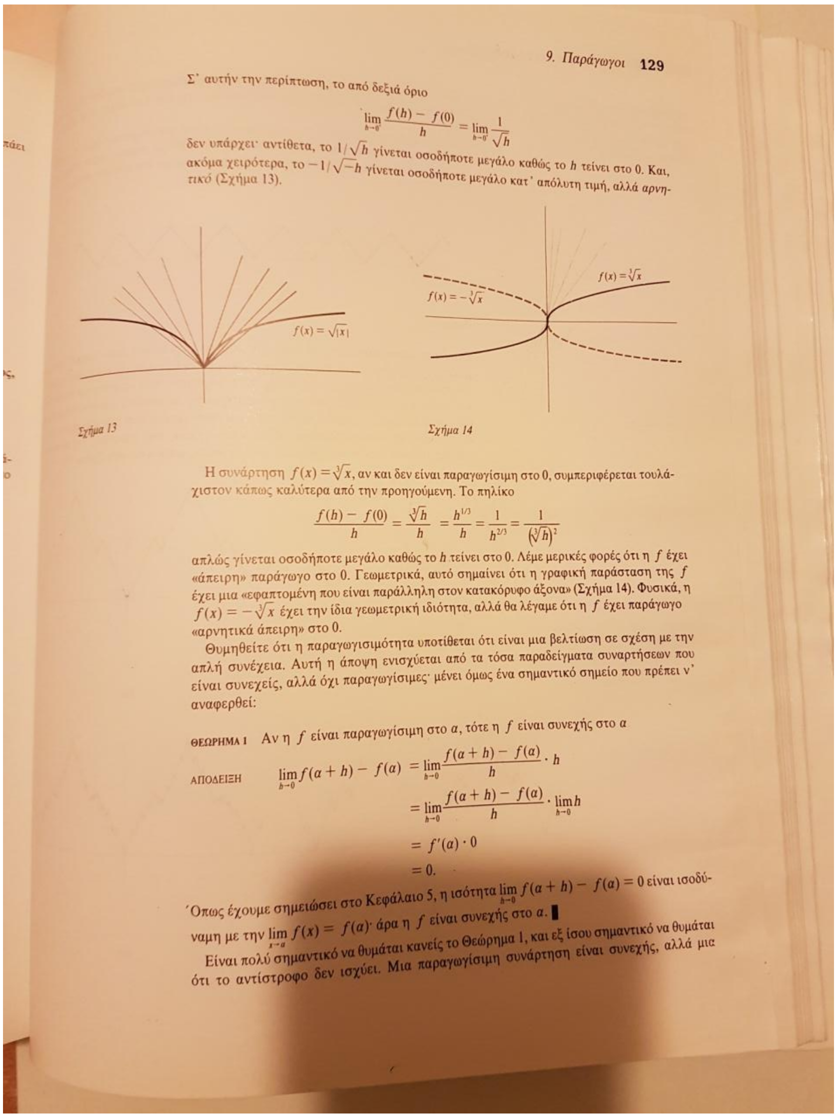
Σχετικά με τη συζήτηση που είχαμε σήμερα για τον ορισμό της παραγώγου και το ρυθμό μεταβολής, παραθέτω κάποιες παραπομπές που νομίζω ότι δίνουν απαντήσεις στα ερωτήματα και τις διαφωνίες μας.

<u>Α. Για τον ορισμό της παραγώγου</u>

Από τον Spivak



Σ' αυτήν την περίπτωση, το από δεξιά όριο

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

δεν υπάρχει· αντίθετα, το $1/\sqrt{h}$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το h τείνει στο 0. Και, ακόμα χειρότερα, το $-1/\sqrt{-h}$ γίνεται οσοδήποτε μεγάλο κατ' απόλυτη τιμή, αλλά *αρνητικό* (Σχήμα 13).

$f(x) = \sqrt{|x|}$

Σχήμα 13

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = -\sqrt[3]{x}$

Σχήμα 14

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$, αν και δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, συμπεριφέρεται τουλάχιστον κάπως καλύτερα από την προηγούμενη. Το πηλίκο

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{h^{1/3}}{h} = \frac{1}{h^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{h})^2}$$

απλώς γίνεται οσοδήποτε μεγάλο καθώς το h τείνει στο 0. Λέμε μερικές φορές ότι η f έχει «άπειρη» παράγωγο στο 0. Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει μια «εφαπτομένη που είναι παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα» (Σχήμα 14). Φυσικά, η $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ έχει την ίδια γεωμετρική ιδιότητα, αλλά θα λέγαμε ότι η f έχει παράγωγο «αρνητικά άπειρη» στο 0.

Θυμηθείτε ότι η παραγωγισιμότητα υποτίθεται ότι είναι μια βελτίωση σε σχέση με την απλή συνέχεια. Αυτή η άποψη ενισχύεται από τα τόσα παραδείγματα συναρτήσεων που είναι συνεχείς, αλλά όχι παραγωγίσιμες· μένει όμως ένα σημαντικό σημείο που πρέπει ν' αναφερθεί:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε η f είναι συνεχής στο a

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(a) \cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Όπως έχουμε σημειώσει στο Κεφάλαιο 5, η ισότητα $\lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a) = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$· άρα η f είναι συνεχής στο a. ∎

Είναι πολύ σημαντικό να θυμάται κανείς το Θεώρημα 1, και εξ ίσου σημαντικό να θυμάται ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι συνεχής, αλλά μια

Από το βιβλίο του Θ. Καζαντζή

αριθμός της f στο σημείο ξ (ή στο ξ, είτε για x = ξ, είτε στη θέση ξ) είτε απλά παράγωγος της f στο ξ.

Συμφωνούμε επίσης, στην περίπτωση που το όριο $\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ είναι ίσο με $+\infty$ ή με $-\infty$, να λέμε ότι **η f έχει άπειρη παράγωγο στο σημείο ξ,** ίση αντίστοιχα με $+\infty$ ή $-\infty$. *(Δεν λέμε όμως ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο ξ).*

■ **Μία διευκρίνηση.** Έχει γίνει συνήθεια στη βιβλιογραφία, να χαρακτηρίζεται σαν παραγωγίσιμη στο ξ, μία συνάρτηση f, μόνο όταν η f έχει πεπερασμένη παράγωγο $f'(\xi)$, ενώ θα έπρεπε τότε να χαρακτηρίζεται σαν *παραγωγίσιμη με πεπερασμένη παράγωγο,* είτε σαν *παραγωγίσιμη με τη στενή σημασία στο ξ.* Θα ακολουθήσουμε και μεις αυτή τη συνήθεια, λέγοντας ότι η f έχει άπειρη παράγωγο στο ξ, όταν έχουμε $f'(\xi) = +\infty$ είτε $f'(\xi) = -\infty$. Λέγοντας όμως ότι *η f είναι παραγωγίσιμη με την ευρεία σημασία στο ξ,* θα εννοούμε ότι η f έχει παράγωγο στο ξ, αδιάφορα πεπερασμένη ή άπειρη.

Από Μωυσιάδη

3.2. Η έννοια της παραγώγου

Έστω $y = f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο A. Η συνάρτηση αυτή θα λέγεται *παραγωγίσιμη* στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο του λόγου

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{3.6}$$

όταν x τείνει στο x_0 και είναι πεπερασμένο. Το όριο αυτό θα συμβολίζεται με
$f'(x_0)$ και θα λέγεται *παράγωγος αριθμός* της f(x) στο x_0. Είναι δηλ. ο παράγωγος αριθμός η στιγμιαία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής y στο σημείο x_0.

Έστω $A' \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο $x_0 \in A'$ τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$, ορίζουμε μία νέα συνάρτηση. Η συνάρτηση αυτή λέγεται *παράγωγος* της f(x) και συμβολίζεται με $f'(x)$. Έχουμε δηλαδή

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \tag{3.7}$$

για όλα τα σημεία του συνόλου A΄. Λέμε τότε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο A΄.

<u>Β. Ρυθμός μεταβολής</u>

Από το βιβλίο των Thomas - Finney

Ρυθμοί Μεταβολής

Ο *μέσος ρυθμός μεταβολής* μιας συνάρτησης $y = f(x)$ για το διάστημα από x έως $x + \Delta x$ είναι

$$\text{Μέσος Ρυθμός Μεταβολής} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ο *στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής* της f στο x είναι η παράγωγος

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\text{Μέσου ρυθμού μεταβολής}),$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το όριο.

Από Μωυσιάδη. Παραθέτω όλη την παράγραφο γιατί νομίζω ότι αξίζει.

κεφάλαιο 3

Παράγωγος

3.1. Μέση και στιγμιαία μεταβολή

Έστω $y = f(x)$ μία συνάρτηση, που συνδέει τις μεταβλητές ποσότητες x και y. Ένα από τα ερωτήματα που έχουμε να απαντήσουμε όταν μελετούμε τις δύο αυτές ποσότητες είναι το κατά πόσο μεταβάλλεται η εξαρτημένη μεταβλητή y για γνωστή μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Ας υποθέσουμε ειδικότερα ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή από x_0 που ήταν αρχικά γίνεται x. Μεταβάλλεται επομένως κατά $\Delta x = x - x_0$, όπου αυτή η μεταβολή Δx μπορεί να είναι κατά περίπτωση θετική ή αρνητική. Αν συμβολίσουμε τώρα με Δy την αντίστοιχη μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής είναι φανερό ότι θα ισχύει:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0),$$

ή

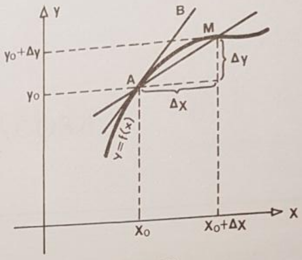
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{3.1}$$

Διαιρώντας στη συνέχεια την μεταβολή Δy με τη μεταβολή Δx εκφράζουμε τη μεταβολή της y στη μονάδα μέτρησης της x. Η ποσότητα αυτή αναφέρεται ως *μέση μεταβολή* της y, στο διάστημα $(x_0, x_0 + \Delta x)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ (μονάδες της y/μονάδα της x)} \tag{3.2}$$

Από το σχήμα 3.1 παρατηρούμε ότι η μέση μεταβολή της y είναι η κλίση της χορδής AM, που συνδέει τα σημεία $A(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, όπου $y_0 = f(x_0)$.



Σχήμα 3.1

Η μέση μεταβολή είναι επομένως ένα μέτρο της μεταβολής της y στο διάστημα $(x_0, x_0 + \Delta x)$. ΄Αρα αν το διάστημα αυτό γίνει εξαιρετικά μικρό, η αντίστοιχη μέση μεταβολή θα μπορεί να θεωρηθεί ως μέτρο της μεταβολής της y στο σημείο x_0. Αυτό πράγματι πετυχαίνεται παίρνοντας το όριο της μέσης μεταβολής $\lambda(x)$, όταν $x \longrightarrow x_0$ ή ισοδύναμα όταν $\Delta x \longrightarrow 0$. Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και περιγράφει τη *στιγμιαία μεταβολή* της συνάρτησης στο σημείο x_0. Είναι επομένως

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3.3)$$

Στο σχήμα 3.1 αυτό το όριο $f'(x_0)$ δίνεται από την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο x_0.

Για να γίνουν περισσότερο κατανοητά τα προηγούμενα θα τα εφαρμόσουμε λεπτομερειακά σ' ένα παράδειγμα από τη Φυσική.

Παράδειγμα 3.1 Είναι γνωστό από τη Φυσική ότι η απόσταση s (σε μέτρα) που διανύει ένα κινητό, που αφέθηκε να πέφτει ελεύθερα, σε χρόνο t (σε sec) είναι

$$s = s(t) = \frac{1}{2} g t^2, \qquad (3.4)$$

όπου $g = 9.80\ \mathrm{m/sec^2}$. Θέλουμε να βρούμε τη φυσική σημασία της μέσης και της στιγμιαίας μεταβολής για τη συνάρτηση $s(t)$.

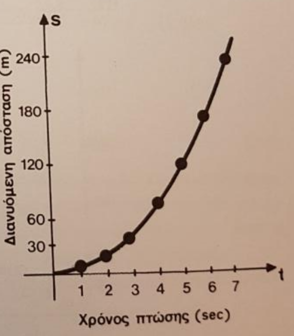
΄Εστω π.χ. ότι ένα σώμα (μία μπάλα ή μία πέτρα κλπ.) αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός πύργου 240 μέτρων. Σύμφωνα με τον τύπο (3.4) η πτώση θα διαρκέσει 7 sec αφού $\frac{1}{2}\cdot(9.80)\cdot 7^2 = 240.1$. Υπολογίζοντας με τον ίδιο τύπο τις αποστάσεις που έχουν διανυθεί σε 1,2,...,7 sec, συμπληρώνουμε τον πίνακα 3.1 και στη συνέχεια παρασταίνουμε γραφικά την πτώση του σώματος στο σχήμα 3.2. Επειδή το σώμα διάνυσε 240 μέτρα σε 7 sec, μπορούμε να πούμε ότι η μέση ταχύτητά του ήταν

$$\frac{240}{7} = 34.3 \text{ m/sec.}$$

΄Ωστε το σώμα κατά την πτώση του διανύει 34.3 μέτρα κάθε δευτερόλεπτο. Παρατηρούμε όμως, από την τρίτη στήλη του πίνακα 2.1, ότι η απόσταση που διανύει το σώμα το πρώτο δευτερόλεπτο είναι 4.9, το δεύτερο 14.5, το τρίτο 24.5 κλπ. Αυτό σημαίνει ότι η μέση ταχύτητα 34.3 m/sec που βρήκαμε,

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

Χρόνος πτώσης (sec)	Διανυσμένη απόσταση $s = (4.9)t^2$ (m)	Απόσταση που διανύεται κάθε sec.
0	0	—
1	4.9	4.9
2	19.6	14.5
3	44.1	24.5
4	78.4	34.3
5	122.5	44.1
6	176.4	53.9
7	240.1	63.7



Σχήμα 3.2

δίνει μια γενική πληροφορία για την κίνηση χωρίς να την περιγράφει λεπτομερειακά. Με άλλα λόγια η μέση ταχύτητα του σώματος σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, δεν αρκεί για να περιγράψει την κίνηση. ΄Ετσι σκεφτόμαστε ότι αν βρίσκαμε πολλές μέσες ταχύτητες για μικρότερα χρονικά διαστήματα, π.χ. κάθε δευτερόλεπτο τότε θα είχαμε μια καλύτερη περιγραφή της κίνησης.

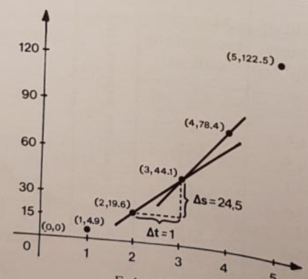
Αυτό είναι σωστό, όμως και τότε πάλι δεν θα ξέραμε την ακριβή κίνηση στα δέκατα του δευτερολέπτου ή στα εκατοστά του δευτερολέπτου κλπ. Εκείνο που διαφαίνεται ότι χρειαζόμαστε είναι η ταχύτητα του σώματος την κάθε στιγμή. ΄Ομως η στιγμή δεν έχει διάρκεια και έτσι δεν μπορούμε να υπολογίσουμε αυτή την «στιγμιαία» ταχύτητα διαιρώντας το διάστημα δια του χρόνου. Χρειαζόμαστε λοιπόν μία μέθοδο, που να υπολογίζει την στιγμιαία ταχύτητα κάθε στιγμή.

Ξαναγυρίζοντας στην ελεύθερη πτώση, σημειώνουμε μερικά σημεία της συνάρτησης f(t) στο σχήμα 3.3. ΄Εστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα τη στιγμή t = 3 sec. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε τις μέσες ταχύτητες γύρω από το t = 3. ΄Οπως φαίνεται και απ' το σχήμα η μέση ταχύτητα στο διάστημα από 2 μέχρι 3 sec είναι:

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{44.1 - 19.6}{1} = 24.5 \text{ m/sec.}$$

΄Ομοια η μέση ταχύτητα στο διάστημα από 3 sec μέχρι 4 sec, είναι:

$$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{78.4 - 44.1}{1} = 34.3 \text{ m/sec.}$$



Σχήμα 3.3

Αν συμβολίσουμε με υ(t) τη ζητούμενη στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή t, τότε φαίνεται φυσικό να συμπεράνουμε από τα προηγούμενα ότι

$$24.5 \leqslant \upsilon(3) \leqslant 34.3.$$

Για να προσεγγίσουμε περισσότερο τη ζητούμενη ταχύτητα, υπολογίζουμε τις μέσες ταχύτητες στα διαστήματα μεταξύ 2.9 και 3 sec και μεταξύ 3 και 3.1 sec., που είναι αντίστοιχα:

$$\frac{f(3) - f(2.9)}{3 - 2.9} = \frac{44.1 - 41.2090}{10.1} = 28.91 \text{ m/sec.}$$

$$\frac{f(3.1) - f(3)}{3.1 - 3} = \frac{47.089 - 44.1}{0.1} = 29.89 \text{ m/sec.}$$

´Αρα θα έχουμε $28.91 \leqslant \upsilon(3) \leqslant 29.89$.

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\upsilon(3)$ με όσο θέλουμε μικρότερο σφάλμα. Γενικώτερα οι μέσες ταχύτητες σε δύο χρονικά διαστήματα μήκους Δt δεξιά και αριστερά του 3 είναι:

$$\frac{f(3) - f(3 - \Delta t)}{3 - (3 - \Delta t)} = \frac{(4.9)\cdot 3^2 - (4.9)\cdot(3 - \Delta t)^2}{\Delta t} = 29.4 - (4.9)\Delta t,$$

στο διάστημα $(3 - \Delta t, 3)$ και

$$\frac{f(3 + \Delta t) - f(3)}{(3 + \Delta t) - 3} = \frac{(4.9)\cdot(3 + \Delta t)^2 - (4.9)\cdot 3^2}{\Delta t} = 29.4 + (4.9)\Delta t,$$

στο διάστημα $(3, 3 + \Delta t)$.

´Ωστε

$$29.4 - (4.9)\Delta t \leqslant \upsilon(3) \leqslant 29.4 + (4.9)\Delta t. \tag{3.4}$$

´Ετσι αν θέσουμε $\upsilon(3) = 29.4$ m/sec το σφάλμα που θα κάνουμε θα είναι μικρότερο από $2\cdot(4.9)\Delta t$. Και επειδή το Δt μπορούμε να το πάρουμε όσο μικρό θέλουμε, άρα και το σφάλμα μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. ´Αρα η ζητούμενη στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή $t = 3$ sec είναι 29.4 m/sec.

Παρατηρούμε τώρα ότι την ίδια τιμή θα βρίσκαμε αν παίρναμε κατευθείαν το όριο

$$\upsilon(3) = s'(3) = \lim_{t\to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \lim_{t\to 3} \frac{\frac{1}{2}(9.80)(t^2 - 3^2)}{t - 3} =$$

$$= \lim_{t\to 3} \frac{1}{2}(9.80)(t + 3) = 29.4 \text{ m/sec}$$

´Ωστε ενώ η μέση μεταβολή της συνάρτησης $s(t)$ σε κάποιο διάστημα ταυτίζεται με τη *μέση ταχύτητα* του κινητού στο διάστημα αυτό, η στιγμιαία μεταβολή της σε κάποιο σημείο, ταυτίζεται με τη *(στιγμιαία)* ταχύτητα στο σημείο αυτό. ■

Οι ποσότητες μέση και στιγμιαία μεταβολή έχουν διαφορετική φυσική σημασία σε άλλες εφαρμογές. Θα αναφέρουμε παρακάτω μερικές απ' αυτές.

Στη Βιολογία. Έστω $N = N(t)$ παριστάνει το πλήθος των ατόμων ενός πληθυσμού ζωντανών οργανισμών (π.χ. βακτηρηδίων, ανθρώπων, ζώων κλπ.) που ζουν τη χρονική στιγμή t σ' ένα συγκεκριμένο χώρο. Αν $N_0 = N(t_0)$ είναι το πλήθος των ατόμων του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t_0, τότε η μέση μεταβολή

$$\frac{N(t) - N(t_0)}{t - t_0}$$

δίνει το πλήθος των ατόμων κατά το οποίο αυξάνεται ή ελαττώνεται ο πληθυσμός στη μονάδα του χρόνου κατά το χρονικό διάστημα (t_0, t). Είναι επομένως ο *μέσος ρυθμός αύξησης* του πληθυσμού στο διάστημα αυτό. Το όριο (αν υπάρχει)

$$N'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{N(t) - N(t_0)}{t - t_0}$$

θα είναι ο *στιγμιαίος ρυθμός αύξησης* του πληθυσμού στο σημείο x_0.

Στην Οικονομία. Έστω $k(x)$ είναι το κόστος της παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος. Τότε η μέση μεταβολή

$$\frac{k(x) - k(x_0)}{x - x_0}$$

δίνει το κόστος ανά μονάδα του προϊόντος όταν αυξήσουμε (ή ελαττώσουμε) την παραγωγή από x_0 μονάδες σε x μονάδες με $x > x_0$ (ή $x < x_0$ αντίστοιχα). Είναι επομένως το *μέσο κόστος* της μονάδας του προϊόντος για μεταβολή της παραγωγής από x_0 σε x μονάδες. Η στιγμιαία μεταβολή λέγεται στην περίπτωση αυτή *οριακό κόστος* και δίνει την τάση αύξησης (ή ελάττωσης) του κόστους ανά μονάδα παραγωγής του προϊόντος όταν αυξήσουμε (ή ελαττώσουμε) την παραγωγή.

Στη Γεωμετρία. Έστω $y = f(x)$ η εξίσωση μιας καμπύλης. Αν $A(x_0, f(x_0))$ και $M(x, f(x))$ δύο σημεία της καμπύλης τότε η μέση μεταβολή της συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα (x_0, x) είναι η κλίση της χορδής AM, ενώ η στιγμιαία μεταβολή της συνάρτησης στο x_0 είναι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο x_0.

Επομένως η εφαπτομένη της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο x_0, όπου η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη είναι

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.5}$$