# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ1

**1.** Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$  2. $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$  3. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

4. $f(x)=\sqrt{x-3}$  5. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$  6. $f(x)=\sqrt{5-|x|}$

7. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$  8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}$  9. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$

10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{|x|+x}$  11. $f(x)=\ln(1-|x|)$  12. $f(x)=\dfrac{1}{|x-3|-2}$

**2.** Να βρεθούν τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις $C_f$ τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$

1. $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{2x-1}$  2. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$  3. $f(x)=1-2\eta\mu x$

**3.** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_g$

1. $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{8}{x}$  2. $f(x)=x^2-3x+2$, $g(x)=\dfrac{6}{x}$

**4.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\sqrt{\lambda\cdot x^2+2(\lambda-2)x+1}$
Να βρεθούν τα $\lambda\in\mathbb{R}^*$ ώστε:
I. $D_{f(x)}=\mathbb{R}$  II. $A(1,0)\in C_f$

**5.** Εάν για τη συνάρτηση $f$ ισχύει: $xf(-x)+f(x)=x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
Τότε να αποδειχθεί ότι: η $f$ σταθερή συνάρτηση.

ΒΛΑΧΟΣ Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ Μ.Ξ.Μ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ2

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g$ με τύπους $f(x), g(x)$
Να ορισθούν οι συναρτήσεις
I. $f+g$ II. $f-g$ III. $f\cdot g$ IV. $\frac{f}{g}$ V. $\frac{g}{f}$.

A. $f(x)=\frac{2x+1}{1-x}$, $g(x)=\frac{x^2+2}{x-1}$ B. $f(x)=\frac{|x|-3}{x^2-4}$, $g(x)=\frac{1}{2-|x|}$

Γ. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$ Δ. $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$, $g(x)=\frac{x-1}{x}$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g$ με τύπους
$f(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$, $g(x)=-2x+\sqrt{4x^2+1}$
Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει: $[(f\cdot g)(x)]^{\nu}\leq 1$ $\forall x\in D_{(f\cdot g)}$

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g$ με τύπους
$f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$
I. Να ορισθεί η συνάρτηση $f+g$
II. Να αποδειχθεί ότι: $(f+g)(x)\leq 1$ $\forall x\in D_{(f+g)}$

ΒΛΑΧΟΣ . Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ Μ.Σ.Μ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ3Γ

1. Να βρεθουν τα Ορια

I. $\ell_1=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ II. $\ell_2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

III. $\ell_3=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

IV. $\ell_4=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

2. Θεωρουμε την συναρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha|x+3|+\beta|x-3|-5}{x^2-3x+2}$

Να βρεθουν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ωστε: $\lim\limits_{x\to2}f(x)=7$

3. Θεωρουμε την συναρτηση $f$ με τυπο $f(x)=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta x}}{x}$, $\alpha<0,\beta\neq0$

I. Να βρεθει το πεδιο ορισμου $D_{f(x)}$

II. Να μελετηθει εαν οριζεται καλα το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

III. Να βρεθει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

4. Θεωρουμε την συναρτηση $f$ με τυπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}$

Να βρεθει το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Η. Β. ΝΤΖΙΩΡΑΣ 2. Β. Χ. ΣΑΒΒΑΪΔΗΣ 3. Χ. ΜΠΑΡΟΚΩΣΤΑΣ

ΒΛΑΧΟΣ. Ι. ΣΠΥΡΙΔΩΝ

# Ασκησεις ΦΑΓ

**1.** Θεωρουμε την συναρτηση $f$ με την ιδιοτητα:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Να αποδειχθει οτι:

I. $f(0)=0$ II. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III. Εαν η $f$ συνεχης στο $x=0$ Τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}$

IV. Εαν η $f$ συνεχης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ Τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}$

**2.** Θεωρουμε την συναρτηση $f$ διαφορη απο την σταθερη συναρτηση "μηδεν" με την ιδιοτητα:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1+x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$$

Να αποδειχθει οτι:

I. $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ II. $f(0)=1$

III. Εαν η $f$ συνεχης στο $x=0$ Τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}$

IV. Εαν η $f$ συνεχης στο $x_0 \in \mathbb{R}$ Τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}$

**3.** Θεωρουμε την συναρτηση $f$ με την ιδιοτητα

$$\forall x, \psi \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(\psi)| \leq k \cdot |x - \psi|$$

οπου σταθερος αριθμος $k \in (0, +\infty)$

Να αποδειχθει οτι η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}$.

**4.** Θεωρουμε το οριο $\displaystyle L = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Να αποδειχθει οτι:

Εαν $L \in \mathbb{R}$ Τοτε η $f$ συναρτηση συνεχης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ2Κ

Να βρεθούν τα Όρια

(I). $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$  (II). $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt[4]{x^4-16}}$

(III). $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$  (IV). $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

2. Να βρεθούν τα Όρια

(I). $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$  (II). $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

3. Να βρεθούν τα Όρια

(I). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2+\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu^3 x-1\right)$ , $x>0$

(II). $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{7+\sigma\upsilon\nu 3x-\eta\mu x}{x+1}\right)x^2$ , $x>0$

4. Να βρεθούν τα Όρια

(I). $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\eta\mu(x+\alpha)+\eta\mu(x-\alpha)}{x}$  (II). $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{x^3}$

(III). $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{x^2}$  (IV). $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{x}$

(V). $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\eta\mu(\pi x)}{\eta\mu(5\pi x)}$  (VI). $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\varepsilon\varphi(\pi x)}{x+2}$

**5.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g$ με τύπους

$$f(x)=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta x}}{x} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta x}}{x}$$

και ορισμένες για $x$ με $0<|x|<\frac{\alpha^2}{|\beta|}$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<0$ και $\beta \neq 0$

Να αποδειχθεί ότι:

(Ι). $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{\beta}{2\alpha}$ (ΙΙ). Δεν υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

**6.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta}$

(Ι). Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta>0$

(ΙΙ). Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \neq 0$

**7.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\alpha x-\beta$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

**8.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{|x-1|}$

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

Να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και να είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \in \mathbb{R}$

ΒΛΑΧΟΣ. Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ3Κ

1. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ συνεχής για $x=0$ και διάφορη από τη σταθερή συνάρτηση "μηδέν" με την ιδιότητα: $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
Να αποδειχθεί ότι:
(I). $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (II). $f(0)=1$ (III) $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ συνεχής για $x=0$ με την ιδιότητα: $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
Να αποδειχθεί ότι:
(I). $f(0)=0$ (II). $f(-x)=-f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (III). $f$ συνεχής στο $\mathbb{R}$.

3. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g$ ορισμένες και συνεχείς στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα: $f^2(x)+g^2(x)=2x\,f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$
Να αποδειχθεί ότι: $f(0)=g(0)$

4. Θεωρούμε συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε: $f(2008)>g(2008)$ και $f(x) \neq g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$
Να αποδειχθεί ότι: $f(x)>g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

5. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ και τους $k, \lambda \in [0,+\infty)$ με $k+\lambda=1$
Να αποδειχθεί ότι: $\exists x_0 \in [\alpha,\beta]$: $f(x_0)=kf(\alpha)+\lambda f(\beta)$

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=-x^3+1$ και $g(x)=x^2+\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
Να αποδειχθεί ότι: Οι $C_f$, $C_g$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $K(x_0, \psi_0)$ με $x_0 \in [-1,+1]$

**7.** Θεωρουμε τις συναρτησεις $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ για τις οποιες ισχυει
$$(f(x)-2)^2 + (g(x)-2)^2 \leq |x-2| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Να αποδειχθει οτι : οι $f, g$ συνεχεις στο $x=2$

**8.** Θεωρουμε συναρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιοτητα :
$$|f(x)-f(\psi)| \leq k|x-\psi| \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R} \quad , k \in [0, +\infty)$$
Να αποδειχθει οτι :

(I) η $f$ συνεχης

(II) Εαν $k \in (0,1)$ τοτε η εξισωση $f(x)=x$ εχει μια το πολυ ριζα στο $\mathbb{R}$.

**9.** Θεωρουμε την συναρτηση $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιοτητα
$$f(x\psi) = f(x) + f(\psi) \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R}^*$$
Να αποδειχθει οτι

(I). Εαν η $f$ συνεχης στο $x=1$ τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}^*$

(II). Εαν η $f$ συνεχης στο τυχαιο $x_0 \in \mathbb{R}^*$ τοτε η $f$ συνεχης στο $\mathbb{R}^*$

**10.** Θεωρουμε συναρτηση $f$ ορισμενη και συνεχη στο $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ με $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$

Να αποδειχθει οτι : η εξισωση $\dfrac{f(x)}{\beta - x} + \dfrac{f(x)}{\alpha - x} = 1$ εχει δυο τουλαχιστον ριζες στο $(\alpha, \beta)$.

**11.** Θεωρουμε συναρτησεις $f, g$ ορισμενες και συνεχεις στο $[\alpha, \beta]$ και τετοιες ωστε : $f(\alpha) + f(\beta) = g(\alpha) + g(\beta)$

Να αποδειχθει οτι : Οι $C_f$, $C_g$ εχουν ενα τουλαχιστον κοινο σημειο με τετμημενη $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

ΒΛΑΧΟΣ. Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ —— ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ Φ4Κ

εωρουμε συναρτηση $g$ ορισμενη και παραγωγισιμη στο $x=\alpha$
με $g(\alpha)=g'(\alpha)=0$
και την συναρτηση $f$ με τυπο $f(x)=\begin{cases} g(x)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{1}{x-\alpha}\right), & x\neq\alpha \\ 0, & x=\alpha \end{cases}$

Να αποδειχθει οτι η $f$ συναρτηση παραγωγισιμη στο $x=\alpha$

2. Θεωρουμε συναρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ με $f(0)\neq 0$ τετοια ωστε:

$$\forall x,\psi\in\mathbb{R}:\ f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)+2009x\psi$$

Να αποδειχθει οτι:

I. Εαν η $f$ παραγωγισιμη στο $x=0$ Τοτε η $f$ παραγωγισιμη εν $\mathbb{R}$

II. Εαν η $f$ παραγωγισιμη στο $x=x_0$ με $f(x_0)\neq 0$
Τοτε η $f$ παραγωγισιμη εν $\mathbb{R}$

3. Θεωρουμε συναρτησεις $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, παραγωγισιμες στο $x=2$
και τετοιες ωστε: $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f^2(x)+g^2(x)=x^4-4x^3+4x^2$

Να αποδειχθει οτι: $(f'(2))^2+(g'(2))^2=4$

4. Θεωρουμε συναρτησεις $f,g$ παραγωγισιμες στο $x=x_0$ με
$f(x_0)=g(x_0)=0$ και $g'(x_0)\neq 0$

Να αποδειχθει οτι: $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

5. Θεωρουμε συναρτησεις $f$, $g$ με τυπους: $f(x)=(x^2)^x$; $g(x)=x^{2x}$

I. Να μελετηθει εαν $f=g$

II. Να βρεθουν οι παραγωγοι $f'$, $g'$

6. Θεωρουμε την συναρτηση $f$ με τυπο $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & =0 \end{cases}$

Να μελετηθει εαν η $f$ συναρτηση δυο φορες παραγωγισιμη στο $x=0$

7. Να βρεθουν οι παραγωγοι ν-οστης ταξης των συναρτησεων $f$ με τυπους:

I. $f(x)=x^\mu$ με $\mathbb{N}^*$ II. $f(x)=\eta\mu x$

III. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ IV. $f(x)=\ln x$

8. Θεωρουμε συναρτηση $f$ με τυπο $f(x)=|x^2-\alpha x+\beta|$ και γραφικη παρασταση $C_f$.

Εαν ισχυει για τα σημεια $A(\frac{1}{4},3)\notin C_f$, $B(4,3)\in C_f$ και

$M_0(x_0,\psi_0)\in C_f$ με $x_0^2-\alpha x_0+\beta<0$

Τοτε να βρεθουν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$ ωστε η Εφαπτομενη Ευθεια (Εφαπτ) της $C_f$ στο $M_0$ να διερχεται απο το $A$ και να εχει γωνια κλισης $\omega_{\kappa\lambda}=\frac{3\pi}{4}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - Χ. ΜΠΑΡΟΚΩΣΤΑΣ

ΒΛΑΧΟΣ Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ