Augustin - Luis Cauchy

(1789-1857)

Ο Augustin - Louis Cauchy, ήταν διαπρεπής και πολυγραφότατος Γάλλος μαθηματικός, του οποίου η συμβολή στη μαθηματική Ανάλυση είναι πολύτιμη. Γεννήθηκε στο Παρίσι λίγες βδομάδες μετά την πτώση της Βαστίλλης και μόνο χάρη στην διπλωματικότητα του πατέρα του επέζησε της Τρομοκρατίας. Έδειξε από μικρός τις εξαιρετικές πνευματικές του ικανότητες. Μπήκε στο Πολυτεχνείο σε ηλικία 16 χρονών και παρά το ότι εσκόπει να γίνει πολιτικός μηχανικός, δυο μεγάλοι Γάλλοι μαθηματικοί, ο Lagrange και ο Laplace, θαυμαστές του Cauchy, τον έπεισαν το 1816 να δεχθεί να διδάξει μαθηματικά στο Πολυτεχνείο.

Είναι παράξενο που δεν τον συγκίνησαν καθόλου οι ιδέες της Γαλλικής Επανάστασης, στην οποία πάντα ήταν αντίθετος, και αρνήθηκε επίμονα να δώσει όρκο πίστης. Ηταν φανατικός καθολικός και οπαδός της βασιλείας. Σαν επιστήμονας, όταν επρόκειτο να κρίνει νέους συναδέλφους του, δεν έμενε ανεπηρέαστος από τις πολιτικές και θρησκευτικές του πεποιθήσεις. Στην «αδιαφορία» του Cauchy οφείλονται δύο από τις μεγαλύτερες απώλειες στην ιστορία των Μαθηματικών: του Νορβηγού Niels Henrik Abel και του Γάλλου Galois. Το τραγικό λάθος που έκανε και στους δύο αυτούς μαθηματικούς να «χάσει» τις σημαντικότατες για τα μαθηματικά εργασίες τους, είναι περίεργο.

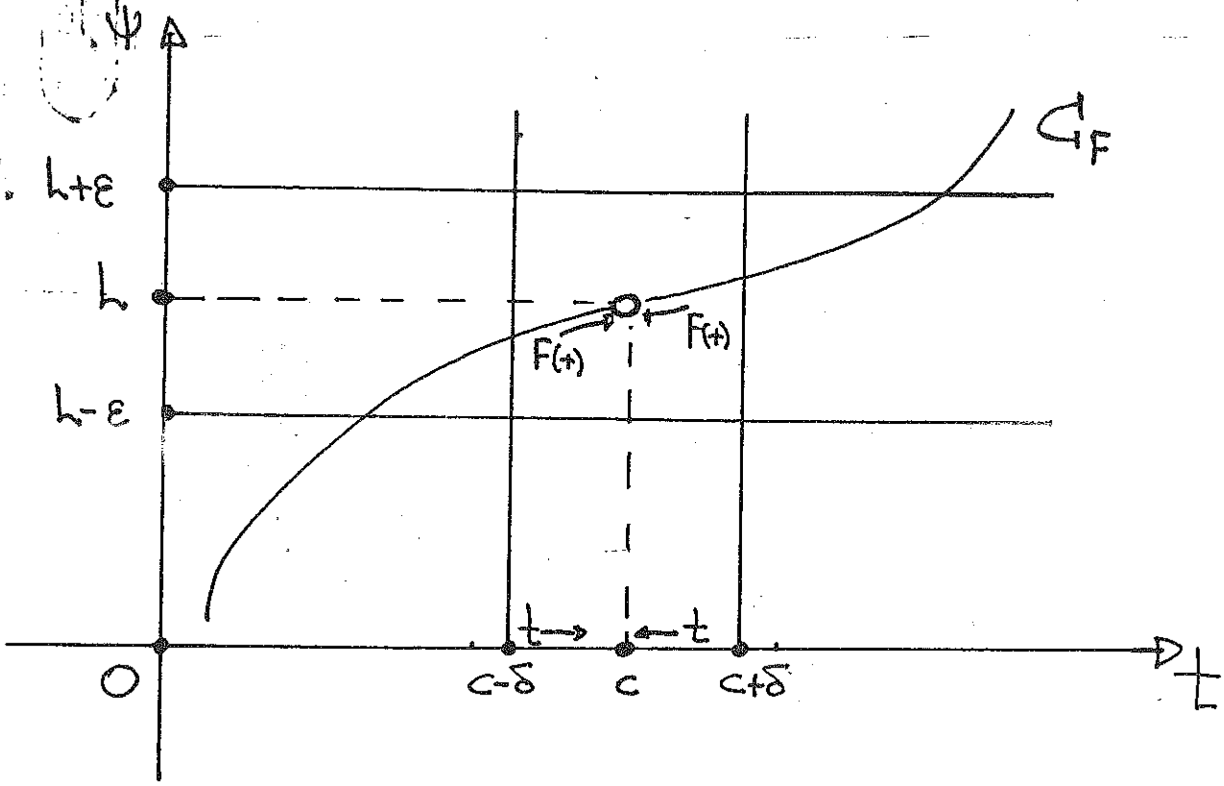
Ήδη από τα 27 του χρόνια ο Cauchy είχε ανέλθει στην πρώτη γραμμή των ζώντων μαθηματικών. Η εργασία του το 1814 πάνω στα ορισμένα ολοκληρώματα με όρια ολοκλήρωσης μιγαδικούς αριθμούς στάθηκε το ξεκίνημα της μεγάλης του σταδιοδρομίας ως ανεξάρτητου δημιουργού της θεωρίας των συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής. Είναι γνωστά τα θεωρήματα του Cauchy για το ολοκλήρωμα, οι περίφημες συνθήκες Cauchy-Riemann και η τιμή Cauchy ενός ολοκληρώματος μιας μιγαδικής μεταβλητής. Τον επόμενο χρόνο ο Cauchy προκάλεσε μεγάλη αίσθηση με την απόδειξη ενός από τα μεγάλα θεωρήματα του Fermat ότι κάθε θετικός ακέραιος είναι άθροισμα τριών «τριγώνων», τεσσάρων «τετραγώνων», πέντε «πενταγώνων» κ.τ.λ.

Τα σύγχρονα Μαθηματικά οφείλουν στον Cauchy και δύο από τα κύρια ενδιαφέροντά τους, καθένα από τα οποία συνιστά και μια έντονη αλλαγή στάσεως σε σχέση με τα Μαθηματικά του 18ου αιώνα. Το πρώτο είναι η εισαγωγή της αυστηρότητας στη Μαθηματική Ανάλυση. Με την ενθάρρυνση του Laplace και άλλων παρουσίασε για δημοσίευση το 1821 τη σειρά των διαλεξεών του πάνω στην Ανάλυση στο Πολυτεχνείο. Αυτό το έργο απετέλεσε επί μακρόν το πρότυπο της αυστηρότητας και της ακρίβειας. Ακόμη και σήμερα οι ορισμοί του Cauchy για το όριο και τη συνέχεια, όπως και μεγάλο μέρος όσων έγραψε για την σύγκλιση των απειροσειρών σ' αυτή τη σειρά διαλέξεων, θα βρεθούν σε κάθε προσεκτικά γραμμένο βιβλίο Λογισμού.

Η δεύτερη μεγάλη συνεισφορά του Cauchy αφορά την συνδυαστική, τη θεωρία των μεταθέσεων. Μια μακρά σειρά αρθρών του στα μέσα της δεκαετίας του 1840 ξεκίνησαν και συστηματικά επεξεργάστηκαν τη θεωρία των πεπερασμένων ομάδων. Σήμερα αυτή η θεωρία είναι θεμελιώδους σημασίας σε πολλά πεδία των καθαρών και εφαρμοσμένων μαθηματικών, από τη θεωρία των αλγεβρικών εξισώσεων μέχρι τη γεωμετρία και τη θεωρία της ατομικής δομής.

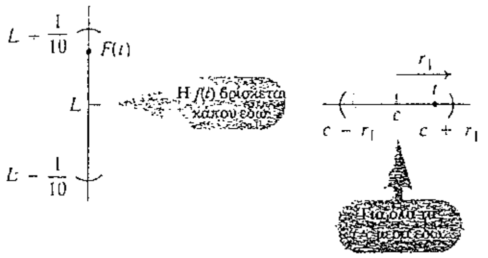
Η παραγωγικότητα του Cauchy ήταν τόσο εκπληκτική ώστε χρειάστηκε να καταφύγει στη δημιουργία ενός περιοδικού, του Exercises de Mathematiques (1826-1830) που συνεχίστηκε σε δεύτερη σειρά στο *Exercises d' Analyse Mathematique et de Physique* για την δημοσίευση αποκλειστικά δικών του επεξηγηματικών ή πρωτότυπων εργασιών στα καθαρά και Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Η συνολική παραγωγή του είναι 789 άρθρα (πολλά από αυτά πολύ εκτεταμένα) που καταλαμβάνουν 24 μεγάλους τόμους. Τα τελευταία του λόγια στον Αρχιεπίσκοπο του Παρισιού ήταν: «Οι άνθρωποι φεύγουν, αλλά τα έργα τους μένουν».

Όριο Συνάρτησης



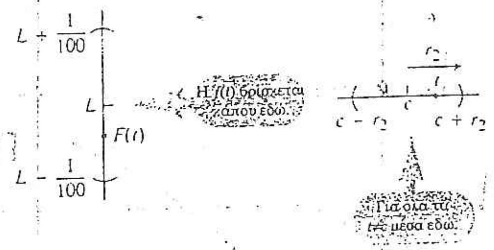
Υποθέστε ότι παρακολουθούμε τις τιμές της συνάρτησης $F(t)$ καθώς το t κινείται προς το c, χωρίς στην πραγματικότητα να παίρνει την τιμή c (όπως ακριβώς αφήνουμε το Δx να πλησιάσει το 0, χωρίς να πάρει την τιμή 0). Τι πρέπει να ξέρουμε για τη συμπεριφορά των τιμών της $F(t)$ για να πούμε ότι έχουν το L σαν όριο; Ποιά παρατηρούμενη τάση της συμπεριφοράς τους θα μπορούσε να εγγυηθεί την τελική προσέγγιση της τιμής τους στο L;

Σίγουρα θέλουμε να είμαστε σε θέση να πούμε ότι η τιμή της $F(t)$ βρίσκεται περίπου στο ένα δέκατο της μονάδας από το L, καθώς το t βρίσκεται σε μία σταθερή ακτίνα r_1 γύρω από το c, όπως φαίνεται παρακάτω: ...



Αλλά αυτό από μόνο του δεν είναι αρκετό, γιατί καθώς το t συνεχίζει την πορεία του προς το c, πώς μπορούμε να εμποδίσουμε την $F(t)$ να κινείται πάνω και κάτω στα όρια του διαστήματος $(L - \frac{1}{10}, L + \frac{1}{10})$ αντί να κατευθύνεται ακριβώς προς το L;

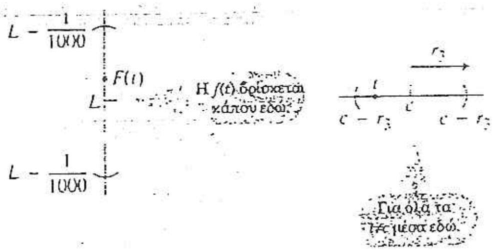
Πρέπει επίσης να πούμε ότι καθώς το t συνεχίζει να τείνει προς το c, η $F(t)$ θα πρέπει τελικά να πηγαίνει ακόμη πιο κοντά στο L. Μπορούμε να το πούμε αυτό απαιτώντας η $F(t)$ να βρίσκεται στα όρια του $\frac{1}{100}$ της μονάδας του L για όλες τις τιμές του t, στα πλαίσια μιας μικρότερης ακτίνας r_2 γύρω από το c:



Αλλά ακόμη κι αυτό δεν είναι αρκετό. Τί γίνεται όταν η $F(t)$ κινείται πάνω και κάτω στα όρια του διαστήματος $(L - \frac{1}{100}, L + \frac{1}{100})$ χωρίς να πλησιάζει ποτέ την τιμή L: Θα ήταν καλύτερα ν' απαιτήσουμε η $F(t)$ να βρίσκεται επίσης στο διάστημα του 1/1000 της μονάδας του L μετά από λίγο. Αυτό σημαίνει ότι για όλες τις τιμές του t που βρίσκονται σε απόσταση μιας ακόμη μικρότερης ακτίνας r_3 γύρω από το c, όλες οι τιμές της $F(t)$ να βρίσκονται στο διάστημα

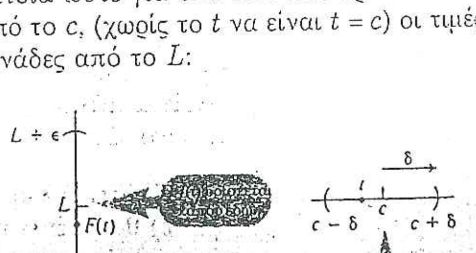
$$L - \frac{1}{1000} < F(t) < L + \frac{1}{1000},$$

όπως φαίνεται παρακάτω:



Ωστόσο, και αυτό ακόμη δεν εγγυάται ότι η $F(t)$ θα κινείται τώρα προς το L καθώς το t προσεγγίζει το c. Ακόμη κι αν η $F(t)$ δεν πήγαινε πάνω-κάτω, ίσως γίνει αυτό τώρα. Ετσι, χρειαζόμαστε κάτι επιπλέον.

Πρέπει να απαιτήσουμε για κάθε διάστημα γύρω από το L, δεν έχει σημασία πόσο μικρό, να μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα αριθμών γύρω από το c για τους οποίους οι τιμές της F να βρίσκονται στα πλαίσια του προαναφερθέντος διαστήματος γύρω από το L. Με άλλα λόγια για κάθε δεδομένη θετική ακτίνα ϵ γύρω από το L, υπάρχει κάποια θετική ακτίνα δ γύρω από το c τέτοια ώστε για όλα τα t που βρίσκονται σε απόσταση μέχρι δ μονάδων από το c, (χωρίς το t να είναι $t = c$) οι τιμές της $F(t)$ να απέχουν μέχρι ϵ μονάδες από το L:



Συνεπώς, όσο πιο κοντά στο c βρίσκεται το t (χωρίς να εξισώνεται με το c), τόσο πιο κοντά στο L πρέπει να βρίσκεται η $F(t)$.

Όριο

Όριο της $F(t)$ καθώς το t προσεγγίζει το c, είναι ο αριθμός L εάν:

Για κάθε δεδομένη ακτίνα $\epsilon > 0$ γύρω από το L, υπάρχει μία ακτίνα $\delta > 0$ γύρω από το c, τέτοια ώστε, για κάθε t, η ανισότητα

$$0 < |t - c| < \delta \quad \text{να συνεπάγεται την} \quad |F(t) - L| < \epsilon. \quad (5)$$

Μπορούμε να γράψουμε "το όριο της $F(t)$ καθώς το t προσεγγίζει το c είναι το L" σαν:

$$\lim_{t \to c} F(t) = L.$$

Με απλά λόγια, λέγοντας ότι η $F(t)$ προσεγγίζει το όριο L καθώς το t τείνει προς το c εννοούμε ότι για κάθε ϵ υπάρχει ένας μικρός αριθμός δ (ο οποίος εξαρτάται από το ϵ) τέτοιος ώστε η $F(t)$ να βρίσκεται σε απόσταση το πολύ ϵ μονάδων από το L, εάν το t βρίσκεται σε απόσταση το πολύ δ μονάδων από το c.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ
G. B. THOMAS – R. L. FINNEY

ΒΛΑΧΟΣ. Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η εννοια της Συνεχειας Συναρτησης ειναι μια απο τις θεμελιωδεις εννοιες της Αναλυσης

Για λογους ιστορικης αληθειας θα πρεπει να αναγνωρισουμε ως προδρομους μαθηματικους που ασχοληθηκαν με αυτη τους:

L. Euler (1707-1783), J. D'Alembert (1717-1783)

L. Arbogast (1739-1803), J. Lagrange (1736-1813)

Και κυριως τον μεγαλοφυεστερο ισως μαθηματικο των αιωνων Αρχιμηδη (287-212 π.Χ.)

Η εννοια της Συνεχειας Συναρτησης θεμελιωθηκε αυστηρα απο τους μεγαλους μαθηματικους του 19ου αιωνα:

B. Bolzano (1781-1848), A. Cauchy (1789-1857)

G. Darboux (1842-1917).

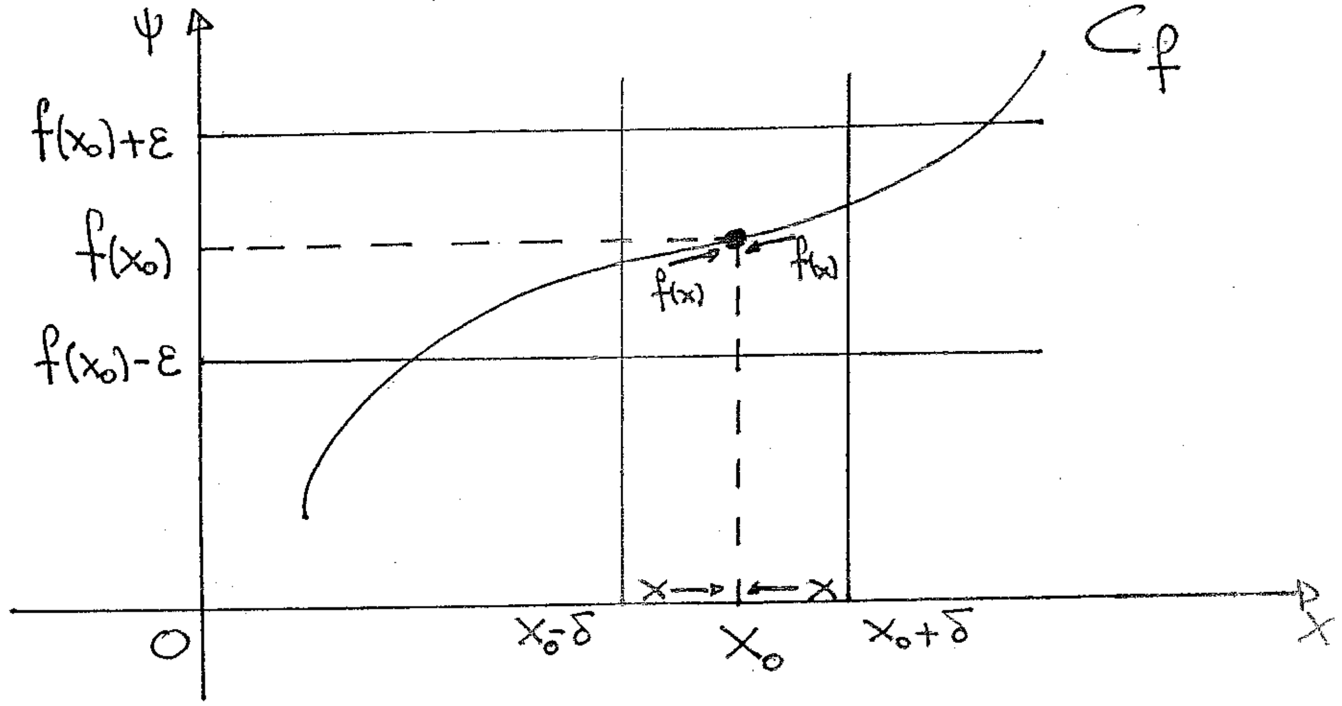
Πρωτος ο Γαλλος μαθηματικος Louis Arbogast σε μια εργασια το 1791 καθορισε ως νομο της Συνεχειας Συναρτησης αυτον με τον οποιο "Μια ποσοτητα δεν ειναι δυνατον να περασει απο μια κατασταση σε μια αλλη χωρις να περασει απο ολες τις ενδιαμεσες καταστασεις".

Ο Bernard Bolzano Βοημος μαθηματικος και φιλοσοφος μελετησε σε βαθος την θεμελιωση της Μαθηματικης Αναλυσης και στην προσπαθεια του να δωσει αναλυτικη αποδειξη του Θεωρηματος Ενδιαμεσης Τιμης κατεληξε το 1817 σε εναν συγχρονο Ορισμο Συνεχειας Συναρτησης.

Λιγο αργοτερα ο Γαλλος μαθηματικος Augustin-Louis Cauchy πετυχε να δωσει γυρω στα 1821 αυστηρους ορισμους στις βασικες εννοιες του Οριου και της Συνεχειας Συναρτησης

Η τελικη μορφη της αυστηρης μαθηματικης διατυπωσης του Ορισμου Συνεχειας Συναρτησης δοθηκε απο τον Γερμανο μαθηματικο Karl Weierstrass (1815-1897) το ετος 1870 και ειναι γνωστος ως "ε-δ" Ορισμος Συνεχειας Συναρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΙ



Θεωρουμε Πραγματικη Συναρτηση f μιας Πραγματικης Μεταβλητης x με τυπο $f(x)$ και Πεδιο Ορισμου $D_{f(x)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ Cauchy

Η f συναρτηση Συνεχης στο $x = x_0 \in D_{f(x)} \overset{\text{ορισμος}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)(\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1:

Εαν το x_0 = Μεμονωμενο Σημειο του $D_{f(x)}$ Τοτε:

Ο Ορισμος Cauchy δεν ισχυει.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2:

Εαν το x_0 = Σημειο Συσσωρευσεως του $D_{f(x)}$ Τοτε:

Ο Ορισμος Cauchy ισχυει.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ Weierstrass

Η f συνάρτηση Συνεχής στο $x = x_0 \in D_{f(x)} \overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$

$$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0)\,(\forall x : |x - x_0| < \delta) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1:

Εάν το x_0 = Μεμονωμένο Σημείο του $D_{f(x)}$ Τότε:

Ο Ορισμός Weierstrass ισχύει.

Και μάλιστα είναι ισχυρότερος του Ορισμού Cauchy

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2:

Εάν το x_0 = Σημείο Συσσωρεύσεως του $D_{f(x)}$ Τότε:

Ο Ορισμός Weierstrass ισχύει.

Και μάλιστα είναι ισοδύναμος του Ορισμού Cauchy.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εάν το $D_{f(x)}$ είναι Διάστημα ή Ένωση Διαστημάτων Τότε οι Ορισμοί Cauchy και Weierstrass είναι ισοδύναμοι.

2. Στους Ορισμούς Cauchy και Weierstrass για Συνεχείς Συναρτήσεις ο Θετικός αριθμός $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ εξαρτάται και από τους δύο αριθμούς ε και x_0.

Βλάχος. Σ. Σπυρίδων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ
G. B. THOMAS — R. L. FINNEY

Παράγωγοι

I. Newton
(1642-1727)

Τη χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος, γεννήθηκε ο θεμελιωτής του Απειροστικού Λογισμού I. Newton, τα Χριστούγεννα του 1642, από γονείς αγρότες στο μικρό χωριό Woolsthorpe της Αγγλίας. Στη νεανική του ηλικία δεν επέδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις σπουδές του, σαν φοιτητής όμως του Πανεπιστημίου του Cambridge, ο I. Newton είχε τέτοιες επιδόσεις που ο καθηγητής του I. Barrow παραιτήθηκε οικειοθελώς από την έδρα του χάριν του ασύγκριτου μαθητή του, ηλικίας τότε 26 ετών. Τρία χρόνια πριν, το 1665, όταν το Πανεπιστήμιο έκλεισε λόγω μιας επιδημίας, ο Newton συνέλαβε επαναστατικές ιδέες γαι τη Φυσική και τα Μαθηματικά που δημοσίευσε αργότερα στα έργα του:

1. *Method of Fluxions*, 1736. Ενα χειρόγραφο ημερομηνίας 20 Μαΐου 1665 δείχνει πως ο Νεύτων είχε ήδη αναπτύξει αρκετά τις αρχές του Λογισμού ώστε να μπορεί να βρει την εφαπτομένη και καμπυλότητα σε κάθε σημείο μίας συνεχούς καμπύλης. Κάλεσε τη μέθοδό του «ρευστά» από την ιδέα των «ρεόντων» ή μεταβλητών ποσοτήτων και από τους ρυθμούς «ροής» ή αύξησής τους

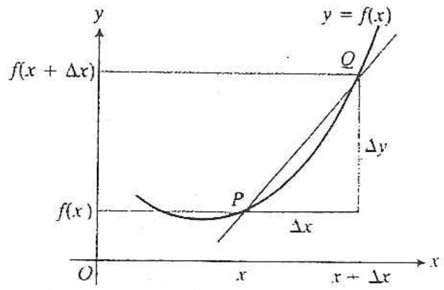
2. *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, 1687. Η δεύτερη απο τις μεγάλες εμπνεύσεις του Νεύτωνα ήταν ο νόμος της παγκοσμίου έλξεως. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον νόμο και τον Λογισμό που πρόσφατα είχε επίσης εφεύρει, εξήγησε τους τρείς εμπειρικούς νόμους του Kepler, υπεολόγισε τη μάζα του Ήλιου, ζύγισε τη Γη και κάθε πλανήτη που έχει δορυφόρο, εξήγησε τις παλίρροιες, κ.τ.λ. Για τις προηγούμενες και τις άλλες ανακαλύψεις του, ο Lagrange παρατήρησε ότι ο Νεύτων δεν ήταν μόνο ο μεγαλύτερος επιστήμονας που έζησε ποτέ, αλλά και ο τυχερότερος, γιατί μόνο μια φορά μπορεί κανείς να περιγράψει τους νόμους του κόσμου.

3. *Theory of Light–Optics*, 1704. Στην τρίτη θεωρία του για τη φύση του φωτός, πρότεινε ότι το φως είναι η εκπομπή σωματιδίων και όχι ένα κυματικό φαινόμενο, όπως ισχυριζόταν ο Huygens. Αν και οι δύο θεωρίες φαίνονταν να αντιφάσκουν μεταξύ τους, σήμερα είναι και οι δύο κρίσιμες στον συσχετισμό των φωτεινών φαινομένων και συμφιλιώθηκαν στη μοντέρνα κβαντική θεωρία. Το 1668 κατασκεύασε μόνος του ένα ανακλαστικό τηλεσκόπιο για να παρατηρήσει τους δορυφόρους του Δία. Αυτό που αναμφίβολα τον ενδιέφερε ήταν να διαπιστώσει «ιδίοις όμμασι» κατά πόσον ο νόμος του της βαρύτητας ήταν πραγματικά παγκόσμιος.

Στην περίφημη *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Μαθηματικές Αρχές της Φυσικής Φιλοσοφίας) ο Νεύτων κατέγραψε τις ανακαλύψεις του στα Μαθηματικά, την Αστρονομία και τη Φυσική και δημοσίευσε το 1687 με παρακίνηση και έξοδα του Halley. Η εικοσαετής καθυστέρηση του Νεύτωνα να δημοσιεύσει το νόμο της βαρύτητας, πιθανότατα οφείλεται στην αδυναμία του να λύσει ένα πρόβλημα ολοκληρωτικού λογισμού, που σήμερα οι νέοι φοιτητές καλούνται να λύσουν σε είκοσι λεπτά. Δηλαδή, να βρει τη συνολική έλξη που ασκείται από μια σφαιρική ομοιογενή μάζα πάνω σε ένα σωματίδιο με δοσμένη μάζα που βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Η έλξη βέβαια είναι η ίδια, σαν να είχε συγκεντρωθεί ολόκληρη η μάζα της σφαίρας σε ένα και μόνο σημείο στο κέντρο της, και το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της έλξης δύο σωματιδίων με γνωστές μάζες και σε γνωστή απόσταση μεταξύ τους. Στο πρώτο βιβλίο της *Principia* έθεσε τις αρχές της Δυναμικής· στο δεύτερο πραγματεύεται την κίνηση σωμάτων σε μέσα με αντίσταση, και την κίνηση των ρευστών· στο τρίτο περιγράφει το περίφημο «Σύστημα του Κόσμου». Πιθανώς κανένας άλλος νόμος της Φυσικής δεν έχει τόσο απλά ενοποιήσει έναν τόσο μεγάλο αριθμό φυσικών φαινομένων.

Ο I. Newton συνέχισε τις έρευνές του ώς τα τελευταία του χρόνια που ήταν διευθυντής του Βασιλικού Νομισματοκοπείου. Έτσι, όταν το 1696 ο Johann Bernoulli έθεσε στους μαθηματικούς της Ευρώπης το πρόβλημα του βραχυστόχρονου, δηλαδή τον υπολογισμό του σχήματος της καμπύλης πάνω στην οποία πρέπει να γλιστρήσει χωρίς τριβή ένα σώμα υπό την επίδραση της βαρύτητας έτσι ώστε να φτάσει από το υψηλότερο στο χαμηλότερο σημείο στον ελάχιστο χρόνο, ο Νεύτων παρουσίασε αμέσως τη λύση του ανώνυμα στη Βασιλική Εταιρεία. Όταν ο Bernoulli έμαθε τη λύση και ρωτήθηκε για το ποιός πρέπει να ήταν ο ανώνυμος μαθηματικός, αναφώνησε το περίφημο «εξ όνυχος τον λέοντα».

Τα Μαθηματικά, η Δυναμική και η Ουράνια Μηχανική δεν ήταν η μόνη ασχολία του Νεύτωνα. Φαίνεται ότι τον περισσότερο χρόνο του αφιέρωσε σε θεολογικές μελέτες. Πίστευε σε έναν πάνσοφο Δημιουργό του Σύμπαντος και η παρακάτω φράση του είναι αποκαλυπτική της κοσμοθεωριακής του τοποθέτησης: «*Δεν γνωρίζω πώς μπορεί να φαίνομαι στον κόσμο· όμως, η ιδέα που έχω για τον εαυτό μου είναι εκείνη ενός παιδιού που παίζει στην ακρογιαλιά και διασκεδάζει ανακαλύπτοντας μερικές φορές κάποιο βότσαλο πιο λείο και πιο όμορφο από τα συνηθισμένα, ή κάποιο χαριτωμένο όστρακο, ενώ ο μεγάλος ωκεανός της αλήθειας βρίσκεται όλος ανεξερεύνητος μπροστά μου.*»



Σχ. 1.70 Η κλίση της ευθείας γραμμής PQ είναι $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Εστω $P(x, y)$ κάποιο σημείο της καμπύλης $y = f(x)$. Αν $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ένα άλλο σημείο της καμπύλης, τότε

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

όπως στο Σχ. 1.70. Αφού $y = f(x)$, τότε

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Επομένως, η κλίση της τέμνουσας PQ είναι:

$$m_{\text{τεμν.}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Η διαίρεση στην Εξ. (1) είναι απλώς *ενδεικτική* όταν πρόκειται για μια γενική συνάρτηση $f(x)$, αλλά για μια συγκεκριμένη συνάρτηση όπως η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 3$ στο Παράδειγμα 5 της Παραγράφου 1.6, αυτή η διαίρεση πρέπει να διεξαχθεί *πριν* την επόμενη πράξη.

Αφού λοιπόν γίνει η διαίρεση στην Εξ. (1), *κρατάμε το x σταθερό* και αφήνουμε τη μεταβολή Δx να τείνει στο 0. Αν η $m_{\text{τεμν.}}$ τείνει σε μια τιμή που εξαρτάται μόνο από το x, ορίζουμε την τιμή αυτή να είναι η *κλίση* $m_{\text{εφαπτ.}}$ της *εφαπτομένης της καμπύλης* στο $P(x, y)$. Δηλαδή

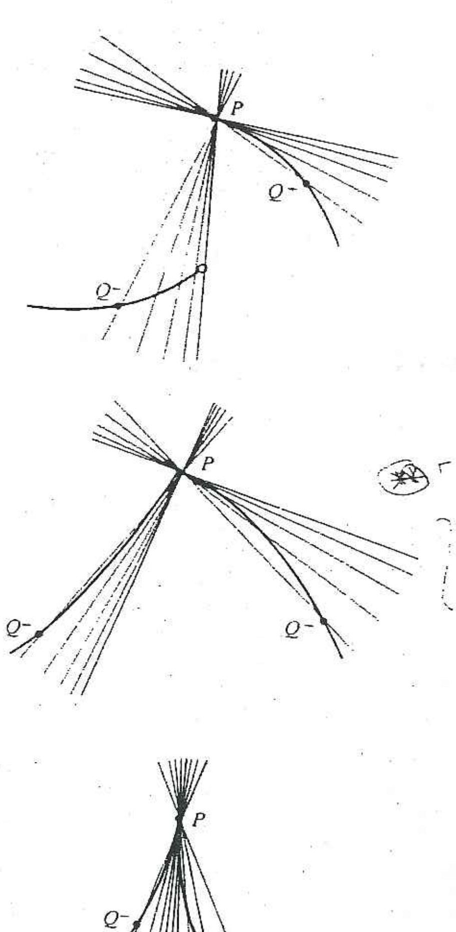
$$\begin{aligned} m_{\text{εφαπτ.}} &= \lim_{Q \to P} m_{\text{τεμν.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Η έννοια του ορίου, θεμελιώδης για τα σύγχρονα μαθηματικά, θα μελετηθεί λεπτομερώς στην Παράγραφο 1.9. Επί του παρόντος, η χρήση του lim εδώ θα είναι άτυπη.

Η κλίση $m_{\text{εφαπτ}}$ είναι μια συνάρτηση του x, ορισμένη σε κάθε σημείο x όπου υπάρχει το όριο της Εξ. (2). Συνήθως συμβολίζουμε τη συνάρτηση κλίσης με $f'(x)$ και την ονομάζουμε *παράγωγο* της f. Ετσι, η παράγωγος $f'(x)$ της συνάρτησης $f(x)$ ορίζεται από τον κανόνα:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

Το πεδίο ορισμού της $f'(x)$ είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της $f(x)$. Τα σημεία που αποκλείονται είναι, γενικά, σημεία όπου η γραφική παράσταση της $y = f(x)$ παρουσιάζει γωνίες, ασυνέχειες, ή αιχμές όπως στο Σχ. 1.71.



Σχ. 1.71 Η παράγωγος της $y = f(x)$ δεν ορίζεται στα σημεία όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ένα πήδημα, μια γωνία ή ένα σημείο αιχμής.

Παράγωγος

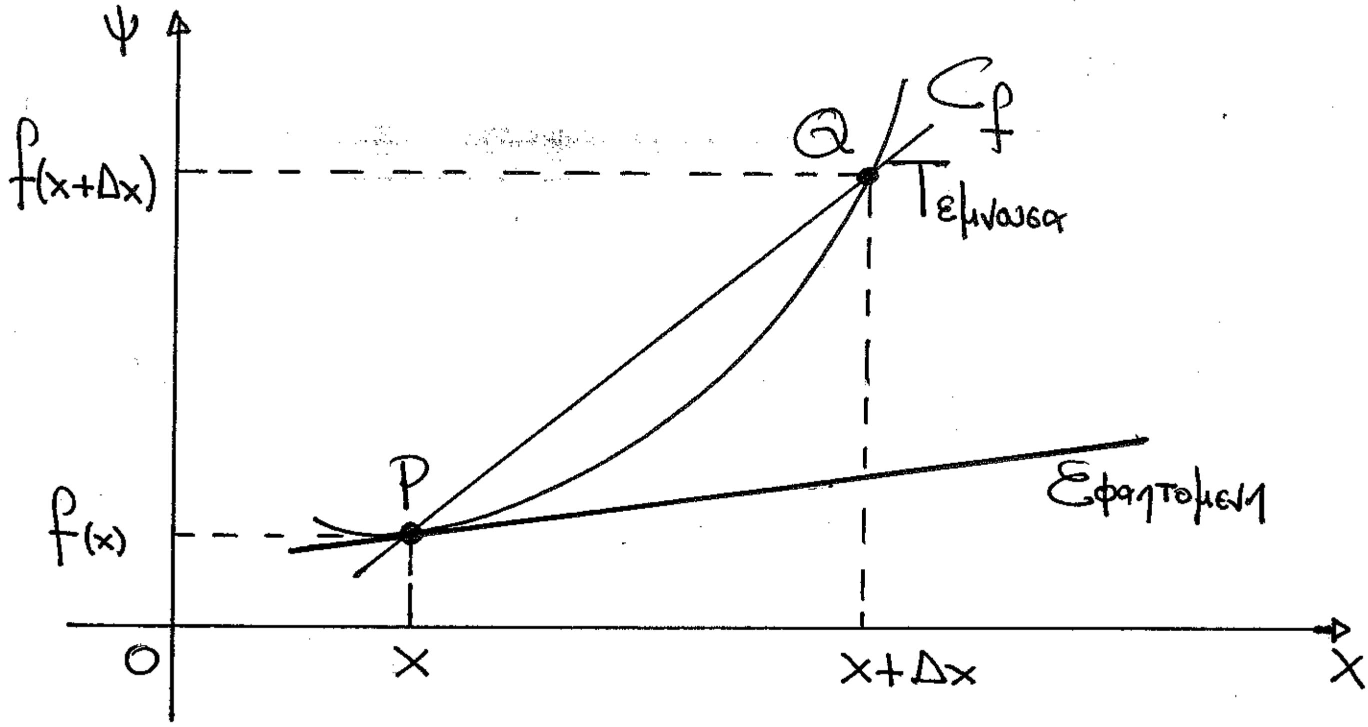
Η *παράγωγος* μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση $f'(x)$ που η τιμή της σε κάθε x ορίζεται από τον κανόνα

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{3}$$

όταν υπάρχει αυτό το όριο. Το πεδίο ορισμού της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f όπου υπάρχει το εν λόγω όριο.

ΒΛΑΧΟΣ. Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ (10) — ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ



Θεωρουμε Πραγματικη Συναρτηση f μιας Πραγματικης Μεταβλητης x με τυπο $f(x)$ και Πεδιο Ορισμου $D_{f(x)}$

Κλιση Τεμνουσας Ευθειας $PQ = \dfrac{\Delta\psi}{\Delta x} = \dfrac{\psi_Q - \psi_P}{x_Q - x_P} =$

$= \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Κλιση Τεμνουσας Ευθειας $PQ = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Καθως το Σημειο Q πλησιαζει το Σημειο P ⟹

Το Διαστημα Δx πλησιαζει το Μηδεν ⟹

Η Τεμνουσα Ευθεια PQ πλησιαζει την Ευθεια που διερχεται απο το Σημειο P της Καμπυλης C_f ⟹

Η Τεμνουσα Ευθεια PQ πλησιαζει την Εφαπτομενη Ευθεια που διερχεται απο το Σημειο P της Καμπυλης C_f ⟹

Η Κλιση της Τεμνουσας Ευθειας PQ πλησιαζει την Κλιση της Εφαπτομενης Ευθειας της Καμπυλης C_f στο Σημειο P ⟹

Οριακη Τιμη Κλισης Τεμνουσας Ευθειας PQ, οταν το Διαστημα Δx τεινει στο Μηδεν, ισουται με την Κλιση Εφαπτομενης Ευθειας της Καμπυλης C_f στο Σημειο P.

Οριζουμε: Κλιση Καμπυλης C_f στο P =

= Κλιση Εφαπτομενης Ευθειας της C_f στο P =

= Οριακη Τιμη Κλισης Τεμνουσας Ευθειας PQ οταν το Διαστημα Δx τεινει στο Μηδεν

Ονομαζουμε: Παραγωγο Αριθμο της Συναρτησης f στο $x = x_P$ Την Κλιση της Καμπυλης C_f στο Σημειο P.

Συνολικα:

Παραγωγος Αριθμος της Συναρτησης f στο $x = x_p$ =
Κλιση της Καμπυλης C_f στο Σημειο P =
Κλιση της Εφαπτομενης Ευθειας της Καμπυλης C_f στο Σημειο P =
Οριακη Τιμη Κλισης Τεμνουσας Ευθειας PQ, οταν το Διαστημα Δx τεινει στο Μηδεν.

- ή ισοδυναμα συμβολικα:

$$f'(x)|_{x=x_p} = f'(x_p) = \lambda_{C_f|P} = \lambda_{\epsilon\varphi|P} = \lim_{\Delta x \to 0}(\lambda_{\tau\epsilon\mu\nu\, PQ}).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για τον Παραγωγο Αριθμο $f'(x_p)$ ισχυει:
   ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1: $f'(x_p)$ δεν υπαρχει
   ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2: $f'(x_p) = -\infty$
   ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3: $f'(x_p) = +\infty$
   ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4: $f'(x_p) \in \mathbb{R}$.

2. Εαν ο Παραγωγος Αριθμος $f'(x_p) \in \mathbb{R}$ Τοτε η Συναρτηση f ονομαζεται Παραγωγισιμη στην Θεση $x = x_p$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

3. Παραγωγος Συναρτηση f' με τυπο $f'(x)$ ονομαζεται η Πραγματικη Συναρτηση μιας Πραγματικης Μεταβλητης x η οποια Πεδιο Ορισμου $D_{f'(x)}$ εχει το Συνολο με στοιχεια τις Θεσεις $x = x_p$ στις οποιες η Συναρτηση f ειναι Παραγωγισιμη.

4. Η Παραγωγος Συναρτηση f' ειναι μια Συναρτηση Κλισης η Τιμη της οποιας $f'(x)$ ισουται με τη Κλιση της Καμπυλης C_f στην Τυχαια Θεση x.

5. Ειναι: $f'(x)|_{x=x_p} = f'(x_p) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\lambda_{\tau\varepsilon\mu\nu\, P\Phi}) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_p + \Delta x) - f(x_p)}{\Delta x} \underline{\underline{h = \Delta x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h} \underline{\underline{x = x_p + h}}$$

$$= \lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p} \Longrightarrow$$

$$\longrightarrow f'(x)|_{x=x_p} = f'(x_p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h} = \lim_{x \to x_p} \frac{f(x) - f(x_p)}{x - x_p}$$

Επιμελεια: Βλαχος Σ. Σπυριδων

Μαθηματικος

1. ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α. Ορισμός 1

Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ διάστημα και μία συνάρτηση $F : \Delta \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta$

Τότε η F ονομάζεται Αντιπαράγωγος της f στο Δ και συμβολίζεται: $F(x) = \int f(x)dx$, $x \in \Delta$

Β. Σχόλιο 1

Οι μορφές του διαστήματος Δ μπορεί να είναι:

$[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, (α, β), $[\alpha, +\infty)$, $(\alpha, +\infty)$

$(-\infty, \beta]$, $(-\infty, \beta)$, $(-\infty, +\infty)$.

Γ. Σχόλιο 2

Η Αντιπαράγωγος F μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ

1. Υπάρχει αν η f συνεχής στο Δ
2. Μπορεί να υπάρχει και όταν η f δεν είναι συνεχής στο Δ
3. Μπορεί να υπάρχει και όταν η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο Δ
4. Μπορεί να μην υπάρχει.

Αοριστο Ολοκληρωμα

Ορισμος 1

Θεωρουμε μια συναρτηση $f: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη κατα Riemann στο διαστημα Δ.

Την Συναρτηση $F: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ την ονομαζουμε Αοριστο Ολοκληρωμα της f στο Δ.

Σχολιο 1

Το Αοριστο Ολοκληρωμα της f μπορει να υπαρχει στο Δ και η f να μην εχει Αντιπαραγωγο στο Δ

Σχολιο 2

Για συναρτηση f Συνεχη σε διαστημα Δ εχουμε οτι:

Το Αοριστο Ολοκληρωμα F της συναρτησης f ειναι η συναρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Εαν $G(x)=\int f(x)dx$ ειναι μια Αντιπαραγωγος της f στο Δ τοτε:

Απο Θεμελιωδες Θεωρημα Απειροστικου Λογισμου εχουμε οτι:

Σχόλιο 2

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = G(x) - G(\alpha) \Longleftrightarrow \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \int f(x)\,dx - G(\alpha)$$

$$\Longleftrightarrow \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = \int f(x)\,dx + C$$

Δηλαδή: Το Αόριστο Ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f Είναι Το Σύνολο των Αντιπαραγώγων της f

Δ. ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Θεωρούμε συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο I και συνάρτηση $F: I \to \mathbb{R}$ με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$

Τότε: η F παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in I$ στο οποίο η f συνεχής

και μάλιστα: $F'(x_0) = f(x_0)$

Ε. ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Θεωρούμε συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και συνάρτηση $F: I \to \mathbb{R}$ με $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$.

Τότε: (α) Υπάρχει η F'

και (β) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Σχολιο 3

Εαν η f συνεχης στο διαστημα I

Τοτε υπαρχει παντα μια Αντιπαραγωγος της f στο I

που ειναι το Αοριστο Ολοκληρωμα $\int_{a}^{x} f(t)\,dt$

της f στο I.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο I.

Τότε μια συνάρτηση $F: I \to \mathbb{R}$ πληρεί την σχέση

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(\alpha) \qquad (*)$$

αν και μόνον αν $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Β. ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f: I=[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο I και μια συνάρτηση $F: I \to \mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Τότε: $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$

Γ. Σχόλιο 1

Ο Τύπος $(*)$ είναι γνωστος ως "Τύπος Newton-Leibniz" και δείχνει την σχέση που υπάρχει μεταξύ του Αορίστου και του Ορισμένου Ολοκληρώματος

Σχολιο 1

Προσοχη : Το Αοριστο Ολοκληρωμα της συναρτησης f
ειναι Συναρτηση
Ενω : Το Ορισμενο Ολοκληρωμα της συναρτησης f
ειναι Αριθμος

Δ. Σχολιο 2

Για να εφαρμοζεται ο Τυπος Newton - Leibniz πρεπει
να ισχυει :

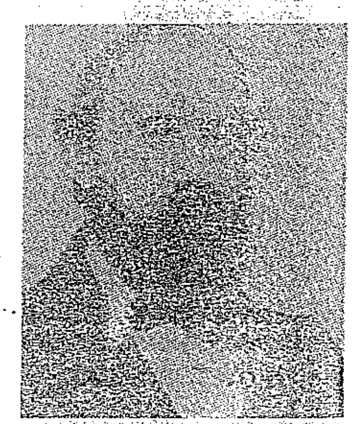
1. η f συνεχης στο $I=[\alpha, \beta]$
2. η F συνεχης στο I
3. $F'(x)=f(x) \quad \forall x \in I$.

ΒΛΑΧΟΣ Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ : ΣΩΤΗΡΗΣ ΝΤΟΥΓΙΑΣ
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 2
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Ολοκληρώματα

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(1826-1866)



Ο Β. Riemann πήρε τις πρώτες του σπουδές από τον πατέρα του, έναν Γερμανό προτεστάντη ιερέα. Αρχικά επρόκειτο να σπουδάσει φιλολογία και θεολογία, αλλά, ευτυχώς για τα Μαθηματικά, βρέθηκε στο Πανεπιστήμιο του Göttingen το οποίο επρόκειτο να παραμείνει για 100 χρόνια το παγκόσμιο κέντρο των μαθηματικών. Διδάσκαλοί του εκεί ήταν οι W. Weber και Karl Gauss, οι γνωστότεροι φυσικοί - μαθηματικοί της εποχής του.

Έζησε μόνο 39 χρόνια, σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα για να δώσει το πλήθος των εργασιών που έδωσαν οι Cauchy ή Euler. Ωστόσο η δουλειά του χαρακτηρίζεται από αυστηρότητα, ποιότητα και προπάντων επιστημονική διεισδυτικότητα. Οι εργασίες του άνοιξαν καινούργιους ορίζοντες στα μαθηματικά: τοπολογία, θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, γεωμετρία. Ειδικώτερα η γεωμετρία του μπορούμε να πούμε ότι οριοθέτησε τις βάσεις της θεωρίας της σχετικότητας που ολοκλήρωσε αργότερα ο Einstein.

Τον συνδέομε μ' αυτό το κεφάλαιο επειδή παρ' όλο που οι Newton και Leibniz είχαν εισαγάγει το ολοκλήρωμα και γνώριζαν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού, ήταν ο Riemann που μας έδωσε τον σύγχρονο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, που και γι' αυτό ονομάζεται σήμερα ολοκλήρωμα Riemann.

Η Επιφάνεια Κάτω από μια Καμπύλη

Εστιάζουμε την προσοχή μας για μια ακόμη φορά στην επιφάνεια που βρίσκεται κάτω από μια συνεχή καμπύλη. Γνωρίζομε γενικούς τύπους για επιφάνειες περιοχών που περικλείονται από τρίγωνα, τραπέζια και κύκλους και οι οποίες όλες έχουν τα κλασικά σχήματα της Ελληνικής γεωμετρίας. Αλλά δεν υπάρχουν γενικοί τύποι από τα Μαθηματικά που υπήρχαν προ του Απειροστικού Λογισμού, για πιό αυθαίρετες επιφάνειες που βρίσκονται κάτω από τις γραφικές παραστάσεις γενικών συνεχών μη αρνητικών συναρτήσεων. Επομένως έχομε φθάσει στο σημείο όπου πρέπει να *ορίσομε* αυτές τις περιοχές και μόλις αρχίσαμε να συζητούμε έναν τρόπο για να κάνομε κάτι τέτοιο. Θα ορίσομε αυτές τις επιφάνειες σαν όρια των επιφανειών εγγεγραμμένων ορθογωνίων. Το ότι αυτά τα όρια πάντα υπάρχουν είναι μια συνέπεια ενός θεωρήματος που θα διατυπώσομε αργότερα σ' αυτό το Κεφάλαιο.

Επιφάνεια

Η *επιφάνεια κάτω από τη γραφική παράσταση* μιάς μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης f σ' ένα διάστημα $[a, b]$ είναι το όριο των αθροισμάτων των επιφανειών των εγγεγραμένων ορθογωνίων ίσου μήκους βάσεως καθώς ο αριθμός τους n αυξάνεται απεριόριστα. Αυτό μπορούμε να το συμβολίσομε ως ακολούθως:

$$A = \lim_{n\to\infty}[f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \tag{3}$$

όπου $f(c_k)$ είναι η μικρότερη τιμή της f στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$.

Το όριο στην Εξ. (3) πάντα υπάρχει, καθώς θα εξηγήσομε σύντομα και συνήθως δεν είναι δύσκολο να υπολογιστεί με τεχνικές που αναπτύσσονται στην Παράγραφο 4.7.

Ολοκληρώματα Riemann

Η ύπαρξη του ορίου στην (3) είναι συνέπεια ενός πιό γενικού θεωρήματος ορίων που έχει εφαρμογή σε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$. Σε ένα πιο γενικό θεώρημα η συνάρτηση μπορεί να έχει αρνητικές τιμές. Πρώτα θα παρουσιάσομε το θεώρημα, μετά θα συζητήσομε γιά ποιούς λόγους εφαρμόζεται με επιτυχία, αλλά δεν θα δώσομε μια αυστηρή αποδειξή του. Για διευκόλυνσή μας τα σχήματα που θα σχεδιάσομε θα δείχνουν θετικές συναρτήσεις αλλά τα γενικά μας συμπεράσματα ισχύουν και για αυθαίρετες συνεχείς συναρτήσεις.

Οταν μας δοθεί μία συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, αρχίζομε τοποθετώντας τα σημεία

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_{n-1}$$

ανάμεσα στα a και b όπως φαίνεται στο Σχ. 4.9. Αυτά τα σημεία υποδιαιρούν το διάστημα $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα μήκους

$$\Delta x_1 = x_1 - a, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = b - x_{n-1},$$

που δεν χρειάζεται να είναι ίσα.

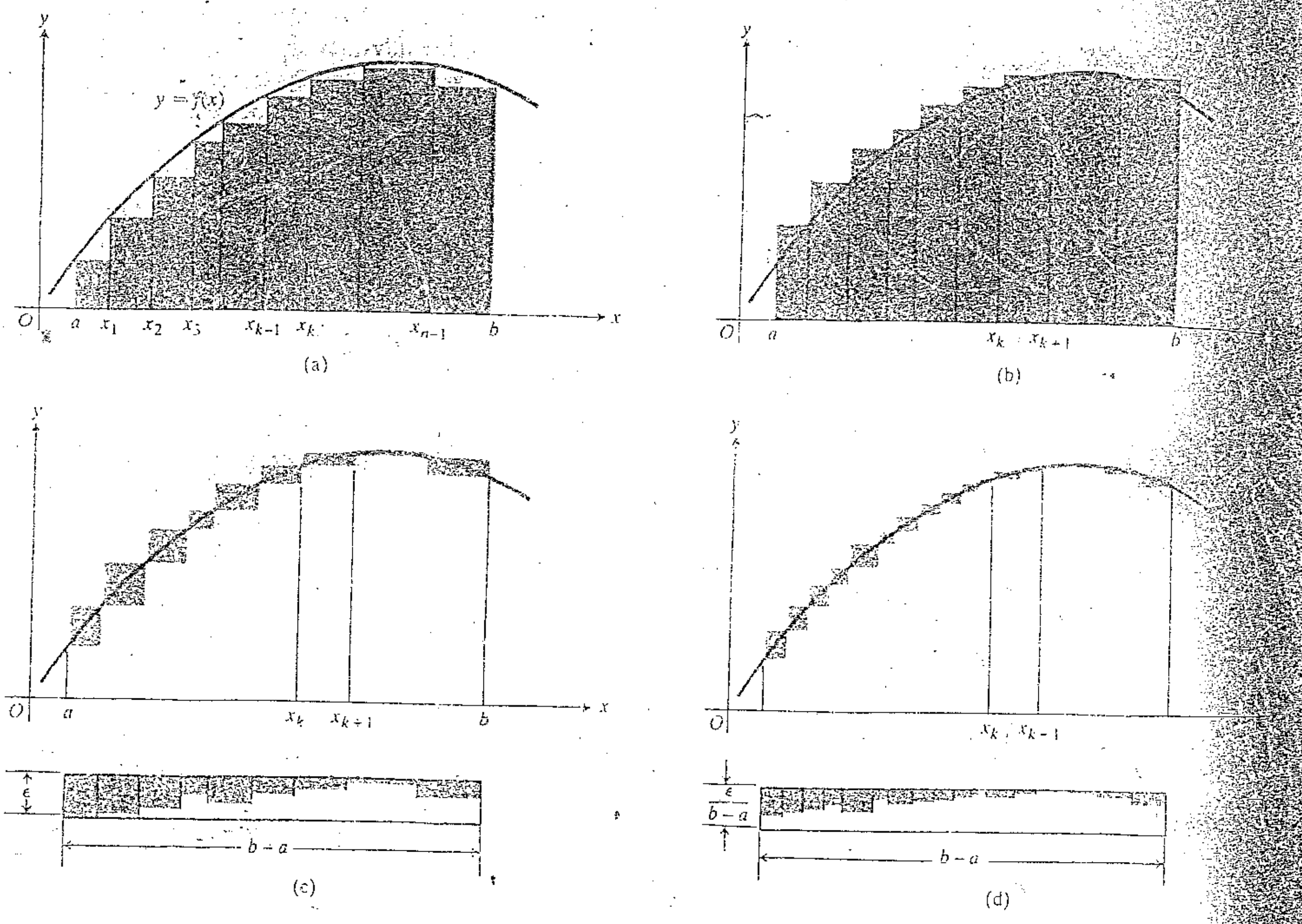
Αφού η f είναι συνεχής, έχει μία ελάχιστη τιμή $\min_k$ και μία μέγιστη τιμή $\max_k$ σε κάθε υποδιάστημα. Οι επιφάνειες των σκιασμένων ορθογωνίων στο Σχ. 4.9(a) προστίθενται και δίνουν αυτό που λέμε κατώτερο άθροισμα:

$$L = \min_1\Delta x_1 + \min_2\Delta x_2 + \cdots + \min_n\Delta x_n \tag{4}$$

Οι επιφάνειες των σκιασμένων ορθογωνίων στο Σχ. 4.9(b) προστίθενται και αποτελούν το αντίστοιχο ανώτερο άθροισμα:

$$U = \max_1\Delta x_1 + \max_2\Delta x_2 + \cdots + \max_n\Delta x_n \tag{5}$$

Η διαφορά $U - L$ ανάμεσα στο κατώτερο και στο ανώτερο άθροισμα είναι το άθροισμα των επιφανειών των σκιασμένων τμημάτων στο 4.9(c).



Σχ. 4.9 Δοθέντος ενός θετικού $\epsilon(\epsilon > 0)$, υπάρχει ένας αντίστοιχος θετικός $\delta(\delta > 0)$, τέτοιος ώστε τα γραμμοσκιασμένα ορθογώνια στο (d) να έχουν ύψος μικρότερο από $\epsilon/(b - a)$ αν το μέγιστο πλάτος τους είναι μικρότερο του δ. Αυτό δίνει, $0 \leq U - L =$ άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων $< [\epsilon/(b - a)][b - a] = \epsilon$.

Αυτό που φαίνεται στο Σχ. 4.9(c) και αυτό που θέλομε να δείξομε είναι ότι σε όσο στενότερα υποδιαστήματα διαιρέσομε το διάστημα $[a, b]$ τόσο μικρότερη επιφάνεια θα έχομε στο $U - L$. Γιά να το εκμεταλευτούμε αυτό πρέπει να καθορίσομε με περισσότερη ακρίβεια τι εννοούμε λέγοντας να υποδιαιρέσομε το διάστημα $[a, b]$ σε στενότερα τμήματα. Σκοπός μας είναι να βελτιώσομε τον τρόπο με τον οποίο οι κορυφές των ορθογωνίων πλησιάζουν στην καμπύλη και να ελαττώσομε έτσι την διαφορά ανάμεσα στα U και L. Τουλάχιστον, θέλομε τον αριθμό των x να αυξηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μικρύνουν οι βάσεις των ορθογωνίων. Με άλλα λόγια, το να θέλομε να υποδιαιρέσομε το διάστημα σε μικρότερα κομμάτια σημαίνει ότι θα υποδιαιρέσομε το διάστημα $[a, b]$ με τέτοιο τρόπο ώστε το μεγαλύτερο από τα υποδιαστήματα αυτά να είναι μικρότερο από ποιό

Επομένως ορίζομε σαν γνώμονα της υποδιαίρεσης

$$a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$$

το μεγαλύτερο μήκος υποδιαστήματος. Στην συνέχεια, καθώς ο γνώμονας αυτός τείνει στο μηδέν, τα υποδιαστήματα γίνονται περισσότερα και συγχρόνως μικρότερα σε μήκος. Στο Σχ. 4.9(c) αυτό σημαίνει ότι καθώς ο γνώμονας τείνει στο μηδέν τα τμήματα αυξάνονται σε αριθμό και στενεύουν (αν και το συνολικό τους μήκος παραμένει $b - a$). Καθώς στενεύουν μικραίνει επίσης και το ύψος τους. Όπως δείχνει το Σχ. 4.9(d), μπορούμε να μικράνομε τη διαφορά $U - L$ περισσότερο από οποιαδήποτε προκαθορισμένη θετική τιμή παίρνοντας τον γνώμονα της υποδιαίρεσης του $[a, b]$ να είναι αρκετά κοντά στο μηδέν. Με άλλα λόγια,

$$\lim_{\text{γνώμων} \to 0} (U - L) = 0. \tag{6}$$

και όπως δείχνεται σε πιο προχωρημένα βιβλία,

$$\lim_{\text{γνώμων} \to 0} L = \lim_{\text{γνώμων} \to 0} U. \tag{7}$$

Το γεγονός ότι οι Εξ. (6) και (7) ισχύουν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις, και οχι μόνο γι' αυτήν που φαίνεται στο Σχ. 4.9, είναι συνέπεια μιας ειδικής ιδιότητας που έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις σ' ένα περιορισμένο κλειστό διάστημα και που ονομάζεται ομοιόμορφη συνέχεια. Πρόκειται για την ιδιότητα που εγγυάται ότι καθώς ο γνώμονας πλησιάζει στο μηδέν τα τμήματα που φαίνονται στο Σχ. 4.9(c) και που αποτελούν την διαφορά ανάμεσα στα U και L κονταίνουν και στενεύουν και μπορούμε να τα κάνομε όσο κοντά θέλομε στενεύοντάς τα αρκετά. Το γεγονός ότι δεν αναπτύσσομε λεπτομερειακά την $\epsilon - \delta$ επιχειρηματολογία που συνδέεται με την ομοιόμορφη συνέχεια, είναι ένας από τους λόγους που εμποδίζουν και μια πλήρη απόδειξη της Εξ. (7). Αλλά το νόημα του επιχειρήματος είναι στη σωστή κατεύθυνση και δίνει μιά πιστή γεύση της πλήρους απόδειξης.

Στη συνέχεια, δεχόμενοι την (7) γιά μιά οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση στο $[a, b]$, υποθέτομε ότι σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ μιάς υποδιαίρεσης του $[a, b]$ διαλέγομε ένα σημείο c_k για να σχηματίσομε το άθροισμα

$$S = \sum f(c_k)\Delta x_k. \tag{8}$$

Όπως και οι ποσότητες,

$$L = \sum \min_k \Delta x_k \qquad \text{και} \qquad U = \sum \max_k \Delta x_k,$$

το S είναι το άθροισμα των τιμών των συναρτήσεων επί το μήκος των διαστημάτων. Αλλά το c_k το διαλέξαμε τυχαία και το μόνο που ξέρομε για τον αριθμό $f(c_k)$ είναι ότι

$$\min_k \leq f(c_k) \leq \max_k.$$

Αυτό όμως είναι αρκετό για να μας πεί ότι

$$L \leq S \leq U, \tag{9}$$

καί επομένως ότι

$$\lim_{\text{γνώμων} \to 0} L = \lim_{\text{γνώμων} \to 0} S = \lim_{\text{γνώμων} \to 0} U \tag{10}$$

(χρησιμοποιώντας μιά παραλλαγή του Θεωρήματος της Παραγράφου 1.9). Με άλλα λόγια, η ποσότητα S έχει το ίδιο όριο με αυτό πού έχουν τα L και U.

Ας σταματήσομε για μια στιγμή για να σκεφθούμε πόσο άξιο προσοχής είναι το συμπέρασμα της Εξ. (10). Λέει ότι άσχετα με το πώς διαλέγομε το σημείο c_k γιά να σχηματίσομε την ποσότητα

$$S = \sum f(c_k)\Delta x_k$$

για μιά συνεχή συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, b]$, παίρνόμε πάντα το ίδιο όριο καθώς ο γνώμονας της υποδιαίρεσης προσεγγίζει το μηδέν. Μπορούμε να διαλέξομε κάθε c_k έτσι ώστε το $f(c_k)$ να είναι η μέγιστη τιμή της f στο $[x_{k-1}, x_k]$. Το όριο θα είναι το ίδιο. Μπορούμε να διαλέξομε το c_k έτσι ώστε το $f(c_k)$ να είναι η ελάχιστη τιμή της f στο $[x_{k-1}, x_k]$. Το όριο θα είναι πάλι το ίδιο. Μπορούμε να διαλέξομε το c_k εντελώς τυχαία. Ωστόσο το όριο εξακολουθεί να παραμένει το ίδιο.

Αυτό το αποτέλεσμα αποδείχθηκε για πρώτη φορα (χωρίς ομαλή συνέχεια) από τον Cauchy (1823) καί αργότερα τέθηκε σε αυστηρά λογική βάση (με ομαλή συνέχεια) από άλλους μαθηματικούς του 19ου αιώνα. Το όριο αυτό που καλείται *ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a, b]$ και συμβολίζεται

$$\int_a^b f(x)dx,$$

φέρει το όνομα του Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) ο οποίος είχε αρχικά την ιδέα να παγιδεύσει το όριο ανάμεσα στα ανώτερα και κατώτερα φράγματα. Η ποσότητα

$$S = \sum f(c_k)\Delta x$$

λέγεται το *προσεγγιστικό άθροισμα* για το ολοκλήρωμα. Οι αριθμοί a και b λέγονται *όρια* της ολοκλήρωσης καί το a είναι το *κατώτερο* όριο ενώ το b το *ανώτερο* όριο.

Το Θεώρημα Ύπαρξης του Ολοκληρώματος

ΥΠΑΡΞΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ RIEMANN

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε το

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{γνώμων} \to 0} \sum f(c_k)\Delta x_k$$

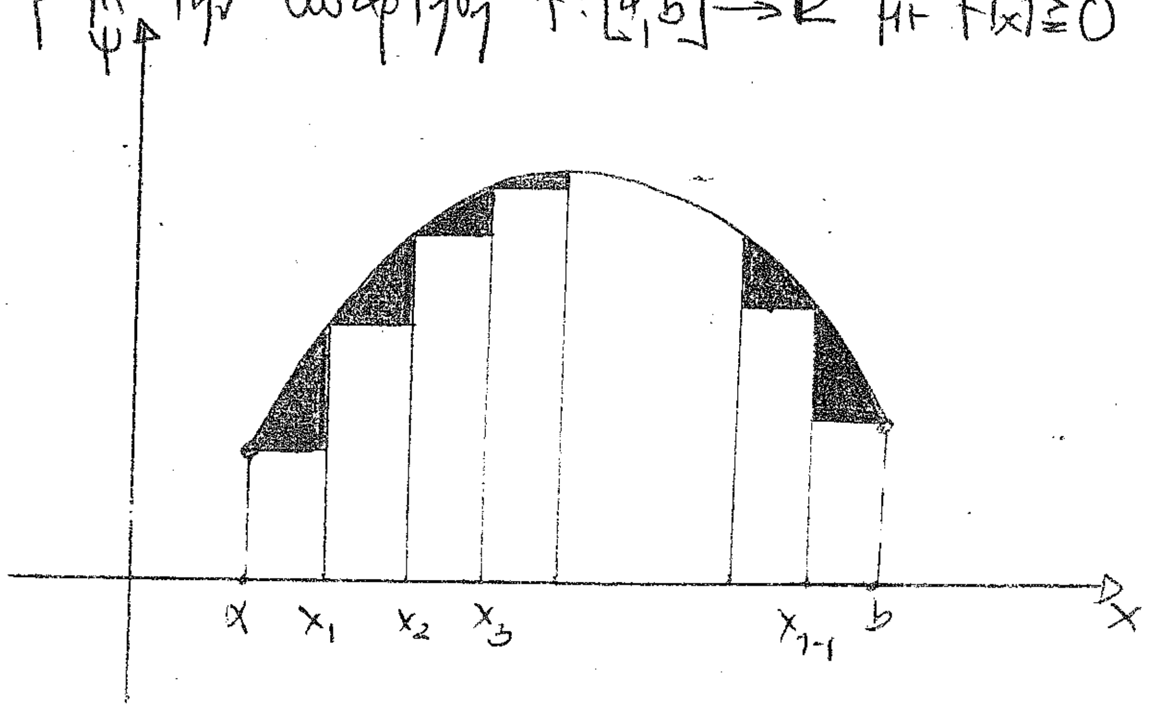
υπάρχει και είναι ο ίδιος αριθμός για οποιονδήποτε αριθμό c_k.

ΒΛΑΧΟΣ Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1
FINNEY-THOMAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΚΑΜΠΥΛΗ C_f

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$



Θεωρούμε τα σημεία $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ που χωρίζουν το διάστημα $[a,b]$ σε n-υποδιαστήματα ίσου μήκους

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Η επιφάνεια E του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=a$ και $x=b$ και τον άξονα $x'x$

προσεγγιστικά βρίσκεται ως εξής:

$= \beta\alpha\sigma\eta \times \upsilon\psi o\varsigma \Rightarrow E_{o\rho\theta_1} = (x_1 - a) f(a) \Rightarrow E_{o\rho\theta_1} = f(a)(x_1 - a)$

$\Rightarrow E_{o\rho\theta_1} = f(a)\Delta x$

$E_{o\rho\theta_2} = \beta\alpha\sigma\eta \times \upsilon\psi o\varsigma \Rightarrow E_{o\rho\theta_2} = (x_2 - x_1) f(x_1) \Rightarrow E_{o\rho\theta_2} = f(x_1)(x_2 - x_1)$

$\Rightarrow E_{o\rho\theta_2} = f(x_1)\Delta x$

$\vdots$

$E_{o\rho\theta_n} = \beta\alpha\sigma\eta \times \upsilon\psi o\varsigma \Rightarrow E_{o\rho\theta_n} = (b - x_{n-1}) f(b) \Rightarrow E_{o\rho\theta_n} = f(b)(b - x_{n-1})$

$\Rightarrow E_{o\rho\theta_n} = f(b)\Delta x$

$M_\varepsilon \overset{(+)}{\Longrightarrow} E_{o\rho\theta_1} + E_{o\rho\theta_2} + \dots + E_{o\rho\theta_n} =$

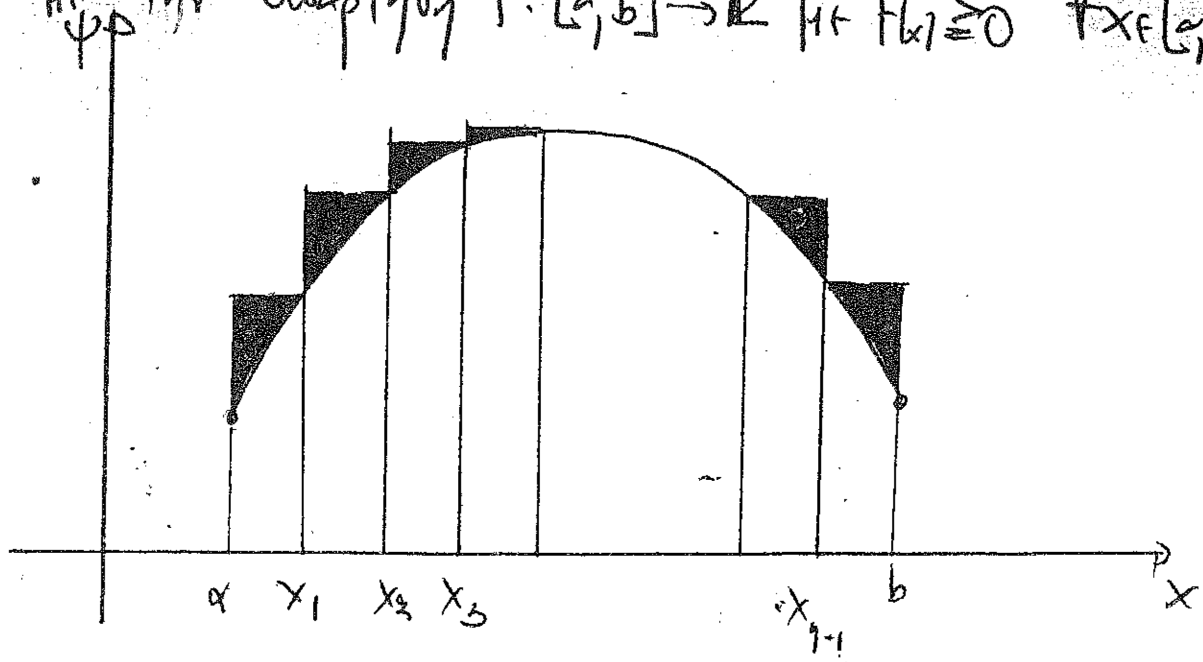
$= f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(b)\Delta x = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

$\Rightarrow E_{o\rho\theta_1} + E_{o\rho\theta_2} + \dots + E_{o\rho\theta_n} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

Άρα: Η επιφάνεια E κάτω από την C_f προσεγγίζεται ως

$E \approx E_{o\rho\theta_1} + E_{o\rho\theta_2} + \dots + E_{o\rho\theta_n} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[\alpha,b]$



Θεωρούμε τα σημεία $x_1, x_2, x_3 \dots x_{\nu-1}$ που χωρίζουν το διάστημα $[\alpha,b]$ σε ν-υποδιαστήματα ισομήκους $\Delta x = \frac{b-\alpha}{\nu}$

Η επιφάνεια E του χωρίου που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=b$ και τον άξονα $x'x$ προσεγγιστικά βρίσκεται ως εξής:

$E_{ορθ_1}$ = βάση × ύψος $\to E_{ορθ_1} = (x_1-\alpha)f(x_1) \to E_{ορθ_1} = f(x_1)(x_1-\alpha)$

$\to E_{ορθ_1} = f(x_1)\Delta x$

$E_{ορθ_2}$ = βάση × ύψος $\to E_{ορθ_2} = (x_2-x_1)f(x_2) \to E_{ορθ_2} = f(x_2)(x_2-x_1)$

$\to E_{ορθ_2} = f(x_2)\Delta x$

$\vdots$

$E_{ορθ_n} =$ βάση × ύψος $\Rightarrow E_{ορθ_n} = (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \Rightarrow E_{ορθ_n} = f(x_{n-1})(b - x_{n-1})$

$\Rightarrow E_{ορθ_n} = f(x_{n-1}) \Delta x$

$$\text{Με } \overset{(+)}{\Rightarrow} E_{ορθ_1} + E_{ορθ_2} + \dots + E_{ορθ_n} =$$

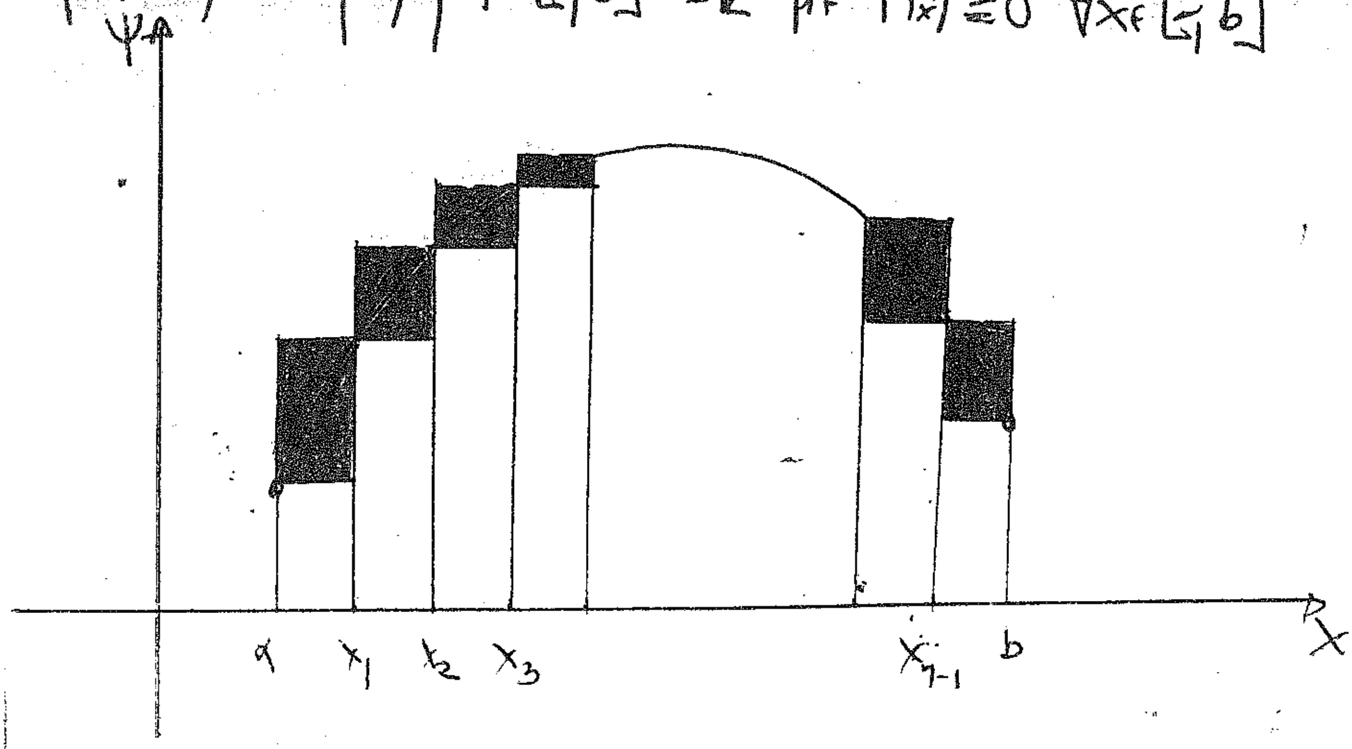
$$= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

$$\Rightarrow E_{ορθ_1} + E_{ορθ_2} + \dots + E_{ορθ_n} = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

Άρα: Η επιφάνεια E κάτω από την C_f προσεγγίζεται από

$$E \simeq E_{ορθ_1} + E_{ορθ_2} + \dots + E_{ορθ_n} = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[\alpha,b]$



Θεωρούμε τα σημεία $x_1, x_2, x_3 \dots x_{\nu-1}$ που χωρίζουν το διάστημα $[\alpha,b]$ σε ν-υποδιαστήματα όχι απαραίτητα ίσου μήκους

$\Delta x_1 = x_1-\alpha$, $\Delta x_2 = x_2-x_1$, $\Delta x_3 = x_3-x_2 \dots \Delta x_\nu = b-x_{\nu-1}$

η f συνεχής στο $[\alpha,b] \to$ η f συνεχής στο $[x_{\kappa-1},x_\kappa] \xrightarrow{\text{Θ.Μεγ.-Ελαχ.Τ.}}$

$\Rightarrow$ η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή $f_{min\kappa}$ και μέγιστη τιμή $f_{max\kappa}$ στο $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$

ώστε: $f_{min\kappa} \leq f(c_\kappa) \leq f_{max\kappa}$ για $c_\kappa\in[x_{\kappa-1},x_\kappa]$

...ν εμβαδόν S που ορίζουν τα ορθογώνια με βάσεις $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψη $f(c_k)$ ισχύει:

$$S \geq L = E_{\text{ορθ}_1} + E_{\text{ορθ}_2} + \dots + E_{\text{ορθ}_n} =$$

$$= f_{min_1} \Delta x_1 + f_{min_2} \Delta x_2 + \dots + f_{min_n} \Delta x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{min_k} \Delta x_k$$

και

$$S \leq U = E_{\text{ορθ}_1} + E_{\text{ορθ}_2} + \dots + E_{\text{ορθ}_n} =$$

$$= f_{max_1} \Delta x_1 + f_{max_2} \Delta x_2 + \dots + f_{max_n} \Delta x_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_{max_k} \Delta x_k$$

Δηλαδή: $L \leq S \leq U$ όπου $S = \sum f(c_k) \Delta x_k$

επιφάνεια E κάτω από την C_f ακριβοορισμένα βρίσκεται

όταν: η διαφορά επιφάνειας U-L ελαττώνεται πλησιάζοντας στο μηδέν.

δηλαδή όταν: η επιφάνεια των ορθογωνίων U-L ελαττώνεται πλησιάζοντας στο μηδέν

δηλαδή όταν: οι κορυφές των ορθογωνίων U-L πλησιάζουν την καμπύλη C_f

δηλαδή όταν: οι βάσεις των ορθογωνίων U-L στενεύουν και τα σημεία τα ύψη τους κοντεύουν (σημεία ανέχεια)

δηλαδή όταν: η μεγαλύτερη από τις βάσεις των ορθογωνίων U-L πλησιάζει στο μηδέν

δηλαδή τελικά όταν:

Το μήκος του μεγαλύτερου υποδιαστήματος (γνώμονας) της διαμέρισης $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ πλησιάζει στο μηδέν ε: γνωμονας $\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\text{γνωμων}\to 0} |U-L| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\text{γνωμων}\to 0} L = \lim_{\text{γνωμων}\to 0} U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\text{γνωμων}\to 0} L = \lim_{\text{γνωμων}\to 0} U = \lim_{\text{γνωμων}\to 0} S$$

- Η παραπάνω ισότητα λέει: ότι.
  Ασχέτως με το πως διαλέγουμε το σημείο c_k για να σχηματίσουμε την ποσότητα $S = \sum f(c_k)\Delta x_k$ παίρνουμε πάντα το ίδιο όριο, όταν ο γνώμονας της διαμέρισης πλησιάζει το μηδέν

Ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a,b]$ ή
Ορισμένο ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$
ονομάζουμε το όριο: $\lim\limits_{\text{γνωμων}\to 0} \sum f(c_k)\Delta x_k$

Συμβολίζουμε: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\text{γν}\to 0} \sum f(c_k)\Delta x_k$

ΒΛΑΧΟΣ Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ