για $x+iy$ οσοδήποτε κοντά στο 0.

Μετά από αυτό το παράδειγμα, δεν είναι καθόλου φανερό το πού πρέπει να αναζητήσει κανείς άλλες παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν θυμηθείτε τους ορισμούς των $\sin$ και $\exp$, θα δείτε ότι δεν υπάρχει καμία ελπίδα να γενικεύσουμε αυτούς τους ορισμούς για μιγαδικούς αριθμούς. Για την ώρα οι προβλέψεις είναι απαισιόδοξες, αλλά όλα μας τα προβλήματα θα λυθούν σύντομα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (α) Για κάθε πραγματικό αριθμό y, ορίζουμε $\alpha(x) = x + iy$ (οπότε η α είναι μια συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορισμένη στο $\mathbf{R}$). Δείξτε ότι η α είναι συνεχής (αυτό έπεται άμεσα από ένα θεώρημα σε αυτό το κεφάλαιο). Ομοίως, δείξτε ότι η $\beta(y) = x + iy$ είναι συνεχής.

(β) Έστω f συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbf{C}$. Για σταθερό y, θέτουμε $g(x) = f(x+iy)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής συνάρτηση (ορισμένη στο $\mathbf{R}$). Ομοίως, δείξτε ότι η $h(y) = f(x+iy)$ είναι συνεχής. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (α).

2. (α) Έστω f συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη πάνω σε ένα κλειστό ορθογώνιο $[a,b] \times [c,d]$. Αποδείξτε ότι αν η f παίρνει τις τιμές $f(z)$ και $f(w)$ για z και w στο $[a,b] \times [c,d]$, τότε η f παίρνει και όλες τις τιμές ανάμεσα στο $f(z)$ και το $f(w)$. Υπόδειξη: Εξετάστε την $g(t) = f(tz + (1-t)w)$ για t στο $[0,1]$.

∗(β) Αν f είναι μια συνεχής μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]\times[c,d]$, ο ισχυρισμός του (α) μέρους δεν έχει πια κανένα νόημα, αφού δεν μπορούμε να μιλήσουμε για τους μιγαδικούς αριθμούς ανάμεσα στο $f(z)$ και το $f(w)$. Θα μπορούσαμε να εικάσουμε ότι η f παίρνει όλες τις τιμές πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των $f(z)$ και $f(w)$, αλλά ούτε και αυτό ισχύει. Βρείτε ένα παράδειγμα που να δείχνει αυτό το πράγμα.

3. (α) Αποδείξτε ότι αν οι $a_0,\ldots,a_{n-1}$ είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, τότε υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $z_1,\ldots,z_n$ (όχι αναγκαστικά διακεκριμένοι) τέτοιοι ώστε

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i).$$

(β) Αποδείξτε ότι, αν οι $a_0,\ldots,a_{n-1}$ είναι *πραγματικοί*, τότε το $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ γράφεται ως γινόμενο γραμμικών παραγόντων $z+a$ και δευτεροβάθμιων παραγόντων z^2+az+b, που όλοι έχουν πραγματικούς συντελεστές (χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 25-7).

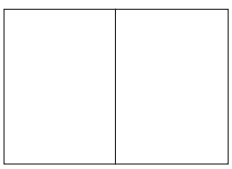
4. Σε αυτό το πρόβλημα θα εξετάσουμε μόνο πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Ένα τέτοιο πολυώνυμο λέγεται **άθροισμα τετραγώνων** αν μπορεί να γραφεί με τη μορφή ${h_1}^2 + \cdots + {h_n}^2$ για κάποια πολυώνυμα h_i με πραγματικούς συντελεστές.

(α) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι άθροισμα τετραγώνων, τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε x.

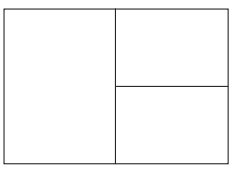
(β) Αποδείξτε ότι, αν η f και η g είναι αθροίσματα τετραγώνων, τότε είναι και η $f\cdot g$.

(γ) Έστω ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε x. Δείξτε ότι η f είναι άθροισμα τετραγώνων. Υπόδειξη: Γράψτε πρώτα $f(x) = \prod_{i=1}^{k}(x-a_i)^2 g(x)$, όπου $g(x)>0$ για κάθε x. Χρησιμοποιήστε τώρα το Πρόβλημα 3(β).

5. (α) Έστω A ένα σύνολο μιγαδικών αριθμών. Ένας αριθμός z λέγεται, όπως και στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, **οριακό σημείο** του συνόλου A αν για κάθε (πραγματικό) $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα σημείο a στο A με $|z-a|<\varepsilon$ αλλά $z\neq a$. Αποδείξτε τη διδιάστατη έκδοση του Θεωρήματος Bolzano-Weierstrass: Αν A είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $[a,b]\times[c,d]$, τότε το A έχει ένα οριακό σημείο στο $[a,b]\times[c,d]$. Υπόδειξη: Διαιρέστε πρώτα το $[a,b]\times[c,d]$ στα δύο με μια κατακόρυφη γραμμή όπως στο Σχήμα 7(α). Αφού το A είναι άπειρο, το ένα τουλάχιστον μισό περιέχει άπειρα σημεία του A. Χωρίστε αυτό στα δύο με μια οριζόντια γραμμή, όπως στο Σχήμα 7(β). Συνεχίστε με αυτόν τον τρόπο, διαιρώντας διαδοχικά με κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές.



(α)



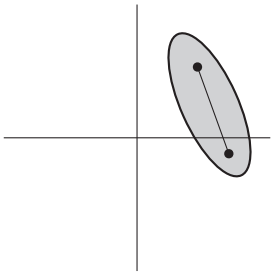
(β)

ΣΧΗΜΑ 7

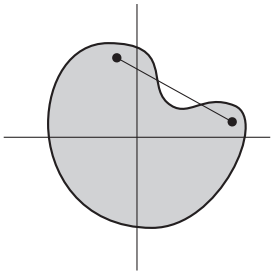
(Το διδιάστατο επιχείρημα διχοτόμησης που περιγράψαμε σε αυτήν την υπόδειξη είναι τόσο συνηθισμένο που ο τίτλος «Bolzano-Weierstrass» συνήθως χρησιμεύει για να περιγράψει τη μέθοδο της απόδειξης, εκτός από το ίδιο το θεώρημα. Βλ. για παράδειγμα, το: H. Petard «A Contribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting», *Amer. Math. Monthly*, **45** (1938), 446–447.)

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής (μιγαδική) συνάρτηση στο $[a,b]\times[c,d]$ είναι φραγμένη στο $[a,b]\times[c,d]$. (Μιμηθείτε το Πρόβλημα 22-31.)

(γ) Αποδείξτε ότι, αν η f είναι μια πραγματική συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]\times[c,d]$, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]\times[c,d]$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ίδιο τέχνασμα που μας έδωσε το Θεώρημα 7-3.)



(α) Ένα κυρτό υποσύνολο του επιπέδου



(β) Ένα μη κυρτό υποσύνολο του επιπέδου

ΣΧΗΜΑ 8

∗**6.** Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 δεν μπορεί να θεωρηθεί τελείως στοιχειώδης γιατί η δυνατότητα επιλογής ενός γ με $\gamma^m = -\alpha/\beta$ στηρίζεται στο Θεώρημα 25-2, και επομένως στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Παρουσιάζει λοιπόν κάποιο ενδιαφέρον το να δώσουμε μια στοιχειώδη απόδειξη του ότι υπάρχει μια λύση για την εξίσωση $z^n - c = 0$.

(α) Δείξτε με καθαρό υπολογισμό ότι μπορούμε να βρούμε λύσεις της $z^2 - c = 0$ για κάθε μιγαδικό αριθμό c.

(β) Εξηγήστε γιατί η επίλυση της $z^n - c = 0$ μπορεί να αναχθεί στην περίπτωση που το n είναι περιττό.

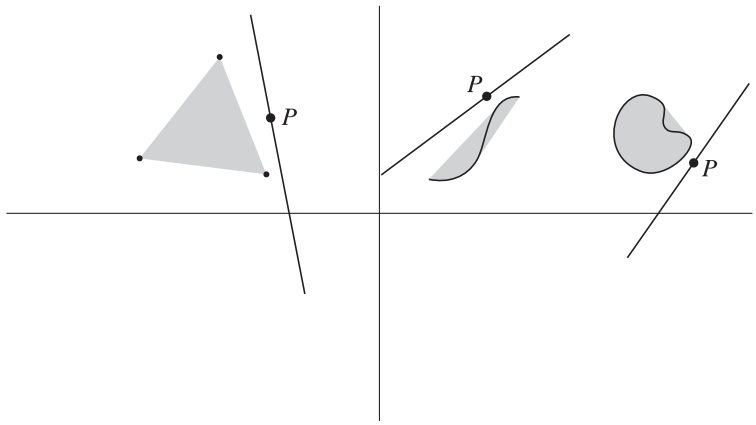
(γ) Έστω z_0 το σημείο όπου η συνάρτηση $f(z) = z^n - c$ παίρνει την ελάχιστη απόλυτη τιμή της. Αν $z_0 \neq 0$, δείξτε ότι ο ακέραιος m στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 είναι ίσος με 1. Αφού μπορούμε σίγουρα να βρούμε γ με $\gamma^1 = -\alpha/\beta$, το υπόλοιπο της απόδειξης εφαρμόζει για την f. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε ότι η ελάχιστη απόλυτη τιμή της f δεν συμβαίνει στο 0.

Έστω, αντίθετα, ότι η f παίρνει την ελάχιστη απόλυτη τιμή της στο 0. Αφού ο n είναι περιττός, τα σημεία $\pm\delta, \pm\delta i$ πηγαίνουν με την f στα $-c \pm \delta^n$, $-c \pm \delta^n i$. Δείξτε ότι για μικρό δ τουλάχιστον ένα από αυτά τα σημεία έχει μικρότερη απόλυτη τιμή από το $-c$, καταλήγοντας έτσι σε αντίφαση.

7. Έστω $f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}$ για $m_1, \ldots, m_k > 0$.

(α) Δείξτε ότι $f'(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k} \cdot \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha (z - z_\alpha)^{-1}$.

(β) Έστω $g(z) = \sum_{\alpha=1}^{k} m_\alpha (z - z_\alpha)^{-1}$. Δείξτε ότι αν $g(z) = 0$, τότε τα $z_1, \ldots, z_k$ δεν μπορούν να βρίσκονται όλα στο ίδιο ημιεπίπεδο μιας ευθείας που περνά από το z. Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 25-11.



ΣΧΗΜΑ 9

(γ) Ένα υποσύνολο K του επιπέδου λέγεται **κυρτό** αν το K περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο τυχαία σημεία του (Σχήμα 8). Για κάθε σύνολο A, υπάρχει ένα ελάχιστο κυρτό σύνολο που το περιέχει, το οποίο λέγεται η **κυρτή θήκη** του A (Σχήμα 9)· αν ένα σημείο P δεν ανήκει στην κυρτή θήκη του A, τότε ολόκληρο το A περιέχεται στο ένα ημιεπίπεδο μιας ευθείας που περνά από το P. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία αποδείξτε ότι οι ρίζες της $f'(z) = 0$ βρίσκονται στην κυρτή θήκη του συνόλου $\{z_1, \ldots, z_k\}$. Περισσότερες πληροφορίες για τα κυρτά σύνολα μπορείτε να βρείτε στην παραπομπή [18] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας).

8. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z, τότε η f είναι συνεχής στο z.

∗**9.** Έστω ότι $f = u + iv$ όπου u και v είναι πραγματικές συναρτήσεις.

(α) Για σταθερό y_0, θέτουμε $g(x) = u(x + iy_0)$ και $h(x) = v(x + iy_0)$. Δείξτε ότι, αν $f'(x_0 + iy_0) = \alpha + i\beta$ για πραγματικούς α και β, τότε $g'(x_0) = \alpha$ και $h'(x_0) = \beta$.

(β) Από την άλλη πλευρά, έστω ότι $k(y) = u(x_0 + iy)$ και $l(y) = v(x_0 + iy)$. Δείξτε ότι $l'(y_0) = \alpha$ και $k'(y_0) = -\beta$.

(γ) Αν $f'(z) = 0$ για κάθε z, δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

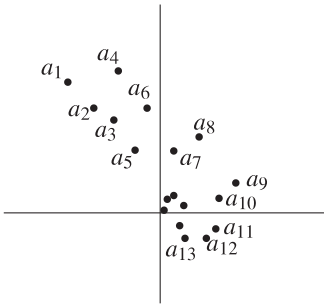
10. (α) Χρησιμοποιώντας την έκφραση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

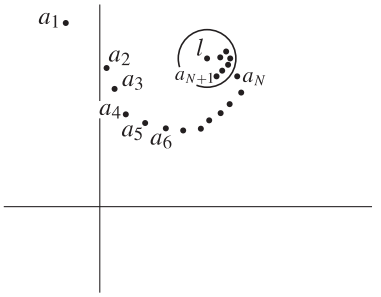
βρείτε την $f^{(k)}(x)$ για κάθε k.

(β) Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε την $\arctan^{(k)}(0)$ για κάθε k.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 27 ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

Αν δεν έχετε ήδη μαντέψει από πού πρόκειται να αποσπάσουμε παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις, ο τίτλος αυτού του κεφαλαίου θα πρέπει να σας προδίδει το μυστικό: έχουμε σκοπό να ορίσουμε συναρτήσεις μέσω των σειρών. Αυτό καθιστά αναγκαία μια συζήτηση γύρω από τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών και τα αθροίσματα τέτοιων ακολουθιών, αλλά (όπως συνέβη και με τα όρια και τη συνέχεια) οι βασικοί ορισμοί είναι σχεδόν πανομοιότυποι με τους αντίστοιχους για πραγματικές ακολουθίες και σειρές.

Μια **ακολουθία** μιγαδικών αριθμών είναι, τυπικά, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbf{N}$ και μιγαδικές τιμές· ο συμβολισμός με τους δείκτες που χρησιμοποιήσαμε για τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών θα χρησιμοποιηθεί και για τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών. Μια ακολουθία $\{a_n\}$ από μιγαδικούς αριθμούς παριστάνεται με τον πιο εύχρηστο τρόπο, αν ονομάσουμε τα σημεία a_n στο επίπεδο (Σχήμα 1).

Η ακολουθία που φαίνεται στο Σχήμα 1 συγκλίνει στο 0, όπου η «σύγκλιση» για μιγαδικές ακολουθίες ορίζεται όπως ακριβώς και για τις πραγματικές ακολουθίες: η ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** στο l, και γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l,$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε, για κάθε n,

$$\text{αν } n > N, \text{ τότε } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Αυτή η συνθήκη σημαίνει ότι κάθε κύκλος που σχεδιάζουμε με κέντρο το l, θα περιέχει το a_n για όλα τα αρκετά μεγάλα n (Σχήμα 2)· για να εκφραστούμε πιο απλά, η ακολουθία βρίσκεται τελικά μέσα σε οποιονδήποτε κύκλο με κέντρο το l.

Η σύγκλιση των μιγαδικών ακολουθιών όχι μόνο ορίζεται ακριβώς όπως και στις πραγματικές ακολουθίες, αλλά και ανάγεται σε αυτήν τη γνωστή περίπτωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω

$$a_n = b_n + i\,c_n \qquad \text{για πραγματικούς } b_n \text{ και } c_n,$$

και έστω

$$l = \beta + i\,\gamma \qquad \text{για πραγματικούς } \beta \text{ και } \gamma.$$

Τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η απόδειξη αφήνεται ως εύκολη άσκηση. Αν έχετε οποιαδήποτε αμφιβολία για το πώς πρέπει να προχωρήσετε, συμβουλευτείτε το Θεώρημα 1 του Κεφαλαίου 26, που είναι όμοιο. ∎

Το **άθροισμα** μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ ορίζεται, και πάλι, ως $\lim_{n\to\infty} s_n$, όπου

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Οι ακολουθίες για τις οποίες αυτό το όριο υπάρχει λέγονται **αθροίσιμες**· εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει** αν το όριο αυτό υπάρχει, ειδάλλως **αποκλίνει**. Δεν χρειάζεται να αναπτύξουμε κάποια καινούργια κριτήρια για τη σύγκλιση σειρών, λόγω του ακόλουθου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Έστω

$$a_n = b_n + i\,c_n \qquad \text{για πραγματικούς } b_n \text{ και } c_n.$$

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνουν και οι δύο, και σε αυτήν την περίπτωση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + i\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1, αν το εφαρμόσουμε στην ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\{a_n\}$. ∎

Υπάρχει επίσης μια έννοια απόλυτης σύγκλισης για μιγαδικές σειρές: η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει (αυτή είναι μια σειρά πραγματικών αριθμών, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε οποιοδήποτε από τα προηγούμενα κριτήρια). Το επόμενο θεώρημα δεν είναι τόσο εύκολο όσο τα δύο προηγούμενα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Έστω

$$a_n = b_n + i\,c_n \qquad \text{για πραγματικούς } b_n \text{ και } c_n.$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνουν και οι δύο απολύτως.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι οι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνουν και οι δύο απολύτως, δηλαδή, ότι οι $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνουν και οι δύο. Έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| + |c_n|$ συγκλίνει. Τώρα,

$$|a_n| = |b_n + i\,c_n| \le |b_n| + |c_n|.$$

Από το κριτήριο σύγκρισης προκύπτει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει (οι αριθμοί $|a_n|$ και $|b_n| + |c_n|$ είναι πραγματικοί και μη αρνητικοί). Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Αφού

$$|a_n| = \sqrt{{b_n}^2 + {c_n}^2},$$

είναι προφανές ότι

$$|b_n| \le |a_n| \quad \text{και} \quad |c_n| \le |a_n|.$$

Για μια ακόμα φορά, το κριτήριο σύγκρισης αποδεικνύει ότι οι $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ συγκλίνουν. ∎

Αξίζει να σημειώσουμε δύο συνέπειες του Θεωρήματος 3. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε και οι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνουν απολύτως· επομένως οι $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ συγκλίνουν από το Θεώρημα 23-5, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από το Θεώρημα 2. Με άλλα λόγια, η απόλυτη σύγκλιση εξασφαλίζει τη σύγκλιση. Σκεπτόμενοι όμοια, αποδεικνύουμε ότι κάθε αναδιάταξη μιας απολύτως συγκλίνουσας σειράς έχει το ίδιο άθροισμα. Τα παραπάνω γίνεται να αποδειχθούν και απευθείας, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα για τους πραγματικούς αριθμούς, αν αποδείξουμε πρώτα το ανάλογο του κριτηρίου του Cauchy (βλ. Πρόβλημα 13).

Έχοντας απαλλαγεί από αυτά τα προκαταρκτικά, μπορούμε τώρα να εξετάσουμε τις **μιγαδικές δυναμοσειρές**, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots .$$

Εδώ οι αριθμοί a και a_n επιτρέπεται να είναι μιγαδικοί, και φυσικά ενδιαφερόμαστε για τη συμπεριφορά της f όταν ο z είναι μιγαδικός. Όπως και στην πραγματική περίπτωση, συνήθως θα μελετάμε δυναμοσειρές με κέντρο το 0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αν το $f(z_0)$ συγκλίνει, τότε το $f(z)$ θα συγκλίνει επίσης για $|z| < |z_0|$. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος θα είναι όμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 24-6 αλλά, για λόγους που σύντομα θα φανούν, δεν θα χρησιμοποιήσουμε τα διάφορα περί ομοιόμορφης σύγκλισης ούτε το M-κριτήριο του Weierstrass, αν και υπάρχουν τα μιγαδικά τους ανάλογα. Το επόμενό μας θεώρημα, λοιπόν, γενικεύει μόνο ένα μικρό μέρος του Θεωρήματος 24-6.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Έστω ότι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n = a_0 + a_1 z_0 + a_2 {z_0}^2 + \cdots$$

συγκλίνει για κάποιο $z_0 \neq 0$. Τότε, αν $|z| < |z_0|$, οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots$$

συγκλίνουν και οι δύο απολύτως.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 24-6, θα χρειαστούμε μόνο το γεγονός ότι το σύνολο των αριθμών $a_n {z_0}^n$ είναι φραγμένο· υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε

$$|a_n {z_0}^n| \leq M \qquad \text{για κάθε } n.$$

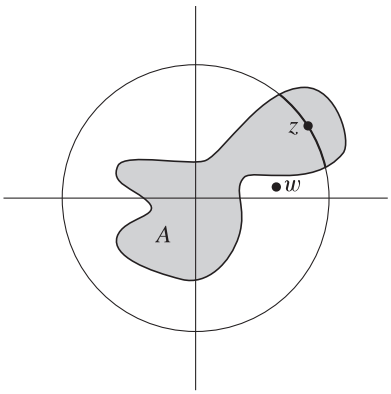
Τότε θα είναι

$$|a_n z^n| = |a_n z_0{}^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$
$$\leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n,$$

και για $z \neq 0$,

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{1}{|z|} n |a_n z_0{}^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$
$$\leq \frac{M}{|z|} n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Αφού οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} |z/z_0|^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|z/z_0|^n$ συγκλίνουν, αυτό αποδεικνύει ότι οι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ συγκλίνουν και οι δύο απολύτως (στην απόδειξη για την $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ υποθέσαμε ότι $z \neq 0$, αλλά αυτή η σειρά προφανώς συγκλίνει και για $z = 0$). ∎



ΣΧΗΜΑ 3

Από το Θεώρημα 4 είναι φανερό ότι οι πιθανότητες για το σύνολο

$$\left\{z : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ συγκλίνει}\right\}$$

είναι πολύ περιορισμένες. Για παράδειγμα, το σκιασμένο σύνολο A στο Σχήμα 3 δεν μπορεί να είναι το σύνολο όλων των z για τα οποία η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει, γιατί περιέχει το z, αλλά όχι τον αριθμό w που ικανοποιεί την $|w| < |z|$.

Φαίνεται ότι το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει μια δυναμοσειρά δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο εκτός από το σύνολο των σημείων μέσα σε έναν κύκλο. Αν επιτρέψουμε «κύκλους με ακτίνα 0» (όταν η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο 0) και «κύκλους με ακτίνα ∞» (όταν η δυναμοσειρά συγκλίνει σε όλα τα σημεία), τότε αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής (με μία μόνο περιπλοκή που θα αναφέρουμε σύντομα)· η απόδειξη απαιτεί μόνο το Θεώρημα 4 και κάποια ικανότητα για οργάνωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 Για κάθε δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

ένα μόνο από τα ακόλουθα τρία πρέπει να συμβαίνει:

(1) Η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ να συγκλίνει μόνο για $z = 0$.

(2) Η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ να συγκλίνει απολύτως για κάθε z στο $\mathbf{C}$.

(3) Υπάρχει ένας αριθμός $R > 0$ τέτοιος ώστε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ να συγκλίνει απολύτως αν $|z| < R$ και να αποκλίνει αν $|z| > R$. (Παρατηρήστε ότι δεν αναφέρουμε τι συμβαίνει όταν $|z| = R$.)

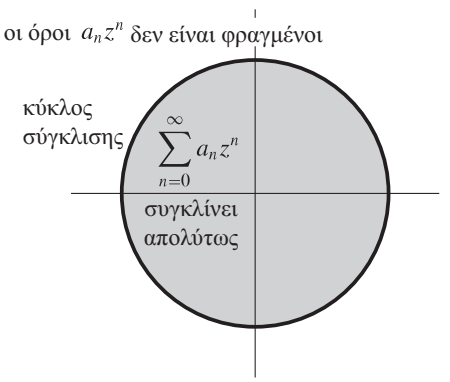
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε

$$S = \left\{ x \text{ στο } \mathbf{R} : \text{ η } \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ συγκλίνει για κάποιο } w \text{ με } |w| = x \right\}.$$

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το S δεν είναι φραγμένο. Τότε, για κάθε μιγαδικό αριθμό z, υπάρχει κάποιος αριθμός x στο S τέτοιος ώστε $|z| < x$. Από τον ορισμό του S, αυτό σημαίνει ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ συγκλίνει για κάποιο w με $|w| = x > |z|$. Από το Θεώρημα 4 προκύπτει ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει η (2).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το S είναι φραγμένο, και έστω R το ελάχιστο άνω φράγμα του S. Αν $R = 0$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει μόνο για $z = 0$, άρα ισχύει η περίπτωση (1). Αλλιώς, ας υποθέσουμε ότι $R > 0$. Τότε αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $|z| < R$, υπάρχει κάποιος αριθμός x στο S με $|z| < x$. Για μια ακόμα φορά, αυτό σημαίνει ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ συγκλίνει για κάποιο w με $|z| < |w|$, άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απολύτως. Επίσης, αν $|z| > R$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν συγκλίνει, γιατί ο $|z|$ δεν ανήκει στο S. ∎

Ο αριθμός R που εμφανίζεται στην περίπτωση (3) λέγεται **ακτίνα σύγκλισης** της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Στις περιπτώσεις (1) και (2) έχει επικρατήσει να λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι 0 και ∞, αντίστοιχα. Όταν $0 < R < \infty$, ο κύκλος $\{z : |z| = R\}$ λέγεται **περιφέρεια σύγκλισης** της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Αν το z βρίσκεται έξω από αυτόν τον κύκλο, τότε, βέβαια, η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν συγκλίνει, μπορούμε όμως να αποδείξουμε κάτι πολύ ισχυρότερο: οι όροι $a_n z^n$ δεν είναι καν φραγμένοι. Για να αποδείξουμε αυτό, έστω w ένας αριθμός με $|z| > |w| > R$· αν οι όροι $a_n z^n$ ήταν φραγμένοι τότε η απόδειξη του Θεωρήματος 4 θα έδειχνε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ συγκλίνει, το οποίο δεν ισχύει. Έτσι (Σχήμα 4), μέσα στον κύκλο σύγκλισης, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο (απολύτως) και έξω από τον κύκλο η σειρά αποκλίνει με τον χειρότερο δυνατό τρόπο (οι όροι $a_n z^n$ δεν είναι φραγμένοι).



ΣΧΗΜΑ 4

Το τι συμβαίνει *επάνω* στην περιφέρεια σύγκλισης είναι ένα πολύ πιο δύσκολο πρόβλημα. Δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με αυτό το πρόβλημα, απλώς αναφέρουμε ότι υπάρχουν δυναμοσειρές που συγκλίνουν παντού πάνω στην περιφέρεια σύγκλισης, δυναμοσειρές που δεν συγκλίνουν πουθενά επάνω στην περιφέρεια σύγκλισης, και δυναμοσειρές που κάνουν σχεδόν οτιδήποτε ανάμεσα σε αυτά τα δύο. (Βλ. Πρόβλημα 5).

Οι αλγεβρικές πράξεις στις μιγαδικές δυναμοσειρές μπορεί να δικαιολογηθούν ακριβώς όπως και στην περίπτωση με τις πραγματικές. Έτσι, αν οι $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ έχουν και οι δύο ακτίνα σύγκλισης $\geq R$, τότε η $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ έχει επίσης ακτίνα σύγκλισης $\geq R$ και $h = f + g$ μέσα στον κύκλο ακτίνας R. Με όμοιο

τρόπο, το γινόμενο Cauchy $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, με $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, έχει ακτίνα σύγκλισης $\geq R$ και $h = fg$ μέσα στον κύκλο ακτίνας R. Και αν η $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης > 0 και $a_0 \neq 0$, τότε μπορούμε να βρούμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ με ακτίνα σύγκλισης > 0, η οποία παριστά την $1/f$ μέσα στον κύκλο σύγκλισής της.

Θυμηθείτε ότι σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να παράγουμε παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Επομένως, θέλουμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα που αποδείξαμε για πραγματικές δυναμοσειρές στο Κεφάλαιο 24, ότι δηλαδή μια συνάρτηση που ορίζεται από δυναμοσειρά παραγωγίζεται όρο προς όρο μέσα στον κύκλο σύγκλισής της. Σε αυτό το σημείο δεν μπορούμε πια να μιμηθούμε την απόδειξη του Κεφαλαίου 24, ακόμα και αν κάνουμε τον κόπο να εισαγάγουμε και εδώ την ομοιόμορφη σύγκλιση, γιατί δεν φαίνεται να υπάρχει κάτι ανάλογο με το Θεώρημα 24-3. Αντί για αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα απευθείας επιχείρημα (που θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί και στο Κεφάλαιο 24). Πριν να αρχίσουμε την απόδειξη, παρατηρούμε ότι, τουλάχιστον, δεν υπάρχει πρόβλημα με τη σύγκλιση της σειράς που προκύπτει αν παραγωγίσουμε όρο προς όρο. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε το Θεώρημα 4 μας εξασφαλίζει αμέσως ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ συγκλίνει και αυτή για $|z| < R$. Επιπλέον, αν $|z| > R$, οπότε οι όροι $a_n z^n$ δεν είναι φραγμένοι, τότε οι όροι $n a_n z^{n-1}$ σίγουρα δεν είναι φραγμένοι, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ δεν συγκλίνει. Αυτό αποδεικνύει ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ είναι και αυτή ακριβώς R.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 Αν η δυναμοσειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z για κάθε z με $|z| < R$, και

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα κάνουμε και εδώ μια «απόδειξη με $\varepsilon/3$». Το γεγονός ότι το θεώρημα ισχύει προφανώς για πολυωνυμικές συναρτήσεις μάς οδηγεί στο να γράψουμε

$$(*) \quad \left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right|$$

$$+ \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} \right|$$

$$+ \left| \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|.$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε απόλυτη τιμή στο δεξιό μέλος μπορεί να γίνει $< \varepsilon/3$ αν διαλέξουμε N αρκετά μεγάλο και h αρκετά μικρό. Αυτό σαφώς θα αποδείξει το θεώρημα.

Μόνο ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (∗) θα παρουσιάσει κάποιες δυσκολίες. Για να ξεκινήσουμε, διαλέγουμε κάποιο z_0 με $|z| < |z_0| < R$· από δω και πέρα θεωρούμε μόνο h για τα οποία $|z+h| \le |z_0|$. Η παράσταση $((z+h)^n - z^n)/h$ γράφεται με έναν πολύ πιο εύχρηστο τρόπο, αν θυμηθούμε ότι

$$\frac{x^n - y^n}{x-y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}.$$

Εφαρμόζοντας αυτό στην

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{(z+h)-z},$$

παίρνουμε

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = (z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}.$$

Αφού

$$|(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}| \le n|z_0|^{n-1},$$

έχουμε

$$\left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \le n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1}$ συγκλίνει, άρα, αν το N είναι αρκετά μεγάλο, τότε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| \\ &\le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| \cdot |z_0|^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Με λίγα λόγια, αν το N είναι αρκετά μεγάλο, τότε

$$(1) \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

για *κάθε* h με $|z+h| \le |z_0|$.

Είναι εύκολο να αντιμετωπίσουμε τον τρίτο όρο στο δεξιό μέλος της (∗): Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ συγκλίνει, έπεται ότι αν το N είναι αρκετά μεγάλο, τότε

$$(2) \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τέλος, αν διαλέξουμε N τέτοιο ώστε οι (1) και (2) να ισχύουν, παρατηρούμε ότι

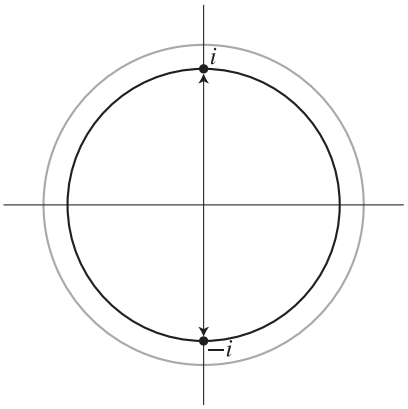
$$\lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{((z+h)^n - z^n)}{h} = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1},$$

αφού η πολυωνυμική συνάρτηση $g(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ είναι σίγουρα παραγωγίσιμη. Επομένως

$$(3) \quad \left| \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n((z+h)^n - z^n)}{h} - \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

για αρκετά μικρό h.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι (1), (2) και (3) αποδεικνύουν το θεώρημα. ∎



ΣΧΗΜΑ 5

Το Θεώρημα 6 έχει ένα προφανές πόρισμα: μια συνάρτηση που παριστάνεται από δυναμοσειρά είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη μέσα στον κύκλο σύγκλισής της, και η δυναμοσειρά είναι η «σειρά Taylor» της συνάρτησης στο 0. Έπεται, ειδικότερα, ότι η f είναι συνεχής μέσα στον κύκλο σύγκλισής της, αφού μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο z είναι συνεχής στο z (Πρόβλημα 26-8).

Η συνέχεια μιας δυναμοσειράς μέσα στον κύκλο σύγκλισής της μας βοηθά να εξηγήσουμε τη συμπεριφορά μερικών από τις σειρές Taylor που παίρνουμε από πραγματικές συναρτήσεις, και μας δίνει τις απαντήσεις που είχαμε υποσχεθεί στα προβλήματα που γεννήθηκαν στο τέλος του Κεφαλαίου 24. Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = 1/(1+z^2)$, δηλαδή η

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots,$$

συγκλίνει για z πραγματικό, μόνο όταν $|z| < 1$, επομένως έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Δεν είναι τυχαίο το ότι η περιφέρεια σύγκλισης περιέχει τα δύο σημεία i και $-i$ στα οποία η f δεν ορίζεται. Αν αυτή η δυναμοσειρά συνέκλινε σε έναν κύκλο με ακτίνα μεγαλύτερη από 1, τότε (Σχήμα 5) θα παρίστανε μια συνάρτηση συνεχή σε αυτόν τον κύκλο, και ειδικότερα στα i και $-i$. Αλλά αυτό είναι αδύνατο, γιατί είναι ίση με $1/(1+z^2)$, μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, και το $1/(1+z^2)$ δεν συγκλίνει πουθενά καθώς το z τείνει στο i ή στο $-i$ μέσα από το μοναδιαίο κύκλο.

Η χρήση των μιγαδικών αριθμών ρίχνει κάποιο φως και στην παράξενη συμπεριφορά της σειράς Taylor της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Αν και δεν έχουμε ορίσει ακόμα το e^z για μιγαδικό z, υποθέτουμε ότι θα ισχύει πως, αν ο y είναι πραγματικός και διαφορετικός από το 0, τότε

$$f(iy) = e^{-1/(iy)^2} = e^{1/y^2}.$$

Το ενδιαφέρον σε αυτήν την παράσταση είναι ότι μεγαλώνει καθώς το y γίνεται μικρό. Έτσι, η f δεν θα είναι ούτε καν συνεχής στο 0 αν οριστεί και για μιγαδικούς αριθμούς· άρα, δεν μας εκπλήσσει καθόλου το ότι ισούται με τη σειρά Taylor μόνο για $z = 0$.

Η μέθοδος με την οποία ορίζουμε τελικά το e^z (καθώς και τα $\sin z$ και $\cos z$) για μιγαδικό z θα έπρεπε να είναι ήδη φανερή. Για πραγματικό x ξέρουμε ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Για μιγαδικό z, επομένως, *ορίζουμε*

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$
$$\exp(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

Τότε $\sin'(z) = \cos z$, $\cos'(z) = -\sin z$ και $\exp'(z) = \exp(z)$ από το Θεώρημα 6. Επίσης, αν αντικαταστήσουμε το z με iz στη σειρά του e^z, και αναδιατάξουμε τους όρους (επιτρεπτό λόγω της απόλυτης σύγκλισης), συμβαίνει κάτι εξαιρετικά ενδιαφέρον:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{iz^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right), \end{aligned}$$

άρα

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Από τους ορισμούς (δηλαδή τις δυναμοσειρές) είναι φανερό ότι

$$\sin(-z) = -\sin z,$$
$$\cos(-z) = \cos z,$$

άρα έχουμε και

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Από τις ισότητες για τα e^{iz} και e^{-iz} μπορούμε να πάρουμε τους τύπους

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Η μελέτη των μιγαδικών δυναμοσειρών τοποθετεί, επομένως, την εκθετική συνάρτηση στο κέντρο της μελέτης των στοιχειωδών συναρτήσεων —αποκαλύπτει μια σχέση ανάμεσα στις τριγωνομετρικές και εκθετικές συναρτήσεις που κανείς δεν είχε φανταστεί όταν ορίστηκαν αυτές οι συναρτήσεις, και που δεν θα είχε ποτέ ανακαλυφθεί χωρίς τη χρήση των μιγαδικών αριθμών. Ως προϊόν αυτής της σχέσης, παίρνουμε μια σχέση ανάμεσα στους αριθμούς e και π που δεν είχαμε υποψιαστεί μέχρι τώρα: αν στον τύπο

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

θέσουμε $z = \pi$, παίρνουμε το αξιοσημείωτο αποτέλεσμα

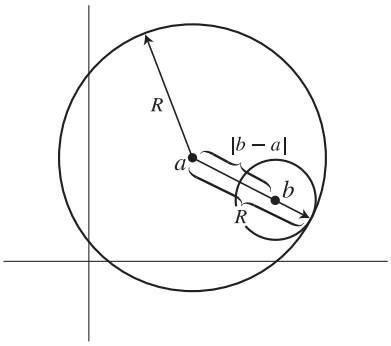
$$e^{i\pi} = -1.$$

(Πιο γενικά το $e^{2\pi i/n}$ είναι μια n-οστή ρίζα του 1.)

Με αυτές τις παρατηρήσεις θα κλείσουμε τη μελέτη μας πάνω στις μιγαδικές συναρτήσεις. Και όμως υπάρχουν ακόμα αρκετά βασικά στοιχεία για τις δυναμοσειρές που δεν έχουν αναφερθεί. Έως τώρα, σπανίως εξετάσαμε δυναμοσειρές με κέντρο το a,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

εκτός από την περίπτωση $a = 0$. Αυτή η παράλειψη είχε εν μέρει σκοπό να απλοποιήσει την παρουσίαση. Για δυναμοσειρές με κέντρο το a, υπάρχουν προφανείς εκδόσεις όλων των θεωρημάτων αυτού του κεφαλαίου (οι αποδείξεις απαιτούν μόνο τετριμμένες τροποποιήσεις): υπάρχει ένας αριθμός R (πιθανόν να είναι 0 ή «∞») τέτοιος ώστε η σειρά



ΣΧΗΜΑ 6

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ να συγκλίνει απολύτως για z με $|z-a| < R$, και οι όροι της να μην είναι φραγμένοι για z με $|z-a| > R$· επίσης, για κάθε z με $|z-a| < R$ η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

έχει παράγωγο

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-a)^{n-1}.$$

Ένα λιγότερο προφανές πρόβλημα που τίθεται είναι να εξετάσουμε αν μπορεί να παρασταθεί μια συνάρτηση με δυναμοσειρά κέντρου b, με δεδομένο ότι ήδη αυτή γράφεται ως δυναμοσειρά με κέντρο a. Αν η

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R, και το b είναι ένα σημείο με $|b-a| < R$ (Σχήμα 6), τότε είναι αλήθεια ότι η $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως δυναμοσειρά με κέντρο το b,

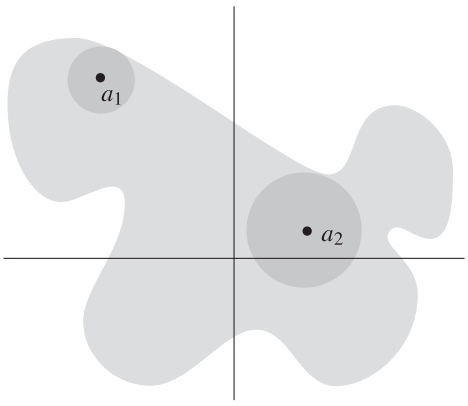
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n$$

(οι αριθμοί b_n είναι αναγκαστικά οι $f^{(n)}(b)/n!$). Ακόμα, αυτή η σειρά έχει ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον $R - |b-a|$ (*μπορεί να είναι μεγαλύτερη*).

Δεν θα αποδείξουμε τα στοιχεία που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, και υπάρχουν πολλά ακόμα σημαντικά πράγματα που δεν θα τα αποδείξουμε. Αν π.χ.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \qquad \text{και} \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-b)^n,$$

και $g(b) = a$, τότε θα έπρεπε η $f \circ g$ να γράφεται ως δυναμοσειρά με κέντρο το b. Αν και είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε όλα τα παραπάνω αποτελέσματα χωρίς να εισαγάγουμε κάποιες βασικές νέες ιδέες, εν τούτοις οι αποδείξεις δεν θα είναι όσο εύκολες ήταν για τα αθροίσματα, τα γινόμενα και τις αντιστρόφους των δυναμοσειρών. Η δυνατότητα όμως να αλλάζουμε μια δυναμοσειρά κέντρου a σε μια άλλη κέντρου b γίνεται όλο και πιο πολύπλοκη, και για την $f \circ g$ χρειάζεται πραγματική επιδεξιότητα. Αντί να ολοκληρώσουμε αυτήν την παράγραφο με έναν *καταιγισμό* υπολογισμών, θα προτιμήσουμε να δώσουμε μια πρόγευση από «μιγαδική ανάλυση», έναν από τους ωραιότερους κλάδους των μαθηματικών, όπου όλα όσα είπαμε μόλις τώρα προκύπτουν ως άμεσες συνέπειες κάποιων θεμελιωδών θεωρημάτων.



ΣΧΗΜΑ 7

Εισάγοντας τις δυναμοσειρές σε αυτό το κεφάλαιο, είχαμε σκοπό να αποκομίσουμε μιγαδικές συναρτήσεις που να είναι παραγωγίσιμες. Αφού αυτές οι συναρτήσεις είναι τελικά άπειρες φορές παραγωγίσιμες, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι η οικογένεια που διαλέξαμε είναι πολύ ειδική μέσα στο σύνολο των παραγωγίσιμων μιγαδικών συναρτήσεων. Τα βασικά θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης αποδεικνύουν ότι δεν είναι καθόλου έτσι τα πράγματα:

> *Αν μια μιγαδική συνάρτηση είναι ορισμένη σε κάποιο χωρίο A του επιπέδου και είναι παραγωγίσιμη στο A, τότε αυτομάτως είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο A. Ακόμα, για κάθε σημείο a στο A η σειρά Taylor της f στο a συγκλίνει στην f σε κάθε κύκλο που περιέχεται στο A (Σχήμα 7).*

Αυτές οι προτάσεις είναι από τις πρώτες που αποδεικνύονται στη μιγαδική ανάλυση. Είναι αδύνατο να κάνουμε οποιαδήποτε αναφορά στις ίδιες τις αποδείξεις —οι μέθοδοι

που χρησιμοποιούνται είναι τελείως διαφορετικές από ό,τι έχουμε συναντήσει στον στοιχειώδη Απειροστικό Λογισμό. Αν όμως θεωρήσουμε αυτές τις προτάσεις γνωστές, τότε μπορούμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα ό,τι αναφέραμε πιο πάνω.

Έστω, για παράδειγμα, ότι f και g είναι δύο συναρτήσεις που γράφονται ως δυναμοσειρές. Τότε, όπως έχουμε αποδείξει, οι f και g είναι παραγωγίσιμες. Έπεται λοιπόν, από εύκολα γενικά θεωρήματα, ότι οι $f+g$, $f\cdot g$, $1/g$ και $f\circ g$ είναι επίσης παραγωγίσιμες. Αν ανατρέξουμε στα αποτελέσματα από τη μιγαδική ανάλυση, αυτό σημαίνει ότι μπορούν να γραφούν ως δυναμοσειρές.

Γνωρίζουμε ήδη πώς να υπολογίζουμε τις δυναμοσειρές των $f+g$, $f\cdot g$ και $1/g$ από τις δυναμοσειρές των f και g. Είναι εύκολο να μαντέψει κανείς πώς θα υπολογίσει μια έκφραση για την $f\circ g$ ως μια δυναμοσειρά ως προς $(z-b)$, όταν δοθούν τα αναπτύγματα-δυναμοσειρές

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$
$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-b)^k,$$

όπου $a=g(b)=b_0$, επομένως

$$g(z)-a=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-b)^k.$$

Πρώτα απ' όλα, ξέρουμε πώς να υπολογίζουμε τη δυναμοσειρά

$$(g(z)-a)^l=\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-b)^k\right)^l,$$

και αυτή η δυναμοσειρά θα αρχίζει με το $(z-b)^l$. Κατά συνέπεια, ο συντελεστής του z^n στη σχέση

$$f(g(z))=\sum_{l=0}^{\infty}a_l(g(z)-a)^l$$

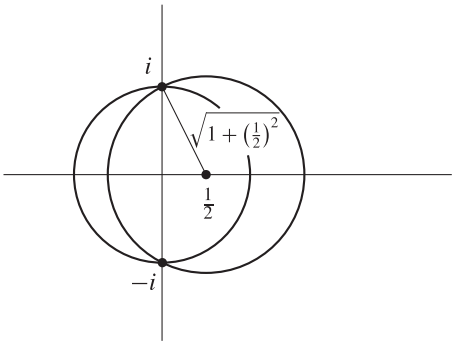
μπορεί να υπολογιστεί ως πεπερασμένο άθροισμα, στο οποίο εμφανίζονται μόνο συντελεστές που προκύπτουν από τις n πρώτες δυνάμεις του $g(z)-a$.

Με όμοιο τρόπο, αν η

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

έχει ακτίνα σύγκλισης R, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο χωρίο $A=\{z:|z-a|<R\}$. Τότε αν το b ανήκει στο A, είναι δυνατόν να γράψουμε την f ως δυναμοσειρά με κέντρο το b, που θα συγκλίνει στον κύκλο ακτίνας $R-|b-a|$. Ο συντελεστής της z^n θα είναι $f^{(n)}(b)/n!$. Αυτή η σειρά μπορεί στην πραγματικότητα να συγκλίνει σε έναν μεγαλύτερο κύκλο, γιατί η $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ μπορεί να είναι η σειρά μιας συνάρτησης παραγωγίσιμης σε ένα χωρίο μεγαλύτερο από το A. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f(z)=1/(1+z^2)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη, εκτός από το i και το $-i$, στα οποία δεν ορίζεται. Άρα το $f(z)$ γράφεται ως δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ με ακτίνα σύγκλισης 1 (και μάλιστα, ξέρουμε ότι $a_{2n}=(-1)^n$ και $a_k=0$ αν ο k είναι περιττός). Μπορούμε ακόμα να γράψουμε

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-\tfrac{1}{2})^n,$$



ΣΧΗΜΑ 8

όπου $b_n = f^{(n)}(\frac{1}{2})/n!$. Είναι εύκολο να μαντέψουμε την ακτίνα σύγκλισης αυτής της σειράς: είναι $\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}$, η απόσταση του $\frac{1}{2}$ από το i ή το $-i$ (Σχήμα 8).

Ως πρόσθετο κίνητρο για να ασχοληθείτε περισσότερο με τη μιγαδική ανάλυση, θα αναφέρουμε ένα ακόμα αποτέλεσμα, που βρίσκεται αρκετά κοντά στην επιφάνεια και μπορείτε να το δείτε σε οποιοδήποτε σχετικό βιβλίο.

Για πραγματικό z οι τιμές του $\sin z$ βρίσκονται πάντοτε μεταξύ του -1 και του 1, αλλά για μιγαδικό z αυτό δεν είναι καθόλου σωστό. Πράγματι, αν $z = iy$, για y πραγματικό, τότε

$$\sin iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}.$$

Όταν το y είναι μεγάλο, τότε και το $\sin(iy)$ είναι μεγάλο κατ' απόλυτη τιμή. Αυτή η συμπεριφορά της $\sin$ είναι η τυπική των συναρτήσεων που είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο (τέτοιες συναρτήσεις τις λέμε *ακέραιες*). Ένα αποτέλεσμα που εμφανίζεται σχετικά νωρίς στη Μιγαδική Ανάλυση είναι το εξής:

Θεώρημα του Liouville. Οι μόνες φραγμένες ακέραιες συναρτήσεις είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

Ως απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του Liouville, θεωρήστε μια πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

με $n > 1$, οπότε η f δεν είναι σταθερή. Είναι ήδη γνωστό ότι το $f(z)$ είναι μεγάλο για μεγάλα z, άρα το Θεώρημα του Liouville δεν μας λέει τίποτα το ενδιαφέρον για την f. Πάρτε όμως τη συνάρτηση

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Αν το $f(z)$ δεν ήταν ποτέ 0, τότε η g θα ήταν ακέραια· αφού το $f(z)$ γίνεται μεγάλο για μεγάλο z, η συνάρτηση g θα ήταν φραγμένη, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το Θεώρημα του Liouville. Άρα $f(z) = 0$ για κάποιο z, και έχουμε αποδείξει το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Εξετάστε για καθεμιά από τις σειρές που ακολουθούν αν συγκλίνει, και αν συγκλίνει απολύτως.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}.$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2i}{2^n}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}.$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i)^n.$

(v) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} + i^n \frac{\log n}{n}.$

2. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο λόγου για να δείξετε ότι η ακτίνα σύγκλισης για καθεμιά από τις επόμενες δυναμοσειρές είναι 1. (Σε κάθε περίπτωση, οι λόγοι διαδοχικών όρων θα συγκλίνουν σε ένα όριο < 1 αν $|z| < 1$, αλλά για $|z| > 1$ οι λόγοι θα τείνουν στο ∞ ή σε ένα όριο > 1.)

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n + 2^{-n}) z^n$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

3. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο ρίζας (Πρόβλημα 23-9) για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης κάθε μιας από τις ακόλουθες δυναμοσειρές. (Σε ορισμένες περιπτώσεις, θα χρειαστείτε όρια που υπολογίστηκαν στο Κεφάλαιο 22.)

(i) $\displaystyle\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{2^2} + \frac{z^4}{3^2} + \frac{z^5}{2^3} + \frac{z^6}{3^3} + \cdots$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{n^n}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^n$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$.

4. Το κριτήριο ρίζας μπορούμε, θεωρητικά τουλάχιστον, πάντοτε να το χρησιμοποιούμε για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς, και μάλιστα μια πιο λεπτή ανάλυση της κατάστασης οδηγεί σε έναν τύπο για την ακτίνα σύγκλισης, γνωστό ως «τύπο των Cauchy-Hadamard». Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το σύνολο των αριθμών $\sqrt[n]{|a_n|}$ είναι φραγμένο.

(α) Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 23-9 για να δείξετε ότι, αν $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| < 1$, τότε η $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει.

(β) Δείξτε ακόμα ότι, αν $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| > 1$, τότε οι όροι της $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν είναι φραγμένοι.

(γ) Τα μέρη (α) και (β) δείχνουν ότι η ακτίνα σύγκλισης της $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι $1/\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (όπου το «1/0» σημαίνει «∞»). Για να συμπληρώσουμε τον τύπο, ορίζουμε $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ αν το σύνολο όλων των $\sqrt[n]{|a_n|}$ δεν είναι φραγμένο. Αποδείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση, η $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει για

$z \neq 0$, άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 0 (το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ίσο με «$1/\infty$»).

5. Εξετάστε τις ακόλουθες τρεις σειρές από το Πρόβλημα 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Αποδείξτε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει παντού στη μοναδιαία περιφέρεια, ότι η τρίτη σειρά δεν συγκλίνει πουθενά στη μοναδιαία περιφέρεια, και ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει για τουλάχιστον ένα σημείο στη μοναδιαία περιφέρεια και αποκλίνει για τουλάχιστον ένα σημείο στη μοναδιαία περιφέρεια.

6. (α) Αποδείξτε ότι $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ για όλους τους μιγαδικούς z και w, δείχνοντας ότι η σειρά της e^{z+w} είναι το Cauchy γινόμενο των σειρών των e^z και e^w.

(β) Δείξτε ότι $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ και $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$ για όλους τους μιγαδικούς z και w.

7. (α) Αποδείξτε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός με απόλυτη τιμή 1 γράφεται στη μορφή e^{iy} για κάποιον πραγματικό αριθμό y.

(β) Αποδείξτε ότι $|e^{x+iy}| = e^x$ για πραγματικούς x και y.

8. (α) Αποδείξτε ότι η $\exp$ παίρνει όλες τις μιγαδικές τιμές εκτός από το 0.

(β) Αποδείξτε ότι η $\sin$ παίρνει όλες τις μιγαδικές τιμές.

9. Για καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις, υπολογίστε τους πρώτους τρεις μη μηδενικούς όρους της σειράς Taylor γύρω από το 0, κάνοντας κατάλληλη χρήση των δυναμοσειρών.

(i) $f(z) = \tan z$.

(ii) $f(z) = z(1 - z)^{-1/2}$.

(iii) $f(z) = \dfrac{e^{\sin z} - 1}{z}$.

(iv) $f(z) = \log(1 - z^2)$.

(v) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^2}$.

(vi) $f(z) = \dfrac{\sin(z^2)}{z \cos^2 z}$.

(vii) $f(z) = \dfrac{1}{z^4 - 2z^2 + 3}$.

(viii) $f(z) = \dfrac{1}{z}[e^{(\sqrt{1+z}-1)} - 1]$.

10. (α) Γράφουμε μια παραγωγίσιμη μιγαδική συνάρτηση f υπό τη μορφή $f = u + iv$, όπου u και u είναι συναρτήσεις με πραγματικές τιμές. Έστω $\bar{u}$ και $\bar{v}$ οι περιορισμοί των u και v στους πραγματικούς αριθμούς. Με άλλα λόγια, $\bar{u}(x) = u(x)$ για πραγματικούς x (αλλά το $\bar{u}$ δεν ορίζεται για άλλα x). Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 26-9, δείξτε ότι για πραγματικά x έχουμε

$$f'(x) = \bar{u}'(x) + i\,\bar{v}'(x),$$

όπου f' συμβολίζει τη μιγαδική παράγωγο, ενώ $\bar{u}'$ και $\bar{v}'$ συμβολίζουν τις συνήθεις παραγώγους αυτών των πραγματικών συναρτήσεων στο $\mathbf{R}$.

(β) Δείξτε, γενικότερα, ότι

$$f^{(k)}(x) = \bar{u}^{(k)}(x) + i\,\bar{v}^{(k)}(x).$$

(γ) Έστω ότι η f ικανοποιεί την εξίσωση

$$(*) \qquad f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f = 0,$$

όπου τα a_i είναι πραγματικοί αριθμοί, και η $f^{(k)}$ συμβολίζει μιγαδική παράγωγο ανώτερης τάξης. Δείξτε ότι οι $\bar{u}$ και $\bar{v}$ ικανοποιούν την ίδια εξίσωση, όπου οι $\bar{u}^{(k)}$ και $\bar{v}^{(k)}$ συμβολίζουν τώρα παραγώγους ανώτερης τάξης πραγματικών συναρτήσεων στο $\mathbf{R}$.

(δ) Δείξτε ότι αν $a = b + ci$ είναι μιγαδική ρίζα της εξίσωσης $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, τότε $f(x) = e^{bx}\sin cx$ και $f(x) = e^{bx}\cos cx$ είναι και οι δύο λύσεις της $(*)$.

11. (α) Δείξτε ότι η $\exp$ *δεν* είναι 1-1 στο $\mathbf{C}$.

(β) Για δοθέν $w \neq 0$, δείξτε ότι $e^z = w$ αν και μόνο αν $z = x + iy$ με $x = \log|w|$ (όπου με $\log$ συμβολίζουμε την πραγματική λογαριθμική συνάρτηση), και y ένα όρισμα του w.

∗(γ) Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\log$ ορισμένη για όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς, τέτοια ώστε $\exp(\log(z)) = z$ για κάθε $z \neq 0$. (Δείξτε ότι η $\log$ δεν μπορεί να οριστεί συνεχώς ούτε καν για $|z| = 1$.)

Αφού δεν υπάρχει τρόπος να ορίσουμε μια συνεχή λογαριθμική συνάρτηση, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για *τον* λογάριθμο ενός μιγαδικού αριθμού, αλλά μόνο για «κάποιον λογάριθμο του w», εννοώντας έναν από τους άπειρους αριθμούς z με $e^z = w$. Επίσης για μιγαδικούς αριθμούς a και b ορίζουμε το a^b ως ένα *σύνολο* μιγαδικών αριθμών, συγκεκριμένα το σύνολο όλων των αριθμών $e^{b\log a}$ ή, ακριβέστερα, το σύνολο όλων των αριθμών e^{bz}, όπου z είναι ένας λογάριθμος του a.

(δ) Αν m είναι ακέραιος, τότε το a^m αποτελεί έναν μόνο αριθμό, εκείνον που δίνει ο συνήθης στοιχειώδης ορισμός του a^m.

(ε) Αν m και n είναι ακέραιοι, τότε το σύνολο $a^{m/n}$ συμπίπτει με το σύνολο των τιμών που δίνει ο συνήθης στοιχειώδης ορισμός, δηλαδή, το σύνολο των b^m, όπου b είναι μια n-οστή ρίζα του a.

(στ) Αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί και ο b είναι άρρητος, τότε ο a^b περιέχει άπειρες τιμές, ακόμη και για $a > 0$.

(ζ) Βρείτε όλους τους λογαρίθμους του i και βρείτε όλες τις τιμές του i^i.

(η) Με $(a^b)^c$ εννοούμε το σύνολο όλων των αριθμών της μορφής z^c για κάποιον αριθμό z στο σύνολο a^b. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειρες δυνατές τιμές για το $(1^i)^i$, ενώ μόνο μία για το $1^{i\cdot i}$.

(θ) Δείξτε ότι όλες οι τιμές του $a^{b\cdot c}$ είναι επίσης τιμές του $(a^b)^c$. Αληθεύει ότι $a^{b\cdot c} = (a^b)^c \cap (a^c)^b$;

12. (α) Για πραγματικό x, δείξτε ότι μπορούμε να διαλέξουμε ως $\log(x+i)$ και $\log(x-i)$ τους

$$\log(x+i) = \log\bigl(\sqrt{1+x^2}\bigr) + i\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right),$$
$$\log(x-i) = \log\bigl(\sqrt{1+x^2}\bigr) - i\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right).$$

(Θα βοηθούσε η παρατήρηση ότι $\pi/2 - \arctan x = \arctan 1/x$ για $x > 0$.)

(β) Η παράσταση

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

δίνει, τυπικά,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2i}[\log(x-i) - \log(x+i)].$$

Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να επαληθεύσετε ότι αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με το συνηθισμένο.

13. (α) Μια ακολουθία $\{a_n\}$ μιγαδικών αριθμών λέγεται **ακολουθία Cauchy** αν $\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$. Έστω ότι $a_n = b_n + ic_n$, όπου οι b_n και c_n είναι πραγματικοί. Αποδείξτε ότι η $\{a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν οι $\{b_n\}$ και $\{c_n\}$ είναι ακολουθίες Cauchy.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy μιγαδικών αριθμών συγκλίνει.

(γ) Δώστε απευθείας απόδειξη, χωρίς να χρησιμοποιήσετε θεωρήματα για πραγματικές σειρές, για το ότι κάθε απολύτως συγκλίνουσα σειρά συγκλίνει και ότι κάθε αναδιάταξή της έχει το ίδιο άθροισμα. (Επιτρέπεται, και μάλιστα σας συμβουλεύουμε, να χρησιμοποιήσετε τις *αποδείξεις* των αντίστοιχων θεωρημάτων για πραγματικές σειρές.)

14. (α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} e^{i(n+1)x/2}.$$

(β) Εξαγάγετε τους τύπους για τα $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ που δίνονται στο Πρόβλημα 15-33.

15. Έστω $\{a_n\}$ η ακολουθία Fibonacci, $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

(α) Αν $r_n = a_{n+1}/a_n$, δείξτε ότι $r_{n+1} = 1 + 1/r_n$.

(β) Δείξτε ότι αν το $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ υπάρχει, τότε $r = 1 + 1/r$, έτσι ώστε $r = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

(γ) Δείξτε ότι το όριο υπάρχει. Υπόδειξη: Αν $r_n < \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, τότε ${r_n}^2 - r_n - 1 < 0$ και $r_n < r_{n+2}$.

(δ) Δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $2/\left(1+\sqrt{5}\right)$. (Χρησιμοποιώντας τα αναπόδεικτα θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου, και το γεγονός ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = -1/(z^2+z-1)$ από το Πρόβλημα 24-16, θα μπορούσαμε να έχουμε προβλέψει ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι η μικρότερη από τις απόλυτες τιμές των ριζών της $z^2 + z - 1 = 0$. Αφού οι ρίζες είναι $\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)/2$, η ακτίνα σύγκλισης θα έπρεπε να είναι $\left(-1+\sqrt{5}\right)/2$. Παρατηρήστε ότι αυτός ο αριθμός είναι στ' αλήθεια ίσος με $2/\left(1+\sqrt{5}\right)$.)

16. Αφού το $(e^z - 1)/z$ μπορεί να παρασταθεί με τη δυναμοσειρά $1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$ η οποία δεν είναι μηδέν στο 0, έπεται ότι υπάρχει μια δυναμοσειρά

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

με μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης. Μπορούμε χρησιμοποιώντας τα αναπόδεικτα θεωρήματα του κεφαλαίου αυτού ακόμα και να μαντέψουμε την ακτίνα σύγκλισης· είναι 2π, αφού αυτή είναι μικρότερη απόλυτη τιμή που μπορούν να πάρουν οι αριθμοί $z = 2k\pi i$ για τους οποίους $e^z - 1 = 0$. Οι αριθμοί b_n που εμφανίζονται εδώ λέγονται αριθμοί **Bernoulli**.*

(α) Προφανώς $b_0 = 1$. Τώρα δείξτε ότι

$$\frac{z}{e^z - 1} = -\frac{z}{2} + \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$
$$\frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} = -\frac{e^z + 1}{e^z - 1},$$

και συμπεράνετε ότι

$$b_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad b_n = 0 \quad \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός και } n > 1.$$

(β) Βρίσκοντας το συντελεστή του z^n στο δεξιό μέλος της ισότητας

$$z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} z^k\right)\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right),$$

δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} b_i = 0 \quad \text{για } n > 1.$$

Αυτός ο τύπος μας επιτρέπει να υπολογίσουμε κάθε b_k συναρτήσει των προηγουμένων, και δείχνει ότι κάθε b_k είναι ρητός. Υπολογίστε δύο-τρεις από τους εξής:

$$b_2 = \tfrac{1}{6}, \quad b_4 = -\tfrac{1}{30}, \quad b_6 = \tfrac{1}{42}, \quad b_8 = -\tfrac{1}{30}.$$

∗(γ) Το μέρος (α) δείχνει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \cdot \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}.$$

Αντικαταστήστε το z με $2iz$ και δείξτε ότι

$$z \cot z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^n 2^{2n} z^{2n}.$$

∗(δ) Δείξτε ότι

$$\tan z = \cot z - 2 \cot 2z.$$

∗(ε) Δείξτε ότι

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{(2n)!} (-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) z^{2n-1}.$$

(Αυτή η σειρά συγκλίνει για $|z| < \pi/2$.)

*Μερικές φορές οι αριθμοί $B_n = (-1)^{n-1} b_{2n}$ καλούνται αριθμοί Bernoulli, επειδή $b_n = 0$ αν n περιττός και > 1 (βλ. μέρος (α)) και επειδή οι αριθμοί b_{2n} έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο, που δεν θα το αποδείξουμε όμως. Υπάρχουν σε χρήση και άλλες παραλλαγές αυτής της ονοματολογίας.

17. Οι αριθμοί Bernoulli παίζουν σπουδαίο ρόλο σε ένα θεώρημα που διατυπώνεται ευκολότερα αν «φλυαρήσουμε λίγο πάνω στο συμβολισμό». Ας χρησιμοποιήσουμε το D για να συμβολίζουμε τον «τελεστή παραγώγισης», οπότε το Df θα συμβολίζει την f'. Τότε το $D^k f$ θα σημαίνει $f^{(k)}$ και το $e^D f$ θα σημαίνει $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}/n!$ (βέβαια, αυτή η σειρά γενικά δεν έχει έννοια, αλλά θα έχει αν η f είναι, για παράδειγμα, πολυωνυμική συνάρτηση). Τέλος, με Δ συμβολίζουμε τον «τελεστή διαφορών» για τον οποίο $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$. Τώρα από το Θεώρημα Taylor, αν παρακάμψουμε προβλήματα σύγκλισης, προκύπτει ότι

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!},$$

ή

$$(*) \quad f(x+1) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Μπορούμε συμβολικά να γράψουμε $\Delta f = (e^D - 1) f$, όπου 1 είναι ο «ταυτοτικός τελεστής». Ακόμα πιο συμβολικά, μπορούμε να γράψουμε $\Delta = e^D - 1$, πράγμα που θα έπρεπε να σημαίνει ότι

$$D = \frac{D}{e^D - 1}\Delta.$$

Έτσι, θα έπρεπε προφανώς να ισχύει

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} D^k \Delta,$$

δηλαδή

$$(**) \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)].$$

Το ωραίο με αυτές τις ανοησίες είναι ότι φέρνουν σωστά αποτελέσματα!

(α) Αποδείξτε ότι η $(**)$ ισχύει αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση (οπότε σε αυτήν την περίπτωση το άπειρο άθροισμα είναι πεπερασμένο). Υπόδειξη: Εφαρμόζοντας την $(*)$ στην $f^{(k)}$ βρείτε έναν τύπο για το $f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)$· έπειτα χρησιμοποιήστε τον τύπο του Προβλήματος 16(β) για να βρείτε τον συντελεστή του $f^{(j)}(x)$ στο δεξιό μέλος της $(**)$.

(β) Συμπεράνετε από την $(**)$ ότι

$$f'(0) + \cdots + f'(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [f^{(k)}(n+1) - f^{(k)}(0)].$$

(γ) Δείξτε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση g έχουμε

$$g(0) + \cdots + g(n) = \int_0^{n+1} g(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k!} [g^{(k-1)}(n+1) - g^{(k-1)}(0)].$$

(δ) Εφαρμόστε αυτό στην $g(x) = x^p$ για να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $b_1 = -\frac{1}{2}$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{k=2}^{p} \frac{b_k}{k} \binom{p}{k-1} n^{p-k+1}.$$

Οι δέκα πρώτες περιπτώσεις εμφανίστηκαν στο Πρόβλημα 2-7, που είχε σκοπό να σας παρακινήσει να ανακαλύψετε το γενικό μοντέλο. Ίσως τώρα να φαίνεται παράλογη αυτή η πρόταση, αλλά οι αριθμοί Bernoulli στην πραγματικότητα ανακαλύφθηκαν ακριβώς με αυτόν τον τρόπο! Αφού γράφει αυτούς τους 10 τύπους, ο Bernoulli ισχυρίζεται (στο έργο του *Ars Conjectandi*, 1713, που δημοσιεύτηκε μετά τον θάνατό του): «Όποιος εξετάσει αυτήν τη σειρά όσον αφορά την κανονικότητά της, ίσως μπορέσει να συνεχίσει τον πίνακα». Μετά γράφει τον παραπάνω τύπο, χωρίς να δώσει καμία απόδειξη, απλώς σημειώνοντας ότι οι συντελεστές b_k (τους οποίους συμβόλιζε απλώς με A, B, C, ...) ικανοποιούν την ισότητα του Προβλήματος 16(β). Η σχέση που υπάρχει ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς και τους συντελεστές στη δυναμοσειρά της $z/(e^z - 1)$ ανακαλύφθηκε από τον Euler.

∗**18.** Ο τύπος του Προβλήματος 17(γ) γενικεύεται και στην περίπτωση που η g δεν είναι πολυωνυμική συνάρτηση· το άπειρο άθροισμα μπορεί να αντικατασταθεί με ένα πεπερασμένο άθροισμα συν ένα όρο υπολοίπου. Για να βρούμε μια έκφραση του υπολοίπου, είναι χρήσιμο να εισαγάγουμε κάποιες καινούργιες συναρτήσεις.

(α) Τα *πολυώνυμα Bernoulli* φ_n ορίζονται από την

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k.$$

Τα πρώτα τρία είναι τα

$$\varphi_1(x) = x - \frac{1}{2},$$
$$\varphi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$\varphi_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Δείξτε ότι

$$\varphi_n(0) = b_n,$$
$$\varphi_n(1) = b_n \qquad \text{αν } n > 1,$$
$$\varphi_n'(x) = n\varphi_{n-1}(x),$$
$$\varphi_n(x) = (-1)^n \varphi_n(1-x).$$

Υπόδειξη: Αποδείξτε την τελευταία ισότητα με επαγωγή στο n.

(β) Έστω ${R_N}^k(x)$ ο όρος του υπολοίπου στο Θεώρημα του Taylor για την $f^{(k)}$ στο διάστημα $[x, x+1]$, δηλαδή

$$(*) \qquad f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f^{(k+n)}(x)}{n!} + {R_N}^k(x).$$

Αποδείξτε ότι

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!}[f^{(k)}(x+1) - f^{(k)}(x)] - \sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^{k}(x).$$

Υπόδειξη: Μιμηθείτε το Πρόβλημα 17(α). Προσέξτε τον δείκτη $N-k$ στο R.

(γ) Χρησιμοποιήστε την ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου για να δείξετε ότι

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{b_k}{k!} R_{N-k}{}^{k}(x) = \int_x^{x+1} \frac{\varphi_N(x+1-t)}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt.$$

(δ) Εξαγάγετε τον «Τύπο του Αθροίσματος των Euler-Maclaurin»:

$$g(x) + g(x+1) + \cdots + g(x+n)$$
$$= \int_x^{x+n+1} g(t)\, dt + \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{k!}[g^{(k-1)}(x+n+1) - g^{(k-1)}(x)] + S_N(x,n),$$

όπου

$$S_N(x,n) = -\sum_{j=0}^{n} \int_{x+j}^{x+j+1} \frac{\varphi_N(x+j+1-t)}{N!} g^{(N)}(t)\, dt.$$

(ε) Έστω ψ_n η περιοδική συνάρτηση, με περίοδο 1, που ικανοποιεί την $\psi_n(t) = \varphi_n(t)$ για $0 \le t < 1$. (Από το μέρος (α) έπεται ότι, αν $n > 1$, τότε η ψ_n είναι συνεχής, αφού $\varphi_n(1) = \varphi_n(0)$, καθώς και ότι η ψ_n είναι άρτια αν το n είναι άρτιο και περιττή αν το n είναι περιττό.) Δείξτε ότι

$$S_N(x,n) = -\int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(x-t)}{N!} g^{(N)}(t)\, dt$$
$$\left(= (-1)^{N+1} \int_x^{x+n+1} \frac{\psi_N(t)}{N!} g^{(N)}(t)\, dt \qquad \text{αν ο } x \text{ είναι ακέραιος} \right).$$

Αντίθετα από το υπόλοιπο στο Θεώρημα του Taylor, το υπόλοιπο $S_N(x,n)$ συνήθως δεν ικανοποιεί την $\lim_{N\to\infty} S_N(x,n) = 0$, γιατί οι αριθμοί και οι συναρτήσεις Bernoulli μεγαλώνουν πολύ γρήγορα (αν και τα πρώτα-πρώτα παραδείγματα δεν δείχνουν κάτι τέτοιο). Παρ' όλα αυτά, συχνά μπορούμε να πάρουμε σημαντικές πληροφορίες από τον τύπο του αθροίσματος. Η γενική κατάσταση εξετάζεται καλύτερα στα πλαίσια μιας πιο ειδικής μελέτης («ασυμπτωτικές σειρές»), αλλά το επόμενο πρόβλημα μας δίνει ένα εξαιρετικά σημαντικό παράδειγμα.

∗∗**19.** (α) Χρησιμοποιήστε τον τύπο Euler-Maclaurin, με $N = 2$, για να δείξετε ότι

$$\log 1 + \cdots + \log(n-1)$$
$$= \int_1^n \log t\, dt - \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\, dt.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\log\left(\frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)}}\right) = \frac{11}{12} + \int_1^n \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\, dt.$$

(γ) Εξηγήστε γιατί το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\beta = \int_1^\infty \psi_2(t)/2t^2\,dt$ υπάρχει, και δείξτε ότι αν $\alpha = \exp(\beta + 11/12)$, τότε

$$\log\left(\frac{n!}{\alpha n^{n+1/2}e^{-n+1/(12n)}}\right) = -\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt.$$

(δ) Το Πρόβλημα 19-41(δ) δείχνει ότι

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Χρησιμοποιήστε το μέρος (γ) για να δείξετε ότι

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^2 n^{2n+1} e^{-2n} 2^{2n}}{\alpha(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\sqrt{n}},$$

και συμπεράνετε ότι $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

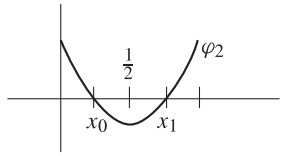
(ε) Δείξτε ότι

$$\int_0^{1/2} \varphi_2(t)\,dt = \int_0^1 \varphi_2(t)\,dt = 0.$$

(Μπορείτε να κάνετε τους υπολογισμούς λεπτομερώς, αλλά το αποτέλεσμα επίσης συνεπάγεται απευθείας από το Πρόβλημα 18(α).) Συμπεράνετε ότι

$$\bar{\psi}(x) = \int_0^x \psi_2(t)\,dt \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{για } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \leq 0 & \text{για } 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

με $\bar{\psi}(n) = 0$ για κάθε n. Υπόδειξη: Σχεδιάστε την $\bar{\psi}$ στο $[0, 1]$, προσέχοντας ιδιαίτερα τις τιμές της στα x_0, $\frac{1}{2}$ και x_1, όπου x_0 και x_1 είναι οι ρίζες της φ_2 (Σχήμα 9).



ΣΧΗΜΑ 9

(στ) Παρατηρώντας ότι $\bar{\psi}(x) = -\bar{\psi}(1-x)$, δείξτε ότι

$$\bar{\bar{\psi}}(x) = \int_0^x \bar{\psi}(t)\,dt \geq 0 \quad \text{στο } [0, 1],$$

και επομένως παντού, με $\bar{\bar{\psi}}(n) = 0$ για κάθε n.

(ζ) Τέλος, χρησιμοποιήστε αυτήν την πληροφορία και ολοκλήρωση κατά μέρη για να δείξετε ότι

$$\int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt > 0.$$

(η) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η μέγιστη τιμή της $|\varphi_2(x)|$ για x στο $[0, 1]$ είναι $\frac{1}{6}$, συμπεράνετε ότι

$$0 < \int_n^\infty \frac{\psi_2(t)}{2t^2}\,dt < \frac{1}{12n}.$$

(θ) Τέλος, συμπεράνετε ότι

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \;<\; n! \;<\; \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n+1/(12n)}.$$

Το τελικό συμπέρασμα του Προβλήματος 19, μια ισχυρή μορφή του τύπου του Stirling, δείχνει ότι το $n!$ είναι περίπου ίσο με $\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$, με την έννοια ότι αυτή η παράσταση διαφέρει από το $n!$ κατά μια ποσότητα που είναι μικρή σε σύγκριση με το n όταν το n είναι μεγάλο. Για παράδειγμα, αν $n = 10$ παίρνουμε 3598696 αντί για 3628800, με ένα σφάλμα $< 1\%$.

Μια πιο γενική μορφή του τύπου του Stirling υπογραμμίζει τον «ασυμπτωτικό» χαρακτήρα του τύπου του αθροίσματος. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο Πρόβλημα 19 για να δείξουμε ότι για $N \geq 2$ έχουμε

$$\log\left(\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}}\right) = \sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}} \pm \int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{N t^N}\, dt.$$

Αφού η ψ_N είναι φραγμένη, μπορούμε να πάρουμε εκτιμήσεις της μορφής

$$\left| \int_n^\infty \frac{\psi_N(t)}{N t^N}\, dt \right| \leq \frac{M_N}{n^{N-1}}.$$

Αν το N είναι μεγάλο, η σταθερά M_N θα είναι επίσης μεγάλη· αλλά για πολύ μεγάλα n ο παράγοντας n^{1-N} θα κάνει το γινόμενο πολύ μικρό. Έτσι, η παράσταση

$$\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \cdot \exp\left(\sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{k(k-1)n^{k-1}} \right)$$

μπορεί να είναι πολύ κακή προσέγγιση του $n!$ όταν το n είναι μικρό, αλλά για μεγάλα n (το *πόσο* μεγάλα εξαρτάται από το N) θα είναι ιδιαίτερα καλή (το *πόσο* καλή εξαρτάται και πάλι από το N).

ΜΕΡΟΣ 5

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ήταν κάποτε ένας πολυμήχανος Αρχιτέκτονας που είχε καταφέρει να βρει μια καινούργια Μέθοδο για να χτίζει Σπίτια, ξεκινώντας από την Οροφή, και δουλεύοντας προς τα κάτω μέχρι τα Θεμέλια.

JONATHAN SWIFT

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 28 ΣΩΜΑΤΑ

Σε αυτό το βιβλίο κάναμε μια συνειδητή προσπάθεια να ορίσουμε όλες τις σημαντικές έννοιες, ακόμα και όρους όπως «συνάρτηση», για τους οποίους ένας διαισθητικός ορισμός συχνά θεωρείται αρκετός. Αλλά το **Q** και το **R**, τους δύο βασικούς πρωταγωνιστές αυτής της ιστορίας, απλώς τους ονομάσαμε και ποτέ δεν τους ορίσαμε. Κάτι που ποτέ δεν έχει οριστεί δεν μπορεί ποτέ να μελετηθεί σε βάθος, και οι «ιδιότητες» I1–I13 πρέπει να θεωρηθούν υποθέσεις, και όχι θεωρήματα, για τους αριθμούς. Όμως, σκόπιμα αποφύγαμε τον όρο «αξιώματα», και σε αυτό το κεφάλαιο θα διερευνήσουμε προσεκτικά τη λογική δομή των I1–I13.

Όπως το **Q** και το **R**, τα σύνολα **N** και **Z** έχουν και αυτά μείνει χωρίς αυστηρό ορισμό. Είναι αλήθεια ότι έγινε κάποια συζήτηση για τα τέσσερα αυτά σύνολα στο Κεφάλαιο 2, αλλά εκείνες οι αδρές περιγραφές απέχουν πολύ από το να συνιστούν ορισμό. Με το να πούμε, για παράδειγμα, ότι το **N** αποτελείται από τους 1, 2, 3, κτλ., απλώς αναφέρουμε κάποια στοιχεία του **N** χωρίς να τα χαρακτηρίζουμε (και το «κτλ.» είναι άχρηστο). Οι φυσικοί αριθμοί *γίνεται* να οριστούν, αλλά η διαδικασία είναι πολύπλοκη και δεν ταιριάζει αρκετά με το υπόλοιπο βιβλίο. Η Προτεινόμενη Βιβλιογραφία περιέχει αναφορές σε αυτό το πρόβλημα, καθώς και σε όλα τα άλλα βήματα που απαιτούνται αν κάποιος θέλει να οικοδομήσει τον Απειροστικό Λογισμό από τη θεμελιακή λογική του αφετηρία. Η συνέχιση του προγράμματος αυτού θα απαιτούσε τον ορισμό του **Z** με βάση το **N**, και τον ορισμό του **Q** με βάση το **Z**. Αυτό το πρόγραμμα καταλήγει σε ένα καλά ορισμένο σύνολο **Q**, κάποιες αυστηρά ορισμένες πράξεις $+$ και $\cdot$, και τις ιδιότητες I1–I12 ως *θεωρήματα*. Το τελευταίο βήμα αυτού του προγράμματος είναι η κατασκευή του **R**, με βάση το **Q**. Αυτή η τελευταία κατασκευή είναι που θα μας απασχολήσει. Υποθέτοντας ότι το **Q** έχει οριστεί, και ότι οι I1–I12 έχουν αποδειχθεί για το **Q**, θα *ορίσουμε* τελικά το **R** και θα *αποδείξουμε* όλες τις I1–I13 για το **R**.

Από την πρόθεσή μας να αποδείξουμε τις I1–I13 φαίνεται ότι θα πρέπει να ορίσουμε όχι μόνο τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά και την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών. Πράγματι, οι πραγματικοί αριθμοί παρουσιάζουν ενδιαφέρον μόνο ως σύνολο μαζί με αυτές τις πράξεις: είναι πολύ βασικό το πώς συμπεριφέρονται οι πραγματικοί αριθμοί σε σχέση με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό· το τι είναι στ' αλήθεια οι πραγματικοί αριθμοί είναι μάλλον άσχετο. Αυτός ο ισχυρισμός διατυπώνεται με έναν λογικό μαθηματικό τρόπο, αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια του «σώματος», που περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τα τρία σπουδαία συστήματα αριθμών αυτού του βιβλίου. Αυτή η εξαιρετικά σημαντική αφαίρεση των σύγχρονων μαθηματικών συγχωνεύει τις ιδιότητες I1–I9 που είναι κοινές στα **Q**, **R** και **C**. **Σώμα** είναι ένα σύνολο F (αντικειμένων οποιουδήποτε είδους), μαζί με δύο «διμελείς πράξεις» $+$ και $\cdot$ ορισμένες στο F (δηλαδή, δύο κανόνες που αντιστοιχίζουν σε δύο στοιχεία a και b του F, άλλα στοιχεία $a + b$ και $a \cdot b$ του F) οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ για κάθε a, b και c στο F.

(2) Υπάρχει κάποιο στοιχείο $\mathbf{0}$ στο F τέτοιο ώστε

  (i) $a + \mathbf{0} = a$ για κάθε a στο F,

  (ii) για κάθε a στο F, υπάρχει κάποιο στοιχείο b στο F τέτοιο ώστε $a + b = \mathbf{0}$.

(3) $a + b = b + a$ για κάθε a και b στο F.

(4) $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ για κάθε a, b και c στο F.

(5) Υπάρχει κάποιο στοιχείο $\mathbf{1}$ στο F τέτοιο ώστε $\mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ και

(i) $a \bullet \mathbf{1} = a$ για κάθε a στο F,

(ii) για κάθε a στο F με $a \neq \mathbf{0}$, υπάρχει κάποιο στοιχείο b στο F τέτοιο ώστε $a \bullet b = \mathbf{1}$.

(6) $a \bullet b = b \bullet a$ για κάθε a και b στο F.

(7) $a \bullet (b \mathbf{+} c) = a \bullet b \mathbf{+} a \bullet c$ για κάθε a, b και c στο F.

Τα γνωστά παραδείγματα σωμάτων είναι, όπως έχουμε ήδη υποδείξει, το $\mathbf{Q}$, το $\mathbf{R}$ και το $\mathbf{C}$ με $\mathbf{+}$ και $\bullet$ τις γνωστές πράξεις $+$ και $\cdot$. Είναι ίσως περιττό να εξηγήσουμε γιατί αυτά είναι σώματα, αλλά η εξήγηση είναι, έτσι και αλλιώς, πολύ σύντομη. Όταν με $\mathbf{+}$ και $\bullet$ συμβολίζουμε τα συνηθισμένα $+$ και $\cdot$, οι κανόνες (1), (3), (4), (6), (7) δεν είναι παρά αναδιατυπώσεις των I1, I4, I5, I8, I9· τα στοιχεία που παίζουν τον ρόλο των $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$ είναι οι αριθμοί 0 και 1 (για αυτό και επιλέξαμε τα σύμβολα $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$)· και ο αριθμός b στις (2), (5) είναι ο $-a$ ή ο a^{-1}, αντίστοιχα. (Για αυτόν το λόγο, σε τυχόν σώμα F συμβολίζουμε με $\mathbf{-}a$ το στοιχείο για το οποίο $a \mathbf{+} (\mathbf{-}a) = \mathbf{0}$, και με $a^{\mathbf{-1}}$ το στοιχείο για το οποίο $a \bullet a^{\mathbf{-1}} = \mathbf{1}$, για $a \neq \mathbf{0}$.)

Εκτός από τα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ και $\mathbf{C}$, υπάρχουν πολλά άλλα σώματα που μπορούμε να περιγράψουμε εύκολα. Ένα παράδειγμα είναι το σύνολο F_1 όλων των αριθμών $a + b\sqrt{2}$ με a, b στο $\mathbf{Q}$. Οι πράξεις $\mathbf{+}$ και $\bullet$ θα είναι, για μια ακόμα φορά, οι συνηθισμένες $+$ και $\cdot$ των πραγματικών αριθμών. Είναι απαραίτητο να σημειώσουμε ότι αυτές οι πράξεις παράγουν πράγματι καινούργια στοιχεία του F_1:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \quad \text{που ανήκει στο } F_1\cdot$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}, \quad \text{που ανήκει στο } F_1.$$

Οι συνθήκες (1), (3), (4), (6), (7) του σώματος είναι προφανείς για το F_1: αφού ισχύουν για όλους τους πραγματικούς αριθμούς, ασφαλώς θα ισχύουν για όλους τους πραγματικούς αριθμούς της μορφής $a + b\sqrt{2}$. Η συνθήκη (2) ισχύει γιατί ο αριθμός $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ ανήκει στο F_1 και, για $\alpha = a + b\sqrt{2}$ στο F_1 ο αριθμός $\beta = (-a) + (-b)\sqrt{2}$ από το F_1 ικανοποιεί την $\alpha + \beta = 0$. Με όμοιο τρόπο, ο $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ ανήκει στο F_1, άρα η (5i) ικανοποιείται. Η επαλήθευση της (5ii) είναι το μόνο σχετικά δύσκολο σημείο. Αν $a + b\sqrt{2} \neq 0$, τότε

$$a + b\sqrt{2} \cdot \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = 1.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο $1/(a + b\sqrt{2})$ ανήκει στο F_1. Αυτό ισχύει γιατί

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{(-b)}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

(Η διαίρεση με $a - b\sqrt{2}$ επιτρέπεται γιατί η σχέση $a - b\sqrt{2} = 0$ θα ίσχυε μονό για $a = b = 0$ (αφού ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος), το οποίο αποκλείεται από την υπόθεση $a + b\sqrt{2} \neq 0$.)

Το επόμενο παράδειγμα σώματος, το F_2, είναι πολύ απλούστερο από την εξής άποψη: περιέχει μόνο δύο στοιχεία που κάλλιστα μπορούμε να τα συμβολίσουμε με $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$. Οι πράξεις $\mathbf{+}$ και $\bullet$ περιγράφονται από τους πίνακες που ακολουθούν.

$\mathbf{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

$\bullet$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

Η επαλήθευση των συνθηκών (1)–(7) είναι άμεση, με έλεγχο της κάθε περίπτωσης. Για παράδειγμα, η συνθήκη (1) αποδεικνύεται αν ελέγξουμε τις 8 ισότητες που προκύπτουν για $a, b, c = \mathbf{0}$ ή $\mathbf{1}$. Παρατηρήστε ότι σε αυτό το σώμα $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Αυτή η ισότητα γράφεται επίσης $\mathbf{1} = -\mathbf{1}$.

Το τελευταίο παράδειγμα σώματος που θα δώσουμε είναι μάλλον ανόητο: το F_3 αποτελείται από όλα τα ζεύγη (a, a) με a στο $\mathbf{R}$, και οι $+$ και $\cdot$ ορίζονται από τις

$$(a, a) + (b, b) = (a + b, a + b),$$
$$(a, a) \cdot (b, b) = (a \cdot b, a \cdot b).$$

(Τα $+$ και $\cdot$ που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος είναι η συνηθισμένη πρόσθεση και πολλαπλασιασμός του $\mathbf{R}$). Η επαλήθευση του ότι το F_3 είναι σώμα αφήνεται σε σας ως απλή άσκηση.

Η λεπτομερειακή διερεύνηση των ιδιοτήτων των σωμάτων είναι ένα θέμα μελέτης από μόνο του, αλλά για τους σκοπούς μας τα σώματα παρέχουν ένα ιδανικό πλαίσιο για να συζητήσουμε σε αυτό τις ιδιότητες των αριθμών με τον πιο οικονομικό τρόπο. Για παράδειγμα, οι συνέπειες των I1–I9 που αποδείχθηκαν για «αριθμούς» στο Κεφάλαιο 1 ισχύουν σε κάθε σώμα· ειδικότερα, ισχύουν στα σώματα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ και $\mathbf{C}$.

Παρατηρήστε ότι μερικές ιδιότητες κοινές στα $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ και $\mathbf{C}$ δεν ισχύουν σε όλα τα σώματα. Για παράδειγμα, η ισότητα $\mathbf{1}+\mathbf{1} = \mathbf{0}$ είναι δυνατόν να ισχύει σε κάποια σώματα, και επομένως από την $a - b = b - a$ δεν έπεται αναγκαστικά ότι $a = b$. Για το σώμα $\mathbf{C}$ ο ισχυρισμός ότι $1 + 1 \neq 0$ προέκυψε από τη λεπτομερή περιγραφή του $\mathbf{C}$· για τα σώματα $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$, όμως, αυτός ο ισχυρισμός αποδείχθηκε από άλλες ιδιότητες που δεν αντιστοιχούν σε κάποιες από τις συνθήκες του σώματος. Υπάρχει μια σχετική έννοια που χρησιμοποιεί αυτές τις ιδιότητες. **Διατεταγμένο σώμα** είναι ένα σώμα F (με πράξεις $+$ και $\cdot$) μαζί με ένα υποσύνολο $\mathbf{P}$ του F (τα «θετικά» στοιχεία) με τις εξής ιδιότητες:

(8) Για κάθε a στο F, ισχύει μία και μόνο μία από τις:
  (i) $a = \mathbf{0}$,
  (ii) το a ανήκει στο $\mathbf{P}$,
  (iii) το $-a$ ανήκει στο $\mathbf{P}$.

(9) Αν τα a και b ανήκουν στο $\mathbf{P}$, τότε το $a + b$ ανήκει στο $\mathbf{P}$.

(10) Αν τα a και b ανήκουν στο $\mathbf{P}$, τότε το $a \cdot b$ ανήκει στο $\mathbf{P}$.

Όπως έχουμε δει, το σώμα $\mathbf{C}$ δεν μπορεί να γίνει διατεταγμένο. Το σώμα F_2, με δύο μόνο στοιχεία, ομοίως δεν μπορεί να γίνει διατεταγμένο σώμα: πραγματικά, αν εφαρμόσουμε τη συνθήκη (8) στο $\mathbf{1} = -\mathbf{1}$, έχουμε ότι το $\mathbf{1}$ πρέπει να ανήκει στο $\mathbf{P}$· τότε από την (9) το $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ θα ανήκει στο $\mathbf{P}$, το οποίο αντιφάσκει με την (8). Από την άλλη πλευρά, το σώμα F_1, που αποτελείται από όλους τους αριθμούς $a + b\sqrt{2}$ με a, b στο $\mathbf{Q}$, οπωσδήποτε μπορεί να γίνει διατεταγμένο σώμα: Θέτουμε ως $\mathbf{P}$ το σύνολο όλων των $a + b\sqrt{2}$ που είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (με τη συνηθισμένη έννοια). Το σώμα F_3 μετατρέπεται και αυτό σε διατεταγμένο σώμα: η περιγραφή του $\mathbf{P}$ αφήνεται σε σας.

Είναι φυσικό να εισαγάγουμε κάποιον συμβολισμό για ένα οποιοδήποτε διατεταγμένο σώμα, αντίστοιχο με αυτόν που χρησιμοποιείται για τα $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$: ορίζουμε

$$\begin{aligned} a > b \quad &\text{αν} \quad \text{το } a - b \text{ ανήκει στο } \mathbf{P}, \\ a < b \quad &\text{αν} \quad b > a, \\ a \leq b \quad &\text{αν} \quad a < b \text{ ή } a = b, \\ a \geq b \quad &\text{αν} \quad a > b \text{ ή } a = b. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να αναπαράγουμε, για οποιοδήποτε διατεταγμένο σώμα F, τους ορισμούς του Κεφαλαίου 7:

Ένα σύνολο A από στοιχεία του F λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει κάποιο x στο F τέτοιο ώστε $x \geq a$ για κάθε a στο A. Κάθε τέτοιο x λέγεται **άνω φράγμα** για το

A. Ένα στοιχείο x του F λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** για το A αν το x είναι άνω φράγμα για το A και $x \leq y$ για κάθε y στο F που είναι άνω φράγμα για το A.

Τέλος, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε κάτι ανάλογο με την ιδιότητα Ι13 για το $\mathbf{R}$· αυτή θα είναι και η τελευταία αφαίρεση αυτού του κεφαλαίου:

Πλήρες διατεταγμένο σώμα είναι ένα διατεταγμένο σώμα στο οποίο κάθε μη κενό άνω φραγμένο σύνολο έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

Η μελέτη των σωμάτων μοιάζει ίσως να μας έχει αποσπάσει από τον στόχο της κατασκευής των πραγματικών αριθμών. Όμως, τώρα είμαστε εφοδιασμένοι με τα κατάλληλα μέσα για να διαμορφώσουμε αυτόν τον στόχο. Υπάρχουν δύο προβλήματα τα οποία θα απαντηθούν στα δύο κεφάλαια που απομένουν:

1. Υπάρχει πλήρες διατεταγμένο σώμα;
2. Υπάρχει μόνο ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα;

Το σημείο εκκίνησής μας θα είναι το $\mathbf{Q}$, το οποίο υποθέτουμε διατεταγμένο σώμα, που περιέχει τα $\mathbf{N}$ και $\mathbf{Z}$ ως υποσύνολα. Σε ένα κρίσιμο σημείο θα χρειαστεί να υποθέσουμε και κάτι ακόμα για το $\mathbf{Q}$:

Έστω x ένα στοιχείο του $\mathbf{Q}$ με $x > 0$. Τότε για κάθε y στο $\mathbf{Q}$ υπάρχει κάποιο n στο $\mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $nx > y$.

Αυτή η υπόθεση, που ισχυρίζεται ότι οι ρητοί αριθμοί έχουν την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, δεν προκύπτει από τις ιδιότητες ενός διατεταγμένου σώματος (για το παράδειγμα που αποδεικνύει το παραπάνω, βλ. την αναφορά [14] της Προτεινόμενης Βιβλιογραφίας). Το σημαντικό σημείο για μας είναι όταν κατασκευάζεται αυστηρά το $\mathbf{Q}$, οι ιδιότητες Ι1–Ι12 να εμφανίζονται σαν θεωρήματα, και το ίδιο να συμβαίνει με αυτήν την πρόσθετη υπόθεση· αν αρχίζαμε από την αρχή, καμία υπόθεση για το $\mathbf{Q}$ δεν θα ήταν απαραίτητη.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Θέτουμε F το σύνολο $\{0, 1, 2\}$ και ορίζουμε τις πράξεις $+$ και $\cdot$ στο F με βάση τους πίνακες που ακολουθούν. (Ο κανόνας για να κατασκευάσουμε αυτούς τους πίνακες έχει ως εξής: προσθέστε ή πολλαπλασιάστε με τον συνηθισμένο τρόπο, και μετά αφαιρέστε το μεγαλύτερο δυνατό πολλαπλάσιο του 3. Έτσι $2 \cdot 2 = 4 = 3 + 1$, άρα $2 \cdot 2 = 1$.)

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Δείξτε ότι το F είναι σώμα, και αποδείξτε ότι δεν μπορεί να γίνει διατεταγμένο σώμα.

2. Έστω τώρα ότι προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα σώμα F με στοιχεία 0, 1, 2, 3 και πράξεις τις $+$ και $\cdot$ ορισμένες όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, προσθέτοντας ή πολλαπλασιάζοντας με τον συνηθισμένο τρόπο, και μετά αφαιρώντας το μεγαλύτερο δυνατό πολλαπλάσιο του 4. Δείξτε ότι το F *δεν* θα είναι σώμα.

3. Θέτουμε $F = \{0, 1, \alpha, \beta\}$ και ορίζουμε τις πράξεις $+$ και $\cdot$ στο F με βάση τους εξής πίνακες.

$+$	0	1	α	β
0	0	1	α	β
1	1	0	β	α
α	α	β	0	1
β	β	α	1	0

$\cdot$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	β	1
β	0	β	1	α

Δείξτε ότι το F είναι σώμα.

4. (α) Έστω F ένα σώμα στο οποίο $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Δείξτε ότι $a + a = \mathbf{0}$ για κάθε a (αυτό μπορούμε να το γράψουμε και ως $a = -a$).

(β) Έστω ότι $a + a = \mathbf{0}$ για κάποιο $a \neq \mathbf{0}$. Δείξτε ότι $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ (και επομένως $b + b = \mathbf{0}$ για κάθε b).

5. (α) Δείξτε ότι σε κάθε σώμα έχουμε

$$\underbrace{(\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1})}_{m \text{ φορές}} \cdot \underbrace{(\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1})}_{n \text{ φορές}} = \underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{mn \text{ φορές}}$$

για κάθε φυσικό αριθμό m και n.

(β) Έστω ότι στο σώμα F είναι

$$\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{m \text{ φορές}} = 0$$

για κάποιον φυσικό αριθμό m. Δείξτε ότι ο μικρότερος m με αυτήν την ιδιότητα πρέπει να είναι πρώτος αριθμός (αυτός ο πρώτος αριθμός λέγεται **χαρακτηριστική** του F).

6. Έστω F οποιοδήποτε σώμα με πεπερασμένο μόνο πλήθος στοιχείων.

(α) Δείξτε ότι πρέπει να υπάρχουν διακεκριμένοι φυσικοί αριθμοί m και n με

$$\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{m \text{ φορές}} = \underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ φορές}}.$$

(β) Συμπεράνετε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k με

$$\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{k \text{ φορές}} = \mathbf{0}.$$

7. Έστω a, b, c και d στοιχεία ενός σώματος F με $a \cdot d - b \cdot c \neq \mathbf{0}$. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε α και β στο F οι εξισώσεις

$$a \cdot x + b \cdot y = \alpha,$$
$$c \cdot x + d \cdot y = \beta,$$

έχουν λύση ως προς x και y στο F.

8. Έστω a ένα στοιχείο ενός σώματος F. «Τετραγωνική ρίζα» του a είναι ένα στοιχείο b του F για το οποίο $b^2 = b \cdot b = a$.

(α) Πόσες τετραγωνικές ρίζες έχει το $\mathbf{0}$;

(β) Ας υποθέσουμε ότι $a \neq \mathbf{0}$. Δείξτε ότι αν το a έχει τετραγωνική ρίζα, τότε έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, εκτός αν $\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, οπότε το a έχει μόνο μία.

9. (α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + b \cdot x + c = \mathbf{0}$, όπου τα b και c είναι στοιχεία ενός σώματος F. Έστω ότι το $b^2 - \mathbf{4} \cdot c$ έχει μια τετραγωνική ρίζα r στο F. Δείξτε ότι το $(-b + r) / \mathbf{2}$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης. (Εδώ $\mathbf{2} = \mathbf{1} + \mathbf{1}$ και $\mathbf{4} = \mathbf{2} + \mathbf{2}$.)

(β) Στο σώμα F_2 του κειμένου, και τα δύο στοιχεία προφανώς έχουν τετραγωνική ρίζα. Από την άλλη πλευρά, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι κανένα από τα δύο δεν ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 + x + \mathbf{1} = \mathbf{0}$. Άρα κάποια λεπτομέρεια στο μέρος (α) πρέπει να είναι λανθασμένη. Ποια είναι;

10. Έστω F ένα σώμα και a ένα στοιχείο του F που *δεν* έχει τετραγωνική ρίζα. Αυτό το πρόβλημα μας δείχνει πώς να κατασκευάσουμε ένα μεγαλύτερο σώμα F', που περιέχει το F, στο οποίο το a έχει τετραγωνική ρίζα. (Αυτή η κατασκευή έχει γίνει ήδη σε μια ειδική περίπτωση, συγκεκριμένα, $F = \mathbf{R}$ και $a = -1$· αυτή η περίπτωση θα μπορούσε να σας καθοδηγήσει σε αυτό το παράδειγμα.)

Θέτουμε F' το σύνολο όλων των ζευγών (x, y) με x και y στο F. Αν οι πράξεις στο F είναι $+$ και $\cdot$, ορίζουμε στο F' τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ ως εξής:

$$(x, y) \oplus (z, w) = (x + z, y + w),$$
$$(x, y) \odot (z, w) = (x \cdot z + a \cdot y \cdot w, y \cdot z + x \cdot w).$$

(α) Αποδείξτε ότι το F', με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$, είναι σώμα.

(β) Αποδείξτε ότι

$$(x, \mathbf{0}) \oplus (y, \mathbf{0}) = (x + y, \mathbf{0}),$$
$$(x, \mathbf{0}) \odot (y, \mathbf{0}) = (x \cdot y, \mathbf{0}),$$

οπότε μπορούμε να συμφωνήσουμε πως το x αποτελεί συντομογραφία του $(x, \mathbf{0})$.

(γ) Βρείτε μια τετραγωνική ρίζα του $a = (a, \mathbf{0})$ στο F'.

11. Έστω F το σύνολο όλων των τετράδων (w, x, y, z) από πραγματικούς αριθμούς. Ορίζουμε τις $+$ και $\cdot$ μέσω των

$$(s, t, u, v) + (w, x, y, z) = (s + w, t + x, u + y, v + z),$$
$$(s, t, u, v) \cdot (w, x, y, z) = (sw - tx - uy - vz, sx + tw + uz - vy,$$
$$sy + uw + vx - tz, sz + vw + ty - ux).$$

(α) Δείξτε ότι το F ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες ενός σώματος, εκτός από την (6). Σε μερικά σημεία οι πράξεις θα είναι επίπονες, το μόνο όμως πράγμα που απαιτεί κάποια σκέψη είναι η ύπαρξη πολλαπλασιαστικών αντιστρόφων.

(β) Έχει καθιερωθεί να συμβολίζουμε

το $(0, 1, 0, 0)$ με i,
το $(0, 0, 1, 0)$ με j,
το $(0, 0, 0, 1)$ με k.

Βρείτε και τα 9 γινόμενα των ζευγών που σχηματίζουν τα i, j και k. Τα αποτελέσματα θα δείξουν ειδικότερα ότι η συνθήκη (6) σαφώς δεν ισχύει. Αυτό το «λοξό σώμα» F λέγεται **σώμα κουαρτενίων** (quaternions) ή **σώμα τετρανίων**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 29 ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η ποσότητα της επίπονης εργασίας που αναγκαστικά περιέχει αυτό το κεφάλαιο αντισταθμίζεται από μια πραγματικά πρώτης τάξης ιδέα. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα θα πρέπει να δώσουμε μια σαφή και λεπτομερή περιγραφή ενός τέτοιου σώματος· η επαλήθευση των συνθηκών (1)–(10) του διατεταγμένου σώματος θα είναι κοπιαστική αλλά άμεση. Όμως η περιγραφή του ίδιου του σώματος, των στοιχείων που περιέχει, είναι στ' αλήθεια ευφυής.

Στη διάθεσή μας βρίσκεται το σύνολο των ρητών αριθμών, και από αυτό το ακατέργαστο υλικό πρέπει να παραγάγουμε το σώμα που τελικά θα ονομάσουμε πραγματικούς αριθμούς. Για τον αμύητο αυτό πρέπει να φαίνεται τελείως απίθανο —αν είναι γνωστοί μόνο οι ρητοί αριθμοί, από πού θα προέλθουν οι υπόλοιποι; Μέχρι τώρα έχουμε αποκτήσει αρκετή εμπειρία ώστε να καταλαβαίνουμε ότι η κατάσταση μπορεί και να μην είναι τόσο απελπιστική όσο υποδεικνύει αυτή η απερίσκεπτη θεώρησή της. Η στρατηγική που θα υιοθετήσουμε στην κατασκευή μας έχει ήδη χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για να οριστούν οι συναρτήσεις και οι μιγαδικοί αριθμοί. Αντί να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την «αληθινή φύση» αυτών των εννοιών, δώσαμε έναν ορισμό που τις περιέγραφε αρκετά, ώστε να προσδιορίζει πλήρως τις μαθηματικές τους ιδιότητες.

Ένα παρόμοιο σχέδιο για τον ορισμό των πραγματικών αριθμών απαιτεί μια περιγραφή των πραγματικών αριθμών με βάση τους ρητούς αριθμούς. Η παρατήρηση ότι κάθε πραγματικός αριθμός θα έπρεπε να ορίζεται πλήρως από το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροι από αυτόν υποδεικνύει μια εκπληκτικά απλή και πολύ ελκυστική δυνατότητα: ένας πραγματικός αριθμός θα μπορούσε να (και τελικά όντως θα) περιγραφεί ως ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς. Για να γίνει αυτό το σχέδιο εφαρμόσιμο, όμως, πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να περιγράψουμε «το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροι από έναν πραγματικό αριθμό» χωρίς να αναφερθούμε στους πραγματικούς αριθμούς, που για την ώρα δεν είναι τίποτα παραπάνω από πλάσματα της μαθηματικής μας φαντασίας.

Αν το A πρόκειται να παίξει τον ρόλο του συνόλου των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροι από τον πραγματικό αριθμό α, τότε το A θα έπρεπε να έχει την εξής ιδιότητα: Αν το x ανήκει στο A και y είναι ένας ρητός αριθμός τέτοιος ώστε $y < x$, τότε το y ανήκει στο A. Εκτός από αυτήν την ιδιότητα, το σύνολο A θα έπρεπε να έχει και μερικές άλλες. Αφού πρέπει να υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός $x < \alpha$, το σύνολο A δεν πρέπει να είναι κενό. Για τον ίδιο λόγο, αφού πρέπει να υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός $x > \alpha$, το σύνολο A δεν πρέπει να είναι ολόκληρο το $\mathbf{Q}$. Τέλος, αν $x < \alpha$, τότε πρέπει να υπάρχει ένας άλλος ρητός αριθμός y με $x < y < \alpha$, άρα το A δεν πρέπει να περιέχει μέγιστο στοιχείο.

Αν θεωρήσουμε προσωρινά γνωστούς τους πραγματικούς αριθμούς, τότε δεν είναι δύσκολο να ελέγξετε (Πρόβλημα 8-17) ότι ένα σύνολο A με αυτές τις ιδιότητες είναι πραγματικά το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μικρότεροι από κάποιον πραγματικό αριθμό α. Δεδομένου ότι οι πραγματικοί αριθμοί προς το παρόν είναι φυλακισμένοι, η απόδειξή σας, αν κάνετε κάποια, πρέπει να θεωρηθεί απλώς ως ανεπίσημο σχόλιο πάνω σε αυτήν τη συζήτηση. Θα χρησιμεύει, πάντως, για να σας πείσει ότι δεν ξεχάσαμε κάποια κρίσιμη ιδιότητα του συνόλου A. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να διστάζουμε και άλλο.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πραγματικός αριθμός είναι ένα σύνολο α από ρητούς αριθμούς, με τις εξής τέσσερις ιδιότητες:

(1) Αν ο ρητός x ανήκει στο α και y είναι ένας ρητός αριθμός με $y < x$, τότε και ο y ανήκει α.

(2) $\alpha \neq \emptyset$.

(3) $\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) Δεν υπάρχει μέγιστο στοιχείο στο α. Με άλλα λόγια, αν ο ρητός x ανήκει στο α, τότε υπάρχει κάποιο ρητό y στο α με $y > x$.

Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbf{R}$.

Για να σας υπενθυμίσουμε τη φιλοσοφία που κρύβεται πίσω από τον ορισμό, ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα πραγματικού αριθμού:

$$\alpha = \{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x < 0 \text{ ή } x^2 < 2\}.$$

Είναι, πιστεύουμε, φανερό ότι ο α είναι ο πραγματικός αριθμός που τελικά θα ονομάσουμε $\sqrt{2}$, αλλά δεν είναι τελείως τετριμμένη άσκηση να δείξετε ότι ο α είναι όντως πραγματικός αριθμός. Όλη η ουσία σε μια τέτοια άσκηση είναι να τη λύσετε χρησιμοποιώντας μόνο στοιχεία γνωστά για το $\mathbf{Q}$· το δύσκολο τμήμα θα είναι να ελέγξετε τη συνθήκη (4), αλλά αυτό έχει ήδη εμφανιστεί ως πρόβλημα σε προηγούμενο κεφάλαιο (αφήνουμε σε σας να βρείτε ποιο ακριβώς). Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (4), αν και αρκετά προβληματική εδώ, είναι πραγματικά ουσιαστική αν θέλουμε να αποφύγουμε ασάφειες· χωρίς αυτήν και το

$$\{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x < 1\}$$

αλλά και το

$$\{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x \leq 1\}$$

θα ήταν υποψήφιοι για τον τίτλο «ο πραγματικός αριθμός 1».

Η μετάβαση από το A στο α του ορισμού μας παρουσιάζει ενδιαφέρον τόσο από εννοιολογική άποψη όσο και από άποψη συμβολισμού. Από δω και πέρα, πραγματικός αριθμός *είναι*, εξ ορισμού, ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς. Αυτό σημαίνει, ειδικότερα, ότι ένας ρητός αριθμός (ένα στοιχείο του $\mathbf{Q}$) *δεν* είναι πραγματικός αριθμός· αντί για αυτό, κάθε ρητός αριθμός x έχει ένα φυσιολογικό αντίστοιχο που είναι πραγματικός αριθμός, το $\{y \text{ στο } \mathbf{Q} : y < x\}$. Αφού ολοκληρώσουμε την κατασκευή των πραγματικών αριθμών, θα μπορούμε να απαλλαγούμε από τα στοιχεία του $\mathbf{Q}$ και να συμφωνήσουμε ότι στο εξής το $\mathbf{Q}$ θα συμβολίζει αυτά τα ειδικά σύνολα. Για την ώρα, όμως, θα χρειαστεί να εργαστούμε την ίδια στιγμή με ρητούς αριθμούς, με πραγματικούς αριθμούς (σύνολα ρητών αριθμών) καθώς και με σύνολα πραγματικών αριθμών (σύνολα συνόλων ρητών αριθμών). Κάποια σύγχυση είναι ίσως αναπόφευκτη, αλλά μια συμφωνία πάνω στον συμβολισμό θα την περιορίσει στο ελάχιστο. Οι ρητοί αριθμοί θα συμβολίζονται με μικρά λατινικά γράμματα (x, y, z, a, b, c) και οι πραγματικοί αριθμοί με μικρά ελληνικά γράμματα (α, β, γ). Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία λατινικά γράμματα (A, B, C) για να συμβολίζουμε σύνολα πραγματικών αριθμών.

Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου αφιερώνεται στον ορισμό των $+$, $\cdot$ και $\mathbf{P}$ για το $\mathbf{R}$, και στην απόδειξη ότι, με αυτήν τη δομή, το $\mathbf{R}$ είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.

Για την ακρίβεια, θα αρχίσουμε από τον ορισμό του $\mathbf{P}$. Ακόμα και εδώ θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη πορεία. Πρώτα ορίζουμε την $\alpha < \beta$· αργότερα, όταν οι $+$, $\cdot$ και $\mathbf{0}$ θα είναι στη διάθεσή μας, θα ορίσουμε το $\mathbf{P}$ ως το σύνολο όλων των α με $\mathbf{0} < \alpha$, και θα αποδείξουμε τις ιδιότητες που πρέπει να πληροί το $\mathbf{P}$. Ο λόγος για τον οποίο ξεκινάμε από τον ορισμό της $<$ είναι ότι η έννοια αυτή είναι πολύ απλή στα πλαίσια που θα κινηθούμε.

Ορισμός. Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η $\alpha < \beta$ σημαίνει ότι το α περιέχεται στο β (δηλαδή κάθε στοιχείο του α είναι και στοιχείο του β), αλλά $\alpha \neq \beta$.

Μια επανάληψη των ορισμών των $\leq$, $>$, $\geq$ θα ήταν πολύ κοπιαστική, αλλά είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι η $\leq$ μπορεί τώρα να εκφραστεί πιο απλά από την $<$· αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha \leq \beta$ αν και μόνο αν το α είναι υποσύνολο του β.

Αν A είναι φραγμένο σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, είναι σχεδόν προφανές ότι το A θα έπρεπε να έχει ένα ελάχιστο φράγμα. Κάθε α στο A είναι ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς· αν αυτοί οι ρητοί αριθμοί τοποθετηθούν όλοι σε ένα σύνολο β, τότε το β είναι ενδεχομένως το $\sup A$. Στην απόδειξη του επομένου θεωρήματος ελέγχουμε όλες τις μικρολεπτομέρειες που δεν έχουν αναφερθεί, οι οποίες συγκλίνουν στον ισχυρισμό ότι το β *είναι* πραγματικός αριθμός. (Δεν θα μπούμε στον κόπο να αριθμούμε τα θεωρήματα σε αυτό το κεφάλαιο, αφού όλα συντίθενται σε ένα μεγάλο Θεώρημα: Υπάρχει ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.)

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν A είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, $A \neq \emptyset$ και το A είναι άνω φραγμένο, τότε το A έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θέτουμε $\beta = \{x : x \text{ ανήκει σε κάποιο } \alpha \text{ στο } A\}$. Τότε το β είναι σίγουρα ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς· η απόδειξη του ότι ο β είναι πραγματικός αριθμός απαιτεί να ελέγξουμε τέσσερα πράγματα.

(1) Έστω ότι το x ανήκει στο β και $y < x$. Η πρώτη συνθήκη σημαίνει ότι το x ανήκει στο α για κάποιο α στο A. Αφού το α είναι πραγματικός αριθμός, από την υπόθεση $y < x$ έπεται ότι το y ανήκει στο α. Επομένως είναι σίγουρα σωστό ότι το y ανήκει στο β.

(2) Αφού $A \neq \emptyset$ υπάρχει κάποιο α στο A. Αφού το α είναι πραγματικός αριθμός υπάρχει κάποιο x στο α. Αυτό σημαίνει ότι το x ανήκει στο β, άρα $\beta \neq \emptyset$.

(3) Αφού το A είναι άνω φραγμένο, υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός γ τέτοιος ώστε $\alpha < \gamma$ για κάθε α στο A. Αφού το γ είναι πραγματικός αριθμός, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός x που δεν ανήκει στο γ. Τώρα η $\alpha < \gamma$ σημαίνει ότι το α περιέχεται στο γ, επομένως ισχύει και ότι το x δεν ανήκει στο α για κάθε α στο A. Αυτό σημαίνει ότι το x δεν ανήκει στο β· άρα $\beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Έστω ότι το x ανήκει στο β. Τότε το x ανήκει στο α για κάποιο α στο A. Αφού το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός y με $x < y$ και y στο α. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το y ανήκει στο β· άρα το β δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Αυτές οι τέσσερις παρατηρήσεις αποδεικνύουν ότι ο β είναι πραγματικός αριθμός. Η απόδειξη του ότι ο β είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A είναι ευκολότερη. Αν το α ανήκει στο A, τότε είναι φανερό ότι το α περιέχεται στο β· αυτό σημαίνει ότι $\alpha \leq \beta$, άρα το β είναι άνω φράγμα του A. Από την άλλη πλευρά, αν γ είναι ένα άνω φράγμα για το A, τότε $\alpha \leq \gamma$ για κάθε α στο A· αυτό σημαίνει ότι το α περιέχεται στο γ, για κάθε α στο A, και αυτό μας εξασφαλίζει ότι το β περιέχεται στο γ. *Αυτό*, με τη σειρά του, σημαίνει ότι $\beta \leq \gamma$· επομένως το β είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. ∎

Ο ορισμός της $+$ είναι και προφανής και εύκολος, πρέπει όμως να δώσουμε μια απόδειξη του ότι αυτός ο «προφανής» ορισμός έχει κάποια έννοια.

Ορισμός. Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\alpha + \beta = \{x : x = y + z \text{ για κάποιο } y \text{ στο } \alpha \text{ και κάποιο } z \text{ στο } \beta\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε το $\alpha + \beta$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Για μια ακόμα φορά πρέπει να επαληθεύσουμε τέσσερα πράγματα.

(1) Έστω ότι $w < x$ για κάποιο x στο $\alpha + \beta$. Τότε $x = y + z$ για κάποιο y στο α και κάποιο z στο β, που σημαίνει ότι $w < y + z$, και επομένως, $w - y < z$. Αυτό δείχνει ότι το $w - y$ ανήκει στο β (αφού το z ανήκει στο β και το β είναι πραγματικός αριθμός). Αφού $w = y + (w - y)$, έπεται ότι το w ανήκει στο $\alpha + \beta$.

(2) Είναι φανερό ότι $\alpha + \beta \neq \emptyset$, αφού $\alpha \neq \emptyset$ και $\beta \neq \emptyset$.

(3) Αφού $\alpha \neq \mathbf{Q}$ και $\beta \neq \mathbf{Q}$, υπάρχουν ρητοί αριθμοί a και b με a όχι στο α και b όχι στο β. Κάθε x στο α ικανοποιεί την $x < a$ (γιατί αν $a < x$, από την ιδιότητα (1) ενός πραγματικού αριθμού θα ήταν και το a στο α)· ομοίως κάθε y στο β ικανοποιεί την $y < b$. Άρα $x + y < a + b$ για κάθε x στο α και y στο β. Αυτό δείχνει ότι το $a + b$ δεν ανήκει στο $\alpha + \beta$, άρα $\alpha + \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Αν το x ανήκει στο $\alpha + \beta$, τότε $x = y + z$ με y στο α και z στο β. Υπάρχουν y' στο α και z' στο β με $y < y'$ και $z < z'$· τότε $x < y' + z'$ και το $y' + z'$ ανήκει στο $\alpha + \beta$. Άρα το $\alpha + \beta$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. ∎

Θα έχετε ήδη αντιληφθεί πόσο επίπονη θα αποδειχθεί όλη αυτή η διαδικασία. Κάθε φορά που θα αναφέρουμε έναν καινούργιο πραγματικό αριθμό, θα πρέπει να αποδεικνύουμε ότι *είναι* πραγματικός αριθμός· αυτό απαιτεί έλεγχο τεσσάρων συνθηκών, που ακόμα και αν είναι τετριμμένες χρειάζονται κάποια σκέψη. Δεν υπάρχει καμία θεραπεία για αυτό (εκτός από το ότι θα κουραστείτε λιγότερο αν ελέγξετε μόνοι σας τις τέσσερις συνθήκες). Ευτυχώς, όμως, θα παρουσιάζονται εδώ και εκεί κάποια ενδιαφέροντα σημεία, και μερικά από τα θεωρήματά μας θα είναι εύκολα. Συγκεκριμένα, δύο ιδιότητες της $+$ δεν παρουσιάζουν καμία δυσκολία.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού $(x + y) + z = x + (y + z)$ για κάθε ρητό αριθμό x, y και z, κάθε στοιχείο του $(\alpha + \beta) + \gamma$ είναι και στοιχείο του $\alpha + (\beta + \gamma)$, και αντιστρόφως. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφήνεται σε σας (ακόμα ευκολότερη). ∎

Για να αποδείξουμε τις άλλες ιδιότητες της $+$ ορίζουμε πρώτα το $\mathbf{0}$.

Ορισμός. $\mathbf{0} = \{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x < 0\}$.

Είναι, δόξα τω Θεώ, προφανές ότι το $\mathbf{0}$ είναι πραγματικός αριθμός, και το επόμενο θεώρημα είναι επίσης απλό.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν το x ανήκει στο α και το y ανήκει στο $\mathbf{0}$, τότε $y < 0$, άρα $x + y < x$. Αυτό σημαίνει ότι το $x + y$ ανήκει στο α. Άρα κάθε στοιχείο του $\alpha + \mathbf{0}$ είναι και στοιχείο του α.

Από την άλλη πλευρά, αν το x ανήκει στο α, τότε υπάρχει ρητός αριθμός y στο α τέτοιος ώστε $y > x$. Αφού $x = y + (x - y)$, όπου y ανήκει στο α, και $x - y < 0$ (οπότε το $x - y$ ανήκει στο $\mathbf{0}$), αυτό αποδεικνύει ότι το x ανήκει στο $\alpha + \mathbf{0}$. Άρα κάθε στοιχείο του α είναι και στοιχείο του $\alpha + \mathbf{0}$. ∎

Ο λογικός υποψήφιος για τον ρόλο του $-\alpha$ θα ήταν ίσως το σύνολο

$$\{x \text{ στο } \mathbf{Q} : \text{ το } -x \text{ δεν ανήκει στο } \alpha\}$$

(γιατί αν $-x$ δεν ανήκει στο α, διαισθητικά θα είναι $-x > \alpha$, άρα $x < -\alpha$). Αλλά σε μερικές περιπτώσεις αυτό το σύνολο μπορεί να μην είναι καν πραγματικός αριθμός. Αν και ένας πραγματικός αριθμός α δεν έχει μέγιστο στοιχείο, το σύνολο

$$\mathbf{Q} - \alpha = \{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x \text{ δεν ανήκει στο } \alpha\}$$

μπορεί να έχει ένα *ελάχιστο* στοιχείο x_0. Όταν ο α είναι ένας πραγματικός αριθμός αυτού του είδους, το σύνολο $\{x : -x \text{ δεν ανήκει στο } \alpha\}$ θα έχει ένα μέγιστο στοιχείο $-x_0$. Είναι επομένως αναγκαίο να τροποποιήσουμε κάπως τον ορισμό του $-\alpha$, ο οποίος έρχεται εφοδιασμένος με ένα θεώρημα.

Ορισμός. Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός, τότε

$$-\alpha = \{\, x \text{ στο } \mathbf{Q} : \text{το } -x \text{ δεν ανήκει στο } \alpha, \text{ αλλά το } -x \text{ δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του } \mathbf{Q} - \alpha \,\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός, τότε ο $-\alpha$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(1) Έστω ότι το x ανήκει στο $-\alpha$ και $y < x$. Τότε $-y > -x$. Αφού το $-x$ δεν ανήκει στο α, ισχύει επίσης ότι το $-y$ δεν ανήκει στο α. Επιπλέον, είναι προφανές ότι το $-y$ δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q}-\alpha$, αφού το $-x$ είναι μικρότερο στοιχείο. Αυτό αποδεικνύει ότι το y ανήκει στο $-\alpha$.

(2) Αφού $\alpha \neq \mathbf{Q}$, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός y που δεν ανήκει στο α. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο y δεν είναι ο μικρότερος ρητός αριθμός στο $\mathbf{Q} - \alpha$ (γιατί το y μπορούμε πάντα να το αντικαταστήσουμε με οποιοδήποτε $y' > y$). Τότε ο $-y$ ανήκει στο $-\alpha$. Άρα $-\alpha \neq \emptyset$.

(3) Αφού $\alpha \neq \emptyset$, υπάρχει κάποιο x στο α. Τότε το $-x$ δεν μπορεί να ανήκει στο $-\alpha$, άρα $-\alpha \neq \mathbf{Q}$.

(4) Αν το x ανήκει στο $-\alpha$, τότε το $-x$ δεν ανήκει στο α, και υπάρχει ένας ρητός αριθμός $y < -x$ ο οποίος επίσης δεν ανήκει στο α. Έστω z ένας ρητός αριθμός με $y < z < -x$. Τότε ούτε το z ανήκει στο α, και το z προφανώς δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$. Άρα το $-z$ ανήκει στο $-\alpha$. Αφού $-z > x$, αυτό δείχνει ότι το $-\alpha$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. ∎

Η απόδειξη της $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$ δεν είναι τελείως άμεση. Οι δυσκολίες δεν οφείλονται, όπως ίσως θα υποθέσατε, στην πολυπλοκότητα του ορισμού του $-\alpha$. Το πρόβλημα είναι ότι σε αυτό το σημείο θα χρειαστούμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbf{Q}$ που διατυπώθηκε στη σελίδα 528, και η οποία δεν έπεται από τις I1–I12. Αυτή η ιδιότητα είναι απαραίτητη για να αποδείξουμε το λήμμα που ακολουθεί, το οποίο παίζει πολύ βασικό ρόλο στο επόμενο θεώρημα.

ΛΗΜΜΑ Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, και z ένας θετικός ρητός αριθμός. Τότε υπάρχει (Σχήμα 1) ρητός αριθμος x στο α, και y που δεν ανήκει στο α, τέτοιοι ώστε $y - x = z$. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$.

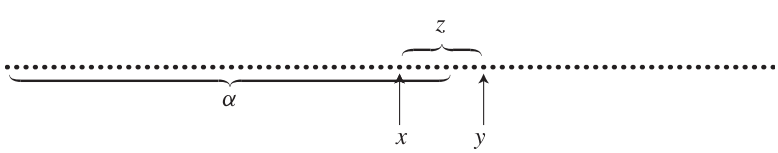
ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι το z ανήκει στο α. Αν οι αριθμοί

$$z, 2z, 3z, \ldots$$

ήταν *όλοι* στο α, τότε *κάθε* ρητός αριθμός θα ήταν στο α, αφού κάθε ρητός αριθμός w ικανοποιεί την $w < nz$ για κάποιο n, από την πρόσθετη υπόθεση της σελίδας 528. Αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι ο α είναι πραγματικός αριθμός, άρα υπάρχει κάποιο k τέτοιο ώστε το $x = kz$ να ανήκει στο α και το $y = (k+1)z$ να μην ανήκει στο α. Προφανώς $y - x = z$.

Επίσης, αν το y συμβαίνει να είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$, θέτουμε $x' > x$ ένα στοιχείο του α, και αντικαθιστούμε το x με το x' και το y με το $y + (x' - x)$.

Αν το z δεν ανήκει στο α, υπάρχει μια παρόμοια απόδειξη, που βασίζεται στο γεγονός ότι οι αριθμοί $(-n)z$ δεν μπορούν όλοι να μην είναι στο α. ∎



ΣΧΗΜΑ 1

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι το x ανήκει στο α και το y στο $-\alpha$. Τότε το $-y$ δεν ανήκει στο α, άρα $-y > x$. Επομένως $x + y < 0$, άρα το $x + y$ ανήκει στο $\mathbf{0}$. Έτσι, κάθε στοιχείο του $\alpha + (-\alpha)$ ανήκει στο $\mathbf{0}$.

Η αντίθετη κατεύθυνση είναι λίγο πιο δύσκολη. Αν το z ανήκει στο $\mathbf{0}$, τότε $-z > 0$. Σύμφωνα με το λήμμα, υπάρχει κάποιο x στο α και κάποιο y όχι στο α, με το y να μην είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$, τέτοια ώστε $y - x = -z$. Αυτή η ισότητα γράφεται και $x + (-y) = z$. Αφού το x ανήκει στο α, και το $-y$ στο $-\alpha$, αυτό αποδεικνύει ότι το z ανήκει στο $\alpha + (-\alpha)$. ∎

Πριν περάσουμε στον πολλαπλασιασμό, ορίζουμε τα «θετικά στοιχεία» και αποδεικνύουμε μια βασική ιδιότητα:

Ορισμός. $\mathbf{P} = \{\alpha \text{ στο } \mathbf{R} : \alpha > \mathbf{0}\}$.

Παρατηρήστε ότι το $\alpha + \beta$ σαφώς ανήκει στο $\mathbf{P}$ αν ισχύει το ίδιο για τα α και β.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει μία και μόνο μία από τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) $\alpha = \mathbf{0}$,

(ii) το α ανήκει στο $\mathbf{P}$,

(iii) το $-\alpha$ ανήκει στο $\mathbf{P}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αν το α περιέχει θετικό ρητό αριθμό, τότε το α σίγουρα θα περιέχει όλους τους αρνητικούς ρητούς αριθμούς, άρα το α θα περιέχει το $\mathbf{0}$ και $\alpha \neq \mathbf{0}$, δηλαδή το α ανήκει στο $\mathbf{P}$. Αν το α δεν περιέχει θετικούς ρητούς αριθμούς, τότε υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

(1) το α να περιέχει όλους τους αρνητικούς ρητούς αριθμούς· τότε $\alpha = \mathbf{0}$.

(2) να υπάρχει κάποιος αρνητικός ρητός αριθμός x που να μην ανήκει στο α· μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο x δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$ (γιατί θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το x με το $x/2 > x$)· τότε το $-\alpha$ περιέχει τον θετικό ρητό αριθμό $-x$, άρα, όπως έχουμε ήδη αποδείξει, το $-\alpha$ ανήκει στο $\mathbf{P}$.

Αυτό δείχνει ότι *μία τουλάχιστον* από τις (i)–(iii) πρέπει να ισχύει. Αν $\alpha = \mathbf{0}$, είναι φανερό ότι δεν μπορεί να ισχύει κάποια από τις (ii), (iii). Επίσης, είναι αδύνατο να ισχύουν ταυτόχρονα οι $\alpha > \mathbf{0}$ και $-\alpha > \mathbf{0}$, γιατί τότε θα είχαμε και $\mathbf{0} = \alpha + (-\alpha) > \mathbf{0}$. ∎

Θυμηθείτε ότι η $\alpha > \beta$ ορίστηκε να σημαίνει ότι το α περιέχει το β, αλλά να μην είναι ίσο με το β. Αυτός ο ορισμός ήταν ό,τι έπρεπε για να αποδείξουμε την πληρότητα, αλλά τώρα θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμος με τον ορισμό που θα είχαμε δώσει με βάση το $\mathbf{P}$. Δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι η $\alpha - \beta > \mathbf{0}$ είναι ισοδύναμη με την $\alpha > \beta$. Αυτό είναι προφανές μετά από το θεώρημα που ακολουθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha > \beta$, τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από την υπόθεση $\alpha > \beta$ έπεται ότι το β περιέχεται στο α· από τον ορισμό του $+$ προκύπτει αμέσως ότι το $\beta + \gamma$ περιέχεται στο $\alpha + \gamma$. Αυτό δείχνει ότι $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$. Μπορούμε εύκολα να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να ισχύει ισότητα, γιατί αν

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma,$$

τότε

$$\alpha = (\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta,$$

η οποία δεν ισχύει. Άρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. ∎

Ο πολλαπλασιασμός έχει και αυτός τη δυσκολία του. Αν $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε το $\alpha \cdot \beta$ ως εξής.

Ορισμός. Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, τότε

$$\alpha \cdot \beta = \{z : z \leq 0 \text{ ή } z = x \cdot y \text{ για κάποιο } x \text{ στο } \alpha \text{ και } y \text{ στο } \beta \text{ με } x, y > 0\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, τότε το $\alpha \cdot \beta$ είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Όπως πάντα, πρέπει να ελέγξουμε τέσσερις συνθήκες.

(1) Έστω ότι $w < z$, όπου το z ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$. Αν $w \leq 0$, τότε το w αυτομάτως ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$. Έστω ότι $w > 0$. Τότε $z > 0$, άρα $z = x \cdot y$ για κάποιο θετικό x στο α και κάποιο θετικό y στο β. Τώρα

$$w = \frac{wz}{z} = \frac{wxy}{z} = \left(\frac{w}{z} \cdot x\right) \cdot y.$$

Αφού $0 < w < z$, έχουμε $w/z < 1$, άρα το $(w/z) \cdot x$ ανήκει στο α. Επομένως το w ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$.

(2) Προφανώς $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$.

(3) Αν το x δεν ανήκει στο α, και το y δεν ανήκει στο β, τότε $x > x'$ για κάθε x' στο α, και $y > y'$ για κάθε y' στο β. Επομένως $xy > x'y'$ για όλα τα θετικά x' και y'. Άρα το xy δεν ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$· δηλαδή $\alpha \cdot \beta \neq \mathbf{Q}$.

(4) Έστω ότι το w ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$, και $w \leq 0$. Υπάρχει κάποιο x στο α με $x > 0$ και κάποιο y στο β με $y > 0$. Τότε το $z = xy$ είναι στο $\alpha \cdot \beta$ και $z > w$. Έστω τώρα ότι $w > 0$. Τότε $w = xy$ για κάποιο θετικό x στο α και κάποιο θετικό y στο β. Επίσης, το α περιέχει κάποιο $x' > x$· αν $z = x'y$, τότε $z > xy = w$, και το z ανήκει στο $\alpha \cdot \beta$. Δηλαδή το $\alpha \cdot \beta$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. ∎

Παρατηρήστε ότι το $\alpha \cdot \beta$ προφανώς ανήκει στο $\mathbf{P}$ αν το ίδιο ισχύει για τα α και β. Αυτό ολοκληρώνει την επαλήθευση όλων των ιδιοτήτων του $\mathbf{P}$. Για να ολοκληρώσουμε τον ορισμό του $\cdot$ ορίζουμε πρώτα την $|\alpha|$.

Ορισμός. Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha \leq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ορισμός. Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{αν } \alpha = \mathbf{0} \text{ ή } \beta = \mathbf{0} \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{αν } \alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0} \text{ ή } \alpha < \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{αν } \alpha > \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \text{ ή } \alpha < \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}. \end{cases}$$

Όπως ίσως υποπτεύεστε, οι αποδείξεις των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού γίνονται συνήθως με αναγωγή στην περίπτωση των θετικών αριθμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αυτό είναι φανερό αν $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. Για την απόδειξη στη γενική περίπτωση πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις (και θα είναι κάπως πιο εύκολο αν χρησιμοποιήσετε το επόμενο θεώρημα). ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αυτό είναι φανερό αν $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, και οι άλλες περιπτώσεις ελέγχονται εύκολα. ∎

Ορισμός. $\mathbf{1} = \{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x < 1\}$.
(Είναι φανερό ότι το $\mathbf{1}$ είναι πραγματικός αριθμός).

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $\alpha > \mathbf{0}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε στοιχείο του $\alpha \cdot \mathbf{1}$ είναι και στοιχείο του α. Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι κάποιο x ανήκει στο α. Αν $x \leq 0$, τότε το x αυτομάτως ανήκει και στο $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Αν $x > 0$, τότε υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός y στο α τέτοιος ώστε $x < y$. Τότε $x = y \cdot (x/y)$, και το x/y ανήκει στο $\mathbf{1}$, άρα το x ανήκει στο $\alpha \cdot \mathbf{1}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$ αν $\alpha > \mathbf{0}$.

Αν $\alpha < \mathbf{0}$, τότε, εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που μόλις αποδείξαμε, έχουμε

$$\alpha \cdot \mathbf{1} = -(|\alpha| \cdot |\mathbf{1}|) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

Τέλος, το θεώρημα είναι προφανές όταν $\alpha = \mathbf{0}$. ∎

Ορισμός. Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\alpha > \mathbf{0}$, τότε
$\alpha^{-1} = \{x \text{ στο } \mathbf{Q} : x \leq 0, \text{ ή } x > 0 \text{ και το } 1/x \text{ δεν ανήκει στο } \alpha, \text{ αλλά το } 1/x \text{ δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του } \mathbf{Q} - \alpha\}$.

αν $\alpha < \mathbf{0}$, τότε $\alpha^{-1} = -(|\alpha|)^{-1}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός διαφορετικός από το $\mathbf{0}$, τότε ο α^{-1} είναι πραγματικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προφανώς αρκεί να εξετάσουμε μόνο $\alpha > \mathbf{0}$. Πρέπει να ελέγξουμε τέσσερις συνθήκες.

(1) Έστω ότι $y < x$, και ότι το x ανήκει στο α^{-1}. Αν $y \leq 0$, τότε το y ανήκει στο α^{-1}. Αν $y > 0$, τότε $x > 0$, άρα το $1/x$ δεν ανήκει στο α. Αφού $1/y > 1/x$, έπεται ότι ούτε το $1/y$ ανήκει στο α, και το $1/y$ σαφώς δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$, άρα το y ανήκει στο α^{-1}.

(2) Προφανώς $\alpha^{-1} \neq \emptyset$.

(3) Αφού $\alpha > \mathbf{0}$, υπάρχει κάποιος θετικός ρητός αριθμός x στο α. Τότε το $1/x$ δεν ανήκει στο α^{-1}, άρα $\alpha^{-1} \neq \mathbf{Q}$.

(4) Έστω ότι το x ανήκει στο α^{-1}. Αν $x \leq 0$, είναι φανερό ότι υπάρχει κάποιο y στο α^{-1} με $y > x$ γιατί το α^{-1} περιέχει κάποιους θετικούς ρητούς. Αν $x > 0$, τότε το $1/x$ δεν ανήκει στο α. Αφού το $1/x$ δεν είναι το μικρότερο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$, υπάρχει ένας ρητός αριθμός y όχι στο α, με $y < 1/x$. Διαλέγουμε έναν ρητό αριθμό z με $y < z < 1/x$. Τότε το $1/z$ ανήκει στο α^{-1}, και $1/z > x$. Άρα το α^{-1} δεν περιέχει κάποιο μέγιστο στοιχείο. ∎

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο α^{-1} είναι στ' αλήθεια το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του α, είναι χρήσιμο να έχουμε στη διάθεσή μας άλλο ένα λήμμα, που είναι το πολλαπλασιαστικό ανάλογο του πρώτου μας λήμματος.

ΛΗΜΜΑ Έστω α ένας πραγματικός αριθμός με $\alpha > \mathbf{0}$ και z ένας ρητός αριθμός με $z > 1$. Τότε υπάρχει ρητός αριθμος x στο α, και ρητός αριθμός y που δεν ανήκει στο α, τέτοιοι ώστε $y/x = z$. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το z ανήκει στο α. Αφού $z - 1 > 0$ και

$$z^n = (1 + (z-1))^n \geq 1 + n(z-1),$$

έπεται ότι οι αριθμοί

$$z, z^2, z^3, \ldots$$

δεν μπορούν όλοι να βρίσκονται στο α. Άρα υπάρχει κάποιο k τέτοιο ώστε το $x = z^k$ να ανήκει στο α, και το $y = z^{k+1}$ να μην ανήκει στο α. Προφανώς $y/x = z$. Επιπλέον, αν το y συμβαίνει να είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$, παίρνουμε ένα $x' > x$ στοιχείο του α, και αντικαθιστούμε το x με το x' και το y με το yx'/x.

Αν το z δεν ανήκει στο α, μπορούμε να δώσουμε ανάλογη απόδειξη, βασισμένη στο γεγονός ότι κάποιος από τους αριθμούς $1/z^k$ πρέπει να ανήκει στο α. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\alpha \neq \mathbf{0}$, τότε $\alpha \cdot \alpha^{-\mathbf{1}} = \mathbf{1}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Προφανώς αρκεί να εξετάσουμε μόνο $\alpha > \mathbf{0}$, οπότε και $\alpha^{-\mathbf{1}} > \mathbf{0}$. Έστω ότι x είναι ένας θετικός ρητός αριθμός στο α, και y ένας θετικός ρητός αριθμός στο $\alpha^{-\mathbf{1}}$. Τότε το $1/y$ δεν ανήκει στο α, άρα $1/y > x$· επομένως $xy < 1$, που σημαίνει ότι το xy ανήκει στο $\mathbf{1}$. Αφού όλοι οι ρητοί αριθμοί $x \leq 0$ επίσης ανήκουν στο $\mathbf{1}$, αυτό δείχνει ότι κάθε στοιχείο του $\alpha \cdot \alpha^{-\mathbf{1}}$ είναι και στοιχείο του $\mathbf{1}$.

Για να αποδείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό, ας πάρουμε ένα z στο $\mathbf{1}$. Αν $z \leq 0$, τότε είναι φανερό ότι το z ανήκει στο $\alpha \cdot \alpha^{-\mathbf{1}}$. Έστω ότι $0 < z < 1$. Σύμφωνα με το λήμμα, υπάρχουν θετικοί ρητοί αριθμοί x στο α, και y όχι στο α, τέτοιοι ώστε $y/x = 1/z$· και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το y δεν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbf{Q} - \alpha$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $z = x \cdot (1/y)$, όπου το x ανήκει στο α, και το $1/y$ στο $\alpha^{-\mathbf{1}}$. Επομένως, το z ανήκει στο $\alpha \cdot \alpha^{-\mathbf{1}}$. ∎

Έχουμε σχεδόν τελειώσει! Απομένει η απόδειξη του επιμεριστικού νόμου. Για μια ακόμα φορά, πρέπει να εξετάσουμε πολλές περιπτώσεις, μην απελπίζεστε όμως. Στην περίπτωση που όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί, υπάρχει ένα ενδιαφέρον σημείο, και οι άλλες περιπτώσεις τακτοποιούνται πολύ εύκολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν α, β και γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha, \beta, \gamma > \mathbf{0}$. Τότε και οι δύο αριθμοί στην ισότητα περιέχουν όλους τους ρητούς αριθμούς ≤ 0. Ένας θετικός ρητός αριθμός στο $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ είναι της μορφής $x \cdot (y + z)$ για θετικά x στο α, y στο β, και z στο γ. Αφού $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, όπου το $x \cdot y$ είναι θετικό στοιχείο του $\alpha \cdot \beta$, και το $x \cdot z$ θετικό στοιχείο του $\alpha \cdot \gamma$, αυτός ο αριθμός ανήκει και στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Άρα, κάθε στοιχείο του $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ ανήκει και στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Από την άλλη πλευρά, ένας θετικός ρητός αριθμός στο $\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ είναι της μορφής $x_1 \cdot y + x_2 \cdot z$ για θετικά x_1, x_2 στο α, y στο β, και z στο γ. Αν $x_1 \leq x_2$, τότε $(x_1/x_2) \cdot y \leq y$, άρα το $(x_1/x_2) \cdot y$ ανήκει στο β. Άρα το

$$x_1 \cdot y + x_2 \cdot z = x_2[(x_1/x_2)y + z]$$

ανήκει στο $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$. Φυσικά, το ίδιο τέχνασμα δουλεύει αν $x_2 \leq x_1$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου τα α, β και γ δεν είναι όλα $> \mathbf{0}$. Αν κάποιο από τα τρία είναι ίσο με $\mathbf{0}$, η απόδειξη είναι εύκολη και οι περιπτώσεις όπου έχουμε $\alpha < \mathbf{0}$ ελέγχονται αμέσως αν έχουμε εξετάσει όλες τις πιθανότητες για τα β και γ. Έτσι, έστω ότι $\alpha > \mathbf{0}$ και εξετάζουμε τρεις περιπτώσεις:

$\beta, \gamma < \mathbf{0}$ και $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$, και $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$. Η πρώτη έπεται αμέσως από την περίπτωση που έχουμε ήδη αποδείξει, και η τρίτη έπεται από τη δεύτερη αν εναλλάξουμε τα β και γ. Επομένως, επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma > \mathbf{0}$. Υπάρχουν τότε δύο ενδεχόμενα:

(1) $\beta + \gamma \geq \mathbf{0}$. Τότε

$$\alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot ([\beta + \gamma] + |\beta|) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot |\beta|,$$

άρα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta + \gamma) &= -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \end{aligned}$$

(2) $\beta + \gamma \leq \mathbf{0}$. Τότε

$$\alpha \cdot |\beta| = \alpha \cdot (|\beta + \gamma| + \gamma) = \alpha \cdot |\beta + \gamma| + \alpha \cdot \gamma,$$

άρα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = -(\alpha \cdot |\beta + \gamma|) = -(\alpha \cdot |\beta|) + \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma. \blacksquare$$

Αυτή η απόδειξη ολοκληρώνει την εργασία που κάναμε σε αυτό το κεφάλαιο. Αν και μακρύ και συχνά ανιαρό, αυτό το κεφάλαιο περιέχει αποτελέσματα αρκετά σημαντικά ώστε να αξίζει να το διαβάσετε μια φορά (και κατά προτίμηση όχι παραπάνω από μια φορά!) με όλες του τις λεπτομέρειες. Για πρώτη φορά γνωρίζουμε ότι δεν δουλεύαμε στο κενό —υπάρχει πράγματι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα. Τα θεωρήματα αυτού του βιβλίου δεν βασίζονται σε υποθέσεις που δεν πρόκειται ποτέ να πραγματοποιηθούν. Απομένει ένα ενδιαφέρον και μαζί ανεπιθύμητο ενδεχόμενο: μπορεί να υπάρχουν πολλά πλήρη διατεταγμένα σώματα. Αν αυτό είναι αλήθεια, τότε τα θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού είναι ανέλπιστα πλούσια σε περιεχόμενο, αλλά οι ιδιότητες I1–I13 είναι απογοητευτικά ατελείς. Το τελευταίο κεφάλαιο μας απαλλάσσει από αυτό το ενδεχόμενο· οι ιδιότητες I1–I13 χαρακτηρίζουν πλήρως τους πραγματικούς αριθμούς —οτιδήποτε μπορούμε να αποδείξουμε για τους πραγματικούς αριθμούς, αποδεικνύεται με βάση αυτές τις ιδιότητες και μόνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υπάρχουν μόνο δύο προβλήματα σε αυτήν την ομάδα, αλλά το καθένα ζητά μια τελείως διαφορετική κατασκευή των πραγματικών αριθμών! Η λεπτομερής μελέτη μιας άλλης κατασκευής συνιστάται μόνο σε όσους δεν πτοούνται από επίπονες διαδικασίες, αξίζει όμως τον κόπο να ξέρετε την κύρια ιδέα που κρύβεται πίσω από αυτές τις άλλες κατασκευές. Οι πραγματικοί αριθμοί που κατασκευάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, θα μπορούσαν να λέγονται «οι πραγματικοί αριθμοί του αλγεβριστή», γιατί ορίστηκαν ακριβώς έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος, που έχει να κάνει με τη διάταξη $<$, μια έννοια αλγεβρική. Το σύστημα πραγματικών αριθμών που κατασκευάζεται στο επόμενο πρόβλημα θα μπορούσε να λέγεται «οι πραγματικοί αριθμοί του αναλύστα», γιατί φτιάχνονται έτσι ώστε οι ακολουθίες Cauchy να συγκλίνουν πάντα.

1. Αφού κάθε πραγματικός αριθμός πρέπει να είναι το όριο κάποιας ακολουθίας Cauchy από ρητούς αριθμούς, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε να *ορίσουμε* ως πραγματικό αριθμό μια ακολουθία Cauchy από ρητούς αριθμούς. Αφού όμως δύο ακολουθίες Cauchy μπορεί να συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό, αυτή η πρόταση χρειάζεται κάποιες τροποποιήσεις.

(α) Ορίζουμε ότι δύο ακολουθίες Cauchy από ρητούς αριθμούς $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι *ισοδύναμες* (συμβολισμός: $\{a_n\} \sim \{b_n\}$) αν $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Αποδείξτε ότι $\{a_n\} \sim \{a_n\}$, ότι $\{b_n\} \sim \{a_n\}$ αν $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, και ότι $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ αν $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ και $\{b_n\} \sim \{c_n\}$.

(β) Έστω ότι α είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών που είναι ισοδύναμες με την $\{a_n\}$, και β είναι το σύνολο όλων των ακολουθιών που είναι ισοδύναμες με την $\{b_n\}$. Αποδείξτε ότι $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ή $\alpha = \beta$. (Αν $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, τότε υπάρχει κάποια $\{c_n\}$ και στο α και στο β. Δείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση το α και το β αποτελούνται ακριβώς από εκείνες τις ακολουθίες που είναι ισοδύναμες με τη $\{c_n\}$.)

Το μέρος (β) δείχνει ότι το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy διαμερίζεται σε ξένα αναμεταξύ τους σύνολα, καθένα από τα οποία αποτελείται από όλες τις ακολουθίες που είναι ισοδύναμες με κάποια σταθερή ακολουθία. Ορίζουμε ως πραγματικό αριθμό ένα τέτοιο σύνολο, και συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών με $\mathbf{R}$.

(γ) Αν α και β είναι πραγματικοί αριθμοί, έστω $\{a_n\}$ μια ακολουθία στο α, και $\{b_n\}$ μια ακολουθία στο β. Ορίζουμε ως $\alpha + \beta$ το σύνολο όλων των ακολουθιών που είναι ισοδύναμες με την ακολουθία $\{a_n + b_n\}$. Δείξτε ότι η $\{a_n + b_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy και ακόμα δείξτε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τις συγκεκριμένες ακολουθίες $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ που διαλέξαμε για τα α και β. Επαληθεύστε ακόμα ότι ο αντίστοιχος ορισμός του πολλαπλασιασμού είναι καλά ορισμένος.

(δ) Δείξτε ότι το $\mathbf{R}$ είναι σώμα με αυτές τις πράξεις· η ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου είναι το μόνο ενδιαφέρον σημείο που πρέπει να ελέγξετε.

(ε) Ορίστε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς P έτσι ώστε το $\mathbf{R}$ να καθίσταται διατεταγμένο σώμα.

(στ) Αποδείξτε ότι κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει. Θυμηθείτε ότι, αν $\{\alpha_n\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε κάθε α_n είναι με τη σειρά του ένα σύνολο από ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών.

2. Αυτό το πρόβλημα σκιαγραφεί μια κατασκευή των «πραγματικών αριθμών του μαθητή λυκείου». Ορίζουμε ως πραγματικό αριθμό ένα ζεύγος $(a, \{b_n\})$, όπου a είναι ένας ακέραιος και $\{b_n\}$ μια ακολουθία από τους φυσικούς αριθμούς από 0 ως 9, με τον όρο ότι η ακολουθία δεν είναι τελικά 9. Διαισθητικά, αυτό το ζεύγος παριστάνει τον $a + \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$. Με αυτόν τον ορισμό, ο πραγματικός αριθμός είναι ένα πολύ συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά οι δυσκολίες που συναντάμε για να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό είναι φοβερές (πώς προσθέτετε δεκαδικούς με άπειρα ψηφία χωρίς να ανησυχείτε για το ότι μεταφέρετε δεκαδικά ψηφία επ' άπειρον;). Μια λογική προσέγγιση περιγράφεται παρακάτω. Το τέχνασμα είναι να χρησιμοποιήσετε τα ελάχιστα άνω φράγματα από την αρχή.

(α) Ορίζουμε $(a, \{b_n\}) < (c, \{d_n\})$ αν $a < c$, ή αν $a = c$ και για κάποιο n έχουμε $b_n < d_n$ αλλά $b_j = d_j$ για $1 \leq j < n$. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ορισμό, αποδείξτε την ιδιότητα του ελαχίστου άνω φράγματος.

(β) Για δοθέν $\alpha = (a, \{b_n\})$, ορίζουμε $\alpha_k = a + \sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$· διαισθητικά, α_k είναι ο ρητός αριθμός που παίρνουμε αν αλλάξουμε όλα τα δεκαδικά ψηφία μετά το k-οστό με 0. Αντιστρόφως, αν δοθεί ένας ρητός αριθμός r της μορφής $a + \sum_{n=1}^{k} b_n 10^{-n}$, ας συμβολίζουμε με r' τον πραγματικό αριθμό $(a, \{b_n{}'\})$, όπου $b_n{}' = b_n$ για $1 \leq n \leq k$ και $b_n{}' = 0$ για $n > k$. Τώρα για $\alpha = (a, \{b_n\})$ και $\beta = (c, \{d_n\})$ ορίζουμε

$$\alpha \boldsymbol{+} \beta = \sup\{(\alpha_k + \beta_k)' : k \text{ φυσικός αριθμός}\}$$

(το ελάχιστο άνω φράγμα υπάρχει από το μέρος (α)). Αν ορίσουμε με τον ίδιο τρόπο τον πολλαπλασιασμό, τότε η επαλήθευση όλων των ιδιοτήτων του

σώματος είναι τελείως άμεση, και δεν συνιστάται ιδιαίτερα. Για μια ακόμα φορά, όμως, η ύπαρξη πολλαπλασιαστικών αντιστρόφων θα είναι το δυσκολότερο βήμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 30 ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Θα επιστρέψουμε τώρα στον συνήθη συμβολισμό για τους πραγματικούς αριθμούς, κρατώντας τα παχιά σύμβολα για άλλα σώματα που τυχόν εμφανιστούν. Ακόμα, θα θεωρούμε τους ακεραίους και τους ρητούς αριθμούς ως πραγματικούς αριθμούς ειδικού τύπου, και θα παραβλέψουμε τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο ορίστηκαν οι πραγματικοί αριθμοί. Σε αυτό το κεφάλαιο ενδιαφερόμαστε για ένα και μόνο ερώτημα: υπάρχουν άλλα πλήρη διατεταγμένα σώματα εκτός από το $\mathbf{R}$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα, για να κυριολεκτήσουμε, είναι «ναι». Για παράδειγμα, το σώμα F_3 που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 28 είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, και βέβαια δεν είναι το $\mathbf{R}$. Αυτό το σώμα είναι ένα «ανόητο» παράδειγμα, γιατί το ζεύγος (a, a) μπορούμε να το δούμε ως ένα άλλο όνομα του πραγματικού αριθμού a· οι πράξεις

$$(a, a) \boldsymbol{+} (b, b) = (a + b, a + b),$$
$$(a, a) \boldsymbol{\cdot} (b, b) = (a \cdot b, a \cdot b),$$

είναι συμβατές με αυτήν τη μετονομασία. Αυτό το είδος παραδείγματος δείχνει ότι, για μια αποτελεσματική μελέτη του προβλήματος, απαιτούνται κάποια μαθηματικά εφόδια για τη θεώρηση τέτοιων διαδικασιών μετονομασίας.

Αν για να μετονομάσουμε τα στοιχεία του $\mathbf{R}$ χρησιμοποιούμε τα στοιχεία κάποιου σώματος F, τότε σε κάθε a από το $\mathbf{R}$ θα έπρεπε να αντιστοιχεί ένα «όνομα» $f(a)$ στο F. Ο συμβολισμός $f(a)$ υποδεικνύει ότι η μετονομασία μπορεί να διατυπωθεί με βάση τις συναρτήσεις. Για να κάνουμε κάτι τέτοιο θα χρειαστούμε μια έννοια συνάρτησης πολύ πιο γενική από οποιαδήποτε άλλη μάς έχει απασχολήσει έως τώρα· ουσιαστικά, θα απαιτήσουμε την πιο γενική έννοια της «συνάρτησης» που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά. Μια συνάρτηση, με αυτήν τη γενική έννοια, είναι απλώς ένας κανόνας που απεικονίζει κάποια πράγματα σε άλλα πράγματα. Για να γίνουμε τυπικοί, **συνάρτηση** είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη (αντικειμένων κάθε είδους) που δεν περιέχει δύο διαφορετικά ζεύγη με το ίδιο πρώτο στοιχείο. Το **πεδίο ορισμού** μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο A όλων των αντικειμένων a για τα οποία το (a, b) ανήκει στην f για κάποιο b· αυτό το (μοναδικό) b συμβολίζεται με $\boldsymbol{f(a)}$. Αν το $f(a)$ ανήκει στο σύνολο B για κάθε a στο A, τότε λέμε ότι η f είναι μια συνάρτηση **από το** A **στο** B. Για παράδειγμα,

αν $f(x) = \sin x$ για κάθε x στο $\mathbf{R}$ (και η f ορίζεται μόνο για x στο $\mathbf{R}$), τότε η f είναι μια συνάρτηση από το $\mathbf{R}$ στο $\mathbf{R}$· είναι επίσης μια συνάρτηση από το $\mathbf{R}$ στο $[-1, 1]$·

αν $f(z) = \sin z$ για κάθε z στο $\mathbf{C}$, τότε η f είναι μια συνάρτηση από το $\mathbf{C}$ στο $\mathbf{C}$·

αν $f(z) = e^z$ για κάθε z στο $\mathbf{C}$, τότε η f είναι μια συνάρτηση από το $\mathbf{C}$ στο $\mathbf{C}$· είναι ακόμα μια συνάρτηση από το $\mathbf{C}$ στο $\{z \text{ στο } \mathbf{C} : z \neq 0\}$·

η θ είναι μια συνάρτηση από το $\{z \text{ στο } \mathbf{C} : z \neq 0\}$ στο $\{x \text{ στο } \mathbf{R} : 0 \leq x < 2\pi\}$·

αν f είναι το σύνολο όλων των ζευγών $(a, (a, a))$ για a στο $\mathbf{R}$, τότε η f είναι μια συνάρτηση από το $\mathbf{R}$ στο F_3.

Έστω ότι F_1 και F_2 είναι δύο σώματα· θα συμβολίζουμε τις πράξεις στο F_1 με $\oplus$, $\odot$, κτλ. και τις πράξεις στο F_2 με $\boldsymbol{+}$, $\boldsymbol{\cdot}$, κτλ. Αν το F_2 πρόκειται να παίξει τον ρόλο του

συνόλου των καινούργιων ονομάτων για τα στοιχεία του F_1, τότε θα πρέπει να υπάρχει μια συνάρτηση από το F_1 στο F_2 με τις εξής ιδιότητες:

(1) Η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι 1-1, δηλαδή, αν $x \neq y$, τότε θα πρέπει να έχουμε $f(x) \neq f(y)$· αυτό σημαίνει ότι δύο στοιχεία του F_1 δεν μπορεί να έχουν το ίδιο όνομα.

(2) Η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι «επί», δηλαδή, για κάθε στοιχείο z του F_2 θα πρέπει να υπάρχει κάποιο x στο F_1 τέτοιο ώστε $z = f(x)$· αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του F_2 χρησιμεύει ως όνομα κάποιου στοιχείου του F_1.

(3) Για κάθε x στο y στο F_1 θα πρέπει να έχουμε

$$f(x \oplus y) = f(x) \mathbf{+} f(y),$$
$$f(x \odot y) = f(x) \mathbf{\cdot} f(y)\cdot$$

αυτό σημαίνει ότι η διαδικασία της μετονομασίας είναι συμβατή με τις πράξεις του σώματος.

Αν ακόμα θεωρούμε τα F_1 και F_2 ως διατεταγμένα σώματα, προσθέτουμε μια ακόμα απαίτηση:

(4) Αν $x \lessdot y$, τότε $f(x) \mathbf{<} f(y)$.

Μια συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες λέγεται *ισομορφισμός* από το F_1 στο F_2. Αυτός ο ορισμός είναι τόσο σημαντικός που τον αναδιατυπώνουμε τυπικά.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν F_1 και F_2 είναι δύο σώματα, ένας **ισομορφισμός** από το F_1 στο F_2 είναι μια συνάρτηση f από το F_1 στο F_2 με τις εξής ιδιότητες:

(1) Αν $x \neq y$, τότε $f(x) \neq f(y)$.

(2) Αν το z ανήκει στο F_2, τότε $z = f(x)$ για κάποιο x στο F_1.

(3) Αν τα x και y ανήκουν στο F_1, τότε

$$f(x \oplus y) = f(x) \mathbf{+} f(y),$$
$$f(x \odot y) = f(x) \mathbf{\cdot} f(y).$$

Αν τα F_1 και F_2 είναι διατεταγμένα σώματα, απαιτούμε και την:

(4) Αν $x \lessdot y$, τότε $f(x) \mathbf{<} f(y)$.

Τα σώματα F_1 και F_2 λέγονται **ισομορφικά** αν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ τους. Δύο ισομορφικά σώματα θεωρούνται ουσιαστικά σαν ένα —κάθε σημαντική ιδιότητα του ενός αυτομάτως ισχύει και για το άλλο. Επομένως μπορούμε, και πρέπει, να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα που τέθηκε στην αρχή του κεφαλαίου· αν F είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, είναι αφελές να περιμένουμε ότι το F ταυτίζεται με το $\mathbf{R}$ —αυτό που θα θέλαμε να ξέρουμε είναι μάλλον κατά πόσο το F είναι ισομορφικό με το $\mathbf{R}$. Στο επόμενο θεώρημα, το F θα είναι ένα σώμα, με πράξεις $\mathbf{+}$ και $\mathbf{\cdot}$, και «θετικά στοιχεία» $\mathbf{P}$· όταν γράφουμε $a \mathbf{<} b$ εννοούμε ότι το $b \mathbf{-} a$ ανήκει στο $\mathbf{P}$, και ούτω καθεξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ Αν F είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, τότε το F είναι ισομορφικό με το $\mathbf{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Αφού δύο σώματα έχουν οριστεί να είναι ισομορφικά αν υπάρχει ένας ισομορφισμός μεταξύ τους, πρέπει να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση f από το $\mathbf{R}$ στο F που να είναι ισομορφισμός. Ξεκινάμε ορίζοντας την f στους ακεραίους ως εξής:

$$\begin{aligned} f(0) &= \mathbf{0}, \\ f(n) &= \underbrace{\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1}}_{n \text{ φορές}} \qquad \text{για } n > 0, \\ f(n) &= -\underbrace{(\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1})}_{|n| \text{ φορές}} \qquad \text{για } n < 0. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned} f(m+n) &= f(m) + f(n), \\ f(m \cdot n) &= f(m) \cdot f(n), \end{aligned}$$

για όλους τους ακεραίους m και n, και βολεύει να συμβολίζουμε το $f(n)$ με $\boldsymbol{n}$. Ορίζουμε τότε την f στους ρητούς αριθμούς με

$$f(m/n) = \boldsymbol{m} \,/\, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}^{-1}$$

(παρατηρήστε ότι n-απλό άθροισμα $\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ αν $n > 0$, γιατί το F είναι διατεταγμένο σώμα). Αυτός ο ορισμός έχει έννοια γιατί αν $m/n = k/l$, τότε $ml = nk$, άρα $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n}$, άρα $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}^{-1} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{l}^{-1}$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned} f(r_1 + r_2) &= f(r_1) + f(r_2), \\ f(r_1 \cdot r_2) &= f(r_1) \cdot f(r_2), \end{aligned}$$

για όλους τους ρητούς αριθμούς r_1 και r_2, και ότι $f(r_1) < f(r_2)$ αν $r_1 < r_2$.

Ο ορισμός του $f(x)$ για τυχόν x βασίζεται στη γνωστή πια ιδέα ότι κάθε πραγματικός αριθμός καθορίζεται από τους ρητούς αριθμούς που είναι μικρότεροί του. Για οποιοδήποτε x στο $\mathbf{R}$, θέτουμε A_x το υποσύνολο του F που αποτελείται από όλα τα $f(r)$, για όλους τους ρητούς αριθμούς $r < x$. Το σύνολο A_x είναι βέβαια μη κενό, και άνω φραγμένο, γιατί αν r_0 είναι ένας ρητός αριθμός με $r_0 > x$, τότε $f(r_0) > f(r)$ για κάθε $f(r)$ στο A_x. Αφού το F είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, το σύνολο A_x έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα· ορίζουμε $f(x)$ να είναι το $\sup A_x$.

Έχουμε τώρα ορίσει το $f(x)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, πρώτα για ρητό x, και μετά για οποιοδήποτε x. Πριν συνεχίσουμε, πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτοί οι δύο ορισμοί συμφωνούν για ρητό x. Με άλλα λόγια, αν x είναι ένας ρητός αριθμός, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\sup A_x = f(x),$$

όπου το $f(x)$ συμβολίζει εδώ το $\boldsymbol{m} \,/\, \boldsymbol{n}$, για $x = m/n$. Αυτό δεν είναι άμεσο, και βασίζεται στην πληρότητα του F· χρειάζεται λοιπόν στο σημείο αυτό μια μικρή παρένθεση.

Αφού το F είναι πλήρες, τα στοιχεία

$$\underbrace{\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1}}_{n \text{ φορές}} \qquad \text{για φυσικούς αριθμούς } n$$

σχηματίζουν ένα σύνολο που δεν είναι άνω φραγμένο· η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με την απόδειξη για το $\mathbf{R}$ (Θεώρημα 8-2). Οι συνέπειες αυτού του γεγονότος για το $\mathbf{R}$ έχουν τα ακριβή τους ανάλογα στο F: συγκεκριμένα, αν a και b είναι στοιχεία του F με $a < b$, τότε υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε

$$a < f(r) < b.$$

Μετά από αυτήν την παρατήρηση, επιστρέφουμε στην απόδειξη του ότι οι δύο ορισμοί του $f(x)$ συμφωνούν για ρητό x. Αν y είναι ένας ρητός αριθμός με $y < x$, τότε έχουμε ήδη δει ότι $f(y) < f(x)$. Άρα κάθε στοιχείο του A_x είναι $< f(x)$. Επομένως,

$$\sup A_x \leq f(x).$$

Από την άλλη πλευρά, ας υποθέσουμε ότι ήταν

$$\sup A_x \prec f(x).$$

Τότε θα υπήρχε ένας ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε

$$\sup A_x \prec f(r) \prec f(x).$$

Αλλά η συνθήκη $f(r) \prec f(x)$ σημαίνει ότι $r < x$, το οποίο σημαίνει ότι το $f(r)$ ανήκει στο σύνολο A_x· αυτό προφανώς αντιφάσκει με τη συνθήκη $\sup A_x \prec f(r)$. Άρα η αρχική υπόθεση δεν ήταν σωστή, άρα

$$\sup A_x = f(x).$$

Έχουμε λοιπόν μια καλά ορισμένη συνάρτηση f από το $\mathbf{R}$ στο F. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι ισομορφισμός πρέπει να επαληθεύσουμε τις συνθήκες (1)–(4) του ορισμού. Θα αρχίσουμε με την (4).

Αν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί με $x < y$, τότε είναι φανερό ότι το A_x περιέχεται στο A_y. Άρα

$$f(x) = \sup A_x \preceq \sup A_y = f(y).$$

Για να αποκλείσουμε την πιθανότητα της ισότητας, παρατηρούμε ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί r και s με

$$x < r < s < y.$$

Ξέρουμε ότι $f(r) \prec f(s)$. Έπεται ότι

$$f(x) \preceq f(r) \prec f(s) \preceq f(y).$$

Αυτό αποδεικνύει την (4).

Η συνθήκη (1) προκύπτει άμεσα από την (4): Αν $x \neq y$, τότε $x < y$ ή $y < x$· στην πρώτη περίπτωση $f(x) \prec f(y)$, και στη δεύτερη περίπτωση $f(y) \prec f(x)$· και στις δύο περιπτώσεις είναι $f(x) \neq f(y)$.

Για να αποδείξουμε τη (2), έστω a ένα στοιχείο του F και B το σύνολο όλων των ρητών αριθμών r με $f(r) \prec a$. Το σύνολο B δεν είναι κενό και είναι και άνω φραγμένο, γιατί υπάρχει ένας ρητός αριθμός s με $f(s) \succ a$, άρα $f(s) \succ f(r)$ για r στο B, από όπου προκύπτει ότι $s > r$. Έστω x το ελάχιστο άνω φράγμα του B· ισχυριζόμαστε ότι $f(x) = a$. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρκεί να αποκλείσουμε τις άλλες δύο δυνατότητες

$$f(x) \prec a,$$
$$a \prec f(x).$$

Στην πρώτη περίπτωση θα υπήρχε ένας ρητός αριθμός r με

$$f(x) \prec f(r) \prec a.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι $x < r$ και ότι το r ανήκει στο B, το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι $x = \sup B$. Στη δεύτερη περίπτωση θα υπήρχε ένας ρητός αριθμός r με

$$a \prec f(r) \prec f(x).$$

Αυτό μας δίνει $r < x$. Αφού $x = \sup B$, αυτό σημαίνει ότι $r < s$ για κάποιο s στο B. Άρα

$$f(r) \prec f(s) \prec a,$$

καινούργια αντίφαση. Άρα $f(x) = a$, και έχουμε αποδείξει τη (2).

Για να ελέγξουμε την (3), έστω x και y δύο πραγματικοί αριθμοί και υποθέτουμε ότι $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Τότε θα είναι

$$f(x + y) \prec f(x) + f(y) \qquad \text{ή} \qquad f(x) + f(y) \prec f(x + y).$$

Στην πρώτη περίπτωση θα υπήρχε ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε

$$f(x+y) < f(r) < f(x) + f(y).$$

Αλλά αυτό θα μας έδινε

$$x + y < r.$$

Άρα το r θα μπορούσε να γραφεί ως άθροισμα δύο ρητών αριθμών

$$r = r_1 + r_2, \qquad \text{όπου } x < r_1 \text{ και } y < r_2.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που έχουμε για την f πάνω σε *ρητούς* αριθμούς θα ήταν

$$f(r) = f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y),$$

άτοπο. Η άλλη περίπτωση, με όμοιο τρόπο.

Τέλος, αν x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με τα ίδια επιχειρήματα δείχνουμε ότι

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Η γενική περίπτωση είναι μετά μια απλή συνέπεια. ∎

Αυτό το θεώρημα ολοκληρώνει την έρευνα που κάναμε πάνω στους πραγματικούς αριθμούς, και διαλύει κάθε αμφιβολία γύρω από αυτούς: *Υπάρχει* ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα και, ως προς τον ισομορφισμό, μόνο ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα. Είναι σημαντικό για τη μαθηματική σας παιδεία να δείτε κάποτε μια λεπτομερή κατασκευή των πραγματικών αριθμών, αλλά δεν θα χρειαστεί να ανατρέξετε ξανά σε αυτήν τη συγκεκριμένη κατασκευή. Είναι τελείως αδιάφορο το ότι ένας πραγματικός αριθμός συμβαίνει να είναι ένα σύνολο από ρητούς αριθμούς, και κάτι τέτοιο δεν θα πρέπει ποτέ να μπαίνει στην απόδειξη οποιουδήποτε σημαντικού θεωρήματος για τους πραγματικούς αριθμούς. Οι λογικές αποδείξεις θα πρέπει να χρησιμοποιούν μόνο το γεγονός ότι οι πραγματικοί αριθμοί είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα, γιατί αυτή τους η ιδιότητα τους χαρακτηρίζει ως προς τον ισομορφισμό, και κάθε αξιόλογη μαθηματική ιδιότητα των πραγματικών αριθμών θα ισχύει για όλα τα ισομορφικά σώματα. Για να είμαι ειλικρινής, θα έπρεπε να παραδεχθώ ότι αυτός ο τελευταίος ισχυρισμός είναι απλώς μια προκατάληψη του συγγραφέα, αλλά τη μοιράζονται μαζί του και όλοι σχεδόν οι άλλοι μαθηματικοί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Έστω f ένας ισομορφισμός από το F_1 στο F_2.

(α) Δείξτε ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ και $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. (Εδώ το $\mathbf{0}$ και το $\mathbf{1}$ στα αριστερά συμβολίζουν στοιχεία του F_1, ενώ το $\mathbf{0}$ και το $\mathbf{1}$ στα δεξιά συμβολίζουν στοιχεία του F_2.)

(β) Δείξτε ότι $f(-a) = -f(a)$ και $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, για $a \neq \mathbf{0}$.

2. Να μια ευκαιρία για να πεισθείτε ότι κάθε ιδιότητα ενός σώματος υπάρχει και σε κάθε σώμα ισομορφικό με αυτό. Η συμβουλή μας για αυτό το πρόβλημα είναι να γράψετε πολύ τυπικές αποδείξεις μέχρι να βεβαιωθείτε ότι όλοι οι ισχυρισμοί αυτού του τύπου είναι προφανείς. Τα F_1 και F_2 θα είναι δύο σώματα που είναι ισομορφικά· για να απλουστεύσουμε, και στα δύο θα συμβολίζουμε τις πράξεις με $+$ και $\cdot$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η εξίσωση $x^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ έχει μια λύση στο F_1, τότε έχει λύση και στο F_2.

(β) Αν κάθε πολυωνυμική εξίσωση $x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0 = \mathbf{0}$ με $a_0, \ldots, a_{n-1}$ στο F_1 έχει ρίζα στο F_1, τότε κάθε πολυωνυμική εξίσωση $x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + b_0 = \mathbf{0}$ με $b_0, \ldots, b_{n-1}$ στο F_2 έχει ρίζα στο F_2.

(γ) Αν $1 + \cdots + 1$ (m φορές) $= \mathbf{0}$ στο F_1, τότε το ίδιο ισχύει στο F_2.

(δ) Αν τα F_1 και F_2 είναι διατεταγμένα σώματα (και ο ισομορφισμός f ικανοποιεί την $f(x) < f(y)$ για $x < y$) και το F_1 είναι πλήρες, τότε το F_2 είναι πλήρες.

3. Έστω f ένας ισομορφισμός από το F_1 στο F_2 και g ένας ισομορφισμός από το F_2 στο F_3. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g \circ f$ από το F_1 στο F_3 με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ισομορφισμός.

4. Έστω F πλήρες διατεταγμένο σώμα, οπότε υπάρχει ένας ισομορφισμός f από το $\mathbf{R}$ στο F. Δείξτε ότι στην πραγματικότητα υπάρχει μόνο *ένας* ισομορφισμός από το $\mathbf{R}$ στο F. Υπόδειξη: Στην περίπτωση $F = \mathbf{R}$, αυτό είναι το Πρόβλημα 3-17. Τώρα, αν f και g είναι δύο ισομορφισμοί από το $\mathbf{R}$ στο F, θεωρήστε την $g^{-1} \circ f$.

5. Βρείτε έναν ισομορφισμό από το $\mathbf{C}$ στο $\mathbf{C}$ διαφορετικό από την ταυτοτική συνάρτηση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Κάποιος πρέπει να διαβάζει
όσα του επιτάσσει η κλίση του
γιατί όσα διαβάσει από καθήκον
θα τον ωφελήσουν ελάχιστα.

SAMUEL JOHNSON

Ένας από τους σκοπούς αυτής της βιβλιογραφίας είναι να οδηγήσει τον αναγνώστη προς άλλες πηγές, αλλά η πιο σημαντική λειτουργία την οποία μπορεί να εξυπηρετήσει είναι να καταδείξει την ποικιλία των διαθέσιμων μαθηματικών βοηθημάτων. Κατά συνέπεια, γίνεται προσπάθεια να επιτευχθεί μια ποικιλία, χωρίς όμως να προσποιούμαστε πληρότητα. Η σημερινή πληθώρα μαθηματικών βιβλίων κάνει τον στόχο της πληρότητας σχεδόν ανέφικτο, και επειδή προσπαθώ να ενθαρρύνω το ανεξάρτητο διάβασμα, όσο πιο κλασικό είναι ένα βοήθημα τόσο πιο απίθανο είναι να εμφανιστεί εδώ. Σε μερικές περιπτώσεις, αυτή η φιλοσοφία μπορεί να έχει φτάσει στα άκρα, αφού μερικοί τίτλοι στον κατάλογο αντιστοιχούν σε βιβλία που δεν μπορούν να διαβαστούν από έναν πρωτοετή φοιτητή χωρίς τριβή μερικών ετών στον Λογισμό. Εν πάση περιπτώσει, υπάρχουν πολλές επιλογές που μπορούν να διαβαστούν σε αυτό το στάδιο, και δεν πιστεύω ότι ζημιώνει κανέναν να έχει μια ιδέα για το τι βρίσκεται πιο πέρα.

Στις περισσότερες αναφορές δίνεται μόνο ο τίτλος και ο συγγραφέας, αφού πολλά από αυτά τα βιβλία έχουν εκδοθεί και τυπωθεί πολλές φορές. Συχνά, αφού είχαν κάποια στιγμή εξαντληθεί, τα ανέστησε αργότερα κάποιος άλλος εκδότης (συχνά με τη μορφή ενός φθηνού χαρτόδετου βιβλίου των φοβερών εκδόσεων Dover Publications ή της Mathematical Association of America. Πιο ακριβείς πληροφορίες δεν χρειάζονται, αφού είναι πλέον εύκολο να ψάξει κανείς για βιβλία στο Διαδίκτυο, στο Amazon.com και σε άλλους ιστοτόπους.

Τα βιβλία των οποίων η διαθεσιμότητα, είτε καινούργιων είτε μεταχειρισμένων, είναι προβληματική σημειώνονται με †. Μέσα από τις αναζητήσεις συγγραφέων και τίτλων μπορεί να προκύψουν άλλα ενδιαφέροντα βιβλία του ίδιου συγγραφέα, ή άλλων βιβλίων με παρόμοιους τίτλους. Επιπλέον, πολλά από αυτά τα βιβλία μπορούν να βρεθούν στις πλούσιες ακαδημαϊκές βιβλιοθήκες, ίσως το καλύτερο μέρος για να ψάξει κανείς. Παρά την ευκολία του Διαδικτύου, τίποτα δεν συγκρίνεται με την εμπειρία μιας πραγματικής (σε αντίθεση με την εικονική) βιβλιοθήκης, με τα βιβλία στοιβαγμένα κατά θέμα, να περιμένουν την τυχαία ανακάλυψή τους.

Ένα από τα πιο στοιχειώδη αναπόδεικτα θεωρήματα που αναφέρθηκαν σε αυτό το βιβλίο είναι το «Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής», το ότι κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών κατά έναν και μοναδικό τρόπο. Αυτό προκύπτει από το βασικό γεγονός για το οποίο έγινε νύξη στη σελίδα 403, αποδείξεις του οποίου μπορεί να βρει κανείς στην αρχή σχεδόν οποιουδήποτε βιβλίου πάνω στη στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών. Λίγα όμως βιβλία κατέκτησαν ένα ενθουσιώδες κοινό όσο το

[1] *An Introduction to the Theory of Numbers*, G. H. Hardy και E. M. Wright.

Άλλα δύο συνιστώμενα βιβλία είναι τα

†[2] *A Selection of Problems in the Theory of Numbers*, W. Sierpinski.

[3] *Three Pearls of Number Theory*, A. Khinchin.

Το Θεμελιώδες Θεώρημα εμφανίζεται και σε πιο γενικές αλγεβρικές θεωρήσεις, βλ. τις αναφορές [33] και [34].

Το αντικείμενο των αρρήτων αριθμών διαπερνά το αντικείμενο της Αριθμοθεωρίας και της Ανάλυσης. Μία εξαιρετική εισαγωγή βρίσκεται στο

[4] *Irrational Numbers*, I. M. Niven.

Μαζί με πολλά ιστορικά σημειώματα, υπάρχουν και αναφορές σε μερικά κάπως στοιχειώδη άρθρα από μαθηματικά περιοδικά. Υπάρχει επίσης μία απόδειξη του ότι ο π είναι υπερβατικός (βλ. επίσης [59]) και τέλος, μία απόδειξη του «Θεωρήματος Gelfond-Schneider»: Αν οι a και b είναι αλγεβρικοί, με $a \neq 0$ ή 1, και ο b είναι άρρητος, τότε ο a^b είναι υπερβατικός.

Όλα τα βιβλία που αναφέρθηκαν μέχρι τώρα αρχίζουν με τους φυσικούς αριθμούς αλλά, όταν χρειάζεται, θεωρούν δεδομένη την ύπαρξη των αρρήτων αριθμών, αν όχι των ρητών και των ακεραίων αριθμών. Μερικά βιβλία παρουσιάζουν μια κατασκευή των

ρητών αριθμών από τους φυσικούς αριθμούς, αλλά δύσκολα θα πιστέψουμε ότι υπάρχει πιο διάφανη αντιμετώπιση του θέματος από εκείνη στο

[5] *Foundations of Analysis*, E. Landau.

Ενώ πολλοί μαθηματικοί αρκούνται στην αποδοχή των φυσικών αριθμών ως φυσιολογικό σημείο εκκίνησης, οι αριθμοί μπορούν να οριστούν μέσω συνόλων, που είναι η πιο θεμελιώδης αρχή εκκίνησης. Μια γοητευτική παρουσίαση της συνολοθεωρίας είναι αυτή σε ένα βαθυστόχαστο βιβλιαράκι με τίτλο

[6] *Naive Set Theory*, P. R. Halmos.

Μια άλλη πολύ καλή εισαγωγή είναι το

[7] *Theory of Sets*, E. Kamke.

Ίσως χρειάζεται να διαβεβαιώσουμε ορισμένους που είναι θύματα των «μοντέρνων Μαθηματικών» ότι η συνολοθεωρία έχει κάποιο μαθηματικό περιεχόμενο (και στην πράξη περιέχει μερικά πολύ σημαντικά θεωρήματα). Χρησιμοποιώντας αυτά τα σημαντικά αποτελέσματα, ο Kamke αποδεικνύει ότι υπάρχει μία ασυνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για όλα τα x και y.

Οι ανισότητες, οι οποίες αντιμετωπίστηκαν ως στοιχειώδες θέμα στα Κεφάλαια 1 και 2, στην πραγματικότητα αποτελούν έναν ειδικό κλάδο. Μια καλή στοιχειώδης εισαγωγή δίνεται στο

[8] *Analytic Inequalities*, N. Kazarinoff.

Δώδεκα διαφορετικές αποδείξεις του ότι ο γεωμετρικός μέσος είναι μικρότερος ή ίσος του αριθμητικού μέσου, κάθε μία βασισμένη σε διαφορετική αρχή, βρίσκουμε στην αρχή του πιο προχωρημένου βιβλίου:

[9] *An Introduction to Inequalities*, E. Beckenbach και R. Bellman.

Η κλασική αναφορά πάνω στις ανισότητες είναι το

[10] *Inequalities*, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, και G. Polya.

Κάθε ένας από τους συγγραφείς της τριπλής αυτής συνεργασίας έχει συμβάλλει με τον δικό του τρόπο στη διάσπαρτη βιβλιογραφία πάνω στη φύση της μαθηματικής σκέψης, από την πλευρά ενός μαθηματικού. Εμείς προτιμούμε το

[11] *A Mathematician's Apology*, G. H. Hardy. [ελληνική μετάφραση: *Η απολογία ενός Μαθηματικού*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006].

Οι συλλογές από την ανέκδοτη συνεισφορά του Littlewood τιτλοφορούνται

†[12] *A Mathematician's Miscellany*, J. E. Littlewood.

Η υψηλού επιπέδου συμβολή του Polya στην παιδαγωγική είναι το

[13] *Mathematics and Plausible Reasoning* (Τόμος I: *Induction and Analogy in Mathematics*† Τόμος. II: *Patterns of Plausible Inference*), G. Polya.

Η Γεωμετρία είναι ο άλλος κύριος κλάδος που μπορεί να θεωρηθεί ως υπόβαθρο για τον Λογισμό. Αν και τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη παραμένουν ένα έγκυρο μαθηματικό έργο, μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα προσφέρεται από ορισμένα πιο σύγχρονα κείμενα, που εξετάζουν τα θεμελιώδη ερωτήματα, τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία, το ρόλο του «Αξιώματος του Αρχιμήδη» στη γεωμετρία, και άλλα αποτελέσματα της «κλασικής γεωμετρίας». Από τα τρία βιβλία που ακολουθούν, το πρώτο, το οποίο περιλαμβάνεται και στις προηγούμενες εκδόσεις αυτού του βιβλίου, έχει μάλλον υποσκελιστεί από τα επόμενα, τα οποία καλύπτουν πιο προχωρημένα θέματα, και πιθανόν απαιτούν λίγη περισσότερη κατάρτιση από την πλευρά του χρήστη.

†[14] *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, E. Moise.

[15] *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, M. J. Greenberg.

[16] *Geometry: Euclid and Beyond*, R. Hartshorne.

Επιπλέον, κάθε λογής συναρπαστικά γεωμετρικά θέματα περιέχονται στο

[17] *Introduction to Geometry*, H. S. Coxeter.

Σχεδόν όλα τα εγχειρίδια της γεωμετρίας αναφέρουν τουλάχιστον την κυρτότητα, που αποτελεί ένα εξειδικευμένο θέμα. Δεν μπορώ να σκεφτώ καλύτερη εισαγωγή στην κυρτότητα, ή και καλύτερη μαθηματική εμπειρία γενικά, από την ανάγνωση και την έρευνα με βάση το

†[18] *Convex Figures*, I. M. Yaglom και W. G. Boltyanskii.

Αυτό το βιβλίο περιέχει μια προσεκτικά διευθετημένη σειρά ορισμών και *διατυπώσεων* θεωρημάτων, των οποίων οι αποδείξεις πρέπει να δοθούν από τον αναγνώστη (επεξεργασμένες αποδείξεις παρέχονται στο τέλος του βιβλίου). Το γεγονός ότι δεν είναι πια διαθέσιμο μαρτυρεί μάλλον την έλλειψη ενδιαφέροντος για τη μελέτη μέσω ασκήσεων, κάτι το οποίο πιθανόν να ισχύει και για ένα άλλο βιβλίο γεωμετρίας που έχει δομηθεί πάνω στην ίδια αρχή:

†[19] *Combinatorial Geometry in the Plane*, H. Hadwiger και H. Debrunner.

Πέρα από αυτά τα δύο ασυνήθιστα βιβλία, πρέπει να αναφέρουμε ένα εξαιρετικά πολύτιμο βιβλιαράκι, επίσης κάπως εξειδικευμένο, το

[20] *Counterexamples in Analysis*, B. Gelbaum και J. Olmsted.

Πολλά από τα παραδείγματα του παραπάνω βιβλίου προέρχονται από πιο προχωρημένα θέματα Ανάλυσης, αλλά αρκετά από αυτά μπορεί να τα εκτιμήσει και κάποιος που γνωρίζει Απειροστικό Λογισμό.

Από τα άπειρα βιβλία πάνω στον Απειροστικό Λογισμό, δύο θεωρούνται κλασικά:

[21] *A Course of Pure Mathematics*, G. H. Hardy.

[22] *Differential and Integral Calculus* (δύο τόμοι), R. Courant.

Ο Courant είναι πολύ δυνατός στις φυσικές εφαρμογές. Υπάρχει και μια πιο σύγχρονη αναθεωρημένη έκδοση

[23] *Introduction to Calculus and Analysis*, R. Courant και F. John.

Όσον αφορά στις φυσικές εφαρμογές, μια κομψή παρουσίαση της ύλης του Κεφαλαίου 17, μαζί με μια πιο εκτεταμένη συζήτηση, περιλαμβάνονται στο άρθρο

[24] *On the geometry of the Kepler problem*, John Milnor· στο *The American Mathematical Monthly*, Τεύχος 90 (1983), σελ. 353–365.

(Σε αυτό το άρθρο η καμπύλη c' του Κεφαλαίου 17 συμβολίζεται με $\mathbf{v}$, και η παράγωγος της σημαντικής σύνθεσης $\mathbf{v} \circ \theta^{-1}$ (σελίδα 302) εισάγεται χωρίς ιδιαίτερη περαιτέρω εξήγηση ως $d\,\mathbf{v}/d\theta$.) Μια «άμεση» εξαγωγή των νόμων του Kepler, μαζί με πλήθος αναφορών, περιλαμβάνεται σε ένα άλλο άρθρο στο ίδιο περιοδικό, στο

[25] *The mathematical relationship between Kepler's laws and Newton's laws*, Andrew T. Hyman· στο *The American Mathematical Monthly*, Τεύχος 100 (1993), σελ. 932–936.

Τα τελευταία μέρη του Τόμου Ι του Courant περιέχουν υλικό που συνήθως βρίσκεται στον προχωρημένο Λογισμό, συμπεριλαμβανομένων των Διαφορικών Εξισώσεων και των σειρών Fourier. Μια εισαγωγή στις σειρές Fourier (που απαιτεί λίγο προχωρημένο Απειροστικό Λογισμό) βρίσκεται επίσης στο

[26] *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, R. Seeley.

Ο δεύτερος τόμος του Courant (πραγματικά προχωρημένος Απειροστικός Λογισμός) περιέχει επιπρόσθετο υλικό πάνω στις Διαφορικές Εξισώσεις, καθώς και μια εισαγωγή στον Λογισμό των Μεταβολών. Ένα βιβλίο για τις Διαφορικές Εξισώσεις που πολλοί θαυμάζουν είναι το

[27] *Lectures on Ordinary Differential Equations*, W. Hurewicz.

Ένα καλό δείγμα καινούργιων προσεγγίσεων και καινούργιων θεμάτων περιέχει το

[28] *Differential Equations, Dynamical Systems, and An Introduction to Chaos*, M. Hirsch, S. Smale, και R. L. Devaney.

Θα προσπεράσω τα λίγο έως πολύ καθιερωμένα βιβλία προχωρημένου Απειροστικού Λογισμού (που μπορούν να ανακαλυφθούν εύκολα από τον ίδιο τον αναγνώστη) μια και στις μέρες μας η παρουσίαση του προχωρημένου Λογισμού στους φοιτητές Μαθηματικών στηρίζεται στη Γραμμική Άλγεβρα. Ένα από τα πρώτα εγχειρίδια προχωρημένου Απειροστικού Λογισμού που χρησιμοποιεί Γραμμική Άλγεβρα είναι το πολύ όμορφο βιβλίο

†[29] *Calculus of Vector Functions*, R. H. Crowell και R. E. Williamson.

Ορισμένα πιο πρόσφατα βιβλία που θα πρότεινα είναι τα

[30] *Advanced Calculus of Several Variables*, C. H. Edwards, Jr.

[31] *Multivariable Mathematics*, T. Shifrin.

Και φυσικά είμαι προκατειλημμένος υπέρ ενός παλαιότερου κειμένου

[32] *Calculus on Manifolds*, M. Spivak. [ελληνική μετάφραση: *Λογισμός σε πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1994].

Υπάρχουν τρεις άλλες θεματικές ενότητες που βρίσκονται κάπως εκτός τόπου σε αυτήν τη βιβλιογραφία, αφού σταδιακά τείνουν να αποτελέσουν μέρος ενός καθιερωμένου προπτυχιακού κύκλου σπουδών. Η σκόπιμη μελέτη των σωμάτων και των σχετιζόμενων δομών είναι η περιοχή της «άλγεβρας». Δύο υπέροχα κείμενα είναι τα

[33] *Algebra*, Michael Artin.

[34] *Abstract Algebra*, D. Dummit και R. Foote.

Σε σχέση με τη «Μιγαδική Ανάλυση», τη Γη της Επαγγελίας του Κεφαλαίου 27, το κλασικό βιβλίο είναι το

[35] *Complex Analysis*, L. Ahlfors.

Αν και μάλλον επαναστατικό όταν πρωτοεκδόθηκε, σήμερα θα μπορούσε να θεωρηθεί μάλλον παρωχημένο. Έτσι, ίσως να προτιμούσατε το δεύτερο μιας σειράς βιβλίων (τριών μέχρι στιγμής) που εμφανίστηκαν πρόσφατα:

[36] *Fourier Analysis: An Introduction*, E. Stein και R. Shakarchi.

[37] *Complex Analysis*, E. Stein και R. Shakarchi.

[38] *Real Analysis*, E. Stein και R. Shakarchi.

Και αφού ανακινήσαμε το θέμα της «Πραγματικής Ανάλυσης» [Λογισμός πολλών οκτανίων], πρέπει να αναφέρουμε και δύο κλασικά βιβλία. Το πρώτο, γνωστό με το χαϊδευτικό όνομα «baby Rudin», αποτέλεσε την πηγή πολλών από τα προβλήματα που εμφανίζονται σε αυτό το βιβλίο.

[39] *Principles of Mathematical Analysis*, W. Rudin.

[40] *Functional Analysis*, W. Rudin.

Το θέμα της «Τοπολογίας», αν και δεν έχει αναφερθεί μέχρι τώρα, βρισκόταν στο υπόβαθρο της εξέτασης πολλών θεμάτων, αφού αποτελεί τη φυσιολογική γενίκευση των ιδεών για το όριο και τη συνέχεια, που παίζουν εξέχοντα ρόλο στο 2ο Μέρος αυτού του βιβλίου. Το κλασικό βιβλίο είναι πλέον το

[41] *Topology*, J. R. Munkres.

Για το σχετιζόμενο πεδίο της «Διαφορικής Τοπολογίας», βλ. το

[42] *Differential Topology*, V. Guillemin και A. Pollack.

Τα επόμενα θέματα, που κυμαίνονται από στοιχειώδη μέχρι πολύ δύσκολα, περιλαμβάνονται σε αυτήν τη βιβλιογραφία διότι έγινε κάποια νύξη στο κείμενο. Για τη συνάρτηση Γάμμα υπάρχει ένα κομψό βιβλιαράκι αφιερωμένο στις ιδιότητές της, οι πιο πολλές από τις οποίες αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Bohr και Mollerup που αναφέρθηκε στο Πρόβλημα 19-40:

†[43] *The Gamma Function*, E. Artin

Η συνάρτηση γάμμα είναι απλώς ένα από μερικά σπουδαία γενικευμένα ολοκληρώματα των Μαθηματικών. Ειδικά ο υπολογισμός του $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (βλ. Πρόβλημα 19-42) είναι απαραίτητος στη Θεωρία Πιθανοτήτων, όπου «η συνάρτηση κανονικής κατανομής»

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

παίζει θεμελιώδη ρόλο. Ένα κλασικό βιβλίο για τη Θεωρία Πιθανοτήτων είναι το

[44] *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, W. Feller.

Η αδυναμία να ολοκληρωθούν ορισμένες συναρτήσεις σε στοιχειώδεις όρους (Σ.τ.Ε. προφανώς ο συγγραφέας υπονοεί την κλειστή μορφή), (ανάμεσά τους και η $f(x) = e^{-x^2}$), βρίσκεται στην καρδιά των Μαθηματικών. Μια συζήτηση της δυνατότητας για ολοκλήρωση σε στοιχειώδεις όρους, με μια σκιαγράφηση των αποδείξεων για τις αδύνατες περιπτώσεις, καθώς και αναφορές στις αυθεντικές εργασίες του Liouville, βρίσκονται στο

[45] *The Integration of Functions of a Single Variable*, G. H. Hardy.

Εκατό και πλέον χρόνια μετά τη μελέτη του Liouville, οι βασικές αλγεβρικές ιδέες πίσω από αυτούς τους συλλογισμούς ξεκαθαρίστηκαν αρκετά περισσότερο στο άρθρο

[46] *On Liousville's Theorem on functions with elementary integrals*, M. Rosenlicht· στο *Pacific Journal of Mathematics*, Τεύχος 24, Αριθμ. 1 (1968), σελ. 153–161. (Διαθέσιμο και στο Διαδίκτυο: πηγαίνετε στη σελίδα `projecteuclid.org` και αναζητήστε τη λέξη `Rosenlicht`.)

Για μια καλή επισκόπηση του θέματος και ορισμένες πιο πρόσφατες εξελίξεις, βλ. το

[47] *Integration in finite terms: the Liousville theory*, T. Kasper· στο *Mathematics Magazine*, Τεύχος 53, Αριθμ. 4 (1980), σελ. 195–201.

Η αναφορά [46] χρησιμοποιεί έννοιες της «Διαφορικής Άλγεβρας», ενός πεδίου στα πλαίσια του οποίου είχε λυθεί νωρίτερα ένα σχετιζόμενο, αλλά φαινομενικά δυσκολότερο πρόβλημα: Υπάρχουν απλές διαφορικές εξισώσεις (για παράδειγμα η $y'' + xy = 0$), των οποίων οι λύσεις δεν μπορούν να εκφραστούν καν συναρτήσει αορίστων ολοκληρωμάτων στοιχειωδών συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύεται στη σελίδα 43 του 60-σέλιδου βιβλίου:

†[48] *An Introduction to Differential Algebra*, I. Kaplansky.

Θα πρέπει να πούμε και δυο λόγια υπερασπιζόμενοι τη διαδικασία ολοκλήρωσης με στοιχειώδεις όρους, την οποία πολλοί μαθηματικοί θεωρούν τέχνη (σε αντίθεση με

την παραγώγιση, που είναι απλώς ικανότητα). Πιθανόν να γνωρίζετε πως η διαδικασία ολοκλήρωσης μπορεί να επισπευσθεί με τη χρήση πινάκων αορίστων ολοκληρωμάτων. Υπάρχουν πολλά βιβλία με εκτενείς πίνακες ολοκληρωμάτων (καθώς και πίνακες σειρών και γινομένων), αλλά για τις περισσότερες ολοκληρώσεις αρκεί να συμβουλευτείτε έναν από τους αρκετά εκτενείς πίνακες αορίστων ολοκληρωμάτων που είναι διαθέσιμοι στο Διαδίκτυο, για παράδειγμα, από τη σελίδα `sosmath.com` ή από τη σελίδα `wikipedia.org`, με το ολοένα αυξανόμενο απόθεμα λημμάτων που περιέχουν γενικούς ορισμούς για τα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Οι υπόλοιπες αναφορές είναι κάπως διαφορετικού είδους. Εμπίπτουν σε τρεις κατηγορίες, εκ των οποίων η πρώτη είναι ιστορική.

Σχετικά με την ίδια την ιστορία του Λογισμού, μια υπέροχη αναλυτική πηγή αναφοράς, γεμάτη με λεπτομερή και συγκεκριμένα παραδείγματα παρά με γενικές περιγραφές είναι το

[49] *The Historical Development of Calculus*, C. H. Edwards, Jr.

Μερικές ιστορικές αναφορές και μια προσπάθεια να ενσωματωθούν στη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού, βρίσκονται στο

[50] *The Calculus: A Genetic Approach*, O. Toeplitz.

Ένα αξιοθαύμαστο σύγγραμμα για την ιστορία των Μαθηματικών γενικά είναι το

[51] *An Introduction to the History of Mathematics*, H. Eves.

Όπως προκύπτει από το απόσπασμα της σελίδας 34, η βασική ιδέα για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών οφείλεται στον Dedekind, του οποίου οι συνεισφορές περιέχονται στο

[52] *Essays on the Theory of Numbers*, R. Dedekind.

Οι πλέον σημαντικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων, ιδιαίτερα η σωστή θεώρηση των άπειρων αριθμών, εισήχθησαν για πρώτη φορά από την Cantor, του οποίου η εργασία έχει αναπαραχθεί στο

[53] *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, G. Cantor.

Η επιστολή του H. A. Schwarz που αναφέρεται στο Πρόβλημα 11-69 μπορεί να βρεθεί στο

†[54] *Ways of Thought of Great Mathematicians*, H. Meschkowski.

Τέλος, σημαντικός όγκος ενδιαφέροντος ιστορικού υλικού βρίσκεται και στο Διαδίκτυο, στον ιστότοπο `www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

Η δεύτερη κατηγορία σε αυτήν την τελική ομάδα βιβλίων, θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως «εκλαϊκεύσεις». Υπάρχει ένας εκπληκτικά μεγάλος αριθμός από τέτοια εκλαϊκευμένα βιβλία πρώτης τάξεως, γραμμένα από γνήσιους μαθηματικούς:

[55] *What is Mathematics?*, R. Courant και H. Robbins.

[56] *Geometry and the Imagination*, D. Hilbert και S. Cohn-Vossen.

[57] *The Enjoyment of Mathematics*, H. Rademacher και O. Toeplitz.

†[58] *Famous Problems of Mathematics*, H. Tietze· Graylock Press, 1965.

Ένα από τα πιο διάσημα «εκλαϊκευμένα» βιβλία που αναφέρεται στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι το:

[59] *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, F. Klein (τεύχος 1: *Arithmetic, Algebra, Analysis*· τεύχος 2: *Geometry*)· Dover, 1948.

Ο 1ος Τόμος περιέχει μια απόδειξη της υπερβατικότητας του π που, αν και όχι τόσο στοιχειώδης όσο εκείνη στο [4], είναι εντελώς όμοια με την απόδειξη του ότι ο e είναι

υπερβατικός, αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα με μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα. Μπορεί να διαβαστεί με γνώση των βασικών στοιχείων της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Η τρίτη κατηγορία είναι ακριβώς αντιδιαμετρική από την προηγούμενη —πρόκειται για αυθεντικές εργασίες. Οι δυσκολίες που συναντώνται εδώ είναι πολύ μεγάλες, και είχα το κουράγιο να περιλάβω μόνο μία από αυτές, την πηγή των αυθεντικών αναφορών του 4ου Μέρους. Δεν είναι καν στα Αγγλικά, αν και υπάρχει μεταφρασμένο σε αρκετές ξένες γλώσσες (Σ.τ.Ε. Όχι πάντως στα ελληνικά.). Το αυθεντικό άρθρο στα Γαλλικά βρίσκεται στο

[60] *Oeuvres Complètes d'Abel.*

Πρωτοεμφανίστηκε σε γερμανική μετάφραση στο *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Τόμος 1, 1826. Για να συνυπολογιστούν οι δυσκολίες, λέμε ότι αυτές οι αναφορές συνήθως βρίσκονται μόνο σε πανεπιστημιακές βιβλιοθήκες. Εν τούτοις, η μελέτη αυτής της εργασίας θα είναι πιθανώς το ίδιο πολύτιμη όσο η ανάγνωση των βιβλίων που έχουμε ήδη αναφέρει. Η αιτία βρίσκεται σε μία παρατήρηση του ίδιου του Abel, που απέδωσε τη βαθιά γνώση του πάνω στα μαθηματικά στο γεγονός ότι διάβασε τους «δασκάλους» παρά τους μαθητές...

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Κεφάλαιο 1

1. (i) $1 = a^{-1}a = a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1 \cdot x = x$.

(iii) Αν $x^2 = y^2$, τότε $0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, και έτσι ή $x - y = 0$ ή $x + y = 0$, δηλαδή, ή $x = -y$ ή $x = y$.

(vi) Αντικαταστήστε το y με το $-y$ στην (iv).

2. Ένα βήμα απαιτεί διαίρεση με $x - y = 0$.

3. (i) $a/b = ab^{-1} = (ac)(b^{-1}c^{-1}) = (ac)(bc)^{-1}$ (από την (iii)) $= ac/bc$.

(ii) $(ad + bc)/(bd) = (ad + bc)(bd)^{-1} = (ad + bc)(b^{-1}d^{-1})$ (από την (iii)) $= ab^{-1} + cd^{-1} = a/b + c/d$.

(iii) $ab(a^{-1}b^{-1}) = (a \cdot a^{-1})(b \cdot b^{-1}) = 1$, άρα $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$.

(v) $(a/b)/(c/d) = (a/b)(c/d)^{-1} = (a \cdot b^{-1})(c \cdot d^{-1})^{-1} = (a \cdot b^{-1})(c^{-1} \cdot d) = ad(b^{-1} \cdot c^{-1}) = ad(bc)^{-1} = (ad)/(bc)$.

4. (i) $x < -1$.

(iii) $x > \sqrt{7}$ ή $x < -\sqrt{7}$.

(v) Όλα τα x, αφού $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$.

(vii) $x > 3$ ή $x < -2$, αφού 3 και -2 είναι οι ρίζες της $x^2 - x - 6 = 0$.

(ix) $x > \pi$ ή $-5 < x < 3$.

(xi) $x < 3$.

(xiii) $0 < x < 1$.

5. (i) $b - a$ και $d - c$ είναι στο P, έτσι $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$ είναι στο P. Επομένως, $b + d > a + c$.

(iii) Χρησιμοποιώντας την (ii), $-c < -d$. Τότε, η (i) συνεπάγεται ότι $a + (-c) < b + (-d)$.

(v) $(b - a)$ και $-c$ είναι στο P, έτσι $-c(b - a) = ac - bc$ είναι στο P, δηλαδή $ac > bc$.

(vii) Χρησιμοποιώντας την (iv), $a > 0$ και $a < 1$, έτσι $a^2 < a$.

(ix) Αντικαταστήστε το c με το a και το d με το b στην (viii).

9. (i) $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

(iii) $|a + b| + |c| - |a + b + c|$.

(v) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}$.

10. (i) a αν $a \geq -b$ και $b \geq 0$·
$-a$ αν $a \leq -b$ και $b \leq 0$·
$a + 2b$ αν $a \geq -b$ και $b \leq 0$·
$-a - 2b$ αν $a \leq -b$ και $b \geq 0$.

(iii) $x - x^2$ αν $x \geq 0$·
$-x - x^2$ αν $x \leq 0$.

11. (i) $x = 11, -5$.

(iii) $-6 < x < -2$.

(v) Κανένα x (η απόσταση του x από το 1 συν την απόσταση του x από το -1 είναι τουλάχιστον 2).

(vii) $x = 1, -1$.

12. (i) $(|xy|)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$· αφού $|xy|$ και $|x| \cdot |y|$ είναι και τα δύο ≥ 0, που αποδεικνύει ότι $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(iii) $|x|/|y| = |x| \cdot |y|^{-1} = |x| \cdot |y^{-1}|$ (από την (ii)) $= |xy^{-1}|$ (από την (i)) $= |x/y|$.

(v) Από την (iv) έπεται ότι $|x| = |y - (y - x)| \leq |y| + |y - x|$, έτσι $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(vii) $|x + y + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$. Αν ισχύει ισότητα, τότε $|x + y| = |x| + |y|$, έτσι τα x και y έχουν το ίδιο πρόσημο. Επιπλέον, το z πρέπει να έχει το ίδιο πρόσημο με το $x + y$, έτσι τα x, y, z πρέπει να έχουν όλα το ίδιο πρόσημο (εκτός αν κάποιο είναι 0).

Κεφάλαιο 2

1. (i) Αφού $1^2 = 1 \cdot (2) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6$, ο τύπος αληθεύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ο τύπος αληθεύει για k. Τότε

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)}{6}[(k+2)(2k+3)] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2[k+1]+1)}{6}, \end{aligned}$$

άρα ο τύπος αληθεύει για $k + 1$.

2. (i)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(2i-1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n - 2(1 + \cdots + n) \\ &= \frac{(2n)(2n+1)}{2} - n(n+1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

5. (α) Αφού

$$1 + r = \frac{1 - r^2}{1 - r},$$

ο τύπος αληθεύει για $n = 1$. Έστω ότι

$$1 + r + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} 1 + r + \cdots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1}(1 - r)}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}. \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} S &= 1 + r + \cdots + r^n \\ rS &= \quad r + \cdots + r^n + r^{n+1}. \end{aligned}$$

Έτσι

$$S(1-r) = S - rS = 1 - r^{n+1},$$

άρα

$$S = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

6. (i) Από την

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1, \qquad k = 1, \ldots, n$$

έχουμε

$$(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4 - 1 - 6\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\dfrac{n(n+1)}{2} - n}{4}$$

$$= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

(iii) Από την

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \qquad k = 1, \ldots, n$$

έχουμε ότι

$$1 - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

8. Το 1 είναι ή άρτιος ή περιττός, και μάλιστα είναι περιττός. Έστω ότι το n είναι ή άρτιος ή περιττός. Τότε το n μπορεί να γραφεί είτε ως $2k$ είτε ως $2k+1$. Στην πρώτη περίπτωση το $n+1 = 2k+1$ είναι περιττός. Στη δεύτερη περίπτωση το $n+1 = 2k+1+1 = 2(k+1)$ είναι άρτιος. Και στις δυο περιπτώσεις, το $n+1$ είναι ή άρτιος ή περιττός. (Πράγματι, αυτή η απόδειξη μοιάζει «ύποπτη», αλλά είναι πράγματι σωστή.)

9. Έστω B το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών l για τους οποίους το $n_0 - 1 + l$ είναι στο A. Τότε το 1 είναι στο B και το $l+1$ είναι στο B αν το l είναι στο B, άρα το B περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς, το οποίο σημαίνει ότι το A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς $\geq n_0$.

12. (α) Ναι, διότι αν ο $a+b$ ήταν ρητός, τότε ο $b = (a+b) - a$ θα ήταν ρητός. Αν οι a και b είναι άρρητοι, τότε ο $a+b$ θα μπορούσε να ήταν ρητός, αφού ο b θα μπορούσε να είναι ο $r-a$ για κάποιον ρητό αριθμό r.

(β) Αν $a = 0$, τότε ο ab είναι ρητός. Αλλά αν $a \neq 0$, τότε ο ab δεν θα μπορούσε να είναι ρητός, διότι τότε ο $b = (ab) \cdot a^{-1}$ θα ήταν ρητός.

(γ) Ναι. Για παράδειγμα, $\sqrt[4]{2}$.

(δ) Ναι. Για παράδειγμα, $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$.

13. (α) Αφού

$$(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3(3n^2 + 2n) + 1,$$
$$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3(3n^2 + 4n + 1) + 1,$$

έπεται ότι, αν ο k^2 διαιρείται με το 3, τότε ο k πρέπει επίσης να διαιρείται με το 3. Έστω τώρα ότι ο $\sqrt{3}$ είναι ρητός, και έστω $\sqrt{3} = p/q$, όπου οι p

και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Τότε $p^2 = 3q^2$, άρα ο p^2 διαιρείται με το 3, άρα και ο p. Επομένως, $p = 3p'$ για κάποιον φυσικό αριθμό p' και άρα $(3p')^2 = 3q^2$, ή $3(p')^2 = q^2$. Επομένως και το q διαιρείται με το 3, που είναι άτοπο.

Η ίδια απόδειξη ισχύει και για τους $\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}$, επειδή οι εξισώσεις

$$(5n+1)^2 = 25n^2 + 10n + 1 = 5(5n^2 + 2n) + 1,$$
$$(5n+2)^2 = 25n^2 + 20n + 4 = 5(5n^2 + 4n) + 4,$$
$$(5n+3)^2 = 25n^2 + 30n + 9 = 5(5n^2 + 6n + 1) + 4,$$
$$(5n+4)^2 = 25n^2 + 40n + 16 = 5(5n^2 + 8n + 3) + 1,$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις για τους αριθμούς της μορφής $6n + m$, δείχνουν ότι, αν ο k^2 διαιρείται με το 5 ή το 6, το ίδιο συμβαίνει και με τον k. Η απόδειξη αποτυγχάνει για τον $\sqrt{4}$, επειδή ο $(4n+2)^2$ διαιρείται με το 4. (Ακριβώς για αυτόν το λόγο, η απόδειξη αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει ότι γενικά ο $\sqrt{a}$ είναι άρρητος αν ο a δεν είναι τέλειο τετράγωνο: δεν έχουμε καμία εξασφάλιση ότι ο $(an + m)^2$ δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του a για κάποιο $m < a$. Στην πραγματικότητα, ο ισχυρισμός αυτός *είναι* αληθής, αλλά η απόδειξη απαιτεί την πληροφορία του Προβλήματος 17.)

(β) Αφού

$$(2n+1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 = 2(4n^3 + 6n^2 + 3n) + 1,$$

έπεται ότι, αν ο k^3 είναι άρτιος, τότε είναι και ο k. Αν $\sqrt[3]{2} = p/q$ όπου οι p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη, τότε $p^3 = 2q^3$, έτσι ο p^3 διαιρείται με το 2, το ίδιο και ο p. Άρα, $p = 2p'$ για κάποιον φυσικό αριθμό p', και κατά συνέπεια $(2p')^3 = 2q^3$, ή $4(p')^3 = q^3$. Επομένως, ο q είναι άρτιος επίσης, πράγμα άτοπο.

Η απόδειξη για την $\sqrt[3]{3}$ είναι όμοια, αν χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$$(3n+1)^3 = 27n^3 + 27n^2 + 9n + 1 = 3(9n^3 + 9n^2 + 3n) + 1,$$
$$(3n+2)^3 = 27n^3 + 54n^2 + 36n + 8 = 3(9n^3 + 18n^2 + 12n + 2) + 2.$$

19. Αν $n = 1$, τότε $(1+h)^n = 1 + nh$. Έστω ότι $(1+h)^n \geq 1 + nh$. Τότε

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh), \quad \text{αφού } 1+h > 0\\ &= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h.\end{aligned}$$

Για $h > 0$, η ανισότητα είναι άμεση συνέπεια του διωνυμικού θεωρήματος, αφού όλοι οι άλλοι όροι που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του $(1+h)^n$ είναι θετικοί.

Κεφάλαιο 3

1. (i) $(x+1)/(x+2)$. Η έκφραση $f(f(x))$ έχει νόημα μόνο όταν $x \neq -1$ και $x \neq -2$.

(iii) $1/(1+cx)$ (για $x \neq -1/c$ αν $c \neq 0$).

(v) $(x+y+2)/(x+1)(y+1)$ (για $x, y \neq -1$).

(vii) Μόνο $c = 1$, αφού $f(x) = f(cx)$ συνεπάγεται ότι $x = cx$, και αυτό πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον ένα $x \neq 0$.

2. (i) $y \geq 0$ και ρητός, ή $y \geq 1$.

(iii) 0.

(v) $-1, 0, 1$.

3. (i) $\{x : -1 \leq x \leq 1\}$.

(iii) $\{x : x \neq 1 \text{ και } x \neq 2\}$.

(v) $\emptyset$.

4. (i) 2^{2y}.

(iii) $2^{2\sin t} + \sin(2^t)$.

5. (i) $P \circ s$.

(iii) $s \circ S$.

(v) $P \circ P$.

(vii) $s \circ s \circ s \circ P \circ P \circ P \circ s$.

11. (α) y.

(β) $H(y)$.

(γ) $H(y)$.

12. (α)

	άρτια	περιττή
άρτια	άρτια	τίποτε
περιττή	τίποτε	περιττή

(β)

	άρτια	περιττή
άρτια	άρτια	περιττή
περιττή	περιττή	άρτια

(γ)

	f άρτια	f περιττή
g άρτια	άρτια	άρτια
g περιττή	άρτια	περιττή

(δ) Έστω $g(x) = f(x)$ για $x \geq 0$ και ορίστε την g ελεύθερα για $x < 0$.

21. (α) Έστω $g(x) = h(x) = 1$ και f μια συνάρτηση για την οποία $f(2) \neq f(1) + f(1)$. Τότε $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$.

(β) $[(g + h) \circ f](x) = (g + h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x)) = (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x) = [(g \circ f) + (h \circ f)](x)$.

(γ) $\dfrac{1}{f \circ g}(x) = \dfrac{1}{f(g(x))} = \dfrac{1}{f}(g(x)) = \left(\dfrac{1}{f} \circ g\right)(x)$.

(δ) Έστω $g(x) = 2$ και f μια συνάρτηση για την οποία $f(\frac{1}{2}) \neq 1/f(2)$. Τότε $1/(f \circ g) \neq f \circ (1/g)$.

Κεφάλαιο 4

1. (i) $(2, 4)$.

(iii) $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

(v) $[-2, 2]$.

(vii) $(-\infty, 1] \cup [1, \infty)$.

3. (i) Όλα τα σημεία κάτω από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x$.

(iii) Όλα τα σημεία κάτω από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$.

(v) Όλα τα σημεία ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των $f(x) = x + 1$ και $f(x) = x - 1$.

(vii) Ένα σύνολο από ευθείες παράλληλες προς τη γραφική παράσταση της $f(x) = -x$, που τέμνουν τον οριζόντιο άξονα στα σημεία $(n, 0)$ για ακεραίους n.

(ix) Όλα τα σημεία μέσα στον κύκλο ακτίνας 1 και κέντρου $(1, 2)$.

4. (i) Ένα τετράγωνο με κορυφές $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ και $(0, -1)$.

(iii) Η ένωση της γραφικής παράστασης της $f(x) = x$ και της $f(x) = 2 - x$.

(v) Το σημείο $(0, 0)$.

(vii) Ο κύκλος ακτίνας $\sqrt{5}$ και κέντρου $(1, 0)$, αφού $x^2 - 2x + y^2 = (x - 1)^2 + y^2 - 1$.

6. (α) Απλώς παρατηρήστε ότι η $f(x) = m(x - a) + b = mx + (b - ma)$ *παριστά* ευθεία με κλίση m, που διέρχεται από το σημείο (a, b). (Το σημαντικό για αυτήν την άσκηση είναι να θυμόμαστε τον τύπο σημείου-κλίσης.)

(β) Η ευθεία που διέρχεται από τα (a, b) και (c, d) έχει κλίση $(d - b)/(c - a)$, και έτσι η εξίσωση είναι συνέπεια του μέρους (α).

(γ) Όταν $m = m'$ και $b \neq b'$. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι σαφές ότι δεν υπάρχει αριθμός x ώστε $f(x) = g(x)$, ενώ τέτοιος x υπάρχει πάντα αν $m \neq m'$, και συγκεκριμένα, $x = (b' - b)/(m - m')$.

7. (α) Αν $B = 0$ και $A \neq 0$, τότε το σύνολο είναι η κατακόρυφη ευθεία που σχηματίζουν όλα τα σημεία (x, y) με $x = -C/A$. Αν $B \neq 0$, το σύνολο είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = (-A/B)x + (-C/A)$.

(β) Τα σημεία (x, y) πάνω στην κατακόρυφη ευθεία $x = a$ είναι ακριβώς εκείνα που ικανοποιούν τη σχέση $1 \cdot x + 0 \cdot y + (-a) = 0$. Τα σημεία (x, y) πάνω στη γραφική παράσταση της $f(x) = mx + b$ είναι ακριβώς εκείνα που ικανοποιούν την $(-m)x + 1 \cdot y + (-b) = 0$.

11. (i) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

(ii) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Ισοδύναμα, το μέρος της γραφικής παράστασης προς τα αριστερά του κατακόρυφου άξονα παίρνεται από την αντανάκλαση, πρώτα μέσω του κατακόρυφου άξονα, και μετά μέσω του οριζόντιου άξονα.

(iii) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από ή επί του οριζόντιου άξονα.

(iv) Η γραφική παράσταση της f επαναλαμβάνει το μέρος μεταξύ του 0 και του a ξανά και ξανά.

21. (α) Το τετράγωνο της απόστασης του (x, x^2) από το $(0, \frac{1}{4})$ είναι

$$x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}$$

$$= x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}$$
$$= (x^2 + \tfrac{1}{4})^2,$$

το οποίο είναι το τετράγωνο της απόστασης του (x, x^2) από τη γραφική παράσταση της g.

(β) Το σημείο (x, y) ικανοποιεί αυτήν τη συνθήκη αν και μόνο αν

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (y-\gamma)^2,$$

ή

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = y^2 - 2\gamma y + \gamma^2,$$

ή

$$y = \left(\frac{1}{2\beta - 2\gamma}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha}{\gamma - \beta}\right)x + \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta - 2\gamma}\right).$$

Αν $\beta = \gamma$, ώστε το P να βρίσκεται επάνω στην ευθεία L, τότε η λύση είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το P.

Κεφάλαιο 5

1. (ii)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x^2 + 2x + 4) = 12.$$

(iv)

$$\lim_{x\to y} \frac{x^n - y^n}{x - y} = \lim_{x\to y} x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$
$$= y^{n-1} + y^{n-1} + \cdots + y^{n-1} = ny^{n-1}.$$

(vi)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

3. (i) $l = 0$. Για κάθε x έχουμε $|\cos(x^2)| \le 1$, άρα $|3 - \cos(x^2)| \le 4$, και επομένως

$$|f(x) - 0| = |x| \cdot |3 - \cos(x^2)| \le 4 \cdot |x|.$$

Έτσι μπορούμε να πάρουμε $\delta = \varepsilon/4$.

(iii) $l = 100$. Έχουμε

$$\left|\frac{100}{x} - 100\right| = 100 \cdot \left|\frac{1}{x} - 1\right| = 100 \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x - 1|.$$

Η αρχική προϋπόθεση $|x - 1| < \dfrac{1}{2}$ κάνει το $x > \dfrac{1}{2}$, άρα $1/|x| < 2$, οπότε έχουμε

$$|f(x) - 100| < 200 \cdot |x - 1|.$$

Έτσι μπορούμε να πάρουμε $\delta = \min(1/2, \varepsilon/200)$.

(v) $l = 2$. Ο ίδιος συλλογισμός που χρησιμοποιήθηκε στο κείμενο και στην (iii) δείχνει ότι

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \varepsilon \text{ για } 0 < |x-1| < \delta_1 = \min(1/2, \varepsilon/2),$$

οπότε

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } 0 < |x-1| < \bar{\delta}_1 = \min(1/2, \varepsilon/4).$$

Ομοίως, η λύση της (iv) δίνει δ_2 τέτοιο ώστε

$$|x^4 - 1| < \varepsilon \text{ για } 0 < |x-1| < \delta_2,$$

και έχουμε ένα αντίστοιχο $\bar{\delta}_2$. Μπορούμε τότε να πάρουμε $\delta = \min(\bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2)$.

(vii) $l = 0$. Θέστε $\delta = \varepsilon^2$.

6. (i) Χρειαζόμαστε $|f(x) - 2| < \varepsilon/2$ και $|g(x) - 4| < \varepsilon/2$, δηλαδή χρειαζόμαστε

$$0 < |x-2| < \min\left(\sin^2\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\right) + \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \delta.$$

(iii) Χρειαζόμαστε

$$|g(x) - 4| < \min\left(\frac{|4|}{2}, \frac{\varepsilon|4|^2}{2}\right),$$

δηλαδή χρειαζόμαστε

$$0 < |x-2| < [\min(2, 8\varepsilon)]^2 = \delta.$$

9. Έστω $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ και ορίστε $g(h) = f(a+h)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα x, αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x) - l < \varepsilon|$. Τώρα, αν $0 < |h| < \delta$, τότε $0 < |(h+a) - a| < \delta$, και έτσι $|f(a+h) - l| < \varepsilon$. Αυτή η ανισότητα μπορεί να γραφεί ως $|g(h) - l| < \varepsilon$. Έτσι, $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = l$, το οποίο μπορεί να γραφεί ως $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$. Η ίδια επιχειρηματολογία δείχνει ότι, αν $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = m$, τότε $\lim\limits_{x\to a} f(x) = m$. Επομένως, το καθένα όριο υπάρχει όταν υπάρχει και το άλλο, και σε αυτήν την περίπτωση είναι ίσα.

10. (α) Διαισθητικά, μπορούμε να έχουμε το $f(x)$ όσο κοντά στο l επιθυμούμε, αν και μόνο αν το $f(x) - l$ μπορεί να είναι όσο θέλουμε κοντά στο 0. Η τυπική απόδειξη είναι τόσο τετριμμένη που χρειάζεται κάποια εργασία ώστε να μοιάζει πραγματική απόδειξη. Για να γίνουμε ακριβείς, έστω ότι $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ και έστω $g(x) = f(x) - l$. Τότε, για όλα τα $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x, αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$. Η τελευταία αυτή ανισότητα μπορεί να γραφεί $|g(x) - 0| < \varepsilon$, και έτσι $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Τα επιχειρήματα για την άλλη κατεύθυνση είναι ομοίως χωρίς ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

(β) Διαισθητικά, το να έχουμε το x κοντά στο a είναι το ίδιο με το να κάνουμε το $x - a$ να είναι κοντά στο 0. Τυπικά: έστω ότι $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ και έστω $g(x) = f(x-a)$. Τότε, για όλα τα $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x, αν $0 < |x-a| < \delta$, τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$. Τώρα, αν $0 < |y| < \delta$, τότε $0 < |(y+a) - a| < \delta$, άρα $|f(y+a) - l| < \varepsilon$. Αλλά η τελευταία ανισότητα μπορεί να γραφεί ως $|g(y) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = l$. Η επιχειρηματολογία στην αντίστροφη κατεύθυνση είναι όμοια.

(γ) Διαισθητικά, το x είναι κοντά στο 0 αν και μόνο αν είναι και το x^3. Τυπικά: έστω $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $0 < |x| < \delta$, τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$. Τότε, αν $0 < |x| < \min(1, \delta)$, έχουμε $0 < |x^3| < \delta$, άρα $|f(x^3) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. Από την άλλη πλευρά, έστω ότι το $\lim_{x\to 0} f(x^3)$ υπάρχει, έστω $\lim_{x\to 0} f(x^3) = m$, τότε για όλα τα $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα δ, τέτοιο ώστε, αν $0 < |x| < \delta$, τότε $|f(x^3) - m| < \varepsilon$. Τότε, αν $0 < |x| < \delta^3$, έχουμε $0 < |\sqrt[3]{x}| < \delta$, άρα $|f([\sqrt[3]{x}]^3) - m| < \varepsilon$ ή $|f(x) - m| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x) = m$.

(δ) Έστω $f(x) = 1$ για $x \geq 0$ και $f(x) = -1$ για $x < 0$. Τότε, $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1$, αλλά το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

17. (α) Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ δεν μπορεί να προσεγγίζει ένα όριο στο 0, αφού γίνεται οσοδήποτε μεγάλη κοντά στο 0. Πράγματι, ανεξάρτητα από το τι μπορεί να είναι το $\delta > 0$, υπάρχει κάποιο x που επαληθεύει την $0 < |x| < \delta$, αλλά και την $1/x > |l| + \varepsilon$, και συγκεκριμένα, οποιοδήποτε $x < \min(\delta, 1/(|l| + \varepsilon))$. Αυτό το x δεν επαληθεύει την $|(1/x) - l)| < \varepsilon$.

(β) Ανεξάρτητα από το τι μπορεί να είναι το $\delta > 0$, υπάρχει κάποιο x που επαληθεύει την $0 < |x-1| < \delta$, αλλά και την $1/(x-1) > |l|+\varepsilon$, και συγκεκριμένα, οποιοδήποτε $x < \min(1 + \delta, 1 + 1/(|l| + \varepsilon))$. Αυτό το x δεν επαληθεύει την $|1/(x-1)-l| < \varepsilon$. (Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε το Πρόβλημα 10(β): $\lim_{x\to 0} 1/x = \lim_{x\to 1} 1/(x-1)$ αν το τελευταίο υπάρχει, και έτσι δεν υπάρχει το όριο, λόγω του μέρους (α).)

25. (i) Είναι ο συνήθης ορισμός, απλώς καλώντας τα δ και ε ως ε και δ.

(ii) Πρόκειται για ελαφρά τροποποίηση του (i): αν η συνθήκη είναι αληθής για *όλα* τα $\delta > 0$, τότε ισχύει και για $\delta/2$, και έτσι υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, αν $0 < |x - a| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - l| \leq \delta/2 < \delta$.

(iii) Πρόκειται για παρόμοια τροποποίηση: δουλέψτε με το $\delta/5$ για να πάρετε το (i).

(iv) Και αυτό είναι τροποποίηση: λέει το ίδιο πράγμα με το (i), αφού $\varepsilon/10 > 0$, και είναι μόνο η ύπαρξη *κάποιων* $\varepsilon > 0$ που ενδιαφέρει.

29. Αν $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$, τέτοια ώστε, για όλα τα x,

$$\text{αν } a < x < a + \delta_1, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon,$$
$$\text{αν } a - \delta_2 < x < a, \text{ τότε } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Αν $0 < |x - a| < \delta$, τότε ή $a - \delta_2 < a - \delta < x < a$ ή διαφορετικά $a < x < a + \delta < a + \delta_1$, άρα $|f(x) - l| < \varepsilon$.

30. (i) Αν $l = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, τότε για όλα τα $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - l| < \varepsilon$ για $0 < x < \delta$. Αν $-\delta < x < 0$, τότε $0 < -x < \delta$, άρα $|f(-x) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0^-} f(-x) = l$. Ομοίως, αν το $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ υπάρχει, τότε υπάρχει και το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ και έχει την ίδια τιμή. (Διαισθητικά, το x είναι κοντά στο 0 και θετικό αν και μόνο αν το $-x$ είναι κοντά στο 0 και αρνητικό).

(ii) Αν $l = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, τότε για όλα τα $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - l| < \varepsilon$ για $0 < x < \delta$. Έτσι, αν $0 < |x| < \delta$, τότε $|f(|x|) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(|x|) = l$. Η αντίθετη κατεύθυνση λύνεται με όμοιο τρόπο. (Διαισθητικά, αν το x είναι κοντά στο 0, τότε το $|x|$ είναι κοντά στο 0 και θετικό.)

(iii) Αν $l = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, τότε για όλα τα $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - l| < \varepsilon$ για $0 < x < \delta$. Αν $0 < |x| < \sqrt{\delta}$, τότε $0 < x^2 < \delta$, άρα $|f(x^2) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} f(x^2) = l$. Η αντίθετη κατεύθυνση λύνεται με όμοιο τρόπο. (Διαισθητικά, αν το x είναι κοντά στο 0, τότε το x^2 είναι κοντά στο 0 και θετικό).

34. Αν $l = \lim_{x\to\infty} f(x)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιος N τέτοιος ώστε $|f(x) - l| < \varepsilon$ για $x > N$ και είναι σαφές ότι μπορούμε να υποθέσουμε πως $N > 0$. Τώρα, αν $0 < x < 1/N$, τότε $1/x > N$, άρα $|f(1/x) - l| < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = l$. Η αντίθετη κατεύθυνση λύνεται με παρόμοιο τρόπο.

Κεφάλαιο 6

1. (i) $F(x) = x + 2$ για κάθε x.

(iii) $F(x) = 0$ για κάθε x.

Κεφάλαιο 7

1. (i) Φραγμένη άνω και κάτω. Ελάχιστη τιμή 0. Όχι μέγιστο.

(iii) Φραγμένη κάτω, αλλά όχι άνω. Ελάχιστη τιμή 0.

(v) Φραγμένη και άνω και κάτω. Αν $a \le -1/2$ τότε $a \le -a - 1$, άρα $f(x) = a + 2$ για κάθε x στο $(-a - 1, a + 1)$, και έτσι το $a + 2$ είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή. Αν $-1/2 < a \le 0$, τότε η f παίρνει την ελάχιστη τιμή a^2, και αν $a \ge 0$, τότε η f έχει την ελάχιστη τιμή 0. Αφού $a + 2 > (a + 1)^2$ μόνο για $\left(-1 - \sqrt{5}\right)/2 < a < \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$, όταν $a \ge -1/2$ η συνάρτηση f έχει μέγιστο μόνο για $a \le \left(-1 + \sqrt{5}\right)/2$ (και αυτό το μέγιστο είναι $a + 2$).

(vii) Φραγμένη άνω και κάτω. Μέγιστο 1, ελάχιστο 0.

(ix) Φραγμένη άνω και κάτω. Μέγιστο 1, ελάχιστο -1.

(xi) Η f έχει και μέγιστο και ελάχιστο, αφού είναι συνεχής.

2. (i) $n = -2$, αφού $f(-2) < 0 < f(-1)$.

(iii) $n = -1$, αφού $f(-1) = -1 < 0 < f(0)$.

3. (i) Αν $f(x) = x^{179} + 163/(1 + x^2 + \sin^2 x) - 119$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ και $f(2) > 0$, ενώ $f(-2) < 0$, άρα $f(x) = 0$ για κάποιο x στο $(-2, 2)$.

5. Η f είναι σταθερή, γιατί αν έπαιρνε δύο διαφορετικές τιμές, τότε η f θα έπαιρνε όλες τις ενδιάμεσες τιμές που θα περιελάμβαναν και άρρητες τιμές.

7. (1) $f(x) = x^{\cdot}$

(2) $f(x) = -x^{\cdot}$

(3) $f(x) = |x|^{\cdot}$

(4) $f(x) = -|x|$.

10. Εφαρμόστε το Θεώρημα 1 στην $f - g$.

11. Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$, διαλέξτε $x = 0$ ή 1. Αν $f(0) > 0 = I(0)$ και $f(1) < 1 = I(1)$, τότε από το Πρόβλημα 10 για f και I έχουμε $f(x) = x$ για κάποιο x.

Κεφάλαιο 8

1. (i) Το 1 είναι το μέγιστο στοιχείο και το μέγιστο κάτω φράγμα είναι 0, το οποίο δεν είναι στο σύνολο.

(iii) Το 1 είναι το μέγιστο στοιχείο και το 0 το ελάχιστο.

(v) Αφού $\{x : x^2+x+1 \geq 0\} = \mathbf{R}$, δεν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα ή μέγιστο κάτω φράγμα.

(vii) Αφού $\{x : x < 0 \text{ και } x^2 + x - 1 < 0\} = ([-1-\sqrt{5}]/2, 0)$, το μέγιστο κάτω φράγμα είναι $[-1-\sqrt{5}]/2$ και το ελάχιστο άνω φράγμα είναι 0. Κανένα από τα δύο δεν ανήκει στο σύνολο.

2. (α) Αφού $A \neq \emptyset$, υπάρχει κάποιο x στο A. Τότε το $-x$ είναι στο $-A$, και έτσι $-A \neq \emptyset$. Αφού το A είναι κάτω φραγμένο, υπάρχει κάποιο y τέτοιο ώστε $y \leq x$ για όλα τα x στο A. Τότε $-y \geq -x$ για όλα τα x στο A, και έτσι $-y \geq z$ για όλα τα z στο $-A$. Επομένως, το $-A$ είναι άνω φραγμένο. Έστω $\alpha = \sup(-A)$. Τότε το α είναι ένα άνω φράγμα για το $-A$, άρα, αντιστρέφοντας τον προηγούμενο συλλογισμό, το $-\alpha$ είναι ένα κάτω φράγμα για το A.

Επιπλέον, αν β είναι οποιοδήποτε κάτω φράγμα του A, τότε το $-\beta$ είναι ένα άνω φράγμα για το $-A$, άρα $-\beta \geq \alpha$, και έτσι $\beta \leq -\alpha$. Επομένως, το $-\alpha$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

5. (α) Αν l είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος με $l \leq x$, τότε $l + 1 > x$. Αλλά $l + 1 \leq x + 1 < y$. Επομένως, μπορούμε να θέσουμε $k = l + 1$. (Απόδειξη της ύπαρξης του l: Αφού το $\mathbf{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n με $-n < x < n$. Επομένως, υπάρχει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος ακεραίων l με $-n \leq l \leq x$. Τώρα διαλέξτε τον μεγαλύτερο.)

(β) Αφού $y-x > 0$, υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε $1/n < y-x$. Αφού $ny - nx > 1$ υπάρχει, από το (α), ένας ακέραιος k με $nx < k < ny$, το οποίο σημαίνει ότι $x < k/n < y$.

(γ) Διαλέξτε $r + \sqrt{2}(s - r)/2$.

(δ) Από το (β), υπάρχει ρητός r με $x < r < y$ και επομένως υπάρχει ρητός s με $x < r < s < y$. Εφαρμόστε το (γ) για $r < s$.

10. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x/\alpha$ (η λύση του Προβλήματος 5 δείχνει ότι υπάρχει τέτοιο k) και έστω $x' = x - k\alpha \geq 0$. Αν $x - k\alpha = x' \geq \alpha$, τότε $x \geq (k+1)\alpha$, και έτσι $k + 1 \leq x/\alpha$, σε αντίθεση με την επιλογή του k. Επομένως, $0 \leq x' < \alpha$.

12. (α) Αφού το κάθε y στο B ικανοποιεί την $y \geq x$ για όλα τα x στο A, οποιοδήποτε y στο B είναι ένα άνω φράγμα για το A, και έτσι $y \geq \sup A$.

(β) Το (α) δείχνει ότι το $\sup A$ είναι ένα κάτω φράγμα του B, και έτσι $\sup A \leq \inf B$.

13. Αφού $x \leq \sup A$ και $y \leq \sup B$ για κάθε x στο A και κάθε y στο B, έπεται ότι $x + y \leq \sup A + \sup B$. Επομένως, το $\sup A + \sup B$ είναι ένα άνω φράγμα του $A + B$, και άρα $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Αν τα x και y επιλεγούν από το A και B αντίστοιχα, έτσι ώστε $\sup A - x < \varepsilon/2$ και $\sup B - y < \varepsilon/2$, τότε $\sup A + \sup B - (x + y) < \varepsilon$. Επομένως,

$$\sup(A + B) \geq x + y > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Κεφάλαιο 9

1. (α)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

(β) Η εφαπτομένη δια του $(a, 1/a)$ είναι η γραφική παράσταση της

$$g(x) = \frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}$$
$$= \frac{-x}{a^2} + \frac{2}{a}.$$

Αν $f(x) = g(x)$, τότε

$$\frac{1}{x} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

ή

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

άρα $x = a$.

2. (α)

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(a+h)^2} - \dfrac{1}{a^2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2ah - h^2)}{ha^2(a+h)^2} = -\frac{2}{a^3}.$$

(β) Η εφαπτομένη δια του $(a, 1/a^2)$ είναι η γραφική παράσταση της

$$g(x) = -\frac{2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2}$$
$$= -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}.$$

Αν $f(x) = g(x)$, τότε

$$\frac{1}{x^2} = \frac{-2x}{a^3} + \frac{3}{a^2},$$

ή

$$2x^3 - 3ax^2 + a^3 = 0,$$

ή

$$0 = (x-a)(2x^2 - ax - a^2) = (x-a)(2x+a)(x-a).$$

Άρα $x = a$ ή $x = -a/2$. Το σημείο $(-a/2, 4/a^2)$ κείται στην αντίθετη πλευρά ως προς τον κατακόρυφο άξονα από το $(a, 1/a^2)$.

3.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

4. Εικασία: $S_n'(x) = nx^{n-1}$. Απόδειξη:

$$S_n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S_n(x+h) - S_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^j - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} h^{j-1}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}, \qquad \text{αφού } \lim_{h\to 0} h^{j-1} = 0 \text{ για } j > 1.$$

5. $f'(x) = 0$ για x όχι ακέραιο, και $f'(x)$ μη ορισμένο αν x ακέραιος.

6. (α)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+c] - [f(x)+c]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

(β)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$
$$= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

7. (α) $f'(9) = 3 \cdot 9^2 \cdot f'(25) = 3 \cdot (25)^2 \cdot f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.

(β) $f'(3^2) = f'(9) = 3 \cdot 9^2 \cdot f'(5^2) = f'(25) = 3 \cdot (25)^2 \cdot f'(6^2) = f'(36) = 3 \cdot (36)^2$.

(γ) $f'(a^2) = 3(a^2)^2 = 3a^4 \cdot f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4$.

(δ) $f'(x^2) = 3x^4 \cdot$ αλλά $g(x) = x^6$, άρα $g'(x) = 6x^5$.

8. (α)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h+c) - f(x+c)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f([x+c]+h) - f(x+c)}{h} = f'(x+c).$$

(β)

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(cx+ch) - f(cx)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{c[f(cx+ch) - f(cx)]}{ch} = \lim_{k\to 0} \frac{c[f(cx+k) - f(cx)]}{k}$$
$$= c \cdot \lim_{k\to 0} \frac{f(cx+k) - f(cx)}{k} = c \cdot f'(cx).$$

(Συγκρίνετε τους χειρισμούς σε αυτήν τη σειρά των υπολογισμών με εκείνους του Προβλήματος 5-14.)

(γ) Αν $g(x) = f(x+a)$, τότε $g'(x) = f'(x+a)$, από το (α). Αλλά $g = f$, και έτσι $f'(x) = g'(x) = f'(x+a)$ για όλα τα x, το οποίο σημαίνει ότι η f' είναι περιοδική με περίοδο a.

9. (i) Αν $g(x) = x^5$, τότε $g'(x) = 5x^4$. Αλλά $f(x) = g(x+3)$, άρα από το Πρόβλημα 8(α) έχουμε $f'(x) = g'(x+3) = 5(x+3)^4$. Και $f'(x+3) = 5(x+6)^4$.

(ii) $f(x) = (x-3)^5$, άρα $f'(x) = 5(x-3)^4$, όπως στο μέρος (i). Και $f'(x+3) = 5x^4$.

(iii) $f(x) = (x+2)^7$, άρα $f'(x) = 7(x+2)^6$, όπως στο μέρος (i). Και $f'(x+3) = 7(x+5)^6$.

10. Αν $f(x) = g(t+x)$, τότε $f'(x) = g'(t+x)$ από το Πρόβλημα 8(α). Αν $f(t) = g(t+x)$, τότε $f'(t) = g'(t+x)$, από το Πρόβλημα 8(α), άρα $f'(x) = g'(2x)$.

11. (α) Αν $s(t) = ct^2$, τότε $s'(t) = 2ct$ και δεν υπάρχει αριθμός k έτσι ώστε $s'(t) = ks(t)$ [δηλαδή $2ct = kct^2$] για όλα τα t.

(Με την ευκαιρία, στο σημείο αυτό, δεν γνωρίζουμε καμία μη μηδενική συνάρτηση f για την οποία η f' είναι ανάλογη της f. Μετά το Κεφάλαιο 18 θα ήταν διασκεδαστικό να βρούμε πώς θα έμοιαζε ο κόσμος αν ο Γαλιλαίος είχε δίκιο.)

(β) (i) Αν $s(t) = (a/2)t^2$, τότε $s'(t) = at$, άρα $s''(t) = a$

(ii) $[s'(t)]^2 = (at)^2 = 2a \cdot (a/2)t^2 = 2as(t)$.

(γ) Ο πολυέλαιος πέφτει $s(t) = 16t^2$ πόδια σε t δευτερόλεπτα, και έτσι πέφτει 400 πόδια σε t δευτερόλεπτα, αν $400 = 16t^2$, ή $t = 5$. Μετά από 5 δευτερόλεπτα, η ταχύτητα θα είναι $s'(5) = 5a = 5 \cdot 32 = 160$ πόδια ανά δευτερόλεπτο. Η ταχύτητα ήταν η μισή από αυτήν όταν $80 = s'(t) = 32t$, ή $t = \dfrac{5}{2}$.

21. (α) Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του ορισμού (βλ. Πρόβλημα 5-9).

(β) Αυτό είναι συνέπεια του Προβλήματος 5-11 όταν εφαρμοστεί στις συναρτήσεις $\alpha(h) = [f(a+h) - f(a)]/h$ και $\beta(h) = [g(a+h) - g(a)]/h$.

26. (i) $f''(x) = 6x$.

(iii) $f''(x) = 4x^3$.

30. (i) Σημαίνει ότι $f'(a) = na^{n-1}$ αν $f(x) = x^n$.

(iii) Σημαίνει ότι $g'(a) = f'(a)$ αν $g(x) = f(x) + c$.

(v) Σημαίνει το ίδιο με το (iii).

(vii) Σημαίνει ότι $g'(b) = f'(b+a)$ αν $g(x) = f(x+a)$.

(ix) Σημαίνει ότι $g'(b) = cf'(cb)$ αν $g(x) = f(cx)$.

Κεφάλαιο 10

1. (i) $(1+2x) \cdot \cos(x + x^2)$.

(iii) $(-\sin x) \cdot \cos(\cos x)$.

(v) $\cos\left(\dfrac{\cos x}{x}\right) \cdot \dfrac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

(vii) $(\cos(x + \sin x)) \cdot (1 + \cos x)$.

2. (i) $(\cos((x+1)^2(x+2))) \cdot [2(x+1)(x+2) + (x+1)^2]$.

(iii) $[2\sin((x+\sin x)^2)\cos((x+\sin x)^2)] \cdot 2(x+\sin x)(1+\cos x)$.

(v) $(\cos(x \sin x)) \cdot (\sin x + x \cos x) + (\cos(\sin x^2)(\cos x^2)) \cdot 2x$.

(vii) $(2 \sin x \cos x \sin x^2 \sin^2 x^2) + (2x \cos x^2 \sin^2 x \sin^2 x^2)$
$+ (4x \sin x^2 \cos x^2 \sin^2 x \sin x^2)$.

(ix) $6(x + \sin^5 x)^5 (1 + 5 \sin^4 x \cos x)$.

(xi) $\cos(\sin^7 x^7 + 1)^7 \cdot 7(\sin^7 x^7 + 1)^6 \cdot (7 \sin^6 x^7 \cdot \cos x^7 \cdot 7x^6)$.

(xiii) $\cos(x^2 + \sin(x^2 + \sin x^2)) \cdot [(2x + \cos(x^2 + \sin x^2) \cdot (2x + 2x \cos x^2))]$.

(xv) $\dfrac{(1+\sin x)(2x \cos x^2 \cdot \sin^2 x + \sin x^2 \cdot 2 \sin x \cos x) - \cos x \sin x^2 \sin^2 x}{(1+\sin x)^2}$.

(xvii) $\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}\right)\cdot$

$$\frac{3x^2\sin\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)-x^3\cos\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)\cdot\left(\dfrac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{x^3}{\sin x}\right)}.$$

4. (i) $-\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^2}$.

(iii) $2x^2$.

5. (i) $-x^2$.

(iii) 17.

6. (i) $f'(x)=g'(x+g(a))$.

(iii) $f'(x)=g'(x+g(x))\cdot(1+g'(x))$.

(v) $f'(x)=g(a)$.

7. (α) $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$. Αφού $r'(t)=4$ για αυτό το t για το οποίο $r(t)=6$, έπεται ότι $A'(t)=2\pi\cdot 6\cdot 4=48\pi$ όταν $r(t)=6$.

(β) Αν $V(t)$ είναι ο όγκος τη χρονική στιγμή t, τότε $V(t)=4\pi r(t)^3/3$, και έτσι $V'(t)=4\pi r(t)^2r'(t)=4\pi\cdot 6^2\cdot 4=576\pi$ όταν $r(t)=6$.

(γ) Πρώτη μέθοδος: Αφού $A'(t)=2\pi r(t)r'(t)$ και $A'(t)=5$ για $r(t)=3$, έπεται ότι

$$r'(t)=\frac{A'(t)}{2\pi r(t)}=\frac{5}{6\pi}\quad\text{όταν } r(t)=3.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}V'(t)&=4\pi r(t)^2r'(t)\\&=4\pi\cdot 9\cdot\frac{5}{6\pi}\\&=30\quad\text{όταν } r(t)=3.\end{aligned}$$

Για να εφαρμόσουμε τη δεύτερη μέθοδο, παρατηρούμε ότι

$$f(t)=A(t)^{3/2}=\sqrt{A(t)^3},$$

άρα, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 9-3 και τον Κανόνα της Αλυσίδας,

$$\begin{aligned}f'(t)&=\frac{1}{2\sqrt{A(t)^3}}\cdot 3A(t)^2A'(t)\\&=\frac{1}{2A(t)^{3/2}}\cdot 3A(t)^2A'(t)\\&=\frac{3}{2}A(t)^{1/2}A'(t)\quad\text{(όπως μπορεί να είχαμε μαντέψει).}\end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}V(t)&=\frac{4\pi r(t)^3}{3}=\frac{4\pi[r(t)^2]^{3/2}}{3}\\&=\frac{4[\pi r(t)^2]^{3/2}}{3\pi^{1/2}}\end{aligned}$$

$$= \frac{4A(t)^{3/2}}{3\pi^{1/2}}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{4}{3\pi^{1/2}} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{A(t)}A'(t) \\ &= \frac{2}{\pi^{1/2}} \cdot \pi^{1/2} r(t) A'(t) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30. \end{aligned}$$

10. (i) $(f \circ h)'(0) = f'(h(0)) \cdot h'(0) = f'(3) \cdot \sin^2(\sin 1) = [6 \sin \frac{1}{3} - \cos \frac{1}{3}] \sin^2(\sin 1)$.

(iii) $\alpha'(x^2) = h'(x^4) \cdot 2x^2 = \sin^2(\sin(x^4 + 1)) \cdot 2x^2$.

12. Ο Κανόνας της Αλυσίδας συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x). \end{aligned}$$

35. (i) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = (\cos y) \cdot (1 + 2x) = (\cos(x + x^2)) \cdot (1 + 2x)$.

(iii) $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (\cos u) \cdot (\cos x) = (\cos(\sin x)) \cdot (\cos x)$.

Κεφάλαιο 11

1. (i) $0 = f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$ για $x = 2$ και $x = -\dfrac{4}{3}$, τα οποία και τα δύο είναι στο $[-2, 2]$·
$f(-2) = 5$, $f(2) = -11$, $f(-\frac{4}{3}) = \dfrac{203}{27}$·
μέγιστο $= \dfrac{203}{27}$, ελάχιστο $= -11$.

(iii) $0 = f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1)$ για $x = 0$ και $x = 1$, από τα οποία μόνο το 0 είναι στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$·
$f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{43}{16}$, $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{11}{16}$, $f(0) = 0$·
μέγιστο $= \dfrac{43}{16}$, ελάχιστο $= 0$.

(v) $0 = f'(x) =$

$$\frac{x^2 + 1 - (x + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

για $x = -1 + \sqrt{2}$ και $x = -1 - \sqrt{2}$, από τα οποία μόνο το $-1 + \sqrt{2}$ είναι στο $[-1, \frac{1}{2}]$·
$f(-1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{6}{5}$, $f(-1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})/2$·
μέγιστο $= (1 + \sqrt{2})/2$, ελάχιστο $= 0$.

2. (i) το $-\dfrac{4}{3}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου, και το 2 σημείο τοπικού ελαχίστου.

(iii) το 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, και δεν υπάρχουν σημεία τοπικού μεγίστου.

(v) το $-1+\sqrt{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου, και το $-1-\sqrt{2}$ σημείο τοπικό ελαχίστου.

4. (α) Σημειώστε ότι η f έχει πράγματι ελάχιστο, αφού είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού. Το ελάχιστο εμφανίζεται στο σημείο x για το οποίο

$$0 = f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x-a_i),$$

άρα $x = (a_1 + \cdots + a_n)/n$.

5. (i) Το 3 και το 7 είναι σημεία τοπικού μεγίστου, ενώ το 5 και το 9 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου.

(iii) Όλοι οι άρρητοι $x > 0$ είναι σημεία τοπικού ελαχίστου, και όλοι οι άρρητοι $x < 0$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

(v) Το x είναι σημείο τοπικού ελαχίστου αν το δεκαδικό ανάπτυγμά του δεν περιέχει κάποιο 5. Είναι σημείο τοπικού μεγίστου αν το δεκαδικό ανάπτυγμά του περιέχει ακριβώς ένα 5 που ακολουθείται από άπειρα 9. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, το x είναι και σημείο τοπικού μεγίστου και σημείο τοπικού ελαχίστου.

7. Αν $f(x)$ είναι το συνολικό μήκος της καμπύλης, τότε

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(1-x)^2+b^2}.$$

Η θετική συνάρτηση f έχει εμφανώς ελάχιστο, αφού $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, και η f είναι παντού παραγωγίσιμη, και επομένως, το ελάχιστο εμφανίζεται σε σημείο x για το οποίο $f'(x) = 0$. Αλλά, $f'(x) = 0$ όταν

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{(1-x)}{\sqrt{(1-x)^2+b^2}} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση λέει ότι $\cos\alpha = \cos\beta$.

Είναι επίσης δυνατόν να παρατηρήσουμε ότι το $f(x)$ ισούται με το άθροισμα των μηκών του διακεκομμένου ευθυγράμμου τμήματος και του ευθυγράμμου τμήματος από το $(x,0)$ στο $(1,b)$. Αυτό το άθροισμα είναι ελάχιστο όταν τα δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι συνευθειακά (αν απαιτείται αυστηρή αιτιολόγηση, χρησιμοποιούμε το Πρόβλημα 4-9(β)). Λίγη επιπεδομετρία δείχνει ότι το πιο πάνω συμβαίνει όταν $\alpha = \beta$.

10. Αν x είναι το μήκος μιας πλευράς ορθογωνίου με περίμετρο P, τότε το μήκος της άλλης πλευράς είναι $(P-2x)/2$, άρα το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$A(x) = \frac{x(P-2x)}{2}.$$

Επομένως, το ορθογώνιο με το μέγιστο εμβαδόν συμβαίνει όταν το x είναι το σημείο μεγίστου της f στο $(0, P/2)$. Αφού η A είναι συνεχής στο $[0, P/2]$ και $A(0) = A(P/2) = 0$, και $A(x) > 0$ για x στο $(0, P/2)$, το μέγιστο υπάρχει. Επειδή η A είναι παραγωγίσιμη στο $(0, P/2)$, το σημείο ελαχίστου x ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{P-2x}{2} - x \\ &= \frac{P-4x}{2}, \end{aligned}$$

άρα $x = P/4$.

11. Έστω $S(r)$ το εμβαδόν της επιφάνειας ορθού κυκλικού κυλίνδρου όγκου V και ακτίνας r. Αφού

$$V = \pi r^2 h \quad \text{όπου } h \text{ είναι το ύψος,}$$

έχουμε $h = V/\pi r^2$, άρα

$$\begin{aligned} S(r) &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}. \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε το σημείο ελαχίστου της S στο $(0, \infty)$. Αυτό υπάρχει αφού $\lim_{r\to 0} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty$. Επειδή η S είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \infty)$, το σημείο ελαχίστου r ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} 0 = S'(r) &= 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \\ &= \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}, \end{aligned}$$

ή

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

21. Το 1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και το 3 τοπικού ελαχίστου.

28. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(x) \quad \text{για κάποιο } x \text{ στο } (a, b) \\ &\geq M, \end{aligned}$$

άρα $f(b) - f(a) \geq M(b - a)$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= f'(x) \quad \text{για κάποιο } x \text{ στο } (a, b) \\ &\leq m, \end{aligned}$$

άρα $f(b) - f(a) \leq m(b - a)$.

(γ) Αν $|f'(x)| \leq M$ για όλα τα x στο $[a, b]$, τότε $-M \leq f(x) \leq M$, άρα

$$f(a) - M(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a),$$

ή

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

31. (α) $f(x) = -\cos x + a$ για κάποιον αριθμό a (διότι $f(x) = -\cos x$ είναι μία τέτοια συνάρτηση και οποιεσδήποτε δύο τέτοιες συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερά).

(β) $f'(x) = x^4/4 + a$ για κάποιον αριθμό a, άρα $f(x) = x^5/20 + ax + b$ για κάποιους αριθμούς a και b.

(γ) $f''(x) = x^2 + x^3/3 + a$ για κάποιον a, άρα $f'(x) = x^3/6 + x^4/12 + ax + b$ για κάποια a και b, άρα $f(x) = x^4/24 + x^5/60 + ax^2/2 + bx + c$ για κάποιους αριθμούς a, b και c. Ισοδύναμα, και πιο απλά, $f(x) = x^4/24 + x^5/60 + ax^2 + bx + c$ για κάποιους αριθμούς a, b και c.

32. (α) Αφού $s''(t) = -32$, έχουμε ότι $s'(t) = -32t + \alpha$ για κάποιο α, άρα $s(t) = -16t^2 + \alpha t + \beta$ για κάποια α και β.

(β) Εμφανώς, $s(0) = 0 + 0 + \beta$ και $s'(0) = 0 + \alpha$. Επομένως, $\alpha = v_0$ και $\beta = s_0$.

(γ) Σε αυτήν την περίπτωση, $s_0 = 0$ και $v_0 = v$, άρα $s(t) = -16t^2 + vt$. Η μέγιστη τιμή της s εμφανίζεται όταν $0 = s'(t) = -32t + v$, ή $t = v/32$, άρα η μέγιστη τιμή είναι

$$\begin{aligned} s\left(\frac{v}{32}\right) &= -16\left(\frac{v}{32}\right)^2 + v \cdot \left(\frac{v}{32}\right) \\ &= \frac{-v^2}{64} + \frac{v^2}{32} \\ &= \frac{v^2}{64}. \end{aligned}$$

Εκείνη τη χρονική στιγμή, η ταχύτητα είναι εμφανώς 0, αλλά η επιτάχυνση είναι -32 (όπως και κάθε στιγμή). Το βάρος χτυπά το έδαφος σε χρόνο $t > 0$ όταν

$$0 = s(t) = -16t^2 + vt,$$

ή $t = v/16$ (χρειάζεται τόσο χρόνο να πέσει κάτω όσο χρειάστηκε να φτάσει στην κορυφή). Η ταχύτητα τότε είναι

$$\begin{aligned} s'(v/16) &= -32\left(\frac{v}{16}\right) + v \\ &= -v \end{aligned}$$

(η ίδια ταχύτητα με την οποία αρχικά κινήθηκε προς τα πάνω).

47. Εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στην $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[64, 66]$:

$$\frac{\sqrt{66} - \sqrt{64}}{66 - 64} = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{για κάποιο } x \text{ στο } [64, 66].$$

Επειδή $64 < x < 81$, έχουμε $8 < \sqrt{x} < 9$, άρα

$$\frac{1}{2 \cdot 9} < \frac{\sqrt{66} - 8}{2} < \frac{1}{2 \cdot 8}.$$

51. Ο Κανόνας του l'Hôpital δεν οδηγεί στην εξίσωση

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2}$$

επειδή $\lim\limits_{x \to 1} 3x^2 + 1 \neq 0$.

52. (i)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sec^2 x} = \lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{2x} = -1.$$

Κεφάλαιο 12

1. (i) $f^{-1}(x) = (x - 1)^{1/3}$. (Αν $y = f^{-1}(x)$, τότε $x = f(y) = y^3 + 1$, άρα $y = (x - 1)^{1/3}$.)

(iii) $f^{-1} = f$. (Αν $y = f^{-1}(x)$, τότε

$$x = f(y) = \begin{cases} y, & y \text{ ρητός} \\ -y, & y \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Επειδή ο $\pm y$ είναι ρητός ή άρρητος αν και μόνο αν είναι ο y, έχουμε $y = x$ αν ο x είναι ρητός και $y = -x$ αν ο x είναι άρρητος, άρα $y = f(x)$.)

(v)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \neq a_1, \ldots, a_n \\ a_{i-1}, & x = a_i, \quad i = 2, \ldots, n \\ a_n, & x = a_1. \end{cases}$$

(vii) $f^{-1} = f$.

2. (i) Η f^{-1} είναι αύξουσα και το $f^{-1}(x)$ δεν ορίζεται για $x \leq 0$.

(iii) Η f^{-1} είναι φθίνουσα και το $f^{-1}(x)$ δεν ορίζεται για $x \leq 0$.

3. Έστω ότι η f είναι αύξουσα. Θέτουμε $a < b$. Τότε, $f^{-1}(a) \neq f^{-1}(b)$, αφού η f^{-1} είναι 1-1. Επομένως, είτε $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$, ή $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$. Αλλά αν $f^{-1}(a) > f^{-1}(b)$, τότε

$$b = f(f^{-1}(b)) < f(f^{-1}(a)) = a,$$

που είναι αντίφαση. Η απόδειξη είναι όμοια για φθίνουσα f, ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η $-f$.

4. Εμφανώς, η $f + g$ είναι αύξουσα, διότι αν $f(a) < f(b)$ και $g(a) < g(b)$, τότε $(f + g)(a) = f(a) + g(a) < f(b) + g(b) = (f + g)(b)$.
Η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά αύξουσα. Για παράδειγμα, πάρτε $f(x) = g(x) = x$. (Αλλά η $f \cdot g$ είναι αύξουσα αν $f(x), g(x) \geq 0$ για όλα τα x.)
Η $f \circ g$ είναι αύξουσα, διότι αν $a < b$, τότε $g(a) < g(b)$, άρα $f(g(a)) < f(g(b))$.

5. (α) Αν $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, έτσι ώστε $f(g(x)) = f(g(y))$, τότε $g(x) = g(y)$, αφού η f είναι 1-1, άρα $x = y$, αφού η g είναι 1-1.
$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$: διότι αν $y = (f \circ g)^{-1}(x)$, τότε $x = (f \circ g)(y) = f(g(y))$ άρα $g(y) = f^{-1}(x)$, άρα $y = g^{-1}(f^{-1}(x))$.

6. Αν $f(x) = f(y)$, τότε

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

άρα

$$acxy + bcy + adx + bd = acxy + ady + bcx + bd,$$

ή

$$ad(x - y) = bc(x - y).$$

Αν $ad \neq bc$, αυτό συνεπάγεται ότι $x - y = 0$. (Αλλά αν $ad = bc$, τότε $f(x) = f(y)$ για όλα τα x και y στο πεδίο ορισμού της f.)

Αν $y = f^{-1}(x)$, τότε $x = f(y)$, άρα

$$x = \frac{ay + b}{cy + d}$$

άρα

$$f^{-1}(x) = y = \frac{-dx + b}{cx - a} \qquad \text{για } x \neq a/c.$$

7. (i) Εκείνα τα διαστήματα $[a, b]$ που περιέχονται στο $(-\infty, 0]$ ή στο $[0, 2]$ ή στο $[2, \infty)$, αφού η f είναι αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, \infty)$, και φθίνουσα στο $[0, 2]$.

(iii) Εκείνα τα διαστήματα $[a, b]$ που περιέχονται στο $(-\infty, 0]$ ή στο $[0, \infty)$, αφού η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και φθίνουσα στο $[0, \infty)$.

11. Αφού

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(x) &= \frac{-f''(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)}{[f'(f^{-1}(x))]^2} \\ &= \frac{-f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.\end{aligned}$$

20. Ο τύπος για την παράγωγο γράφεται:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

(Σε αυτόν τον τύπο είναι ευνόητο ότι dx/dy σημαίνει $(f^{-1})'(y)$, ενώ dy/dx είναι «έκφραση ως προς x», και στην τελική απάντηση το x πρέπει να αντικατασταθεί με y, μέσω της $y = f(x)$.)

Οι υπολογισμοί του Προβλήματος 20, όταν ολοκληρωθούν, δείχνουν ότι

$$\begin{aligned}\frac{dx^{1/n}}{dx} &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-(1/n)}} \\ &= \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}G'(x) &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - F'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - f(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \\ &= x(f^{-1})'(x) + f^{-1}(x) - x(f^{-1})'(x) \\ &= f^{-1}(x).\end{aligned}$$

22. (i)

$$(h^{-1})'(3) = \frac{1}{h'(h^{-1}(3))} = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\sin^2(\sin 1)}.$$

Κεφάλαιο 13

1. Αν $P_n = \{t_0, \ldots, t_n\}$ είναι η διαμέριση με $t_i = ib/n$, τότε

$$\begin{aligned}L(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1})^3 \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 \cdot \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{b}{n} \\ &= \frac{b^4}{n^4} \sum_{j=0}^{n-1} j^3\end{aligned}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{(n-1)^4}{4} + \frac{(n-1)^3}{2} + \frac{(n-1)^2}{4}\right],$$

και όμοια

$$U(f, P_n) = \frac{b^4}{n^4}\sum_{j=1}^{n} j^3$$
$$= \frac{b^4}{n^4}\left[\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right].$$

Εμφανώς, τα $L(f, P_n)$ και $U(f, P_n)$ μπορούν να πλησιάσουν το $b^4/4$ όσο κοντά το επιθυμούμε, αν διαλέξουμε το n αρκετά μεγάλο. Επομένως, το $U(f, P_n) - L(f, P_n)$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, αν διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο. Αυτό δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, υπάρχει μόνο ένας αριθμός a, έτσι ώστε $L(f, P_n) \leq a \leq U(f, P_n)$ για όλα τα n. Αφού το $\int_0^b x^3\,dx$ έχει αυτήν την ιδιότητα, η απόδειξη ότι $\int_0^b x^3\,dx = b^4/4$ θα έχει ολοκληρωθεί μόλις δειχθεί ότι $L(f, P_n) \leq b^4/4 \leq U(f, P_n)$ για όλα τα n. Αυτό γίνεται με απευθείας υπολογισμό, αλλά στην πραγματικότητα έπεται από το γεγονός ότι τα $L(f, P_n)$ και $U(f, P_n)$ μπορούν να πλησιάσουν το $b^4/4$ όσο κοντά το επιθυμούμε, διαλέγοντας n αρκετά μεγάλο. Πράγματι, αν αλήθευε ότι $b^4/4 < \int_0^b x^3\,dx$, τότε δεν θα μπορούσαμε να κάνουμε το $U(f, P_n)$ να είναι όσο κοντά θέλουμε στο $b^4/4$ διαλέγοντας αρκετά μεγάλο n, αφού κάθε $U(f, P_n) \geq \int_0^b x^3\,dx$, και ομοίως, δεν γίνεται να έχουμε $b^4/4 > \int_0^b x^3\,dx$.

2. Έχουμε

$$L(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{(n-1)^5}{5} + \frac{(n-1)^4}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)}{30}\right],$$
$$U(f, P_n) = \frac{b^5}{n^5}\left[\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right].$$

Εμφανώς τα $L(f, P_n)$ και $U(f, P_n)$ μπορούν να προσεγγίσουν το $b^5/5$ όσο κοντά θέλουμε, διαλέγοντας ένα n αρκετά μεγάλο. Όπως και στο Πρόβλημα 1, αυτό συνεπάγεται ότι $\int_0^b x^4\,dx = b^5/5$.

7. (i) $\int_0^2 f = 0.$

(iii) $\int_0^2 f = 3.$

(v) Η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(vii) $\int_0^2 f = 1.$

(Για μια αυστηρή απόδειξη ότι οι συναρτήσεις στα (i), (iii) και (vii) είναι ολοκληρώσιμες, βλ. Πρόβλημα 19. Οι τιμές των ολοκληρωμάτων, που είναι εμφανείς από τη γεωμετρική εικόνα, μπορούν να εξαχθούν αυστηρά χρησιμοποιώντας τις ιδέες της απόδειξης του Προβλήματος 19, σε συνδυασμό με γνωστά ολοκληρώματα.)

8. (i)
$$\int_{-2}^{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\right)-x^2\right]dx=\frac{16}{3}.$$

(iii)
$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2}[(1-x^2)-x^2]\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

(v)
$$\int_{0}^{2}[(x^2-2x+4)-x^2]\,dx=4.$$

9.

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx=\int_a^b\left(f(x)\int_c^d g(y)\,dy\right)dx \quad (\text{εδώ η } f(x) \text{ είναι σταθερά})$$
$$=\int_c^d g(y)\,dy\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
$$(\text{εδώ η } \int_c^d g(y)\,dy \text{ είναι η σταθερά}).$$

13. (α) Εμφανώς, $L(f,P)\geq 0$ για κάθε διαμέριση P.

(β) Εφαρμόστε το μέρος (α) στην $f-g$ και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι
$$\int_a^b(f-g)=\int_a^b f-\int_a^b g.$$

23. (α) Εμφανώς
$$m(b-a)\leq L(f,P)\leq U(f,P)\leq M(b-a)$$
για όλες τις διαμερίσεις P του $[a,b]$. Συνεπώς,
$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a).$$
Επομένως, το
$$\mu=\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$
ικανοποιεί την $m\leq\mu\leq M$.

(β) Έστω m και M η ελάχιστη και μέγιστη, αντίστοιχα, τιμή της f στο $[a,b]$. Επειδή η f είναι συνεχής, παίρνει τις τιμές m και M, και συνεπώς, και την τιμή μ του μέρους (α).

33. (α) 0.

(β) $\dfrac{1}{2}$.

37. Επειδή
$$-|f|\leq f\leq|f|,$$
έχουμε
$$-\int_a^b|f|\leq\int_a^b f\leq\int_a^b|f|,$$

άρα

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|.$$

(Το Πρόβλημα 36 συνεπάγεται ότι το $\int_a^b |f|$ έχει νόημα.)

Κεφάλαιο 14

1. (i) $(\sin^3 x^3)\cdot 3x^2$.

(iii) $\displaystyle\int_8^x \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}\,dt$.

(v) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}\,dt$.

(vii) $(F^{-1})'(x) = \dfrac{1}{F'(F^{-1}(x))} = F^{-1}(x)$.

2. (i) Όλα τα $x \neq 1$.

(iii) Όλα τα $x \neq 1$.

(v) Όλα τα x.

(vii) Όλα τα $x \neq 0$. (Η F δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, διότι $F(x) = 0$ για $x \le 0$, αλλά υπάρχουν $x > 0$ όσο θέλουμε κοντά στο 0, έτσι ώστε $\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{2}$.)

4. (i)

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1+\sin(\sin(f^{-1}(0)))}\\ &= \frac{1}{1+\sin(\sin 0)} = 1.\end{aligned}$$

8. $F(x) = x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, άρα

$$F'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\,dt.$$

11.

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^y \left(\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt\right) dz\right) dy.$$

13. Μπορούμε να διαλέξουμε

$$f(x) = \frac{x^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n}+1}.$$

Τότε

$$\int_0^b \sqrt[n]{x}\,dx = f(b) - f(0) = \frac{b^{(1/n)+1}}{\dfrac{1}{n}+1}.$$

Κεφάλαιο 15

1. (i)
$$\frac{1}{1+\arctan^2(\arctan x)}\cdot\frac{1}{1+\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

(iii)
$$\frac{1}{1+(\tan x\arctan x)^2}\cdot\left(\sec^2 x\arctan x+\frac{\tan x}{1+x^2}\right).$$

2. (i) 0.

(iii) 0.

(v) 0.

7. (α)
$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x.\\
\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x.\\
\sin 3x &= \sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x\\
&= 2\sin x\cos^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x\\
&= 3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x.\\
\cos 3x &= \cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x\\
&= (\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x=2\sin^2 x\cos x\\
&= \cos^3 x-\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x\cos x\\
&= \cos^3 x-3\sin^2 x\cos x\\
&= 4\cos^3 x-3\cos x.
\end{aligned}$$

(β) Αφού $\cos\pi/4>0$ και
$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{4}-1,$$
έχουμε $\cos\pi/4=\sqrt{2}/2$. Έπεται ότι, αφού $\sin\pi/4>0$ και $\sin^2+\cos^2=1$, $\sin\pi/4=\sqrt{2}/2$ και επομένως $\tan\pi/4=1$. Όμοια, αφού $\cos\pi/6>0$ και
$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos 3\cdot\frac{\pi}{6}=4\cos^3\frac{\pi}{6}-3\cos\frac{\pi}{6},$$
έχουμε $\cos\pi/6=\sqrt{3}/2$. Έπεται ότι, αφού $\sin\pi/6>0$, $\sin\pi/6=\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{1}{2}$.

9. (α)
$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\\
&= \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}\\
&= \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}\\
&= \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.
\end{aligned}$$

(β) Από το μέρος (α) έχουμε

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x + \arctan y) &= \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\tan(\arctan y)} \\ &= \frac{x+y}{1-xy},\end{aligned}$$

αρκεί τα $\arctan x$, $\arctan y$ και $\arctan x + \arctan y \neq k\pi + \pi/2$. Αφού $-\pi/2 < \arctan x$, $\arctan y < \pi/2$, αυτό συμβαίνει πάντα, εκτός όταν $\arctan x + \arctan y = \pm\pi/2$, που είναι ισοδύναμο με $xy = 1$. Από αυτήν την εξίσωση συμπεραίνουμε ότι

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

αρκεί το $\arctan x + \arctan y$ να βρίσκεται στο $(-\pi/2, \pi/2)$, πράγμα που είναι αλήθεια όποτε $xy < 1$. (Αν $x, y > 0$ και $xy > 1$, ώστε $\arctan x + \arctan y > \pi/2$, τότε πρέπει να προσθέσουμε π στη δεξιά πλευρά, και αν $x, y < 0$ και $xy > 1$, ώστε $\arctan x + \arctan y < -\pi/2$, τότε πρέπει να αφαιρέσουμε π.)

11. Ο πρώτος τύπος εξάγεται με αφαίρεση της δεύτερης από την πρώτη από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\cos(m-n)x &= \cos(mx - nx) = \cos mx\cos(-nx) - \sin mx\sin(-nx) \\ &= \cos mx\cos nx + \sin mx\sin nx, \\ \cos(m+n)x &= \cos mx\cos nx - \sin mx\sin nx.\end{aligned}$$

Οι άλλοι τύποι εξάγονται με όμοιο τρόπο.

12. Από το Πρόβλημα 11 έπεται ότι, αν $m \neq n$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]\right. \\ &\qquad \left. - \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\} \\ &= 0.\end{aligned}$$

(Σημειώστε ότι $\sin(m-n)(-\pi) = \sin(m-n)\pi$ αφού ο $m-n$ είναι ακέραιος.) Αλλά, αν $m = n$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(m+n)x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\pi - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right] - \left[-\pi - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n}\right]\right\} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Οι άλλοι τύποι αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο.

15. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1.\end{aligned}$$

Άρα

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

(β) Αυτοί οι τύποι έπονται από το μέρος (α) επειδή $\cos x/2 \geq 0$ και $\sin x/2 \geq 0$ (αφού $0 \leq x \leq \pi/2$).

(γ)

$$\int_a^b \sin^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{4}(\sin 2b - \sin 2a).$$
$$\int_a^b \cos^2 x\,dx = \int_a^b \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{4}(\sin 2b - \sin 2a).$$

19. (α) $\arctan 1 - \arctan 0 = \pi/4$.

(β) $\lim_{x\to\infty} \arctan x - \arctan 0 = \pi/2$.

20. $\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\sin x = 1$.

21. (α)

$$(\sin^\circ)'(x) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos^\circ(x).$$
$$(\cos^\circ)'(x) = \frac{\pi}{180}\cdot -\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{-\pi}{180}\sin^\circ(x).$$

(β) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^\circ x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x/180)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sin(\pi x/180)}{\pi x/180} = \frac{\pi}{180}$.

$\lim_{x\to\infty} x\sin^\circ\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^\circ x}{x} = \frac{\pi}{180}$.

Κεφάλαιο 18

1. (i) $e^{e^{e^{e^x}}}\cdot e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$.

(iii) $(\sin x)^{\sin(\sin x)}[(\log(\sin x))\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos x + (\cos x/\sin x)\cdot\sin(\sin x)]$.

(v) $(\sin x)^{(\sin x)^{\sin x}}\left[(\sin x)^{\sin x}\cdot\log(\sin x)\left\{\cos x\cdot\log(\sin x) + \sin x\frac{\cos x}{\sin x}\right\} + (\sin x)^{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right]$.

(vii) $\left[\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right]^{\log(\sin e^x)}\left[\left(\log\left(\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right)\right)\cdot\frac{(\cos e^x)e^x}{\sin e^x} + \log(\sin e^x)\cdot\frac{\sin x - x\cos x}{\arcsin\left(\frac{x}{\sin x}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}\cdot\sin^2 x}\right]$.

(ix) $(\log x)^{\log x}\cdot\left[\log(\log x)\cdot\frac{1}{x} + \log x\cdot\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}\right]$.

(xi) $$\cos\left(x^{\sin(x^{\sin x})}\right)\cdot x^{\sin(x^{\sin x})}\cdot\left[\cos\left(x^{\sin x}\right)\cdot x^{\sin x}\cdot\log x\left\{\cos x\cdot\log x+\frac{\cos x}{x}\right\}+\frac{\sin(x^{\sin x})}{x}\right].$$

5. (i) 0.

(iii) $\dfrac{1}{6}$.

(v) $\dfrac{1}{3}$.

8. (α)
$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x&=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\&=\left[\frac{e^{2x}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]-\left[\frac{e^{2x}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{e^{-2x}}{4}\right]\\&=1.\end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned}\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y&=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right)+\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right)\\&=\left[\frac{e^{x+y}}{4}-\frac{e^{-x-y}}{4}-\frac{e^{-x+y}}{4}+\frac{e^{x-y}}{4}\right]+\left[\frac{e^{x+y}}{4}-\frac{e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{-x+y}}{4}-\frac{e^{x-y}}{4}\right]\\&=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\sinh(x+y).\end{aligned}$$

(ε) Επειδή
$$\sinh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$
έχουμε
$$\sinh'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\cosh x.$$

(ζ) Επειδή
$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},$$
έχουμε
$$\begin{aligned}\tanh'(x)&=\frac{(\cosh x)^2-(\sinh x)^2}{\cosh^2 x}\\&=\frac{1}{\cosh^2 x}\quad\text{από το μέρος (α).}\end{aligned}$$

9. (α) Αν $y=\cosh^{-1}x$, τότε $y\geq 0$ και
$$x=\cosh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}\quad\text{από το Πρόβλημα 7(α).}$$
Άρα
$$\sinh(\cosh^{-1}x)=\sinh y=\sqrt{x^2-1}\quad\text{αφού } \sinh y\geq 0 \text{ για } y\geq 0.$$

(γ)

$$\begin{aligned}(\sinh^{-1})'(x) &= \frac{1}{\sinh'(\sinh^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{από το μέρος (β).}\end{aligned}$$

(ε)

$$\begin{aligned}(\tanh^{-1})'(x) &= \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(x))},\\ &= \cosh^2(\tanh^{-1}(x)).\end{aligned}$$

Αλλά

$$\tanh^2 y + \frac{1}{\cosh^2 y} = 1 \quad \text{από το Πρόβλημα 8(β),}$$

άρα

$$\tanh^2(\tanh^{-1}(x)) + \frac{1}{\cosh^2(\tanh^{-1}(x))} = 1,$$

ή

$$\cosh^2(\tanh^{-1}(x)) = \frac{1}{1-x^2}.$$

10. (α) Αν $y = \sinh^{-1} x$, τότε

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

άρα

$$\begin{aligned}e^y - e^{-y} &= 2x,\\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0,\\ e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2}\end{aligned}$$

άρα

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2} \quad \text{αφού } e^y > 0$$

ή

$$y = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Όμοια

$$\begin{aligned}\cosh^{-1} x &= \log(x + \sqrt{x^2-1}),\\ \tanh^{-1} x &= \tfrac{1}{2}\log(1+x) - \tfrac{1}{2}\log(1-x).\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \sinh^{-1} b - \sinh^{-1} a \quad \text{από το Πρόβλημα 9(γ)}\\ &= \log(b + \sqrt{1+b^2}) - \log(a + \sqrt{1+a^2}).\end{aligned}$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \begin{cases}\log(b + \sqrt{b^2-1}) - \log(a + \sqrt{a^2-1}) & a, b > 1\\ -\log(-b + \sqrt{b^2-1}) + \log(-a + \sqrt{a^2-1}) & a, b < -1\end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}[\log(1+b) - \log(1-b) - \log(1+a) + \log(1-a)].$$

13. (α) $\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\log a}$. Αφού $\log a < 0$, έχουμε $\lim_{x\to\infty} x\log a = -\infty$, άρα $\lim_{x\to\infty} e^{x\log a} = 0$.

(γ) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^n}{x} = \lim_{y\to\infty} \dfrac{y^n}{e^y} = 0.$

(ε) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x}$. Αλλά, $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ από το μέρος (δ), άρα $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

17. (α) $\lim_{y\to 0} \log(1+y)/y = \log'(1) = 1.$

(β) $\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x) = \lim_{y\to 0^+} \log(1+y)/y = 1.$

(γ)

$$\begin{aligned} e = \exp(1) &= \exp(\lim_{x\to\infty} x\log(1+1/x)) \\ &(*) = \lim_{x\to\infty} \exp(x\log(1+1/x)) \\ &= \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x. \end{aligned}$$

(Η ισότητα με τον αστερίσκο εξαρτάται από τη συνέχεια της exp στο 1 και μπορεί να αιτιολογηθεί ως εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, έτσι ώστε $|e - \exp y| < \varepsilon$ για $|y-1| < \delta$. Επιπλέον, υπάρχει κάποιο N, έτσι ώστε $|x\log(1+1/x) - 1| < \delta$ για $x > N$. Άρα $|e - \exp(x\log(1+1/x))| < \varepsilon$ για $x > N$.)

(δ)

$$\begin{aligned} e^a &= [\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x]^a = \lim_{x\to\infty} (1+1/x)^{ax} \\ &= \lim_{ax\to\infty} (1+1/x)^{ax} \\ &= \lim_{y\to\infty} (1+a/y)^y. \end{aligned}$$

19. Μετά από ένα χρόνο το πλήθος των ευρώ που αποδίδει μια αρχική κατάθεση 1 ευρώ θα είναι

$$\lim_{x\to\infty} (1+a/100x)^x = e^{a/100}.$$

20. (α) Εμφανώς $f'(x) = 1/x$ για $x > 0$. Αν $x < 0$, τότε $f(x) = \log(-x)$, άρα $f'(x) = (-1)\cdot 1/(-x) = 1/x$.

(β) Μπορούμε να γράψουμε την $\log|f|$ ως $g\circ f$, όπου $g(x) = \log|x|$ είναι η συνάρτηση του μέρους (α). Επομένως, $(\log|f|)' = (g'\circ f)\cdot f' = 1/f\cdot f'$.

21. (γ) Έστω $g(x) = f(x)/e^{cx}$. Τότε

$$g'(x) = \frac{e^{cx}f'(x) - f(x)ce^{cx}}{e^{2cx}} = 0,$$

άρα υπάρχει κάποιος αριθμός k, έτσι ώστε $g(x) = k$ για όλα τα x.

22. (α) Σύμφωνα με το Πρόβλημα 21, υπάρχει κάποιο k, έτσι ώστε $A(t) = ke^{ct}$. Τότε $k = ke^{0\cdot t} = A_0$. Άρα $A(t) = A_0e^{ct}$.

(β) Αν $A(t+\tau) = A(t)/2$, τότε

$$A_0e^{ct+c\tau} = \frac{A_0e^{ct}}{2},$$

άρα $e^{ct}e^{c\tau} = e^{ct}/2$ ή $e^{c\tau} = \dfrac{1}{2}$, άρα $\tau = -(\log 2)/c$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το τ αυτό είναι δεκτό.

23. Ο Νόμος του Newton λέει ότι για κάποιον (θετικό) αριθμό c,

$$T'(t) = c(T - M),$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$(T - M)' = c(T - M).$$

Άρα, από το Πρόβλημα 21, υπάρχει κάποιος αριθμός k, έτσι ώστε

$$T(t) - M = ke^{ct},$$

και $k = ke^{0 \cdot t} = T(0) - M = T_0 - M$. Άρα $T(t) = M + (T_0 - M)e^{ct}$.

Κεφάλαιο 19

1. (i) $\left(\sqrt[5]{x^3} + \sqrt[6]{x}\right)/\sqrt{x} = x^{1/10} + x^{-1/3}$.

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{-2}$.

(iii) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})/e^{4x} = e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x}$.

(iv) $a^x/b^x = (a/b)^x = e^{x \log(a/b)}$.

(v) $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

(vi) $\dfrac{1}{a^2 + x^2} = \dfrac{1/a^2}{1 + \left(\dfrac{x}{a}\right)^2}$.

(vii) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{1/a}{\sqrt{1 - (x/a)^2}}$.

(viii) $\dfrac{1}{1 + \sin x} = \dfrac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \dfrac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x$.

(ix) $\dfrac{8x^2 + 6x + 4}{x + 1} = 8x - 2 + \dfrac{6}{x + 1}$.

(x) $\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$.

2. (i) $-\cos e^x$. (Εστω $u = e^x$.)

(iii) $(\log x)^2/2$. (Εστω $u = \log x$.)

(v) e^{e^x}. (Εστω $u = e^{e^x}$.)

(vii) $2e^{\sqrt{x}}$. (Εστω $u = \sqrt{x}$.)

(ix) $-(\log(\cos x))^2/2$. (Εστω $u = \log(\cos x)$.)

3. (i)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x \, dx\right] \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x.\end{aligned}$$

(iii) Έχουμε

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \sin bx \, dx &= \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \\ &= \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax} \cos bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax}(-\sin bx) \, dx\right],\end{aligned}$$

ή

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx.$$

(v) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα $\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x$ του κειμένου, έχουμε

$$\begin{aligned}\int (\log x)^3\,dx &= [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\log x \\ &\qquad - \int \frac{1}{x}[x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x]\,dx \\ &= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x\log x \\ &\qquad - \int (\log x)^2\,dx + 2[x\log x - x] - 2x \\ &= x(\log x)^3 - 2x(\log x)^2 + 2x\log x \\ &\qquad - [x(\log x)^2 - 2x(\log x) + 2x] + 2[x\log x - x] - 2x \\ &= x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x.\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \int (\sec^2 x)(\sec x)\,dx = \tan x\sec x - \int (\tan x)(\sec x\tan x)\,dx \\ &= \tan x\sec x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \tan x\sec x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx,\end{aligned}$$

ή

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}[\tan x\sec x + \log(\sec x + \tan x)].$$

(ix)

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}\log x\,dx &= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{2}{3}\int x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\,dx \\ &= \frac{2x^{3/2}}{3}\log x - \frac{4}{9}x^{3/2}.\end{aligned}$$

4. (i) Θέτουμε $x = \sin u$, $dx = \cos u\,du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{\cos u\,du}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int 1\,du = u = \arcsin x.$$

(iii) Θέτουμε $x = \sec u$, $dx = \sec u\tan u\,du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec u\tan u\,du}{\sqrt{\sec^2 u - 1}} &= \int \sec u\,du = \log(\sec u + \tan u) \\ &= \log(x + \sqrt{x^2-1}).\end{aligned}$$

(v) Θέτουμε $x = \sin u$, $dx = \cos u\,du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos u\,du}{\sin u\sqrt{1-\sin^2 u}} &= \int \csc u\,du = -\log(\csc u + \cot u) \\ &= -\log\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right).\end{aligned}$$

(vii) Θέτουμε $x = \sin u$, $dx = \cos u\, du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int (\sin^3 u \cos u) \cos u\, du &= \int \sin^3 u \cos^2 u\, du = \int (\sin u)(1 - \cos^2 u) \cos^2 u\, du \\ &= \int (\sin u)(\cos^2 u - \cos^4 u)\, du = -\frac{\cos^3 u}{3} + \frac{\cos^5 u}{5} \\ &= -\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3} + \frac{(1 - x^2)^{5/2}}{5}.\end{aligned}$$

(ix) Θέτουμε $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u\, du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \sec u \sec^2 u\, du &= \int \sec^3 u\, du \\ &= \tfrac{1}{2}[\tan u \sec u + \log(\sec u + \tan u)] \quad \text{από το Πρ. 3(vii)} \\ &= \tfrac{1}{2}[x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})].\end{aligned}$$

5. (i) Θέτουμε $u = \sqrt{x + 1}$, $x = u^2 - 1$, $dx = 2u\, du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{2u\, du}{1 + u} &= \int \left(2 + \frac{-2}{1 + u}\right) du \\ &= 2u - 2\log(1 + u) = 2\sqrt{x + 1} - 2\log(1 + \sqrt{x + 1}).\end{aligned}$$

(iii) Θέτουμε $u = x^{1/6}$, $x = u^6$, $dx = 6u^5\, du$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{6u^5\, du}{u^3 + u^2} &= 6\int \left(u^2 - u + 1 - \frac{1}{u + 1}\right) du = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\log(u + 1) \\ &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log\big(\sqrt[6]{x} + 1\big).\end{aligned}$$

(v) Θέτουμε $u = \tan x$, $x = \arctan u$, $dx = du/(1 + u^2)$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1 + u^2)(2 + u)} &= \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2 + u} - \frac{u - 2}{1 + u^2}\right) du \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{du}{2 + u} - \frac{1}{10}\int \frac{2u}{1 + u^2}\, du + \frac{2}{5}\int \frac{du}{1 + u^2} \\ &= \frac{1}{5}\log(2 + u) - \frac{1}{10}\log(1 + u^2) + \frac{2}{5}\arctan u \\ &= \frac{1}{5}\log(2 + \tan x) - \frac{1}{10}\log(1 + \tan^2 x) + \frac{2}{5}x.\end{aligned}$$

(vii) Θέτουμε $u = 2^x$, $x = (\log u)/(\log 2)$, $dx = du/(u \log 2)$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log 2}\int \frac{u^2 + 1}{(u + 1)u}\, du &= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1 - u}{u(u + 1)}\right) du \\ &= \frac{1}{\log 2}\int \left(1 + \frac{1}{u} - \frac{2}{u + 1}\right) du \\ &= \frac{1}{\log 2}[u + \log u - 2\log(u + 1)] \\ &= \frac{1}{\log 2}[2^x + x\log 2 - 2\log(2^x + 1)].\end{aligned}$$

(ix) Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{\sqrt{1-u^2}\,2u\,du}{1-u}.$$

Τώρα θέτουμε $u = \sin y$, $du = \cos y\,dy$. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{2\cos y \sin y \cos y}{1-\sin y}\,dy &= 2\int \frac{(1-\sin^2 y)\sin y}{1-\sin y}\,dy \\ &= 2\int (1+\sin y)\sin y\,dy \\ &= 2\int \sin y\,dy + \int 1-\cos 2y\,dy \\ &= -2\cos y + y - \frac{\sin 2y}{2} = -2\cos y + y - \sin y\cos y \\ &= -2\sqrt{1-u^2} + \arcsin u - u\sqrt{1-u^2} \\ &= -2\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x}.\end{aligned}$$

Η αντικατάσταση $u = \sqrt{1-x}$, $x = 1-u^2$, $dx = -2u\,du$ οδηγεί στο

$$\int \frac{-2u^2\,du}{1-\sqrt{1-u^2}}$$

και η αντικατάσταση $u = \sin y$ οδηγεί τότε στο

$$\begin{aligned}\int \frac{-2\sin^2 y\cos y\,dy}{1-\cos y} &= -2\sin y - y - \sin y\cos y \\ &= -2u - \arcsin u - u\sqrt{1-u^2} \\ &= -2\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Αυτές οι απαντήσεις συμφωνούν, αφού

$$\arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x}$$

(ελέγξτε το, συγκρίνοντας τις παραγώγους τους και τις τιμές τους για $x = 0$).

6. Στα πιο κάτω προβλήματα, με I σημειώνεται το αρχικό ολοκλήρωμα.

(i)

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 2\log(x-1) - \frac{3}{x+1}.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{4}{(x+1)^3}\,dx \\ &= -\frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{4}{x^2+1}\,dx \\ &= \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + 4\arctan x.\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{2x}{(x^2+x+1)}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\ &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\,dx \\ &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

άρα

$$I = \log(x+1) + \log(x^2+x+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

(ix)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx \\ &= \int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{16}{9}\int \frac{1}{\left(\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1\right)^2}\,dx. \end{aligned}$$

Αλλά η αντικατάσταση

$$u = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right), \quad dx = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

αλλάζει το δεύτερο ολοκλήρωμα σε

$$-\frac{16}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο, αυτό γράφεται σαν

$$-\frac{8\sqrt{3}}{9}\left[\frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1}\right],$$

άρα

$$I = -\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{\sqrt{3}(x+\frac{1}{2})}{4(x^2+x+1)} - \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

14. Η εξίσωση $\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$ σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση F με $F'(x) = e^x \sin x$ μπορεί να γραφεί ως $F(x) = e^x \sin x - e^x \cos x - G(x)$, όπου G είναι μια άλλη συνάρτηση με $G'(x) = e^x \sin x$. Φυσικά, $G = F + c$ για κάποιον αριθμό c, αλλά δεν αληθεύει αναγκαστικά ότι $F = G$.

16. (α)

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

17. (α)

$$\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$
$$= -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3}{4}\left[-\frac{\sin x\cos x}{2} + \frac{1}{2}\int 1\,dx\right]$$
$$= -\frac{\sin^3 x\cos x}{4} - \frac{3\sin x\cos x}{8} + \frac{3}{8}x.$$
$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}\right) dx$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 4x}{8}\right]$$
$$= \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}.$$

(β) Έπεται ότι αυτές οι δύο απαντήσεις είναι ίδιες, αφού έχουν την ίδια τιμή για $x = 0$.

21. (α)

$$\sin^n x\,dx = \int (\sin x)(\sin^{n-1} x)\,dx$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int \cos x(\sin^{n-2} x)\cos x\,dx$$
$$= -\cos x\sin^{n-1} x + (n-1)\int (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\,dx,$$

άρα

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

(β)

$$\int \cos^n x\,dx = \int (\cos x)(\cos^{n-1} x)\,dx$$
$$= \sin x\cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin x(\cos^{n-2} x)\sin x\,dx$$
$$= \sin x\cos^{n-1} x + (n-1)\int (\cos^{n-2} x - \cos^n x)\,dx,$$

άρα

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

(γ)

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^n}$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n}\, dx$$
$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \left[\frac{x}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{dx}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} \right]$$

άρα

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx.$$

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $x = \tan u$, $dx = \sec^2 u\, du$, που αλλάζει το ολοκλήρωμα σε

$$\int \frac{\sec^2 u\, du}{\sec^{2n} u} = \int \cos^{2n-2} u\, du$$
$$= \frac{1}{2n-2} \cos^{2n-3} u \sin u + \frac{2n-3}{2n-2} \int \cos^{2n-4} u\, du$$
$$= \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}\,)^{2n-3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Κεφάλαιο 20

1. (i) $P_{3,0}(x) = e + ex + ex^2 + (5e/3!)x^3$.

(iii) $P_{2n,\pi/2}(x) = 1 - \dfrac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \dfrac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n (x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!}$.

(v) $P_{n,1}(x) = e + e(x-1) + \dfrac{e(x-1)^2}{2!} + \cdots + \dfrac{e(x-1)^n}{n!}$.

(vii) $P_{4,0}(x) = x + x^3$.

(ix) $P_{2n+1,0}(x) = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}$.

2. Αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n, τότε $f^{(n+1)} = 0$. Έπεται από το Θεώρημα Taylor ότι $R_{n,a}(x) = 0$, άρα $f(x) = P_{n,a}(x)$.

(i) $-12 + 2(x-3) + (x-3)^2$.

(iii) $243 + 405(x-3) + 270(x-3)^2 + 90(x-3)^3 + 15(x-3)^4 + (x-3)^5$.

3. (i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}$ $\left(\text{αφού } \dfrac{1}{(2n+2)!} < 10^{-17} \text{ για } 2n+2 \geq 19, \text{ ή } n \geq 9\right)$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{8} \frac{(-1)^i}{2^i (2i+1)!}$ $\left(\text{αφού } \dfrac{1}{2^{2n+2}(2n+2)!} < 10^{-20} \text{ για } 2n+2 \geq 18, \text{ ή } n \geq 8\right)$.

(v) $\displaystyle\sum_{i=0}^{13} \frac{2^i}{i!}$ $\left(\text{αφού } \dfrac{3^2 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-5} \text{ για } n+1 \geq 14, \text{ ή } n \geq 13\right)$.

7. (i) $c_i = a_i + b_i$.

(iii) $c_i = (i+1)a_i$.

(v) $c_0 = \int_0^a f(t)\,dt \cdot c_i = a_{i-1}/i$ για $i > 0$.

Κεφάλαιο 22

1. (i) $1 - n/(n+1) = 1/(n+1) < \varepsilon$ για $n + 1 > 1/\varepsilon$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[8]{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n} - \sqrt[4]{n+1}\right) = 0 + 0 = 0$. (Κάθε ένα από αυτά τα δύο όρια μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο στο κείμενο αποδείχθηκε ότι $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.)

(v) Εμφανώς $\lim_{n\to\infty} (\log a)/n = 0$. Άρα $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} e^{(\log a)/n} = e^0$ (από το Θεώρημα 1) $= 1$.

(vii) $\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{2n^2}$, άρα $(\sqrt[n]{n})^2 \le \sqrt[n]{n^2+n} \le \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2$, και $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n})^2 = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^2 = 1$ από τα μέρη (v) και (vi).

(ix) Εμφανώς $\alpha(n) \le \log_2 n$, και $\lim_{n\to\infty} (\log_2 n)/n = 0$.

5. (α) Αν $0 < a < 2$, τότε $a^2 < 2a < 4$, άρα $a < \sqrt{2a} < 2$.

(β) Το μέρος (α) δείχνει ότι

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < \cdots < 2,$$

άρα η ακολουθία συγκλίνει, από το Θεώρημα 2.

(γ) Αν αυτή η ακολουθία σημειωθεί με $\{a_n\}$, τότε η ακολουθία $\left\{\sqrt{2a_n}\right\}$ είναι η ίδια με την $\{a_{n+1}\}$. Επομένως, η υπόδειξη δείχνει ότι $l = \sqrt{2l}$, ή $l = 2$.

8. Αν ο x είναι ρητός, τότε για αρκετά μεγάλο n ο $n!\,\pi x$ είναι πολλαπλάσιο του π, και έτσι $(\cos n!\,\pi x)^{2k} = 1$ για όλα αυτά τα n, άρα $\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}(\cos n!\,\pi x)^{2k}) = 1$. Αν ο x είναι άρρητος, τότε $n!\,\pi x$ δεν είναι πολλαπλάσιο του π για οποιοδήποτε n, άρα $|\cos n!\,\pi x| < 1$, και έτσι $\lim_{k\to\infty}(\cos n!\,\pi x)^{2k} = 0$, δηλαδή $f(x) = 0$.

9. (i) $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$. (Χωρίστε το $[0,1]$ με διαμερίσεις n ίσων τμημάτων.)

(iii) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$.

(v) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

Κεφάλαιο 23

1. (i) (Απολύτως) συγκλίνουσα, αφού $|(\sin n\theta)/n^2| \le 1/n^2$.

(iii) Αποκλίνουσα, αφού οι πρώτοι $2n$ όροι έχουν άθροισμα $\frac{1}{2} + \cdots + 1/n$. (Το θεώρημα του Leibnitz δεν εφαρμόζεται, αφού οι όροι δεν φθίνουν κατά απόλυτη τιμή.)

(v) Αποκλίνουσα, αφού

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \ge \frac{1}{n^{2/3}}.$$

(vii) Συγκλίνουσα, αφού

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2/(n+1)!}{n^2/n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

(ix) Αποκλίνουσα, αφού $1/(\log n) > 1/n$.

(xi) Συγκλίνουσα, αφού $1/(\log n)^n < \dfrac{1}{2^n}$ για $n > 9$.

(xiii) Αποκλίνουσα, αφού

$$\frac{n^2}{n^3+1} > \frac{1}{2n}$$

για αρκετά μεγάλο n.

(xv) Αποκλίνουσα, αφού

$$\int_2^N \frac{1}{x \log x}\, dx = \log(\log N) - \log(\log 2) \to \infty \text{ καθώς } N \to \infty.$$

(Σημειώστε ότι η $f(x) = 1/(x \log x)$ είναι φθίνουσα στο $[2, \infty)$, αφού

$$f'(x) = \frac{-[1 + \log x]}{(x \log x)^2} < 0 \qquad \text{για } x > 1.$$

(xvii) Συγκλίνουσα, αφού $1/n^2(\log n) < 1/n^2$ για $n > 2$.

(xix) Συγκλίνουσα, αφού

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e},\end{aligned}$$

από το Πρόβλημα 18-17.

7. (α) Για κάθε N εμφανώς έχουμε

$$0 \le \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{-n} < 9 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1,$$

άρα το $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ συγκλίνει με το κριτήριο φραγμένης ακολουθίας, και βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και το 1. (Στην πράξη, αυτός ο αριθμός σημειώνεται με $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ μόνο όταν η ακολουθία $\{a_n\}$ δεν είναι τελικά 0.)

20. Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι $\frac{1}{2}$. Το ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}([1-\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{8}] + [\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{32}] + \cdots) - \tfrac{1}{2}([\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}] + [\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{16}] + \cdots) \\ &\quad = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{128} + \cdots) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{256} + \cdots) \\ &\quad = \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots) - \tfrac{1}{8}(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots) \\ &\quad = \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) \\ &\quad = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &\quad = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 24

1. (i)
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$
Η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(iii) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (αφού $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ για $x > 1$). Η ακολουθία $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Μάλιστα, για οποιοδήποτε n έχουμε το $f_n(x)$ μεγάλο, για αρκετά μεγάλο x.

(v) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, και η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, αφού $|f_n(x)| \le 1/n$ για κάθε x.

3. (i) $-\dfrac{1}{a} - \dfrac{x}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^3} - \cdots$.

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^k$.

(v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}}{2k+1} x^{2k+1}$.

4. (i) e^{-x}.

(iii) Αν
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \cdots, \qquad |x| \le 1$$
τότε
$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \\ &= \log(1+x) \qquad |x| < 1, \end{aligned}$$
άρα για $|x| < 1$ έχουμε $f(x) = (1+x)\log(1+x) - (1+x) + c$ για κάποιον αριθμό c. Επειδή $f(0) = 0$, έχουμε ότι $c = 1$, άρα $f(x) = (1+x)\cdot\log(1+x) - x$ για $|x| < 1$.

6. Αφού
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
έχουμε ότι
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$
(σημειώστε ότι η δεξιά πλευρά είναι 1 για $x = 0$). Άρα
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}, & k = 2n \\ 0, & k \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Κεφάλαιο 25

1. (i) $|3+4i| = 5\cdot\ \theta = \arctan\dfrac{4}{3}$.

(iii) $|(1+i)^5| = (|1+i|)^5 = (\sqrt{2})^5$, αφού $\pi/4 = \arctan 1/1$ είναι ένα όρισμα για το $1+i$, ενώ ένα όρισμα για το $(1+i)^5$ είναι το $5\pi/4$.

(v) $|(|3+4i|)| = |5| = 5\cdot\theta = 0.$

2. (i)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-i \pm \sqrt{-1-4}}{2} \\ &= \frac{-i \pm \sqrt{5}\,i}{2} \\ &= \frac{(-1+\sqrt{5})i}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{(-1-\sqrt{5})i}{2}. \end{aligned}$$

(iii) $x^2 + 2ix - 1 = (x+i)^2$, έτσι η μόνη λύση είναι $x = -i$.

(v) $x^3 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2+x+1)$. Οι λύσεις είναι

$$2, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

3. (i) Όλα τα $z = iy$ με y πραγματικό.

(iii) Όλα τα z επί της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος μεταξύ a και b.

(v) Για $z = x + iy$, χρειαζόμαστε $\sqrt{x^2+y^2} < 1 - x$. Για αυτό απαιτείται να ισχύει $1 - x > 0$, οπότε η ανισότητά μας είναι ισοδύναμη με την $x^2 + y^2 < (1-x)^2$, ή την $x < (1-y^2)/2$ (και αντίστροφα από αυτήν την ανισότητα έπεται ότι $x < \frac{1}{2}$, ώστε να ισχύει $1-x > 0$). Το σύνολο των σημείων $x+iy$ με $x = (1-y^2)/2$ είναι η παραβολή που δείχνει κατά μήκος του δεύτερου άξονα, με το σημείο $\frac{1}{2} + 0i$ να είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων, και που περνά από τα σημεία $0 + i$ και $0 - i$. Το επιθυμητό σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι το σύνολο των σημείων εντός της αυτής παραβολής.

4. $|x+iy|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (-y)^2 = |x-iy|^2$.
$(z+\bar{z})/2 = [(x+iy) + (x-iy)]/2 = x$.
$(z-\bar{z})/2 = [(x+iy) - (x-iy)]/2i = y$.

5. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) + (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 2z\bar{z} + 2w\bar{w} = 2(|z|^2 + |w|^2)$. Γεωμετρικά, αυτό λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του.

Κεφάλαιο 27

1. (i) Συγκλίνει απολύτως, αφού $|(1+i)^n/n!| = (\sqrt{2})^n/n!$, και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n/n!$ συγκλίνει.

(iii) Συγκλίνει, αλλά όχι απολύτως, αφού οι πραγματικοί όροι σχηματίζουν τη σειρά

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} - \cdots$$

και οι φανταστικοί οροί την

$$i\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots\right).$$

(v) Αποκλίνει, αφού οι πραγματικοί όροι σχηματίζουν τη σειρά

$$\frac{\log 3}{3} + 2\frac{\log 4}{4} + \frac{\log 5}{5} + \frac{\log 7}{7} + 2\frac{\log 8}{8} + \frac{\log 9}{9} + \cdots.$$

2. (i) Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 |z| = |z|$$

είναι < 1 για $|z| < 1$, αλλά > 1 για $|z| > 1$.

(iii) Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = |z|$$

είναι < 1 για $|z| < 1$, αλλά > 1 για $|z| > 1$.

(v) Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|z|^{(n+1)!}}{2^n|z|^{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2|z|^{(n+1)!-n!}$$

είναι 0 για $|z| < 1$, αλλά ∞ για $|z| > 1$.

3. (i) Τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{|z|^{2n}}{3^n}} = \frac{|z|}{\sqrt{3}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{|z|^{2n+1}}{2^{n+1}}} = \frac{|z|}{\sqrt{2}}$$

είναι < 1 για $|z| < \sqrt{2}$, άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για $|z| < \sqrt{2}$. Αλλά η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως για $|z| > \sqrt{2}$, άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $\sqrt{2}$.

(iii) Αφού

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n|z|^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{2} \sqrt[n]{n} = \frac{|z|}{2} \quad \text{από το Πρόβλημα 22-1(vi),}$$

η ακτίνα σύγκλισης είναι 2.

(v) Το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n z^{n!}} = 2 \lim_{n\to\infty} z^{(n-1)!}$$

είναι 0 για $|z| < 1$, αλλά ∞ για $|z| > 1$, άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

P 9
$|a|$ 10
$\sqrt{x}$ 11
$\max(x, y)$ 15
$\min(x, y)$ 15
ε 17
$\mathbf{N}$ 19
$\emptyset$ 20
$n!$ 21
$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 21
$\mathbf{Z}$ 22
$\mathbf{Q}$ 22
$\mathbf{R}$ 22
$\binom{n}{k}$ 24
$f(x)$ 36, 42, 543
I 38
$f + g$ 38
$\frac{f}{g}$ 38
$c \cdot g$ 38
$f \cdot g$ 39
$\{x : \ldots\}$ 39
$\{a, \ldots, z\}$ 39
$f + g + h$ 39
$f \cdot g \cdot h$ 39
$f \circ g$ 40
$f \circ g \circ h$ 40
$x \to f(x)$ 40
a^{b^c} 43
C_A 45
$A \cup B$ 45
$\mathbf{R} - A$ 45
$|f|$ 46
$\max(f, g)$ 46
$\min(f, g)$ 46
$f < g$ 48
το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) 49
το ανοικτό διάστημα (a, b) 51
$[a, b]$ 52
(a, ∞) 52
$[a, \infty)$ 52
$(-\infty, a)$ 52
$(-\infty, a]$ 52
$(-\infty, \infty)$ 52
$[x]$ 66
$\{x\}$ 66
$v + w$ 68
$v \cdot w$ 71
$\|v\|$, 71
$\det(v, w)$ 72
δ 88
$\lim_{x \to a} f(x)$ 90
$\lim_{a} f$ 91
$\lim_{x \to a^+} f(x)$ 95
$\lim_{x \downarrow a} f(x)$ 95
$\lim_{x \to a^-} f(x)$ 95
$\lim_{x \uparrow a} f(x)$ 95
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ 95
$\lim_{x \to -\infty}$ 101
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ 101
$\sup A$ 121
$\operatorname{lub} A$ 121
$\inf A$ 121
$\operatorname{glb} A$ 121
$\overline{\lim} A$ 129
$\limsup A$ 129
$\underline{\lim} A$ 129
$f'(a)$ 137
$\boldsymbol{f'}$ 137
$\frac{df(x)}{dx}$ 140
$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$ 141
f'' 146
f'''' 146
$f^{(k)}$ 146 $\frac{d^2 f(x)}{(dx)^2}$ 146
$\boldsymbol{f^{-1}}$ 209
$\mathbf{e}$ 220
$f + g$ 220
$f \cdot g$ 220
$c + d$ 221
$\alpha \cdot c$ 221
$c \cdot d$ 221
$\det(c, d)$ 221
c' 222
$R(f, a, b)$ 228
$L(f, P)$ 229
$U(f, P)$ 229
$\int_a^b f$ 33
$\int_a^b f(x)\,dx$ 238
$\ell(f, P)$ 250
$\mathscr{L}(x)$ 251
$\mathbf{L}\int_a^b f$ 266
$\mathbf{U}\int_a^x f$ 266
$\int_a^\infty f$ 272
$\int_a^\infty f(x)\,dx$ 272
$\int_{-\infty}^a f$ 272
$\int_{-\infty}^\infty$ 272
$\sin^\circ$ 275
$\sin^r$ 275
π 276
$\boldsymbol{A(x)}$ 276
cos 277
sin 277
sec 280
tan 280
csc 280
cot 280
arcsin 281
arccos 281
arctan 281
$\mathbf{e}$ 299
log 308
exp 309
e 310
e^x 311
a^x 311
$\log_a$ 312
sinh 318
cosh 318
tanh 318
arg cosh 319
arg sinh 319
arg tanh 319
Nap log 323
$F(x)\Big|_a^b$ 327
$\int f$ 328

$\int f(x)\,dx$ 329
$\Gamma(x)$ 356
$P_{n,a}$ 374
$P_{n,a,f}$ 374
$R_{n,a}$ 382
$[P]_n$ 393
$\binom{\alpha}{n}$ 397
$\{a_n\}$ 410
$\lim_{n\to\infty} a_n$ 411
$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ 413
γ 420
$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 424
$\limsup_{n\to\infty} x_n$ 424
$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 424
$\liminf_{n\to\infty} x_n$ 424
$N(n,a,b)$ 426
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 428
i 475, 480
$\mathbf{C}$ 479
$\bar{z}$ 482
Im 488
Re 488
θ 489
$\lim_{z\to a} f(z)$ 489
$f'(a)$ 497
sin 508
cos 508
exp 509
b_n 517
D 518
D^k 518
e^D 518
Δ 518
φ_n 519
ψ_n 520
$\mathbf{+}$ 525, 533
$\mathbf{\cdot}$ 525, 537
$\mathbf{0}$ 525, 533
$\mathbf{1}$ 526, 538
$\mathbf{-}a$ 526, 535
$a^{\mathbf{-1}}$ 526, 538
$\mathbf{P}$ 527
$\mathbf{>}$ 527, 533
$\mathbf{<}$ 527, 533
$\mathbf{\geq}$ 527, 533
$\mathbf{\leq}$ 527, 533
$\mathbf{|}\alpha\mathbf{|}$ 538

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

άθροιση κατά μέρη, τύπος του Abel για, 354
άθροισμα
ακολουθίας, 428
άνω, 229
άπειρο, 390, 427
διανυσματικών συναρτήσεων, 221
διανυσμάτων, 68
κάτω, 229
μερικό, 427
πεπερασμένο, 3, 4
σειράς μιγαδικών αριθμών, 501
συμβολισμός σίγμα, 21
συναρτήσεων, 38
Riemann, 255
ακέραια συνάρτηση, 512
ακέραιος αριθμός, 22
ακολουθία, 410, 501
αθροίσιμη, 428
απολύτως, 435
κατά Cesaro, 447
ομοιόμορφα, 458
Abel, 472
αναδιάταξη, 437
αποκλίνουσα, 411
απολύτως αθροίσιμη, 435
αύξουσα, 415
κάτω φραγμένη, 415
μη αρνητική, 430
μη αύξουσα, 415
μη φθίνουσα, 415
μιγαδικοί αριθμοί, 501
όριο, 411
συγκλίνουσα, 411
κατά σημείο, 455
ομοιόμορφα, 455
φθίνουσα, 415
Cauchy, 416, 516
ισοδυναμία, 540
μιγαδική, 516
Fibonacci, 29, 470, 516
ακτίνα σύγκλισης μιγαδικής δυναμοσειράς, 505
Άλγεβρα, Θεμελιώδες Θεώρημα της, 340, 486, 494, 512
αλγεβρικές συναρτήσεις, 327
αναγωγικοί τύποι, 340
αναδιάταξη ακολουθίας, 437
αναδρομικός ορισμός, 21
ανάπτυγμα, δεκαδικό, 66, 445
ανάπτυξη σε συνεχές κλάσμα, 418
ανισότητα
γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, 29
διατεταγμένου σώματος, 527
του Bernoulli, 29
του Gronwall, 321
του Jensen, 206
του Liouville, 407
του Schwarz, 16, 29, 253
του Young, 249
τριγωνική, 64
των Cauchy-Schwarz, 253
αντικατάσταση
η πιο καταχθόνια του κόσμου, 349
ολοκλήρωση με, 332
αντιμεταθετικός νόμος
πολλαπλασιασμού, 8
της πρόσθεσης, 8
διανυσμάτων, 69
αντίστροφη
μιας συνάρτησης, 209
τριγωνομετρικών συναρτήσεων, 274
αντίστροφος
πολλαπλασιαστικό, 8
ύπαρξη του, 8
άνω όριο της ολοκλήρωσης, 233
άνω φράγμα
ελάχιστο, 120
σχεδόν, 128
άξονας
κατακόρυφος, 52
οριζόντιος, 52
πραγματικός, 481
φανταστικός, 481
αόριστα ολοκληρώματα, σύντομος πίνακας, 329, 330
αόριστο γινόμενο, 356
άπειρα γινόμενα, 450
άπειρα διαστήματα, 52
«άπειρη παράγωγος», 142
άπειρο, πλην, 52
άπειροι πρώτοι αριθμοί, 28
«απειροστός», 140
απόκλιση, 502
απόλυτη τιμή μιγαδικού αριθμού, 482
απόσταση, συντομότερη μεταξύ δύο σημείων, 250
αριθμός, -οί
αλγεβρικός, 401
αραβικοί, πολλαπλασιασμός, 8
αρνητικοί, 9
γινόμενο δύο, 7
άρρητος, 22
άρτιος, 23
βασικές ιδιότητες των, 3
μέτρησης, 19
μιγαδικός, 475, 479
περιττός, 23
πραγματικός, 482, 532
πρώτος, 28

ρητός, 22
υπερβατικός, 401
φανταστικός, 475
φυσικός, 19, 31
αρνητικό μέρος συνάρτησης, 46
αρνητικό, πολύ, 58
άρτια συνάρτηση, 45, 179
άρτιος αριθμός, 23
αρχή (συστήματος συντεταγμένων), 52
αρχικές συνθήκες διαφορικής εξίσωσης, 399
αρχική n-οστή ρίζα, 487
Αρχιμήδεια ιδιότητα
πραγματικών αριθμών, 125
ρητών αριθμών, 528
ασθενώς κυρτή, 206
ασυνέχεια
αιρόμενη, 109
μη φθίνουσας συνάρτησης, 408
αύξηση
με την ίδια ταχύτητα, 326
ταχύτερη, 326
αύξουσα ακολουθία, 415
αύξουσα συνάρτηση, 176

βαθμός (πολυωνύμου), 38
βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων, 71
βαρύτητα, 298
βέλος, «x βέλος $\sin(x^2)$», 40

γενέτειρα ευθεία, κώνου, 73
γενικευμένο ολοκλήρωμα, 272, 273, 358, 360
γινόμενο
αόριστο, 356
άπειρο, 297, 450
αριθμού με διάνυσμα, 70
διανυσμάτων, 70
δύο αρνητικών αριθμών, 7
συναρτήσεων, 38
συνάρτησης με διανυσματική συνάρτηση, 221
Cauchy, 446, 464
γραφικές παραστάσεις, 52, 59, 76, 81, 82, 489
κοιλάδες, 55
κορυφές, 55
πολυωνυμικής συνάρτησης, 178
συμμετρία των, 179
σχεδιασμός, 176, 181
γωνία, 54
προσανατολισμένη, 274

δεκαδικό ανάπτυγμα, 445
δεύτερη παράγωγος, κατά Schwarz, 398
δεύτερη συντεταγμένη, 52
διαίρεση με μηδέν, 6
διανύσματα, 68
βαθμωτό γινόμενο, 71
εσωτερικό γινόμενο, 71
πολλαπλασιασμός, 70
με αριθμούς, 70
πρόσθεση, 68
ως δυνάμεις, 69
διανυσματικές συναρτήσεις, 220
άθροισμα , 221
εσωτερικό γινόμενο, 221
ορίζουσα, 221
όριο, 221, 227
παράγωγος, 222
πολλαπλασιασμός συνάρτησης με, 221
διάστημα, 51
ανοικτό, 51
άπειρο, 52
κλειστό, 52
διατεταγμένο ζεύγος, 41
διατεταγμένο σώμα, πλήρες, 528
διαφορικές εξισώσεις, 291, 398
αρχικές συνθήκες, 399
διμελής πράξη, 525
δυνάμεις του 2, πίνακας, 392
δύναμη, ως διάνυσμα, 69
δυναμοσειρά, 462, 503
με κέντρο το a, 462, 509
μιγαδική, 503
δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, 146

εκ περιστροφής στερεό, 364
ελλειψοειδές, 366
εκκεντρότητα έλλειψης, 79
ελάχιστο συνάρτησης, 170
έλλειψη, 73
άξονες, 79
εκκεντρότητα, 79
εστιακό σημείο, 60, 77
μεγάλος άξονας, 79
μικρός άξονας, 79
ελλειψοειδές, εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες, 77
εμβαδόν επιφάνειας
κώνου, 365
πυραμίδας, 365
στερεού εκ περιστροφής, 364
εξάντληση, μέθοδος της, 127
επαγωγή μαθηματική, 19
πλήρης, 21
επαγωγικό σύνολο πραγματικών αριθμών, 30
επέκταση συνάρτησης, 103, 104
επίπεδο, μιγαδικό, 481
εστιακό σημείο, 60, 77

εσωτερικό γινόμενο
διανυσματικών συναρτήσεων, 221
διανυσμάτων, 71
ευθεία
αναλυτικός ορισμός, 52
«εφαπτομένη», 143
καθετότητα, 64
κλίση, 53
πραγματική, 51
συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων, 250
εφαπτομένη
παραμετρικής καμπύλης, 222
σημείο επαφής της, 199
υπερβολική, 318

ζεύγος, 41
διατεταγμένο, 41, 49

ή, 6
ημιζωή (ραδιενεργού ουσίας), 321
ημίτονο, υπερβολικό, 318

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, 486, 494, 512
Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού
Δεύτερο, 260
Πρώτο, 257
θέση, ρυθμός μεταβολής της, 138
θετικά στοιχεία διατεταγμένου σώματος, 527
θετικά στοιχεία του **R**, 536
θετικό μέρος συνάρτησης, 46
θετικός αριθμός, 9
Θεώρημα
του De Moivre, 484
του Leibniz, 436
των Bolzano-Weierstrass, 416
Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, 122
Θεώρημα Μέσης Τιμής, 175
για ολοκληρώματα, 250
Δεύτερο, 353
του Cauchy, 183
Θεώρημα Σύγκρισης του Sturm, 292

ισοδύναμες ακολουθίες Cauchy, 540
ισομορφικά σώματα, 544

καθετότητα ευθειών, 64
καμπύλη
παραμετρική
εφαπτομένη, 222
παραμετρική παράσταση, 220
παράσταση, 223
Κανόνας
της Αλυσίδας
απόδειξη του, 161
του l'Hôpital, 184, 193
του Simpson, 363
κανονικοποιημένη συνάρτηση, 474
καρδιοειδές, 80
κατά μέρη
ολοκλήρωση, 330
τύπος του Abel για άθροιση, 354
κατασκευή των πραγματικών αριθμών, 531
κάτω όριο της ολοκλήρωσης, 233
κάτω φράγμα
μέγιστο, 121
σχεδόν, 128
κάτω φραγμένη ακολουθία, 415
κλασικός συμβολισμός
για τα ολοκληρώματα, 239
για τις παραγώγους, 140, 141, 146, 151, 169, 218
κλειστότητα
ως προς την πρόσθεση, 9
ως προς τον πολλαπλασιασμό, 9
κλίση ευθείας, 53
κοιλάδα γραφικής παράστασης, 55
κοίλη συνάρτηση, 198
κορυφή γραφικής παράστασης, 55
κουνέλια, αύξηση πληθυσμού των, 29
κριτήριο δεύτερης παραγώγου για μέγιστα και ελάχιστα, 181
κριτήριο λόγου, 431
εκλεπτυσμένο, 446
κριτήριο ολοκληρώματος, 433, 445
κριτήριο ρίζας
εκλεπτυσμένο, 446
κριτήριο σύγκρισης, 430
κριτήριο του Abel, 449
κριτήριο του Cauchy, 428
κυβική εξίσωση, γενική λύση, 477, 478
κυκλοειδής, 226
κύκλος
«f κύκλος g», 40
μοναδιαίος, 60
κυρτή συνάρτηση, 198
ασθενώς, 206
αυστηρώς, 206
κυρτό υποσύνολο του επιπέδου, 207, 499
κωνικές τομές, 73
κώνος, 73
γενέτειρα ευθεία, 73
εμβαδόν επιφάνειας, 365

Λήμμα του Ανατέλλοντος Ηλίου, 129
λημνίσκος, 80
λογαριθμική παράγωγος, 317
λογάριθμος
κλασική προσέγγιση, 322
με βάση 10, 306

μιγαδικού αριθμού, 515
Νεπέρειος, 323
«λογική» συνάρτηση, 62, 106, 135, 163
«λυγισμένες γραφικές παραστάσεις», 135

μάζα, ρυθμός μεταβολής της, 138
μεγάλος άξονας έλλειψης, 79
μεγαλύτερης τάξης παράγωγοι, 146
μέγιστη τιμή συνάρτησης, 170
μέθοδος του Newton, 420
μέσος
αριθμητικός, 29
γεωμετρικός, 29
μεταβολή, ρυθμός της, 138
μέτρηση σε ακτίνια, 275
μέτρηση σε μοίρες, 275
μέτρο ακτινίων, 57
μέτρο μιγαδικού αριθμού, 482
μη αρνητική ακολουθία, 430
μη αρνητική συνάρτηση, 46
μη αύξουσα ακολουθία, 415
μη αύξουσα συνάρτηση, 219
μη παραγωγίσιμες μιγαδικές συναρτήσεις, 497
μη φθίνουσα ακολουθία, 415
μη φθίνουσα συνάρτηση, 219
μηδενισμού, συνθήκη, 429
μήκος τόξου, 250, 256
μιγαδική δυναμοσειρά
ακτίνα σύγκλισης, 505
περιφέρεια σύγκλισης, 505
μιγαδική συνάρτηση, 488
γραφική παράσταση, 489
μη παραγωγίσιμη, 497
όριο, 489
παραγωγίσιμη, 496
σειρά Taylor, 508
συνεχής, 492
μιγαδικοί αριθμοί, 479
ακολουθία, 501
απόλυτη τιμή, 482
γεωμετρική ερμηνεία, 481
λογάριθμος, 515
μέτρο, 482
πολλαπλασιασμός, 479
γεωμετρική ερμηνεία, 483, 484
πραγματικό μέρος, 479
πρόσθεση, 479
γεωμετρική ερμηνεία, 483
σειρά, 501, 503
φανταστικό μέρος, 479
μικρός άξονας έλλειψης, 79
μικρότερος δύο αριθμών, 15
μοναδικότητα
ορίων, 89
παραγοντοποίησης σε πρώτους, 28
μορφή σημείου-κλίσης εξίσωσης ευθείας, 53, 63

Νεπέρειος λογάριθμος, 323
νόμος της ψύξης του Newton, 321
νόρμα, 71

ξόρκι για την παράγωγο πηλίκου, 155

όγκος, 364, 365
ολοκλήρωμα
άνω, 266
αόριστο, 329
σύντομος πίνακας, 329, 330
γενικευμένο, 272, 273, 358, 360
Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής, 353
Θεώρημα Μέσης Τιμής, 250
κάτω, 266
κλασικός συμβολισμός, 239
ορισμένο, 329
συμβολισμός Leibniz, 239
ολοκλήρωση
κατά μέρη, 330
με αντικατάσταση, 332
όρια της, 233
ρητών συναρτήσεων, 340
ομοιόμορφα κατανεμημένη ακολουθία, 426
ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία, 455, 458
ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, 130
ορθογώνιο, κλειστό, 494
ορίζουσα, 72
διανυσματικών συναρτήσεων, 221
όριο, 81
ακολουθίας, 411
από κάτω, 95
από πάνω, 95
«δεν υπάρχει», 90
διανυσματικής συνάρτησης, 221, 227
μοναδικότητα, 89
στο άπειρο, 95
της ολοκλήρωσης, 233
ορισμός, 42
αναδρομικός, 21

π, 276
άρρητος, 294
γινόμενο του Viète για το $2/\pi$, 297
γινόμενο του Wallis για το $\pi/2$, 357
προσέγγιση του Αρχιμήδη, 127
σχέση με e, 406, 509
τιμή, 393
υπερβατικότητα, 406
πάει στο
«το x πάει στο $\sin(x^2)$», 40

παραβολή, 73
εμβαδόν κάτω από, 238
εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες, 80
παραγοντικά, πίνακας, 392
παραγοντοποίηση σε πρώτους, 28
παραγώγιση
λογαριθμική, 317
πεπλεγμένη, 217
παράγωγος
άπειρη, 142
αριστερή, 142
αρνητικά άπειρη, 143
δεξιά, 142
δεύτερη, 146
κατά Schwarz, 398
διανυσματικών συναρτήσεων, 222
κατά Schwarz, 167
κλασικός συμβολισμός, 140, 141, 146, 151, 169
λογαριθμική, 317
μεγαλύτερης τάξης, 146
πηλίκου, ξόρκι, 155
συμβολισμός του Leibniz, 140, 141
της f, 136
της f στο a, 136
παραμετρική καμπύλη
εφαπτομένη, 222
παράσταση της, 220
παρεμβολή Lagrange, 44
πεδίο ορισμού, 36
πεπλεγμένα ορισμένη συνάρτηση, 217
περιοδική συνάρτηση, 65, 148, 269
περίοδος συνάρτησης, 65, 148, 269
περιττή συνάρτηση, 45, 179
περιττός αριθμός, 23
πηλίκο συναρτήσεων, 38
πλανητική κίνηση, νόμοι του Kepler για, 298
πλην άπειρο, παράγωγος, 143
πολικές συντεταγμένες, 76
πολλαπλασιασμός
αντιμεταθετικός νόμος, 8
αραβικών αριθμών, 8
αριθμού με διάνυσμα, 70
διανυσμάτων, 70
κλειστότητα ως προς τον, 9
μιγαδικών αριθμών, 479
γεωμετρική ερμηνεία, 483, 484
προσεταιριστικός νόμος, 8
σειράς, 440, 442
συνάρτησης με διανυσματική συνάρτηση, 221
πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, ύπαρξη, 8
πολλαπλασιαστικό ταυτοτικό στοιχείο, ύπαρξη, 8
πολλαπλότητα (ρίζας), 117
πολυώνυμα Bernoulli, 519
πολυώνυμα Taylor, 374
υπόλοιπο, 382, 383
πολυωνυμική συνάρτηση
γραφική παράσταση, 55, 178
πολλαπλότητα ριζών, 117, 168
πουθενά παραγωγίσιμη συνεχής συνάρτηση, 460
πραγματική συνάρτηση, 488
πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 479
πραγματικοί αριθμοί
Αρχιμήδεια ιδιότητα, 125
επαγωγικό σύνολο, 30
κατασκευή, 531
του αλγεβριστή, 540
του αναλύστα, 540
του μαθητή λυκείου, 541
τυπικός ορισμός, 532
προσανατολισμένη γωνία, 274
προσεταιριστικός νόμος
πολλαπλασιασμού, 8
της πρόσθεσης, 8
διανυσμάτων, 69
πρόσημο, 11
πρόσθεση
αντιμεταθετικός νόμος, 8
διανυσματικών συναρτήσεων, 221
διανυσμάτων, 68
κλειστότητα ως προς την, 9
μιγαδικών αριθμών, 479
γεωμετρική ερμηνεία, 483
προσεταιριστικός νόμος, 8
προσθετικό ταυτοτικό στοιχείο
διανυσμάτων, 69
ύπαρξη, 8
προσθετικοί αντίστροφοι, ύπαρξη των, 8
πρώτη συντεταγμένη, 52
Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, 257
πρώτος αριθμός
απειροι, 28
μοναδική παραγοντοποίηση σε, 28
χαρακτηριστική σώματος, 529
πυραμίδα
εμβαδόν επιφάνειας, 365
όγκος, 368

ραδιενεργός αποσύνθεση, 321
ρίζα
πολλαπλότητα, 117
πολυωνυμικής συνάρτησης, διπλή, 168
πολυωνύμου, 44
ρυθμός μεταβολής

της θέσης, 138
της μάζας, 138

σειρά
απολύτως συγκλίνουσα, 502
γεωμετρική, 429
συγκλίνουσα, 428
απολύτως, 435
υπό συνθήκη, 436
Fourier, 287, 289, 292
Taylor, 462
σειρά, πολλαπλασιασμός, 440, 442
σημείο ελαχίστου συνάρτησης
τοπικού, 171
σημείο μεγίστου συνάρτησης, 170
γνήσιου, 197
τοπικά γνήσιου, 197
τοπικού, 171
κριτήριο δεύτερης παραγώγου, 181
σπείρα
του Αρχιμήδη, 77
υπερβολική, 286
σταθερό σημείο συνάρτησης, 422
στερεό εκ περιστροφής, 364
συγκλίνουσα ακολουθία, 411, 501
συγκλίνουσα σειρά, 428, 502
απολύτως, 435, 502
υπό συνθήκη, 436
σύγκλιση
κατά σημείο, 455
ομοιόμορφη, 455, 458
συμβολισμός του Leibniz για τις παραγώγους, 140, 141, 151, 169, 218
για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους, 146
σύμβολο ολοκλήρωσης, 233
συμμετρία γραφικών παραστάσεων, 179
συμπλήρωση του τετραγώνου, 15
συνάρτηση
άθροισμα, 38
ακέραια, 512
αντίστροφη, 209
από το A στο B, 543
από τους πραγματικούς αριθμούς στο επίπεδο, 220
απόλυτης τιμής, 488
αρνητικό μέρος, 46
άρτια, 45, 179
αύξουσα, 176
στο a, 196
γινόμενο, 38
γραμμική, 53
γραφικές παραστάσεις, 52, 59, 179, 489
διανυσματική, 220
δύναμης, 55
δύο φορές παραγωγίσιμη, 146
εκθετική, 309, 311
ελάχιστη τιμή, 170
επέκταση, 103, 104
θετικό μέρος, 46
ίσες μέχρι τη n-οστή τάξη, 379
καθολική ιδιότητα, 111
κανονικοποιημένη, 474
κλιμακωτή, 251
κοίλη, 198
κρίσιμη τιμή, 172
κρίσιμο σημείο, 172
κυρτή, 198
λογάριθμος, 308, 312
«λογική», 106
λογική, 62, 163
μέγιστη τιμή, 170
μη αρνητική, 46
μη αύξουσα, 219
μη φθίνουσα, 219
μιγαδική, 488
ολοκλήρωμα, 233
ολοκληρώσιμη, 233
ορίσματος, 489
παραγωγίσιμη, 136, 496
παράγωγος, 135
πεπλεγμένα ορισμένη, 217
περιοδική, 65, 148, 269
περιττή, 45, 179
πηλίκο, 38
πιο γενικός ορισμός, 543
πολυωνυμική, 38
πραγματική, 488
πραγματικό μέρος, 488
ρητή, 38
σημείο μεγίστου, 170
γνήσιου, 197
τοπικά γνήσιου, 197
σταθερή, 39
σταθερό σημείο, 422
στοιχειώδης, 327
συζυγής, 488
συμβολισμός, 36, 40
συνεχής, 103
ομοιόμορφα, 130
πουθενά παραγωγίσιμη, 143, 460
στο $(a\ b)$, 106
στο $[a\ b]$, 106
στο a, 103, 492
σύνθεση, 39
ταυτοτική, 38
τετραγωνικής ρίζας, 493, 494
τιμή στο x, 36
του ορίσματος, ασυνέχειες, 492
τριγωνομετρική, 274

υπερβολική, 318
φανταστικό μέρος, 488
φθίνουσα, 176
συνεχές κλάσμα, ανάπτυξη σε, 418
συνεχής συνάρτηση, 103, 106, 492
συνημίτονο, υπερβολικό, 318
σύνθεση συναρτήσεων, 39
σύνολο, -α
συμβολισμός, 38, 39
τομή, 38
σύνολο, κενό, 20
συντεταγμένη
δεύτερη, 52
πρώτη, 52
σύστημα συντεταγμένων
αρχή, 52
Καρτεσιανό, 76
συστολή, 423
σχεδιασμός γραφικών παραστάσεων, 176, 181
σώμα
διατεταγμένο, 527
ισομορφικά, 544
πλήρες διατεταγμένο, 528, 544
χαρακτηριστική, 529

τάξη ισότητας, 379
ταυτότητα της πρόσθεσης
για την arcsin, 287
για την arctan, 286
για την cos, 284
για την sin, 282, 284
για την tan, 286
ταυτοτικό στοιχείο
πολλαπλασιαστικό, 8
προσθετικό, 8
ταχύτητα
μέση, 137
στιγμιαία, 137
τέμνουσα ευθεία, 136
τετραγωνική ρίζα, 476
σώματος, 529
ύπαρξη της, 112
τετραγωνισμός του κύκλου, 406
τετράφυλλο τριφύλλι, 79
τιμή της f στο x, 36
τιμή, απόλυτη, 10
τόκος (χρηματοοικονομικά), 320
τομή συνόλων, 38
τοπική ιδιότητα συνάρτησης, 111
τοπικό ελάχιστο σημείο συνάρτησης
κριτήρια παραγώγου μεγαλύτερης τάξης, 378
τριγωνομετρικές συναρτήσεις, 274
αντίστροφες, 280
ολοκλήρωση, 339, 340
τρομπέτα, άπειρη, 369
τύπος αντικατάστασης, 332
τύπος του Leibniz, 167

υπερβατικός αριθμός, 401
υπερβολή, 73
εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες, 79
υπερβολικές συναρτήσεις, 318
υπερβολική σπείρα, 286
υπό συνθήκη συγκλίνουσα σειρά, 436
υπόλοιπο των πολυωνύμων Taylor, 382

φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 479
φθίνουσα ακολουθία, 415
φθίνουσα συνάρτηση, 176
φράγμα
άνω, 120
ελάχιστο άνω, 120, 528
κάτω, 121
μέγιστο κάτω, 121
σχεδόν άνω, 128
σχεδόν κάτω, 128
φυσικοί αριθμοί, 31

χαρακτηριστική (σώματος), 529

ψύξη
νόμος του Newton για την, 321

1-1 συνάρτηση, 208
Mirifici logarithmonum canonis descriptio (Περιγραφή του Θαυμάσιου Νόμου των Λογαρίθμων), 323
AalbmcndoE, 249
Abel, Niels Henrik, 472
arccos, παράγωγος, 281
arcsec, 289, 345
arcsin
παράγωγος, 281
σειρά Taylor, 468
ταυτότητα της πρόσθεσης, 287
arctan
παράγωγος, 281
πολυώνυμα Taylor, 375, 381
υπόλοιπο, 387
ταυτότητα της πρόσθεσης, 286
arg sinh, 319
arg cosh, 319
arg tanh, 319
Bernoulli, πολυώνυμα, 519
Bohr, Harold, 356
Cauchy, 253
γινόμενο, 446
Θεώρημα Μέσης Τιμής του, 183
Cleio, 168
cos, 274, 290, 291, 508

αντίστροφη, 277
παράγωγος, 156, 277
πολυώνυμα Taylor, 374
υπόλοιπο, 385
ταυτότητα της πρόσθεσης, 284
cosh, 318
cot, 274, 280
παράγωγος, 280
csc, 274, 280
παράγωγος, 280
Descartes, René, 76
e, 310
άρρητος, 389
σχέση με π, 406, 509
τιμή, 310, 387
υπερβατικότητα, 403
exp, 309, 508
κλασική προσέγγιση, 322
πολυώνυμα Taylor, 375
υπόλοιπο, 386, 387
στοιχειώδης ορισμός, 425
Gabriel, 369
Gronwall, ανισότητα του, 321
Hadamard, 513
Hermite, 402
Hilbert, 402
Kepler, νόμοι του για την πλανητική κίνηση, 298
Lebesgue, 353
Lipschitz τάξης α, 190
log, 308, 312
πολυώνυμα Taylor, 375
M-κριτήριο του Weierstrass, 459
Maclaurin, 520
Mollerup, Johannes, 356
n-οστή ρίζα, 65, 484
αρχική, 487
μιγαδική, 484
ύπαρξη της, 112, 484, 499
Newton, 298
Petard, H., 498
Pig, yellow, 338
Pope, Alexander, 298
Schwarz, H. A., 16, 196
sec, 274, 280
αντίστροφη, 280
παράγωγος, 280
sin, 38, 274, 277, 291, 508
αντίστροφη, 277
παράγωγος, 156, 277
πολυώνυμα Taylor, 374
υπόλοιπο, 385
ταυτότητα της πρόσθεσης, 282, 284
sinh, 318
tan, 274, 280
αντίστροφη, 280
παράγωγος, 280
σειρά Taylor, 517
tanh, 318
Viète, Francois, 297
Weierstrass, 416