ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

109

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΙΟΥΛΙΟΣ - ΑΥΓΟΥΣΤΟΣ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2018 ευρώ 3,5

Μεγάλες Επιτυχίες για την Ε.Μ.Ε.

- Χάλκινα μετάλλια, Εύφημη μνεία στην Ολυμπιάδα
- Αργυρά, Χάλκινα μετάλλια & Εύφημη μνεία στην Βαλκανιάδα
- Χρυσά, Αργυρά & Χάλκινα μετάλλια Junior Balkan
- Δημιουργική εμπειρία χαράς και μάθησης τα θερινά σχολεία

ΝΕΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
Μαθηματικών Ικανοτήτων
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας
ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ
Ημερομηνία διεξαγωγής: 9 Φεβρουαρίου 2019
Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ τάξη του Δημοτικού
Α΄, Β΄ τάξεις του Γυμνασίου

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 109 - Ιούλιος - Αύγουστος - Σεπτέμβριος 2018 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

2018 έτος Μαθηματικών
100 χρόνια
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και συνάδελφοι
Σας ευχόμαστε καλή Σχολική Χρονιά.

Δυστυχώς, ο αγαπητός φίλος και στενός συνεργάτης Βαγγέλης Ευσταθίου, Αντιπρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής, δεν θα υπογράφει πλέον το γράμμα της Σύνταξης, αφού έφυγε εντελώς απροσδόκητα από κοντά μας στις 9 Μαΐου 2018.

Δουλέψαμε επί 12 σχεδόν χρόνια μαζί για τον «Ευκλείδη Β΄» με μια συνεργασία ανέφελη και γόνιμη.

Η αναμφισβήτητη ηρεμία και ανεκτικότητα του Βαγγέλη βοηθούσε στο να συμβιβάζουμε τις όποιες αντιφατικές απόψεις προέκυπταν.

Ένα άλλο βαρύ πλήγμα για μένα ήταν ο τραγικός χαμός του αγαπητού μου φίλου, από τα φοιτητικά ακόμη χρόνια, του Βασίλη Κατσαργύρη. Ξεκινήσαμε και οι δύο τη φοίτησή μας στο Πανεπιστήμιο Αθηνών από δύο κοντινά χωριά της Τριφυλίας και διατηρήσαμε πάνω από 50 χρόνια, αδιατάρακτη τη φιλία μας. Με υποδέχτηκε θυμάμαι, με αδελφική αγάπη στο Βαρβάκειο, ως παλιός καθηγητής του Λυκείου αυτός, όπου είχαμε μια άψογη και ευχάριστη συνεργασία. Η μαθηματική κοινότητα, νομίζω ότι φτωχαίνει αισθητά.

Όσον αφορά στο 1ο τεύχος, όπως είναι γνωστό, συνηθίζεται να το αναλαμβάνει το παράρτημα της Ε.Μ.Ε. της περιφέρειας στην οποία διεξάγεται το Συνέδριο.

Για φέτος και επ' ευκαιρία των 100 χρόνων από την ίδρυσή της Ε.Μ.Ε., το Συνέδριο διεξάγεται στην Αθήνα. Είχα λοιπόν την ιδέα να παρακαλέσω να το αναλάβουν τα 9 πρότυπα, πειραματικά Λύκεια της Αθήνας εκ των οποίων όμως ανταποκρίθηκαν μόνο 4 Λύκεια (το 1ο Λύκειο, Γεννάδειο, Το Λύκειο του Πανεπιστημίου Αθηνών, Π.Σ.Π.Α., το 2ο Λύκειο Αθηνών και το Βαρβάκειο Λύκειο). Αναπληρώθηκαν βέβαια τα κενά με τον καλύτερο δυνατό τρόπο από συναδέλφους της Θεσσαλονίκης και των Τρικάλων τους οποίους και ευχαριστώ ιδιαίτερα.

Είμαι σίγουρος ότι θα βρείτε πολλές ενδιαφέρουσες σελίδες και σε αυτό το τεύχος, που είναι επετειακό.

Ο πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής: Γιώργος Τασσόπουλος
Ο αντιπρόεδρος: Γιάννης Κερασαρίδης

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης, Απ. Κακκαβάς],
Γ΄Λυκείου [Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής: 10 Νοεμβρίου 2018
Ευκλείδης: 19 Ιανουαρίου 2019
Αρχιμήδης: 23 Φεβρουαρίου 2019

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση βασισμένη στη Γεωμετρία Από τη Γεωργία Καζούλλη, προσφορά από το Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Δωδεκανήσου

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Ιωάννης Τυρλής

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.
- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**. Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται: (1). Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044 (2). Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK (3). Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. (4). Με αντικαταβολή, σε εταιρεία ταχυμεταφορών στο χώρο σας, κατά την παραλαβή.

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

100 χρόνια Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Σημαντικοί σταθμοί στην εκατοντάχρονη ιστορία της[1]

Αγγελική Χ. Χρονοπούλου, Αθανάσιος Μαλαφέκας, Μαρία Γεωργούδη

Το 2018, **εκατό χρόνια** από την **ίδρυση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας**, το Διοικητικό Συμβούλιο της Εταιρείας αποφάσισε να υλοποιήσει ένα φιλόδοξο στόχο: την παρουσίαση της ιστορίας του επιστημονικού σωματείου, χρησιμοποιώντας σαν πηγές τα όλα τα αρχεία της Εταιρείας, δίνοντας βέβαια μεγαλύτερη έμφαση στα τελευταία 30 χρόνια στην καμπή δυο αιώνων, που σημάδεψαν η ευφορία της μεταπολίτευσης από τη μια και η πρόσφατη μνημονιακή πρακτική που επιτίθεται στα δικαιώματα μας ως μαθηματικοί, εκπαιδευτικοί, εργαζόμενοι και άνθρωποι.

Ανατέθηκε, λοιπόν στην τριμελή ομάδα μας το έργο αυτό, η ανασύσταση της μεγάλης εικόνας της ιστορίας της ΕΜΕ την πρόσφατη 30ετία 1988-2018 με προβολές στην 100ετία και μεθοδολογική επιλογή μας είναι να αναδείξουμε, τα επιτεύγματα και τις επιπτώσεις τους, όπως αυτά αναδεικνύονται από τα θεσμικής έγγραφα και την ανάλυσή μας.

Στόχος μας είναι μια «ιστορία από τα κάτω» που επικεντρώνεται στο πώς υποκείμενα -μέλη της ίδιας επιστημονικής ομάδας βιώνουν το επιστημονικό και το κοινωνικό γίγνεσθαι και συμμετέχουν με τη δράση τους στην ομάδα.

Οπότε και θα εντάξουμε στην ιστορική αφήγηση τη φωνή των αφανών πρωταγωνιστών και θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις που είχαν οι επιστημονικές – εκπαιδευτικές – κοινωνικές εξελίξεις στα μέλη της ΕΜΕ, στην επιστημονική και στη μαθηματική κοινότητα και στην κοινωνία.

Έτσι είναι η πρώτη φορά που μια επιστημονική ένωση γράφει την 100ετή ιστορία της και μάλιστα ως δράση από και για τα μέλη της και στην υπηρεσία των μελών της.

Η συγγραφική ομάδα φιλοδοξεί το ερευνητικό υλικό στο μέλλον, μετά την ολοκλήρωση της συγγραφής του βιβλίου, να είναι διαθέσιμο σε μελετητές, φοιτητές και άλλους ενδιαφερόμενους ώστε να πραγματοποιήσουν τις μελέτες τους. Για το λόγο αυτό η ανάλυση του εν λόγω υλικού είναι εξαντλητική. Τα στοιχεία, όμως, που θα παρατεθούν στο βιβλίο έχουν στόχο να ανοίξουν τα ζητήματα προς μελέτη και σε νέους ερευνητές και όχι να εξαντλήσουν το θέμα.

Στο πλαίσιο του παραπάνω εγχειρήματος εντοπίσαμε καταρχήν τους σημαντικούς σταθμούς στην εκατοντάχρονη πορεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, ενός από τα αρχαιότερα επιστημονικά σωματεία στην Ελλάδα, που βασικό χαρακτηριστικό του, όπως θα αναδειχθεί και από τη σύντομη ιστορική ανασκόπηση που θα ακολουθήσει – εν είδει προδημοσίευσης- είναι η συνεχής και έντονη παρουσία του στην ελληνική επιστημονική κοινότητα.

1918: Είναι μια χρονιά σταθμός για την Ευρώπη. Ο Α΄ Παγκόσμιος Πόλεμος μαίνεται, στη Ρωσία η Οκτωβριανή Επανάσταση έχει αλλάξει τα δεδομένα, η Ελλάδα έχει επεκταθεί προς Βορά έχει μπει και αυτή στον πόλεμο με τις δυνάμεις της Entente, ο Ελληνικός στρατός προελαύνει προσπαθώντας να ανακαταλάβει από τους Βούλγαρους τα ελληνικά εδάφη της Μακεδονίας.

Το Οθώνειον Πανεπιστήμιον, όπως λεγόταν πριν πάρει το σημερινό όνομα Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιον Αθηνών, αποτελούνταν από τέσσερις σχολές: Θεολογίας, Νομικής, Ιατρικής και Τεχνών (η οποία περιλάμβανε τότε τις Εφαρμοσμένες Επιστήμες και τα Μαθηματικά). Το 1904, η Σχολή των Τεχνών διασπάστηκε σε δύο Σχολές, σε αυτή των Τεχνών και αυτή των Επιστημών, η οποία περιέλαβε τις νέες Σχολές Φυσικής, Μαθηματικών και Φαρμακευτικής.

Η περίοδος από την ίδρυση του Πανεπιστημίου Αθηνών ως το 1885 μπορεί να θεωρηθεί εισαγωγική στον τομέα των μαθηματικών σπουδών. Η παρουσία και διδασκαλία **των Ιωάννη Χατζηδάκη και του Στέφανου Κυπάρισσου** χαρακτήρισαν τα επόμενα χρόνια ως περίοδο

[1] Τα στοιχεία για τη συγγραφή αυτού του άρθρου αντλήθηκαν από τις επετειακές εκδόσεις της ΕΜΕ: «Πεντηκονταετηρίς 1918-1968» και «1918-1988 Τα πρώτα 70 χρόνια», καθώς και από τη μελέτη των Δελτίων της ΕΜΕ, του Παραρτήματος του Δελτίου της ΕΜΕ, και των «Ενημερώσεων από το ΔΣ» για την η ανασύσταση της μεγάλης εικόνας της ιστορίας της ΕΜΕ την πρόσφατη 30ετία 1988-2018 με προβολές στην 100ετία.

επιστημονικής θεμελίωσης των Μαθηματικών και περαιτέρω εξέλιξης των μαθηματικών σπουδών στην Ελλάδα. Ο **Ιωάννης Χατζηδάκης** εξέδωσε το πρώτο πανεπιστημιακό σύγγραμμα στα Μαθηματικά. Καθηγητές όπως **οι Τ. Αργυρόπουλος και Δ. Αιγινήτης** βοήθησαν στην ευρύτερη και επιστημονικότερη κατάρτιση των φοιτητών και κατ΄ επέκταση στην προαγωγή των μαθηματικών σπουδών στα σχολεία της Μέσης Εκπαίδευσης. Η ίδρυση το 1904 των Εμπορικών σχολών άνοιξε νέους ορίζοντες στη διάδοση της μαθηματικής Επιστήμης.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο 93 μαθηματικοί συγκεντρώθηκαν σε αίθουσα του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών και αποφάσισαν την ίδρυση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Σύμφωνα με τον πρώτο της Πρόεδρο **Νικόλαο Χατζηδάκη** «*Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία πληροί, νομίζω, μιαν πραγματικήν έλλειψιν του τόπου μας και επομένως, καθώς κάθε οργανισμός πληρών πραγματικήν έλλειψιν, δηλ. πραγματικώς χρήσιμος, έχει όλα τα στοιχεία του βιώσιμου*» Το **πρώτο** της **Καταστατικό** εγκρίθηκε πανηγυρικά στις **8 Απριλίου 1918** και από τις 19 Μαΐου του ίδιου χρόνου, οπότε το Καταστατικό της επικυρώθηκε από το Πρωτοδικείο Αθηνών, η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία είναι γεγονός.

Το Καταστατικό της τα χρόνια που πέρασαν τροποποιήθηκε πολλές φορές άλλοτε υπακούοντας τους νόμους του Κράτους περί Ενώσεων και Σωματείων και άλλοτε προσπαθώντας να ακολουθήσει τις κοινωνικές και εκπαιδευτικές συνθήκες εποχής και τις προτάσεις των μελών του.

Από το 1918 όμως ο βασικός σκοπός της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας **παραμένει αμετάβλητος**: «*η προαγωγή και η διάδοση των διαφόρων κλάδων και εφαρμογών της Μαθηματικής Επιστήμης καθώς και η υποστήριξη και συμπαράσταση προς τους Έλληνες πτυχιούχους μαθηματικούς, μέλη της, με τη λήψη γενικά κάθε νόμιμου μέτρου, που αποσκοπεί στην αναγνώριση και την προστασία των ίδιων, αλλά και του έργου τους. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο και μέσα στο πλαίσιο του Συντάγματος και των νόμων, η Ε.Μ.Ε. ενδιαφέρεται οπωσδήποτε για την καθολική πρόοδο της Ελληνικής Παιδείας, ιδιαίτερα όμως της Μαθηματικής, και συνεπώς για την εξασφάλιση των προϋποθέσεων Ελληνικής Παιδείας στην υπηρεσία του Λαού, προϋποθέσεων που είναι η Εθνική Ακεραιότητα, η Εθνική Ανεξαρτησία και η Δημοκρατία*»

Σημαντικοί Πανεπιστημιακοί δάσκαλοι της εποχής διετέλεσαν μέλη των Διοικητικών της Συμβουλίων: **Νικόλαος Χατζηδάκης, Γεώργιος Ρεμούνδος, Νείλος Σακελλαρίου, Παναγιώτης Ζερβός**. Το 1920 ο μεγάλος Έλληνας Μαθηματικός **Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή** ανακηρύσσεται από τη Γενική Συνέλευση των μελών της ΕΜΕ επίτιμος πρόεδρος της Εταιρείας.

Το Μάρτιο του 1919 εκδίδεται το πρώτο τεύχος του «**Δελτίου**» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, το οποίο περιλαμβάνει επιστημονικές εργασίες αλλά και νέα από τις δραστηριότητες της ΕΜΕ και το 1931 δημοσιεύει για πρώτη φορά εργασίες καθηγητών του εξωτερικού, αναγνωρίζεται δηλαδή διεθνώς.

Το 1930 εκδίδεται το «**Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας**», μηνιαίο περιοδικό που προορίζονταν για τους μαθητές Γυμνασίων της χώρας, διεθνής εκδοτική πρωτοπορία για τα στοιχειώδη Μαθηματικά.

Το περιοδικό στα μέσα της δεκαετίας του 60 αλλάζει όνομα και μορφή, παίρνει το όνομα του μεγάλου αρχαίου Έλληνα γεωμέτρη Ευκλείδη. Σήμερα κυκλοφορεί σαν **Ευκλείδης Α** για τους μαθητές του Γυμνασίου, **Ευκλείδης Β** για το Λύκειο, επεκτάθηκε και στην ύλη του Δημοτικού και έγινε ο «**Μικρός Ευκλείδης**».

Η προσπάθεια της ΕΜΕ να στηρίξει το επάγγελμα του μαθηματικού ξεκινά από τον πρώτο χρόνο της ίδρυσής και με παρεμβάσεις στο Υπουργείο Παιδείας επιτυγχάνει την ίδρυση Πρακτικών Λυκείων, την ίδρυση διδασκαλείου μέσης Εκπαίδευσης με σκοπό την επιμόρφωση των καθηγητών, τη δυνατότητα προαγωγής των Μαθηματικών σε Γυμνασιάρχες, το θεσμό των γενικών επιθεωρητών Μαθηματικών και Φυσικών καθώς και την προσέλκυση φοιτητών σε καθηγητικές σχολές. Το 1922 παρουσιάζει στο Υπουργείο Παιδείας την πρώτη της εκτεταμένη μελέτη για τις **μεταρρυθμίσεις** που πρέπει να γίνουν στην Παιδεία, ενώ το 1925 αρχίζει αγώνα για τη βελτίωση των μισθών και των συντάξεων των καθηγητών. Το 1929 ζητά να σταλούν στο εξωτερικό Μαθηματικοί για να ειδικευθούν ως αναλογιστές και να στελεχώσουν έτσι τον νεότευκτο τομέα των Κοινωνικών Ασφαλίσεων.

Το 1960 η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία διοργανώνει το πρώτο της Συνέδριο ευελπιστώντας σύμφωνα με τον τότε Γενικό Γραμματέα Αριστείδη Πάλλα «*ότι θα είναι νέας ζωής απαρχή δια τον* *μαθηματικόν κόσμον και διά την επιστημονικήν κίνησιν της Ελλάδος»*. Για τη διοργάνωση του πρώτου Συνεδρίου επελέγη το Ηράκλειο της Κρήτης με το σκεπτικό ότι η Κρήτη θεωρείται και είναι από αρχαιοτάτων χρόνων η κοιτίδα της προόδου.[2]

Το 1973 διοργάνωσε **Διεθνές Συμπόσιο** με την ευκαιρία της συμπλήρωσης των εκατό χρόνων από τη γέννηση του **Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή**, με τη συμμετοχή διακεκριμένων μαθηματικών από όλο τον κόσμο .

Δέκα χρόνια μετά ξεκινά ο θεσμός των **ετήσιων πανελληνίων συνεδρίων Μαθηματικής Παιδείας** στην Αθήνα, τα οποία διοργανώνονται ανελλιπώς από τότε μέχρι σήμερα κάθε χρόνο και σε διαφορετική πόλη της Ελλάδας και αποτελούν πια σημείο συνάντησης των μαθηματικών όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης αλλά και μια ευκαιρία παρουσίασης των νέων τάσεων στην μαθηματική επιστήμη καθώς και στη διδακτική των μαθηματικών.

Το 1986 ανακηρύσσεται με απόφαση του ΔΣ της ΕΜΕ «**Έτος Μαθηματικής Παιδείας**» και τον Απρίλη της χρονιάς εκείνης πραγματοποιείται στο Εθνικό Ίδρυμα Ερευνών Πολυδύναμο Εξαήμερο Εκδηλώσεων Μαθηματικής Παιδείας με θέμα: «**Μαθηματικά και Κοινωνία**», με σκοπό να προβάλει την εξέλιξη, το έργο, τις αντιλήψεις, τους στόχους της ΕΜΕ στο κοινωνικό σύνολο, να συζητήσει θέματα της ανάπτυξης της μαθηματικής παιδείας και εκπαίδευσης στη χώρα μας και να προκαλέσει προς την κατεύθυνση της δημιουργίας μιας άλλης κατάστασης στον καταμερισμό εργασίας των μαθηματικών, όχι μόνο μέσα από το πρίσμα της λύσης του προβλήματος της ανεργίας του κλάδου. Η παράλληλη έκθεση (απεικόνιση μαθηματικών πληροφοριών, σπάνιες φωτογραφίες ελλήνων και ξένων μαθηματικών, μαθηματικό βιβλίο) είχε σκοπό να δημιουργήσει ένα περιβάλλον φιλικής συνάντησης του γονιού, του δασκάλου, του μαθητή.

Στην προσπάθειά της για την επιμόρφωση των μαθηματικών προχώρησε από τη δεκαετία του 1960 στη διοργάνωση σεμιναρίων όπως «Μέθοδοι και Εφαρμογαί του Προγραμματισμού», «Στατιστικαί Μέθοδοι», «Αριθμητικαί Μεθοδοι και Προγραμματισμός Υπολογιστών».[3]

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία υπήρξε **πρωτοπόρος** στη διοργάνωση **σεμιναρίων Πληροφορικής** στην Ελλάδα και η προσφορά της στον τομέα αυτό αναγνωρίστηκε από την Ευρωπαϊκή Ένωση. Σε μια έκθεση της ΕΟΚ στην οποία εξετάζονταν ο ρόλος των ενώσεων και άλλων φορέων στην εφαρμογή της Πληροφορικής στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα γίνεται η παρακάτω αναφορά στην ΕΜΕ: *«Η πιο δραστήρια ένωση είναι η ΕΜΕ, η οποία προσέφερε σεμινάρια πληροφορικής στα μέλη της, πολύ πριν το Υπουργείο Παιδείας αποφασίσει να διοργανώσει παρεμφερή σεμινάρια. Οι ερευνητές που παρακολουθήσαν τα σεμινάρια αυτά ήταν στην πραγματικότητα αυτοί που διδάξαν την Πληροφορική στα σχολεία. Αξίζει να αναφερθεί ότι χωρίς τα σεμινάρια αυτά η εισαγωγή της πληροφορικής στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση θα ήταν στόχος που θα ήταν αδύνατον να επιτευχθεί»* [4]

Από το 1989 έως το 1993[5] αναλαμβάνει τη διεξαγωγή στην Ελλάδα του **Ευρωπαϊκού Διαγωνισμό για Νέους Επιστήμονες (Eurocontest)**, ο οποίος αφορούσε μαθητές και φοιτητές ΑΕΙ και ΤΕΙ 15-21 ετών, τον οποίο προκήρυξε η Ευρωπαϊκή Κοινότητα με σκοπό να προωθήσουν την άμιλλα μεταξύ νέων επιστημόνων και να εντοπίσουν και να ενθαρρύνουν ταλαντούχους νέους με έφεση στους διάφορους τομείς της Επιστήμης και Τεχνολογίας.

Το 1933 η Ένωση Λειτουργών Μ. Εκπαίδευσης Αχαΐας[6] διοργάνωσε διαγωνισμό μεταξύ των μαθητών της ΣΤ τάξεως των Γυμνασίων του Ν. Αχαΐας στα Μαθηματικά και στη Φυσική στον οποίο «*τα ζητήματα ωρίσθησαν παρακλήσει της εν λόγω ενώσεως, υπό της Ε.Μ.Ε.*» Τον επόμενο χρόνο το Διοικητικό Συμβούλιο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας αποφασίζει να διοργανώσει διαγωνισμό Μαθηματικών για τους μαθητές της Ε και ΣΤ τάξης των Γυμνασίων. Σκοπός του διαγωνισμού είναι «η

---

[2] Χρονικά 1^{ου} Πανελληνίου Μαθηματικού Συνεδρίου των εν Κρήτη Ελλήνων Μαθηματικών εν Ηρακλείω 14^{η} και 15^{η} Μαΐου 1960, Εκδόσεις Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, σελ 37.

[3] Πεντηκονταετηρίδα ΕΜΕ 1968, σελ.43-45

[4] Assignment Ref. No A/GR/18A, Report title: "Educational Infrastructure (Informatics). Assessment capacity to accelerate an information program within the Educational structure in Greece", Prepared for the commission of the European Communities by Fergal Mc Grath, University of Limerick, p. 13, §B, June 1996

[5] Ενημέρωση, Τεύχος 40, Οκτώβρης 89, σελ. 6-7

[6] Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τεύχος 18, Ιούνιος 1933,σελ. 289

κατ΄ έτος επιλογή του μελλοντικού μαθηματικού δυναμικού της χώρας», μια προσπάθεια της Εταιρείας να εμφυσήσει στους νέους της εποχής την αγάπη στα μαθηματικά και να τους ωθήσει στην επιλογή των μαθηματικών σπουδών.

Η οδυνηρή για τον τόπο μας δεκαετία του 1940 ανέστειλε τη διοργάνωση του διαγωνισμού ο οποίος όμως από το 1951[7] διεξάγεται ανελλιπώς μέχρι και σήμερα. Σήμερα αποτελείται από τρεις φάσεις το **ΘΑΛΗ, τον ΕΥΚΛΕΙΔΗ και των ΑΡΧΙΜΗΔΗ** και αποσκοπεί στην επιλογή των ομάδων που θα εκπροσωπήσουν τη χώρα μας στους Διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς: Τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα[8] στην οποία η χώρα μας συμμετέχει από το 1975, τη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα, η διοργάνωση της οποίας αποτέλεσε πρωτοβουλία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, που φιλοξένησε και την πρώτη διοργάνωση το 1984 (από τότε διοργάνωσε πέντε ακόμα Βαλκανιάδες, το 1987 και το 1992 στην Αθήνα, το 1997 στην Καλαμπάκα, το 2007 στη Ρόδο και το 2015 στην Αθήνα). Επίσης συμμετέχει στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων για μαθητές Γυμνασίων, κι έχει αναλάβει μέχρι στιγμής τέσσερις διοργανώσεις το 1998 στην Αθήνα, το 2005 και 2012 στη Βέροια και φέτος στο πλαίσιο του εορτασμού των 100 της χρόνων την 22η ΒΜΟΝ που πραγματοποιήθηκε στη Ρόδο από 19-24 Ιουνίου με τη συμμετοχή 18 χωρών από την περιοχή της Νοτιοανατολικής Ευρώπης αλλά και ομάδες από χώρες της Ευρώπης και της Ασίας, μεγάλες δυνάμεις στο χώρο των Μαθηματικών.

Κορυφαία στιγμή για την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία η διοργάνωση της **45ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας στην Αθήνα το 2004**, αναγνώριση της προσφοράς της στην Μαθηματική Κοινότητα αλλά και των επιτυχιών των Ελληνικών ομάδων σε διεθνές επίπεδο. Κορυφαία στιγμή και η κατάκτηση της **12ης θέσης παγκοσμίως στην 58η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα στο Ρίο ντε Τζανέιρο τον Ιούλιο του 2017**, ξεπερνώντας χώρες με παράδοση επιτυχιών στις μαθηματικές ολυμπιάδες, αποτέλεσμα της σημαντικής δουλειάς που γίνεται εθελοντικά μέσα από τους διαγωνισμούς, τα καλοκαιρινά μαθηματικά σχολεία, τα **δωρεάν μαθήματα** που γίνονται στην Αθήνα, αλλά και σε πολλές πόλεις της Ελλάδας με την ευθύνη των Παραρτημάτων της.

Το **Μαθηματικό Καλοκαιρινό Σχολείο**, σχεδιασμένο να δείξει στους μαθητές την ομορφιά των μαθηματικών εννοιών και να οδηγήσει τη σκέψη τους σε νέους δρόμους, είναι ένας θεσμός που ξεκίνησε το 2007 στον Άγιο Νικόλαο Νάουσας σε συνεργασία με το Παράρτημα της Ημαθίας. Το 2009 δημιουργήθηκε παράλληλα και το Μαθηματικό Καλοκαιρινό Σχολείο στη Λεπτοκαρυά Πιερίας, για να δώσει την ευκαιρία σε ακόμη περισσότερους μαθητές να εμβαθύνουν στον κόσμο των Μαθηματικών. Γνώση και ψυχαγωγία συνδυάζονται αρμονικά σε μια διοργάνωση που χρόνο με το χρόνο έχει αποκτήσει πιστούς φίλους που αυξάνονται συνεχώς.

Από το 2007 προσπαθεί να μυήσει τους μαθητές του Δημοτικού στον κόσμο των Μαθηματικών μέσω του συμμετοχικού διαγωνισμού για τις δυο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και την Καλοκαιρινή Μαθηματική Κατασκήνωση.

Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία **βραβεύθηκε** από την **Ακαδημία Αθηνών** δυο φορές, το 1932 με το **Μπενάκειο βραβείο** για τη δράση της και για το σπουδαίο Δελτίο της και το 1967 με την ανώτατη τιμητική διάκριση του **Αργυρού Μεταλλίου**, για τις μεγάλες τις υπηρεσίες προς τη **Μαθηματική Επιστήμη**.

Το 2018 η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία έγινε 100 χρονών με τη φιλοδοξία να παραμείνει νέα και δραστήρια για τα χρόνια που θα ακολουθήσουν. Ελπίζοντας να εξελίξει τις δράσεις της παραμένοντας πάντα πιστή στο στόχο της: να βοηθήσει τη νέα γενιά των μαθηματικών, των δασκάλων, των ερευνητών αλλά και να καταδείξει την ομορφιά των μαθηματικών, καταπολεμώντας έτσι τη μαθηματικοφοβία.

Συγκεντρώνοντας με τη βοήθεια του μαθηματικού κόσμου το υλικό που θα ολοκληρώσει το πορτραίτο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στα 100 χρόνια της διαδρομής της, ελπίζουμε ότι θα συμβάλλουμε και εμείς στην επίτευξη των στόχων της στο κατώφλι της νέας της 100ετίας.

[7] Δελτίον Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Τόμος ΚΣΤ 1951

[8] Ο θεσμός των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων ξεκίνησε στη Ρουμανία το 1959

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

59^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα

Κλουζ Ναπόκα Ρουμανίας, 3-14 Ιουλίου 2018

Η 59^{η} Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη στην πόλη Κλουζ Ναπόκα της Ρουμανίας από 3 μέχρι 14 Ιουλίου 2018. Συμμετείχαν 107 χώρες με 594 μαθητές (534 αγόρια και 60 κορίτσια). Οι Έλληνες μαθητές κατέκτησαν 2 **χάλκινα μετάλλια και 2 εύφημες μνείες**, ως εξής:

Λώλας Δημήτριος	**Εκπαιδευτήρια Αθηνά,**	**Χάλκινο μετάλλιο**
Μελάς Δημήτριος	**Σχολή Μωραΐτη,**	**Χάλκινο μετάλλιο**
Τσιάμης Ραφαήλ	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη,**	**Εύφημη μνεία**
Μιχαλάκης Βάιος Ραφαήλ	**Νέα Παιδεία Ντάγκας Σ.**	**Εύφημη μνεία**
Ντόκας Ευθύμιος	**$2^{ο}$ ΓΕΛ Παλαιού Φαλήρου**	**Συμμετοχή**
Προδρομίδης Κυπριανός-Ιάσων	**Πειραματικό ΓΕΛ Αναβρύτων**	**Συμμετοχή**

Η Ελληνική ομάδα συγκέντρωσε 74 μονάδες στη βαθμολογία και κατέλαβε τη 54^{η} θέση μεταξύ των 107 χωρών που έλαβαν μέρος. Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο Πρόεδρος της ΕΜΕ καθηγητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου **Ανάργυρος Φελλούρης** και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Ευάγγελος Ζώτος**.

Οι λύσεις των προβλημάτων

Πρόβλημα 1. **Έστω Γ ο περιγεγραμμένος κύκλος του οξυγώνιου τριγώνου ABC. Τα σημεία D και E ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα AB και AC, αντίστοιχα, έτσι ώστε $AD = AE$. Οι μεσοκάθετες των τμημάτων BD και CE τέμνουν τα μικρά τόξα AB και AC του κύκλου Γ στα σημεία F και G, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες DE και FG είναι παράλληλες (ή ταυτίζονται).**

Λύση

Από τα σημεία F και G θεωρούμε παράλληλες προς τις AB και AC, οι οποίες τέμνουν για δεύτερη φορά τον κύκλο Γ στα σημεία X και Y αντίστοιχα.

Εφόσον $FX \parallel AB$ και $ABFX$ εγγεγραμμένο στον κύκλο Γ, το $ABFX$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα θα ισχύουν οι ισότητες:

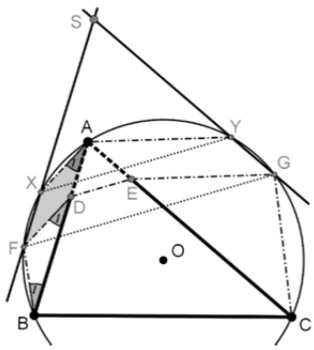
$$AX = BF \text{ και } \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \quad (1).$$

Εφόσον το F ανήκει στη μεσοκάθετο του BD θα ισχύουν οι ισότητες:

$$BF = DF \text{ και } \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \quad (2).$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $AX =\!\!\parallel DF$, οπότε το τετράπλευρο $ADFX$ είναι παραλληλόγραμμο και κατά συνέπεια:

$$AD = XF.$$



Σχήμα 1

Με ανάλογο τρόπο συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AEGY$ είναι παραλληλόγραμμο και κατά συνέπεια: $AE = YG$. Από τις ισότητες $AD = XF$ και $AE = YG$ (σε συνδυασμό με τη δοσμένη ισότητα $AD = AE$), καταλήγουμε στην ισότητα $XF = YG$. Άρα το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $GFXY$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια $\boldsymbol{XY \parallel FG}$. Αν τώρα οι μη παράλληλες πλευρές FX και GY του τραπεζίου $GFXY$ τέμνονται στο σημείο S, τότε $\widehat{DAE} = \widehat{FSG}$ (γωνίες με πλευρές παράλληλες). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ADE, SXY και SFG είναι όμοια μεταξύ τους, οπότε $\boldsymbol{DE \parallel FG}$.

Οι ευθείες ταυτίζονται όταν το σημείο D ταυτίζεται με το σημείο B (στη περίπτωση που $AB < AG$).

Πρόβλημα 2. **Να βρείτε όλους τους ακεραίους αριθμούς $n \geq 3$ για τους οποίους υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, τέτοιοι ώστε $a_{n+1} = a_1$ και $a_{n+2} = a_2$, και**

$$\boldsymbol{a_i \cdot a_{i+1} + 1 = a_{i+2} \text{ για } i = 1, 2, \ldots, n.}$$

Λύση ($1^{ος}$ τρόπος). Θα αποδείξουμε ότι η ελάχιστη περίοδος της ακολουθίας είναι 3 και στη συνέχεια θα προκύψει ότι το n διαιρείται με το 3. Επειδή η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση της δεδομένης αναδρομικής σχέσης $x^2+1=x$ δεν έχει πραγματική ρίζα οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ δεν μπορούν να είναι όλοι ίσοι, οπότε η ελάχιστη περίοδος της ακολουθίας δεν μπορεί να ισούται με 1. Εφαρμόζοντας τη δεδομένη αναδρομική σχέση για i και $i+1$ λαμβάνουμε:

$$a_i a_{i+1}+1=a_{i+2} \quad \text{και} \quad a_{i+1}a_{i+2}+1=a_{i+3} \Rightarrow a_i a_{i+1}=a_{i+2}-1 \quad \text{και} \quad a_{i+1}a_{i+2}=a_{i+3}-1$$

$$\Rightarrow a_{i+2}\left(a_{i+2}-1\right)=a_i a_{i+1} a_{i+2}=a_i\left(a_{i+3}-1\right) \Rightarrow a_{i+2}\left(a_{i+2}-1\right)=a_i\left(a_{i+3}-1\right) \Rightarrow a_{i+2}^2-a_i a_{i+3}=a_{i+2}-a_i. \quad (1)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν από την (1) για $i=1,,2,\ldots,n$, οπότε λαμβάνουμε:

$$a_3^2+a_4^2+\ldots+a_{n+2}^2-a_1a_4-a_2a_5-\ldots-a_na_{n+3}=\left(a_3-a_1\right)+\left(a_4-a_2\right)+\ldots+\left(a_{n+2}-a_n\right)$$

$$\Rightarrow a_3^2+a_4^2+\ldots+a_{n+2}^2-a_1a_4-a_2a_5-\ldots-a_na_{n+3}=0, \text{ (αφού } a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2\text{)}$$

$$\Rightarrow \left(a_1-a_4\right)^2+\left(a_2-a_5\right)^2+\ldots.+\left(a_n-a_{n+3}\right)^2=0 \Rightarrow a_i=a_{i+3}, \text{ για κάθε } i=1,2,\ldots,n.$$

Επομένως η ακολουθία $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ είναι περιοδική με περίοδο 3. Επειδή η ελάχιστη περίοδος δεν μπορεί να είναι ίση με 1, έπεται ότι θα είναι ίση με 3, οπότε το n θα είναι πολλαπλάσιο του 3.

Πρόβλημα 3. **Ένα τρίγωνο *αντι-Πασκάλ* είναι μια ισόπλευρη τριγωνική παράταξη αριθμών έτσι ώστε, εκτός από τους αριθμούς της τελευταίας γραμμής, κάθε αριθμός ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο αριθμών που βρίσκονται αμέσως κάτω από αυτόν. Για παράδειγμα, η παρακάτω παράταξη αριθμών είναι ένα αντι-Πασκάλ τρίγωνο με τέσσερις γραμμές οι οποίες περιέχουν κάθε ακέραιο από το 1 μέχρι το 10.**

4

2 6

5 7 1

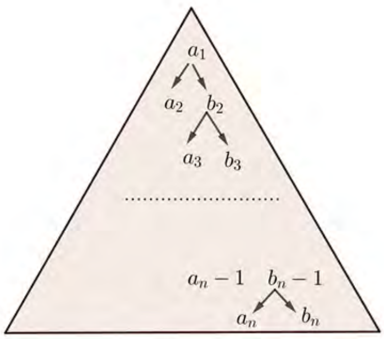
8 3 10 9

Υπάρχει ένα αντι-Πασκάλ τρίγωνο με 2018 γραμμές οι οποίες περιέχουν κάθε ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το $1 + 2 + \cdots + 2018$;

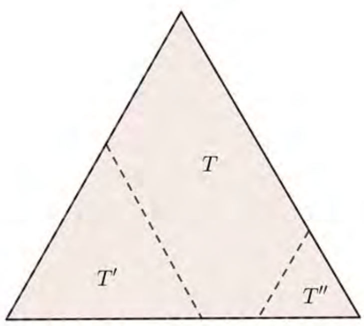
Λύση. Έστω T ένα αντι-Πασκάλ τρίγωνο με n γραμμές που περιέχει από το 1 μέχρι και το $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ και έστω a_1 ο αριθμός που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή. Έστω ότι στη δεύτερη γραμμή βρίσκονται οι αριθμοί a_2, b_2 με $b_2=a_1+a_2$. Έστω επίσης ότι οι δύο αριθμοί κάτω από το b_2 είναι οι a_3, b_3 με $b_3=a_3+b_2=a_3+a_2+a_1$. Συνεχίζοντας ομοίως καταλήγουμε ότι στην προτελευταία και στην τελευταία γραμμή θα υπάρχουν αριθμοί

$$b_{n-1}=a_1+a\ +\ldots+a_{n-1} \quad \text{και} \quad b_n=a_1+a\ +\ldots+a_{n-1}+a_n.$$

Επειδή οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι ανά δύο διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι που το άθροισμά τους δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το μεγαλύτερο στοιχείο του τριγώνου T, έπεται ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ αποτελούν μία μετάθεση του συνόλου $\{1,2,,\ldots,\mathrm{n}\}$.



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Θεωρούμε τώρα τα δύο ισόπλευρα υποτρίγωνα μέσα στο τρίγωνο T με βάση τα τμήματα που ορίζονται στη βάση του T αριστερά και δεξιά από τα διαδοχικά στοιχεία a_n, b_n. Είναι πιθανόν ένα από αυτά να εκφυλίζεται σε σημείο, ενώ ένα τουλάχιστον από αυτά, έστω το T', θα έχει πλευρά μήκους $l \geq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$.

Επειδή το τρίγωνο T' υπακούει τους κανόνες του τριγώνου αντι-Πασκάλ με l γραμμές, αυτό θα περιέχει θετικούς ακέραιους a_1'(στην πρώτη γραμμή του),$a_2',\dots,a_l'$, έτσι ώστε $a_k', b_k' = a_1' + a_2' + \dots + a_k'$ είναι δύο γειτονικοί θετικοί ακέραιοι στην k γραμμή κάτω από τον αριθμό b_{k-1}' της προηγούμενης γραμμής. Επειδή οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ βρίσκονται όλοι εξωτερικά του τριγώνου T' και, όπως είπαμε παραπάνω, αποτελούν μία μετάθεση του συνόλου $\{1,2,,\dots,n\}$, έπεται ότι όλοι οι αριθμοί $a_1', a_2', \dots, a_l'$, είναι μεγαλύτεροι από το n. Επομένως

$$b_l' \geq (n+1)+(n+2)+\dots+(n+l) = nl + \frac{l(l+1)}{2} = \frac{l(2n+l+1)}{2} \Rightarrow b_l' \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\left(2n+\frac{n-2}{2}+1\right) = \frac{5n(n-2)}{8},$$

το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ για $n = 2018$, άτοπο.

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι: $\frac{n(n+1)}{2} > \frac{5n(n-2)}{8} \Leftrightarrow n^2 - 14n < 0 \Leftrightarrow n < 14$.

Η παραπάνω εκτίμηση μπορεί να βελτιωθεί λίγο , αν σημειώσουμε ότι $b_\ell' \neq b_n$. τότε έπεται ότι:

$$\frac{n(n+1)}{2} = b_n > b_\ell' \geq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \cdot \frac{1}{2}\left(2n + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil + 1\right),$$

η οποία αληθεύει για $n \leq 7$, αν n περιττός και για $n \leq 12$, αν n άρτιος. Έτσι φαίνεται ότι το μεγαλύτερο αντι-Πασκάλ τρίγωνο του οποίου τα στοιχεία είναι μία μετάθεση των αριθμών από το 1 μέχρι το $1+2+\cdots+n$ έχει 5 γραμμές.

Πρόβλημα 4. Μια θέση είναι οποιοδήποτε σημείο (x, y) στο επίπεδο έτσι ώστε οι αριθμοί x και y να είναι και οι δύο θετικοί ακέραιοι μικρότεροι ή ίσοι του 20.

Αρχικά, κάθε μία από τις 400 θέσεις είναι μη κατειλημμένη. Η Άμυ και ο Μπεν με τη σειρά τοποθετούν πέτρες, με την Άμυ να αρχίζει πρώτη. Όταν είναι η σειρά της, η Άμυ τοποθετεί μια νέα κόκκινη πέτρα σε μια μη κατειλημμένη θέση έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε θέσεων που είναι κατειλημμένες με κόκκινη πέτρα να μην ισούται με $\sqrt{5}$. Στην σειρά του, ο Μπεν τοποθετεί μια νέα μπλε πέτρα σε οποιαδήποτε μη κατειλημμένη θέση. (Μια θέση κατειλημμένη με μια μπλε πέτρα μπορεί να είναι σε οποιαδήποτε απόσταση από οποιαδήποτε άλλη κατειλημμένη θέση.) Σταματούν όταν ένας από τους δύο δεν μπορεί να τοποθετήσει μια πέτρα.

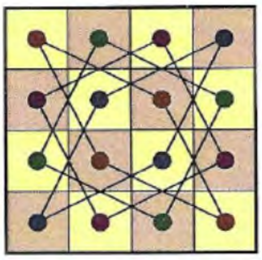
Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του Κ έτσι ώστε η Άμυ να είναι βέβαιη ότι μπορεί να τοποθετήσει τουλάχιστον Κ κόκκινες πέτρες, ανεξάρτητα από τον τρόπο που τοποθετεί ο Μπεν τις μπλε πέτρες του.

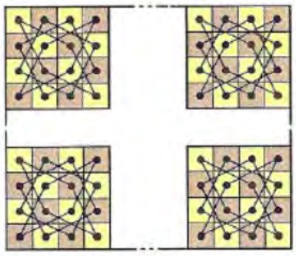
Λύση. Θα αναλύσουμε παρακάτω δύο στρατηγικές. Μία για την Άμυ με την οποία μπορεί να τοποθετήσει τουλάχιστον 100 κόκκινες πέτρες και μία για τον Μπεν η οποία αποκλείει στην Άμυ τη δυνατότητα να τοποθετήσει περισσότερες από 100 κόκκινες πέτρες.

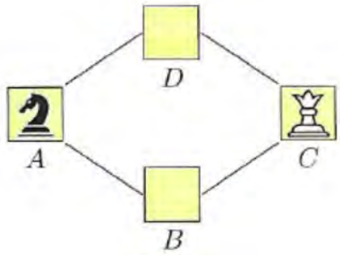
Για τη διευκόλυνση μας μετατρέπουμε τον δεδομένο πίνακα σε πίνακα σκακιστικού τύπου με εναλλάξ τετράγωνα μαύρα και λευκά αρχίζοντας με μαύρο τετράγωνο στη θέση (1, 1).

Μία στρατηγική για την Άμυ: *Τοποθέτηση κόκκινων πετρών μόνο στα μαύρα τετράγωνα μέχρι που να καταληφθούν με πέτρες όλα.*

Η Άμυ τοποθετεί τις κόκκινες πέτρες της σε μαύρα τετράγωνα όσο αυτό είναι δυνατόν. Δύο πέτρες που είναι σε μαύρα τετράγωνα ποτέ δεν απέχουν απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. Ο αριθμός των μαύρων τετραγώνων είναι $\frac{20^2}{2} = 200$. Επειδή οι δύο παίκτες τοποθετούν με σειρά από μία πέτρα, ο ένας μετά τον άλλον, είναι σίγουρο ότι η ΄Αμυ θα προλάβει να τοποθετήσει τουλάχιστον 100 κόκκινες πέτρες.


Σχήμα 4


Σχήμα 5



Σχήμα 6

Μία στρατηγική για τον Μπεν: *Ομαδοποίηση των τετραγώνων σε κύκλους μήκους 4 και μετά από κάθε τοποθέτηση της Άμυ, τοποθέτηση μπλε πέτρας στο αντίθετο τετράγωνο του ιδίου κύκλου.*

Θεωρούμε τα τετράγωνα του πίνακα ως κορυφές ενός γραφήματος. Έστω ότι δύο τετράγωνα συνδέονται, αν απέχουν απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. Σημειώνουμε ότι σε έναν πίνακα 4×4 τα τετράγωνα μπορούν να ομαδοποιηθούν σε κύκλους μήκους 4, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Υποδιαιρούμε τον αρχικό πίνακα σε υποπίνακες 4×4 και σε κάθε υποπίνακα σχηματίζουμε την ομαδοποίηση του σχήματος 4. Με αυτό τον τρόπο τακτοποιούνται τα 400 τετράγωνα του αρχικού πίνακα σε 100 κύκλους μήκους 4 (σχήμα 5). Η στρατηγική του Μπεν είναι ως εξής:

Όταν η Άμυ τοποθετήσει μία κόκκινη πέτρα σε κάποιο τετράγωνο A το οποίο είναι κομμάτι κάποιου κύκλου $A\to B\to C\to D\to A$, τότε ο Μπεν τοποθετεί μία μπλε πέτρα στο αντίθετο τετράγωνο C αυτού του κύκλου (σχήμα 6). Στη συνέχεια η Άμυ δεν μπορεί να τοποθετήσει μία κόκκινη πέτρα στα τετράγωνα *A, C* γιατί αυτά είναι ήδη κατειλημμένα, ούτε και στα τετράγωνα *B, D,* γιατί αυτά απέχουν από το Α απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. Επομένως η Άμυ έχει τη δυνατότητα να τοποθετήσει το πολύ μία κόκκινη πέτρα σε κάθε κύκλο και συνολικά το πολύ 100 κόκκινες πέτρες.

Πρόβλημα 5. Έστω $a_1, a_2, \ldots$ μια άπειρη ακολουθία θετικών ακεραίων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος $N>1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n\geq N$, ο αριθμός

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος ώστε $a_m = a_{m+1}$, για κάθε $m\geq M$.

Λύση. Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $s_n := \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\in\mathbb{Z}$, για κάθε $n\geq N$. Για την εύρεση κάποιας σχέσης μεταξύ μερικών όρων της ακολουθίας $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ θεωρούμε τη διαφορά

$$s_{n+1}-s_n=\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)-\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\right)=\frac{a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}\in\mathbb{Z},$$

Για την απλοποίηση των κλασμάτων που προκύπτουν, θεωρούμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των τριών εμπλεκόμενων όρων, έστω $\delta_n=(a_1,a_n,a_{n+1}), n\geq N$. Τότε θα είναι $\left(\frac{a_1}{\delta_n},\frac{a_n}{\delta_n},\frac{a_{n+1}}{\delta_n}\right)=1, n\geq N$, και η διαφορά $S:=s_{n+1}-s_n$ γίνεται:

$$S=\frac{\frac{a_n}{\delta_n}}{\frac{a_{n+1}}{\delta_n}}+\frac{\frac{a_{n+1}}{\delta_n}-\frac{a_n}{\delta_n}}{\frac{a_1}{\delta_n}}=\frac{a'_n}{a'_{n+1}}+\frac{a'_{n+1}-a'_n}{a'_1}\in\mathbb{Z}, \qquad (*)$$

για κάθε $n\geq N$, όπου $a'_1=\frac{a_1}{\delta_n},\ a'_n=\frac{a_n}{\delta_n},\ a'_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{\delta_n}\in\mathbb{Z}$ και $(a'_1,a'_n,a'_{n+1})=1$.

Για τους θετικούς ακέραιους a'_1, a'_n, a'_{n+1} που ικανοποιούν τη σχέση (*), ισχύουν οι εξής προτάσεις:

(1) Αν $(a'_1,a'_{n+1})=1$, τότε $a'_{n+1}\mid a'_n$. Προκύπτει εύκολα, αν γράψουμε τη σχέση (*) στη μορφή:

$$a'_1a'_n=a'_{n+1}\left(Sa'_1+a'_n-a'_{n+1}\right),\ \text{οπότε}\ a'_{n+1}\mid a'_1a'_n \overset{(a'_1,a'_{n+1})=1}{\Longrightarrow} a'_{n+1}\mid a'_n.$$

(2) Αν $(a'_1,a'_n,a'_{n+1})=1$, τότε $(a'_1,a'_n)=1$.

Αυτό προκύπτει πάλι από τη σχέση (*), αν γραφεί στη μορφή: $a'^2_{n+1} - a'_n a'_{n+1} = a'_1\left(Sa'_{n+1} - a'_n\right)$, οπότε $a'_1 \left| a'^2_{n+1} - a'_n a'_{n+1} \right.$. Αν είναι $d' = \left(a'_1, a'_n\right)$, τότε $d' \left| a'^2_{n+1} \right.$, οπότε, αφού $\left(d', a'_{n+1}\right) = 1,$ έπεται ότι

$$d' \left| a'_{n+1} \Rightarrow d' \right| \left(a'_1, a'_n, a'_{n+1}\right) = 1 \Rightarrow d' = 1.$$

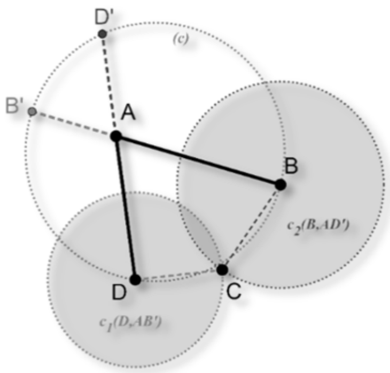
Από τη σχέση (*) και την $\left(a'_1, a'_n, a'_{n+1}\right) = 1,$ λόγω της (1) έπεται ότι: $\left(a'_1, a'_n\right) = 1$. Αν θέσουμε $d_n = \left(a_1, a_n\right)$, τότε $d_n = \delta_n \cdot \left(\frac{a_1}{\delta_n}, \frac{a_n}{\delta_n}\right) = \delta_n \cdot \left(a'_1, a'_n\right) = \delta_n \cdot 1 = \delta_n,$ οπότε $d_n \left| a_{n+1} \Rightarrow d_n \right| d_{n+1} = \left(a_1, a_{n+1}\right)$.

Επομένως για κάποιο $n \geq N$ οι θετικοί ακέραιοι d_n σχηματίζουν μία όχι φθίνουσα ακολουθία θετικών ακέραιων που δεν υπερβαίνουν τον αριθμό a_1. Επομένως, θα υπάρχει θετικός ακέραιος M' έτσι ώστε $d_n = d$, για κάθε $n \geq M'$.

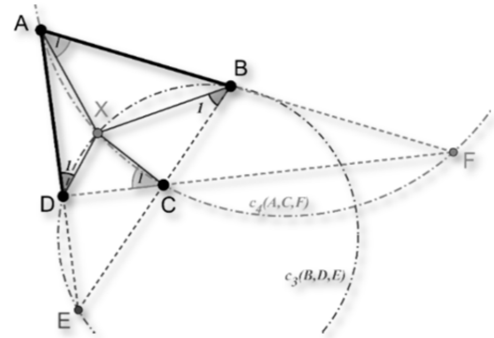
Επειδή $\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_{n+1}}{d}\right) = 1,$ από την (1) έπεται ότι $\frac{a_{n+1}}{d} \left| \frac{a_n}{d} \right.$, οπότε $a_{n+1} \leq a_n$, για κάθε $n \geq M'$. Επομένως οι ακέραιοι a_n σχηματίζουν, για $n \geq M'$, μία φθίνουσα ακολουθία θετικών ακέραιων, οπότε θα υπάρχει θετικός ακέραιος M τέτοιος ώστε $a_m = a_{m+1}$, για κάθε $m \geq M$.

Πρόβλημα 6. Ένα κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ ικανοποιεί τη σχέση $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Σημείο X βρίσκεται στο εσωτερικό του $ABCD$ έτσι ώστε $\angle XAB = \angle XCD$ και $\angle XBC = \angle XDA$.
Να αποδείξετε ότι: $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

Λύση. Πρώτα θα κατασκευάσουμε ένα τετράπλευρο με τις παραπάνω ιδιότητες.
Θεωρούμε (Σχήμα 7) τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, D (που θα αποτελέσουν κορυφές του υπό κατασκευή τετράπλευρου $ABCD$) και ένα κύκλο (c) που διέρχεται από τα σημεία B, D (έτσι ώστε το σημείο A να βρίσκεται στο εσωτερικό του). Οι ευθείες AB και AD τέμνουν το κύκλο (c) (για δεύτερη φορά) στα σημεία B' και D' αντίστοιχα. Τότε από τη δύναμη του σημείου A ως προς το κύκλο (c), έχουμε: $AB \cdot AB' = AD \cdot AD'$.
Στη συνέχεια θεωρούμε τους κύκλους $c_1(D, AB')$ και $c_2(B, AD')$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο C. Τότε θα ισχύουν οι ισότητες $CD = AB'$ και $BC = AD'$.
Άρα για το τετράπλευρο $ABCD$ έχουμε: $AB \cdot CD = AB \cdot AB' = AD \cdot AD' = BC \cdot DA$.
Από την ισότητα $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ έχουμε: $\boldsymbol{\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = l}$.



Σχήμα 7



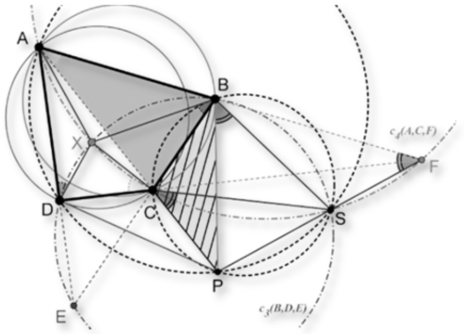
Σχήμα 8

Έστω (Σχήμα 8) ότι οι ευθείες AD, BC τέμνονται στο σημείο E και οι ευθείες AB, CD στο σημείο F. Αν $c_3(B, D, E)$ είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BDE και $c_4(A, C, F)$ είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ACF, τότε το σημείο τομής τους X είναι το σημείο για το οποίο ισχύουν οι ισότητες γωνιών: $\boldsymbol{\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1}$ (διότι η $\hat{C}_1$ είναι εξωτερική και η $\hat{A}_1$ η αντίστοιχη εσωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AXCF$) και $\boldsymbol{\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1}$ (διότι η $\widehat{D}_1$ είναι εξωτερική και η $\widehat{B}_1$ η αντίστοιχη εσωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $BXDE$). Θεωρούμε (Σχήμα 7) την εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC στο σημείο B και έστω P το σημείο τομής της με την ευθεία AC. Από την ομοιότητα των τριγώνων PAB και PBC έχουμε: $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{AB}{BC}=m.$

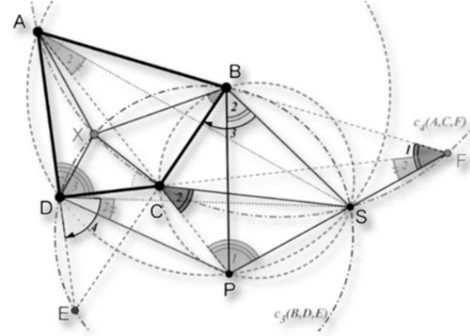
Θεωρούμε την εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ACD στο σημείο D και έστω P' το σημείο τομής της με την ευθεία AC. Από την ομοιότητα των τριγώνων $P'AD$ και $P'DC$ έχουμε:

$$\frac{P'A}{P'D}=\frac{P'D}{P'C}=\frac{AD}{CD}=m.$$

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες συμπεραίνουμε ότι: $P\equiv P'$ και κατά συνέπεια $PB^2=PD^2=PA\cdot PC$



Σχήμα 9



Σχήμα 10

Αν τώρα S είναι το δεύτερο κοινό σημείο του κύκλου c_4 με την PF, τότε θα ισχύει:

$$PS\cdot PF=PA\cdot PC=PB^2=PD^2.$$

Τα τρίγωνα PBS και PFB (Σχήμα 10) είναι όμοια μεταξύ τους, διότι έχουν μία γωνία κοινή (την $\widehat{BPS}$) και τις πλευρές που την περιέχουν ανάλογες, $\left(\text{από την ισότητα } PS\cdot PF=PB^2 \text{ έχουμε:} \frac{PB}{PS}=\frac{PF}{PB}\right)$.

Άρα $\hat{F}_1=\hat{B}_2$ και επειδή $\hat{F}_1=\hat{C}_2$ (από το εγγεγραμμένο $ACSF$), καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{B}_2=\hat{C}_2$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $BCPS$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\boldsymbol{BCPS}$ έχουμε $\hat{P}_1+\hat{B}_3=180^{\circ}$, όπου $\hat{P}_1=C\hat{P}S=A\hat{P}F$, $\hat{B}_3=C\hat{B}S$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $\boldsymbol{ADPS}$ έχουμε $\hat{P}_1=\hat{D}_3$, όπου $\hat{D}_3=A\hat{D}S$. Οι γωνίες $\hat{D}_3$ και $\hat{D}_4$ είναι παραπληρωματικές, οπότε $\hat{D}_3+\hat{D}_4=180^{\circ}$, όπου $\hat{D}_4=E\hat{D}S$.

Από τις τρεις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε ότι $\hat{B}_3=\hat{D}_4$, οπότε το τετράπλευρο $\boldsymbol{EDBS}$ είναι εγγράψιμο (δηλ. το σημείο S ανήκει και στον κύκλο c_3). Χρησιμοποιώντας όλα τα εγγράψιμα τετράπλευρα και τις ιδιότητες που βρήκαμε καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις γωνιών:

$$\widehat{\boldsymbol{AXD}}=360^{\circ}-\widehat{AXS}-\widehat{SXD}=180^{\circ}-\widehat{AXS}+180^{\circ}-\widehat{SXD}=$$

$$\overset{AXSF}{=}\widehat{AFS}+180^{\circ}-\widehat{SXD}\overset{DXBS}{=}\widehat{AFS}+180^{\circ}-\widehat{SBD}=\widehat{AFS}+\widehat{ABD}+\widehat{SBF}=\widehat{\boldsymbol{PBS}}+\widehat{\boldsymbol{ABD}}+\widehat{\boldsymbol{SBF}}.$$

$$\widehat{\boldsymbol{CXB}}=\widehat{CXS}+\widehat{SXB}=\widehat{CFS}+\widehat{SDB}=\widehat{PDS}+\widehat{SDB}=\widehat{PDB}=\widehat{\boldsymbol{DPB}}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις έχουμε: $\widehat{\boldsymbol{AXD}}+\widehat{\boldsymbol{CXB}}=\boldsymbol{180^{\circ}}$.

35η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Η 35η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα διεξήχθη στο Βελιγράδι της Σερβίας από 7 μέχρι 12 Μαΐου 2018. Συμμετείχαν οι 11 χώρες της Νοτιοανατολικής Ευρώπης και άλλες 7 φιλοξενούμενες χώρες από Ευρώπη και Ασία. Οι Έλληνες μαθητές κατέκτησαν **3 αργυρά, 1 χάλκινο μετάλλιο και μία εύφημη μνεία**, ως εξής:

Λώλας Δημήτριος	**Εκπαιδευτήρια Αθηνά**	**Αργυρό μετάλλιο**
Τσιάμης Ραφαήλ	**Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη**	**Αργυρό μετάλλιο**
Μελάς Δημήτριος	**Σχολή Μωραΐτη**	**Αργυρό μετάλλιο**
Μιχαλάκης Βάιος-Ραφαήλ	**Εκπαιδευτήρια Νέα Παιδεία, Σ. Ντάγκας**	**Χάλκινο μετάλλιο**

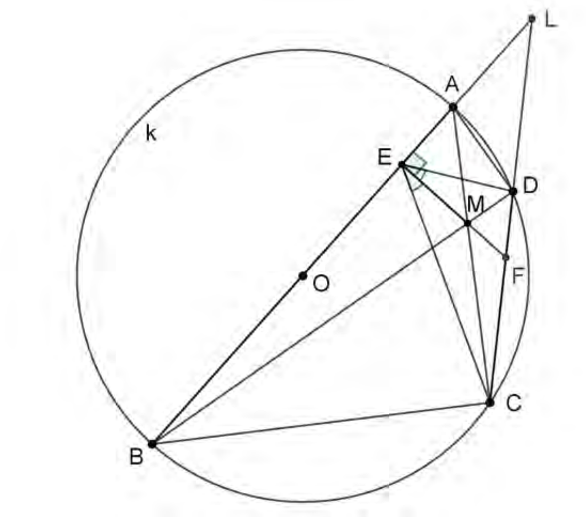
Προδρομίδης Κυπριανός-Ιάσων	**Πειραματικό ΓΕΛ Αναβρύτων**	**Εύφημη μνεία**
Παπασωτηρίου Σωτήριος	**Κολλέγιο Αθηνών**	**Συμμετοχή**

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο διδάκτωρ μαθηματικός **Σιλουανός Μπραζιτίκος** και υπαρχηγός ο μαθηματικός **Μιχάλης Σαράντης**.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1: Θεωρούμε τετράπλευρο ABCD εγγεγραμμένο σε κύκλο k με $AB > CD$ και όπου η AB δεν είναι παράλληλη στην CD. Οι διαγώνιοι AC και BD τέμνονται στο σημείο M και το σημείο E είναι το ίχνος της καθέτου από το M στο τμήμα AB. Αν η EM είναι διχοτόμος της γωνίας CED, να αποδείξετε ότι η AB είναι διάμετρος του κύκλου k.

Λύση.



Σχήμα 1

Έστω O είναι το κέντρο του κύκλου. Έστω πως η CD τέμνει την AB στο σημείο L και η EM τέμνει την CD στο F. Επειδή $\widehat{LEF} = 90^o$ και η EF διχοτομεί την $\widehat{CED}$, έχουμε πως η τετράδα (L, F, D, C) είναι αρμονική. Άρα το F ανήκει στην πολική του L. Ισχύει ότι σε κάθε εγγράψιμο τετράπλευρο το σημείο τομής των διαγωνίων του βρίσκεται στην πολική του σημείου τομής των απέναντι πλευρών. Άρα και το M ανήκει στην πολική του L. Με άλλα λόγια η πολική του L είναι η MF, δηλαδή η ME. Προκύπτει λοιπόν ότι $LO \perp ME$. Όμως $LA \perp ME$, άρα το O βρίσκεται πάνω στην AB και το ζητούμενο έπεται.

Πρόβλημα 2: Θεωρούμε ένα θετικό ρητό q. Δύο μυρμήγκια βρίσκονται αρχικά στο ίδιο σημείο X του επιπέδου. Στο n-οστό λεπτό ($n = 1, 2, \ldots$) κάθε ένα από αυτά επιλέγει αν θα κινηθεί βόρεια, νότια, ανατολικά ή δυτικά και μετακινείται q^n μέτρα προς αυτήν την κατεύθυνση. Αν μετά από ακέραιο αριθμό λεπτών τα δύο μυρμήγκια βρεθούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου (όχι απαραίτητα στο X), χωρίς να έχουν ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του q.

Λύση. Γράφουμε w_k, z_k για τους μιγαδικούς αριθμούς που δηλώνουν την μετακίνηση των μυρμηγκιών στο k-οστό λεπτό. Τότε, $w_k - z_k = a_k q^k$ για κάποιο $a_k \in \{0, \pm 2, \pm 2i, 1 \pm i, -1 \pm i\}$, καθώς ο πολλαπλασιασμός με τον μιγαδικό i είναι στροφή κατά 90 μοίρες. Επομένως, αν τα μυρμήγκια συναντηθούν στο n-οστό λεπτό θα έχουμε, $0 = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k$.

Διαιρώντας με $(1+i)$ παίρνουμε ένα πολυώνυμο $P(x)$ με συντελεστές στο σύνολο $S = \{0, \pm 1, \pm i, 1 \pm i, -1 \pm i\}$ ώστε $P(q) = 0$. Το πολυώνυμο δεν είναι το μηδενικό και από το θεώρημα ρητών ριζών στο $\mathbb{Z}[i]$, πρέπει $q = a/b$ όπου τα a, b διαιρούν στοιχεία του S. Όμως το S περιέχει (εκτός από το 0) μόνο μονάδες του $\mathbb{Z}[i]$. Επειδή ο q είναι θετικός (πραγματικός) ρητός πρέπει $q = 1$.

Πρόβλημα 3: **Ο Σιλουανός και ο Δημήτρης παίζουν το ακόλουθο παιγνίδι έχοντας αρχικά δύο μη κενές στοίβες νομισμάτων: Εναλλάξ, με τον Σιλουανό να ξεκινάει πρώτος, κάθε παίκτης διαλέγει μία στοίβα με άρτιο αριθμό νομισμάτων και μετακινεί τα μισά νομίσματα αυτής της στοίβας στην άλλη. Το παιγνίδι τερματίζεται όταν κάποιος από τους παίκτες δεν μπορεί να κάνει κίνηση. Σε αυτήν την περίπτωση κερδίζει ο άλλος παίκτης. Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (a,b), ώστε αν αρχικά οι δύο στοίβες έχουν από a και b νομίσματα αντίστοιχα, τότε ο Δημήτρης έχει στρατηγική νίκης.**

Λύση. Με $v_2(n)$ συμβολίζουμε το μεγαλύτερο μη αρνητικό ακέραιο r ώστε $2^r | n$.

Θα λέμε ότι η θέση (a,b) (δηλαδή όταν οι στοίβες έχουν a και b νομίσματα) θα λέγεται k-τυχερή αν $v_2(a)=v_2(b)=k$ για κάποιο $k\ge 0$, και k-άτυχη αν $\min\{v_2(a),v_2(b)\}=k<\max\{v_2(a),v_2(b)\}$.

Θα αποδείξουμε ότι ο Δημήτρης έχει στρατηγική νίκης αν και μόνο αν η αρχική θέση είναι k-τυχερή για κάποιο άρτιο k.

- Αν είμαστε σε 0-τυχερή θέση, τότε ο παίκτης που έχει σειρά, δεν έχει κίνηση επομένως χάνει.
- Αν έχουμε μία k-τυχερή θέση (a,b) με $k\ge 1$, τότε ο παίκτης που έχει σειρά θα την μετασχηματίσει σε μία από τις θέσεις $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$ και $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, οι οποίες είναι και οι δύο $(k-1)$-τυχερές, επειδή $v_2(a+\frac{1}{2}b)=v_2(\frac{1}{2}b)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$.

  Επομένως αν η θέση εκκίνησης είναι k-τυχερή, μετά k κινήσεις θα φτάσουμε σε μία 0-τυχερή θέση, άρα ο Δημήτρης κερδίζει αν και μόνο αν k άρτιος.
- Αν τώρα έχουμε μια k-άτυχη θέση (a,b) με k περιττό και $v_2(a)=k<v_2(b)=\ell$, ο Σιλουανός μπορεί να κάνει το μετασχηματισμό $(\frac{1}{2}a,b+\frac{1}{2}a)$. Καθώς $v_2(\frac{1}{2}a)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=k-1$, αυτή η θέση είναι $(k-1)$-τυχερή με $2 | k-1$, άρα ο Σιλουανός κερδίζει.
- Αν έχουμε μια k-άτυχη θέση (a,b) με k άρτιο και $v_2(a)=k<v_2(b)=\ell$, τότε ο Σιλουανός δεν πρέπει να παίξει στη θέση $(\frac{1}{2}a,b+\frac{1}{2}a)$, επειδή αυτή είναι $(k-1)$-τυχερή και θα οδηγήσει σε νίκη του Δημήτρη. Άρα παίζει στη θέση $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$.

  Αυτή η θέση είναι επίσης k-άτυχη. Πράγματι, αν $\ell>k+1$, τότε $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=\ell-1$, ενώ αν $\ell=k+1$, τότε $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$. Επομένως μία k-άτυχη θέση είναι νικητήρια για τον Σιλουανό αν k περιττός, και ισοπαλία αν k άρτιος.

Πρόβλημα 4: **Να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς p και q ώστε ο $3p^{q-1}+1$ να διαιρεί τον 11^p+17^p.**

Λύση. Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση $q\ne 2$. Τότε, έστω r ένας περιττός πρώτος διαιρέτης του $3p^{q-1}+1$. Πάντα υπάρχει τέτοιος r, καθώς αν $p\ne 2$, ο $3p^{q-1}+1$ είναι $\equiv 4 \pmod 8$, και αφού $3p^{q-1}+1>4$, θα έχει αναγκαστικά έναν πρώτο (περιττό) διαιρέτη. Αν τώρα $p=2$, ο $3\cdot 2^{q-1}+1$ είναι περιττός, και προφανώς έχει έναν πρώτο περιττό διαιρέτη.

Άρα, $r\,|\,3p^{q-1}+1\,|\,11^p+17^p \Rightarrow (\frac{11}{17})^{2p}\equiv 1 \pmod r$. Έστω η τάξη του $\frac{11}{17} \pmod r$ να είναι το x.

Τότε, από τον ορισμό της τάξης θα έχουμε ότι $x\,|\,2p,\ x\,|\,r-1$, οπότε $x\in\{1,2,p,2p\}$.

Αν $x\in\{1,p\}$, τότε αν $x=1$, είναι $(\frac{11}{17})^1\equiv 1 \pmod r \Rightarrow r\,|\,17-11=6 \Rightarrow r\in\{2,3\}$, άτοπο, αφού ο r είναι περιττός, και $r \nmid 3p^{q-1}+1\equiv 1 \pmod 3$. Αν επίσης $x=p$, έχουμε ομοίως άτοπο. Άρα, $x=2$ ή

$x=2p$. Αν $x=2$, τότε $(\frac{11}{17})^2 \equiv 1 \pmod r \Rightarrow r \mid 168 \Rightarrow r=7$, αφού $r \neq 2,3$.

Αυτό σημαίνει, ότι $3p^{q-1}+1=4^m 7^n$ (αφού $3p^{q-1}+1=3p^{2\ell}+1=3(p^2)^\ell+1\equiv 0 \pmod 4$). Από το Lift the Exponent, είναι $7^2 \,||\, 11^n+17^n$, επομένως $n\leqslant 2$, και όμοια $m\leqslant 1$. Παίρνοντας τις περιπτώσεις, έχουμε τη λύση $(p,q)=(3,3)$.

Αν $x=2p$, το $r\equiv 1 \pmod{2p}$, και άρα $3p^{q-1}+1=4^m 7^n s$, με $(s,14)=1, s\equiv 1 \pmod p$. Όπως πριν, $m\leqslant 2$, $n\leqslant 1$, και άρα παίρνοντας $\pmod p$, έχουμε $3,27\equiv 0 \pmod p \Rightarrow (p,q)=(3,3)$.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση $q=2$. Τότε, $3p+1 \mid 17^p+11^p$. Αν ο $3p+1$ έχει έναν περιττό πρώτο διαιρέτη, έστω r, εφαρμόζουμε την διαδικασία της προηγούμενης λύσης. Αν όχι, τότε $3p+1=2^d$, και αφού $(-1)^d\equiv 2^d=3p+1\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow d=2t$.

Έτσι, $(2^t-1)(2^t+1)=3p$. Αφού $(2^t-1,2^t+1)=1$, είναι $2^t-1=1, 2^t+1=3p$ ή $2^t-1=3, 2^t+1=p$. Και οι δύο περιπτώσεις δίνουν εύκολα άτοπο. (η πρώτη δίνει $t=1\Rightarrow p=1$, άτοπο, και η δεύτερη $p=5$, που δεν επαληθεύει). Τελικά, μοναδική λύση η $(p,q)=(3,3)$.

Προκριματικός διαγωνισμός 2018

1 Απριλίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Ενδεικτικές λύσεις

Πρόβλημα 1: Αν x,y,z είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x+y+z=9xyz$, να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2zx+2}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+2}}\geq 1$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

Λύση: Από την ανισότητα $2yz\leq y^2+z^2$ έχουμε ότι $x^2+2yz+2\leq x^2+y^2+z^2+2$, επομένως

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}\geq\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}$$

Δουλεύοντας όμοια και για τα υπόλοιπα κλάσματα, έχουμε ότι

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}+\frac{y}{\sqrt{y^2+2zx+2}}+\frac{z}{\sqrt{z^2+2xy+2}}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}\geq 1 \Leftrightarrow (x+y+z)^2\geq x^2+y^2+z^2+2 \Leftrightarrow xy+yz+zx\geq 1.$$

Όμως, από τη συνθήκη έχουμε ότι $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=9$, ενώ από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)\geq 9$, οπότε $xy+yz+zx\geq 1$ που είναι το ζητούμενο.

2^{ος} τρόπος: Από την ανισότητα Holder έχουμε:

$$\left(\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{x^2+2yz+2}}\right)\left(\sum_{cyc}x(x^2+2yz+2)\right)\geq (x+y+z)^3.$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{(x+y+z)^3}{\sum_{cyc}x(x^2+2yz+2)}\geq 1 \Leftrightarrow (x+y+z)^3\geq x^3+y^3+z^3+6xyz+2(x+y+z)\Leftrightarrow$$

$$x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\geq x^3+y^3+z^3+6xyz+2(9xyz)\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$$

τελευταία όμως ισχύει, αφού προκύπτει με πολλαπλασιασμό των

$$x+y\geq 2\sqrt{xy},\quad y+z\geq 2\sqrt{yz},\quad z+x\geq 2\sqrt{zx}.$$

Πρόβλημα 2: Θεωρούμε τρίγωνο ABC, με $AB<AC$, εγγεγραμμένο σε κύκλο c κέντρου O. Ονομάζουμε G το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC και D,E,F τα ίχνη των υψών του από τις κορυφές A,B,C, αντίστοιχα. Αν οι ημιευθείες AG,GD τέμνουν τον c στα M,N αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία F,E,M,N είναι ομοκυκλικά.

Λύση: Ονομάζουμε K το μέσον της BC και P την δεύτερη τομή της GD με τον c. Τότε επειδή ο c και ο κύκλος Euler είναι ομοιόθετοι με κέντρο G και λόγο -2, θα έχουμε ότι

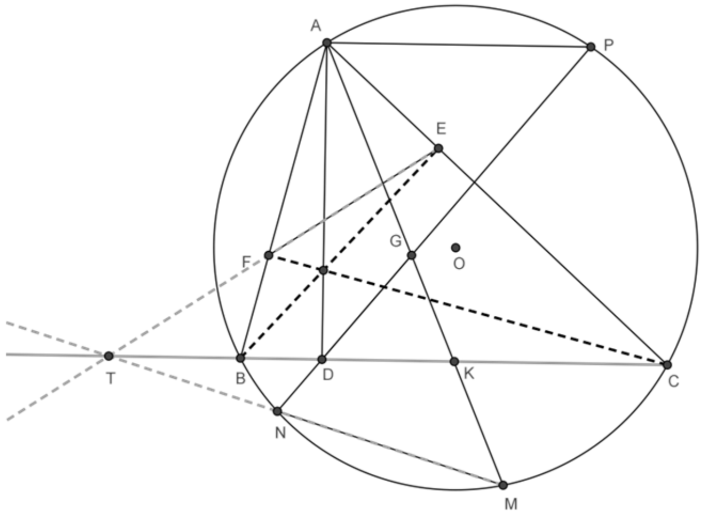
$$\frac{GP}{GD}=\frac{GA}{GK}=2\Rightarrow GP=2GD.$$

Από τη δύναμη σημείου ως προς κύκλο έχουμε $GM\cdot GA=GN\cdot GP\Rightarrow$

$$\Rightarrow GM\cdot(2GK)=GN\cdot(2GD)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow GM\cdot GK=GN\cdot GD,$$

οπότε το τετράπλευρο $DKMN$ είναι εγγράψιμο, έστω σε κύκλο c_1. Επιπλέον τα σημεία F,D,K,E ανήκουν σε κύκλο (κύκλος Euler), έστω c_2.



Σχήμα 1

Επομένως οι ευθείες FE,DK,MN συντρέχουν στο ριζικό κέντρο, έστω T,των κύκλων c,c_1,c_2. Τότε όμως $TF\cdot TE\overset{\text{δύναμη στον } c_2}{=}TD\cdot TK\overset{\text{δύναμη στον } c_1}{=}TN\cdot TM$, επομένως τα σημεία F,E,M,N είναι ομοκυκλικά.

Πρόβλημα 3: Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$, όπου $\mathbb{Z}_{>0}$ είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων, που είναι τέτοιες ώστε ο αριθμός $xf(x)+f^2(y)+2xf(y)$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, για όλους τους θετικούς ακεραίους x,y.

Λύση: Παίρνουμε έναν πρώτο αριθμό p. Τότε για $x=y=p$ η συνθήκη λέει ότι ο $f^2(p)+3pf(p)$ είναι τέλειο τετράγωνο. Τότε, $f^2(p)+3pf(p)=k^2$ για κάποιο θετικό ακέραιο k. Συμπληρώνοντας το τετράγωνο έχουμε : $(2f(p)+3p)^2-9p^2=4k^2$, ή $(2f(p)+3p-2k)(2f(p)+3p+2k)=9p^2$. (1)

Αφού $2f(p)+3p+3k>3p$, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{cases}2f(p)+3p+2k=9p\\ 2f(p)+3p-2k=p\end{cases}\quad ή\quad \begin{cases}2f(p)+3p+2k=p^2\\ 2f(p)+3p-2k=9\end{cases}$$

$$\begin{cases}2f(p)+3p+2k=3p^2\\ 2f(p)+3p-2k=3\end{cases}\quad ή\quad \begin{cases}2f(p)+3p+2k=9p^2\\ 2f(p)+3p-2k=1\end{cases}$$

Λύνοντας τα συστήματα ως προς $f(p)$ παίρνουμε

$$f(p)=p\quad ή\quad f(p)=\left(\frac{p-3}{2}\right)^2\quad ή\quad f(p)=\frac{3p^2-6p+3}{4}\quad ή\quad f(p)=\left(\frac{3p-1}{2}\right)^2.$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι το $f(p)$ γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε καθώς το p μεγαλώνει.

Σταθεροποιούμε τώρα έναν ακέραιο x. Από τη συνθήκη ο $(f(y)+x)^2+xf(x)-x^2$ είναι τέλειο τετράγωνο για κάθε y. Επιλέγουμε τον y πρώτο , έστω $y=q$, και τότε σύμφωνα με τα παραπάνω ο $f(q)$ μπορεί να γίνει όσο μεγάλο θέλουμε. Επιλέγουμε λοιπόν το q ώστε $|xf(x)-x^2|\leq 2(x+f(q))$. Τότε $(f(q)+x-1)^2<(f(q)+x)^2+xf(x)-x^2<(f(q)+x+1)^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο $(f(q)+x)^2+xf(x)-x^2$ είναι τέλειο τετράγωνο αλλά είναι ανάμεσα σε δύο τέλεια τετράγωνα που απέχουν κατά 2. Η μόνη περίπτωση είναι $(f(q)+x)^2=(f(q)+x)^2+xf(x)-x^2 \Leftrightarrow xf(x)-x^2=0 \Leftrightarrow f(x)=x$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε έναν πρώτο αριθμό $p\geq 2$. Ο Άγγελος και ο Βαγγέλης παίζουν εναλλάξ το ακόλουθο παιχνίδι: Στον πίνακα υπάρχουν p άδεια κουτάκια στη σειρά, το ένα δίπλα στο άλλο, και σε κάθε κίνηση, ο παίκτης που έχει σειρά, βάζει σε ένα από τα κουτάκια ένα ψηφίο. Ο Άγγελος παίζει πρώτος και το παιχνίδι τελειώνει όταν γεμίσουν όλα τα κουτάκια και έτσι προκύπτει ένας $p-$ψήφιος αριθμός Μ (ο οποίος επιτρέπουμε να έχει και μηδενικά στην αρχή). Σκοπός του Άγγελου είναι ο αριθμός Μ να διαιρείται με το p, ενώ σκοπός του Βαγγέλη είναι να το αποτρέψει. Να αποδείξετε ότι ο Άγγελος έχει στρατηγική νίκης.

Λύση. Γράφουμε τον αριθμό Μ στη δεκαδική αναπαράσταση $\mathrm{M}=a_0+a_1p+\ldots+a_{p-1}10^{p-1}$,

όπου a_i είναι η τιμή που πρόκειται να πάρει το i κουτάκι (από δεξιά προς τα αριστερά).

Αν $p=2$ ή $p=5$, ο Άγγελος στην πρώτη κίνηση βάζει το ψηφίο 0 στο τελευταίο κουτάκι και έτσι κερδίζει ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες κινήσεις. Αν τώρα $p\neq 2,5$, από το θεώρημα Fermat έχουμε

$$p\,|\,10^{p-1}-1 \Leftrightarrow p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}})^2-1 \Leftrightarrow p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}}-1)(10^{\frac{p-1}{2}}+1)$$

οπότε $p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}}-1)$ ή $p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}}+1)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν $p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}}+1)$. Τότε στην πρώτη κίνηση ο Άγγελος βάζει 0 στο κουτάκι a_{p-1}. Στη συνέχεια κάθε φορά που ο Βαγγέλης βάζει το ψηφίο a_i στη θέση i, ο Άγγελος θα παίζει συμμετρικά, (δηλαδή είτε στη θέση $\mathrm{j}=\mathrm{i}+\frac{\mathrm{p}-1}{2}$ αν $0\leq i\leq \frac{p-3}{2}$, είτε στη θέση $j=i-\frac{p-1}{2}$ αν $\frac{p-1}{2}\leq i\leq p-2$) βάζοντας το ίδιο ψηφίο a_i στη θέση j. Για παράδειγμα, αν $p=7$, ο Άγγελος έχει κάνει την πρώτη κίνησή του με 0, και ο Βαγγέλης παίζει το ψηφίο 4 στη θέση 1, $\boxed{0}\ \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\|\,\boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}$

τότε ο αριθμός είναι χωρισμένος σε δύο τριάδες και ο Άγγελος θα παίξει στη συμμετρική ως προς την άλλη τριάδα, δηλαδή στη θέση 4, το ψηφίο 4. $\boxed{0}\ \boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}\,\|\,\boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}$

και τότε $7\,|\,4\cdot 10^4+4\cdot 10=4\cdot 10\cdot(10^3+1)$.

Γενικά θα ισχύει $10^j\equiv -10^i(\bmod p)\Rightarrow a_j10^j=a_i10^j\equiv -a_i10^i(\bmod p)$

οπότε $p\,|\,a_j10^j+a_i10^i$. Παρατηρούμε τέλος ότι μετά την πρώτη κίνηση του Άγγελου μένουν $p-1$ θέσεις που πρέπει να συμπληρωθούν, δηλαδή άρτιος αριθμός. Ζευγαρώνοντας λοιπόν όπως παραπάνω, ο Άγγελος καταφέρνει να κάνει τον αριθμό να διαιρείται από p.

(β) Αν $p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}}-1)$. Τότε πάλι στην πρώτη κίνηση ο Άγγελος βάζει 0 στο κουτάκι a_{p-1}. Στη συνέχεια κάθε φορά που ο Βαγγέλης βάζει το ψηφίο a_i στη θέση i, ο Άγγελος θα παίζει συμμετρικά ως προς το κέντρο του αριθμού, (δηλαδή είτε στη θέση $j=i+\frac{p-1}{2}$ αν $0\leq i\leq \frac{p-3}{2}$, είτε στη θέση $j=i-\frac{p-1}{2}$ αν $\frac{p-1}{2}\leq i\leq p-2$) βάζοντας όμως αυτή τη φορά το ψηφίο $9-a_i$ στη θέση j.

Για παράδειγμα, αν $p=13$, ο Άγγελος έχει κάνει την πρώτη κίνησή του με 0, και ο Βαγγέλης παίζει το ψηφίο 4 στη θέση 2. $\boxed{0}\ \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}\,\boxed{}$

τότε ο αριθμός χωρίζεται σε δύο εξάδες και ο Άγγελος θα παίξει στη συμμετρική ως προς το κέντρο, δηλαδή στη θέση 8, το ψηφίο 9-4=5.

$\boxed{0}\ \boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{5}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\|\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{4}\,\boxed{}\,\boxed{}$ και τότε $5\cdot 10^8+4\cdot 10^2\equiv 5\cdot 10^2+4\cdot 10^2=9\cdot 10^2(\bmod 13)$.

Γενικά, $10^j\equiv 10^i(\bmod p)\Rightarrow a_j10^j+a_i10^i\equiv(a_i+a_j)10^i\equiv 9\cdot 10^i(\bmod p)$

Άρα με το ζευγάρωμα που κάνει ο Άγγελος προκύπτουν αθροίσματα της μορφής $9\cdot 10^i(\bmod p)$, οπότε παίρνοντας συνολικό άθροισμα θα έχουμε ότι: $M \equiv \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} 9 \cdot 10^i = 10^{(p-1)/2} - 1 \equiv 0 (\bmod p)$,

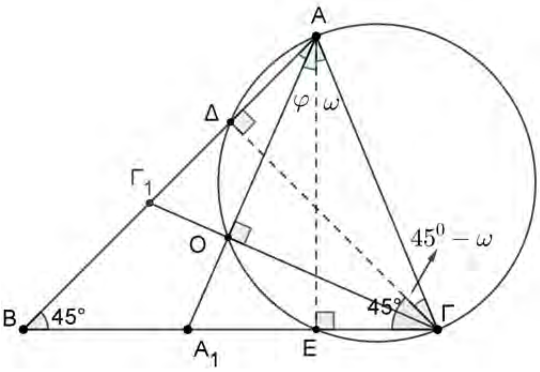
οπότε ο Άγγελος κερδίζει το παιχνίδι.

Σημείωση: *Ο Άγγελος μπορεί να κερδίσει και αν παίξει στην πρώτη κίνηση $a_0 = 0$ και η παραπάνω λύση τροποποιείται αναλόγως.*

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 108

Γ41. Στις πλευρές ΒΓ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ επιλέγουμε σημεία A_1 και Γ_1, αντίστοιχα, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα AA_1 και $\Gamma\Gamma_1$ να είναι ίσα και κάθετα. Αν είναι $A\hat{B}\Gamma = 45^\circ$, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AA_1$. (Ουκρανία, 2016)

Λύση. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Πράγματι, αν ήταν $B\hat{A}\Gamma \geq 90^\circ$, τότε θα ήταν , οπότε από το τρίγωνο $AA_1\Gamma$ έπεται ότι $A\Gamma > AA_1$.



Σχήμα 1

Επίσης έχουμε $\Gamma_1\hat{A}\Gamma \geq 90^\circ$, οπότε στο τρίγωνο $AA_1\Gamma$ μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\Gamma\Gamma_1$, οπότε $\Gamma\Gamma_1 > A\Gamma$. Αυτό όμως αντιβαίνει προς το προηγούμενο συμπέρασμα.

Έστω Ο το σημείο τομής των AA_1 και $\Gamma\Gamma_1$. Ο κύκλος διαμέτρου ΑΓ περνάει από το σημείο Ο και έστω ότι τέμνει τις ΑΒ και ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται πάνω στις πλευρές (όχι στις προεκτάσεις τους) του τριγώνου ΑΒΓ, επειδή αυτό είναι οξυγώνιο. Σημειώνουμε ακόμη ότι, επειδή οι AA_1 και $\Gamma\Gamma_1$ είναι σεβιανές του τριγώνου ΑΒΓ, το σημείο τομής τους Ο θα ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και μάλιστα στο τόξο $\overset{\frown}{\Delta E}$. Στη συνέχεια διαπιστώνουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι $A_1\hat{A}E = E\hat{A}\Gamma$. Πράγματι, αν αληθεύει η παραπάνω ισότητα, τότε το τρίγωνο ΓAA_1 θα είναι ισοσκελές (αφού η ΑΕ είναι ύψος και διχοτόμος), οπότε θα είναι και $A\Gamma = AA_1$.

Αν υποθέσουμε ότι είναι $A_1\hat{A}E = \varphi > \omega = E\hat{A}\Gamma$, τότε θα είναι $AA_1 > A\Gamma$. Από τις υποθέσεις έχουμε $\Delta\hat{B}\Gamma = B\hat{A}E = 45^\circ$, οπότε: $\Delta\hat{\Gamma}\Gamma_1 = 45^\circ - O\hat{\Gamma}E = 45^\circ - O\hat{A}E = 45^\circ - \varphi$.

Επίσης έχουμε, $\Delta\hat{\Gamma}A = A\hat{\Gamma}E - \Delta\hat{\Gamma}B = 90^\circ - \omega - 45^\circ = 45^\circ - \omega$. Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $\varphi > \omega$,

έπεται ότι $45^\circ - \varphi < 45^\circ - \omega \Rightarrow \Gamma\,\hat{\Gamma}\Delta < \Delta\hat{\Gamma}A \Rightarrow \Gamma\Gamma_1 < A\Gamma \Rightarrow \Gamma\Gamma_1 < AA_1$ (αφού $AA_1 > \Gamma\Gamma_1$), άτοπο.

Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $\varphi < \omega$. Επομένως είναι $\varphi = \omega$.

Γ42. Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου ΑΒΓ εφάπτεται των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ στα σημεία Ν, Μ και Κ, αντίστοιχα. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΚ τέμνει τον εγγεγραμμένο κύκλο για δεύτερη φορά στο σημείο Λ. Ορίζουμε $T = A\Lambda \cap NK$ και $Z = \Lambda\Gamma \cap KM$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΚ, ΝΖ και ΜΤ συντρέχουν. (Ουκρανία, 2016)

Λύση. Με το συμβολισμό των γωνιών, όπως στο σχήμα 2, από τα τρίγωνα ΑΤΚ και ΑΤΝ με το νόμο των ημιτόνων, έχουμε τις ισότητες

$$\frac{NT}{\sin A_1} = \frac{AN}{\sin A\hat{T}N} = \frac{AT}{\sin A\hat{N}T}, \qquad \frac{TK}{\sin A_2} = \frac{AK}{\sin A\hat{T}K} = \frac{AT}{\sin A\hat{K}T}$$

από τις οποίες, με διαίρεση κατά μέλη, προκύπτουν οι ισότητες:

$$\frac{NT}{TK} = \frac{AN \cdot \sin A_1}{AK \cdot \sin A_2} = \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \qquad (1)$$

Ομοίως, από τα τρίγωνα BHN και BHM, λαμβάνουμε τις σχέσεις

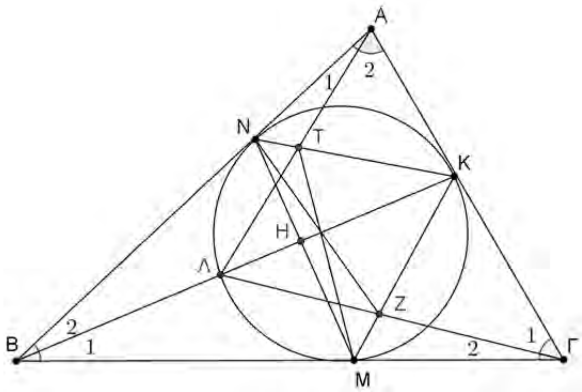
$$\frac{MH}{HN}=\frac{BN\cdot\sin B_1}{MB\cdot\sin B_2}=\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \qquad (2)$$

και από τα τρίγωνα ΓΖΜ και ΓΖΚ λαμβάνουμε τις σχέσεις:

$$\frac{KZ}{ZM}=\frac{\Gamma M\cdot\sin\Gamma_1}{\Gamma K\cdot\sin\Gamma_2}=\frac{\sin\Gamma_1}{\sin\Gamma_2} \qquad (3)$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) και (3), λαμβάνουμε:

$$\frac{NT}{TK}\cdot\frac{KZ}{ZM}\cdot\frac{MH}{HN}=\frac{\sin A_1\cdot\sin\Gamma_1\cdot\sin B_1}{\sin A_2\cdot\sin\Gamma_2\cdot\sin B_2} \qquad (4)$$



Σχήμα 2

Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ευθείες ΑΛ, ΒΛ και ΓΛ συντρέχουν στο σημείο Λ, από το τριγωνομετρικό θεώρημα του Ceva, έπεται ότι: $\frac{\sin A_1\cdot\sin\Gamma_1\cdot\sin B_1}{\sin A_2\cdot\sin\Gamma_2\cdot\sin B_2}=1$. (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε: $\frac{NT}{TK}\cdot\frac{KZ}{ZM}\cdot\frac{MH}{HN}=1$,

Οπότε από το θεώρημα του Ceva στο τρίγωνο ΚΜΝ έπεται ότι οι ευθείες ΒΚ, ΝΖ και ΜΤ συντρέχουν.

Α51. Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)\le x-yf\left(x\right)\ ;$$ **(Ουκρανία, 2016)**

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Τότε, αν θέσουμε $y=0$ στη δεδομένη συνθήκη θα λάβουμε $f\left(x-f\left(0\right)\right)\le x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Θεωρώντας τη παράλληλη μεταφορά $x\to x+f\left(0\right)$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f\left(x\right)\le x+f\left(0\right),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια θέτουμε $x=f\left(y\right)$ στην αρχική σχέση λαμβάνουμε

$$f\left(0\right)\le f\left(y\right)-yf\left(f\left(y\right)\right)\overset{(2)}{\le} y+f\left(0\right)-yf\left(f\left(y\right)\right)\Rightarrow yf\left(f\left(y\right)\right)\le y, \qquad (3)$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Από τη σχέση (3), για $y<0$ λαμβάνουμε

$$1\le f\left(f\left(y\right)\right)\overset{(2)}{\le} f\left(y\right)+f\left(0\right)\overset{(2)}{\le} y+2f\left(0\right),$$

για κάθε $y<0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει συνάρτηση που να ικανοποιεί τη δεδομένη σχέση.

Ασκήσεις για λύση

Α52. Αν a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $ab+bc+ca=3$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{2a^3+1}+\frac{1}{2b^3+1}+\frac{1}{2c^3+1}\ge 1.$$

Γ43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι του ΑΔ και ΒΕ. Να αποδείξετε ότι:

$$A\hat{\Gamma}B=60^\circ \Leftrightarrow AE+\Delta B=AB.$$

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μανιατοπούλου Αμαλία, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά;

Το Φλεβάρη του 2018, όταν ο Γάλλος φιλόσοφος Alain Badiou, ρωτήθηκε: «Προτείνετε ακόμη ότι τα Μαθηματικά θα πρέπει να αποκτήσουν τη θέση που έχουν στη γενική κουλτούρα η τέχνη και ο κινηματογράφος. Ποια είναι η σημασία αυτής της πρότασης;». Κι αυτός απάντησε: «Τα Μαθηματικά είναι ένας σπουδαίος κλάδος της ανθρώπινης σκέψης. Γιατί, λοιπόν, ένας φιλόσοφος μπορεί και στοχάζεται γύρω από τα θέματα της σύγχρονης τέχνης και του κινηματογράφου και αγνοεί τι γίνεται στον κόσμο της επιστήμης; Πρόκειται για μια σημαντική αδυναμία του κόσμου μας. Η επιστήμη έχει, εξάλλου, έναν ρόλο εξαιρετικά σημαντικό στην ίδια τη ζωή και στην καθημερινότητά μας»

[πηγή: https://thalesandfriends.org/el/book/egkomio-gia-ta-mathimatika/#interview]

Λόγω έκτακτων τεχνικών δυσκολιών, το θέμα αναβάλλεται για το επόμενο τεύχος

ΙΙ. "Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου"

προλεγόμενα στα δύο τελευταία τεύχη, ικανοποιώντας το αίτημα του συναδέλφου Θ. Χριστόφη, δημοσιεύσαμε (σε δυο συνέχειες) "στιγμιότυπα" από την επίπεδη τομή στερεών με σκοπό *«...να θυμηθούμε την ομορφιά που χάθηκε...»*. Αναπάντεχα, η στήλη κατακλείστηκε από αιτήματα για συνέχιση τέτοιων "στιγμιότυπων". Εμείς χαιρόμαστε γι αυτό, όμως, δηλώνουμε πως: α) λόγω έλλειψης "ζωτικού" χώρου και β) δυσανάλογα μεγάλου αριθμού σημειωμάτων που καταφθάνουν, θα συνεχίσουμε, δημοσιεύοντας μόνο ένα "στιγμιότυπο" κάθε φορά.

8.2. Τομή πρίσματος με επίπεδο

α. Γενικό πρόβλημα «Δίνεται πρίσμα και τρία σημεία πάνω στην επιφάνειά του. Να βρεθεί η τομή του πρίσματος με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία»

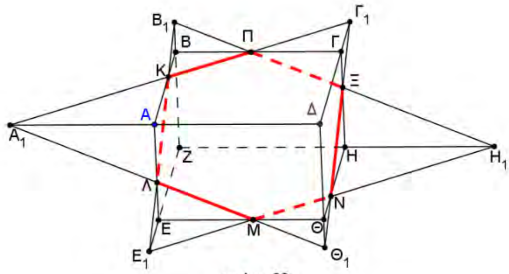
σχόλιο 1 Αυτό είναι ένα γενικό πρόβλημα τομής πρίσματος με επίπεδο. Διακρίνουμε τέσσερες κύριες περιπτώσεις, αναφορικά με τη θέση των δοσμένων σημείων πάνω στην επιφάνεια του πρίσματος.

i. Πρώτη περίπτωση τα δοσμένα σημεία βρίσκονται πάνω σε τρεις διαδοχικές ακμές (που όλες τους δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο)

παράδειγμα Δίνεται παραλ/δο με βάσεις ΑΒΓΔ,ΕΖΗΘ [ΑΕ||ΒΖ||ΓΗ||ΔΘ] και πάνω στις ακμές του ΑΒ, ΑΕ, ΕΘ τα σημεία Κ,Λ,Μ αντίστοιχα. Να βρεθεί η τομή του παραλλ/δου ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ από το επίπεδο (π) που ορίζεται από τα δοσμένα σημεία Κ,Λ,Μ.

απάντηση (σχ. 02)

● Από τα δοσμένα του προβλήματος έχουμε ότι το (π) διαθέτει δύο κοινά σημεία Κ,Λ με το επίπεδο της έδρας ΑΒΖΕ και τα Λ,Μ με το επίπεδο της έδρας ΑΕΘΔ. Άρα (§8.1.β) το (π) τέμνει την έδρα ΑΒΖΕ κατά την ευθεία $Ε_1ΛΚΒ_1$ [$Ε_1$,$Β_1$ στην προέκταση των ΕΖ,ΒΖ αντίστοιχα] και την έδρα ΑΕΘΔ κατά την ευθεία $Α_1ΛΜΘ_1$ [$Α_1$,$Θ_1$ στην προέκταση των ΑΔ,ΘΔ αντίστοιχα]. Άρα το (π) τέμνει αυτές τις δύο έδρες κατά τα ευθ. τμήματα ΚΛ και ΛΜ αντίστοιχα.



σχήμα 02

● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΕΖΗΘ, η $Ε_1$Μ τέμνει την ΘΗ στο Ν και την προέκταση της ΖΗ στο $Η_1$ [άρα το Ν είναι από τα ζητούμενα σημεία τομής].

● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΒΓΗΖ η ευθεία $Η_1Β_1$ τέμνει τις ακμές ΒΓ,ΓΗ στα Π,Ξ αντίστοιχα [άρα τα Π,Ξ είναι από τα ζητούμενα σημεία τομής]

● Η $Α_1$ΚΠ τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο $Γ_1$

● Άρα η ζητούμενη τομή του δοσμένου παραλ/δου και του δοσμένου επιπέδου είναι το εξάγωνο ΚΠΞΝΜΛ.

σχόλιο 2 είναι άξιο σημείωσης το γεγονός ότι σε κάθε έδρα έχοντας δύο κοινά σημεία πχ. Κ,Λ, θεωρήσαμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται και με όχημα αυτήν πήγαμε στις ακμές ΕΖ,ΕΘ αντίστοιχα και, μέσω αυτών, στις έδρες ΕΘΗΖ,ΒΓΗΖ αντίστοιχα, για να συνεχίσουμε όμοια για τις ακμές αυτών των εδρών.

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

Ποιος ήταν ο διασημότερος μαθηματικός που...δεν υπήρξε ποτέ; (*η απάντηση, στο τέλος της στήλης*)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

1ο θέμα. αναφορά στον Stephen Hawking

προλεγόμενα Στο προηγούμενο τεύχος υποσχεθήκαμε μια αναφορά στον Στίβεν Χόκινγκ (Stephen Hawking). Η ανταπόκριση των συναδέλφων ήταν συγκινητική˙ η στήλη κατακλύστηκε από αναφορές στο πρόσωπό του, που μας στάλθηκαν. Εμείς, κάναμε μια επιλογή και σας την παρουσιάζουμε.

Αναζητούσε την αλήθεια, χωρίς φόβο αλλά με πάθος

Η είδηση του θανάτου του διάσημου Βρετανού αστροφυσικού, κοσμολόγου και συγγραφέα, Στίβεν Χόκινγκ, την περασμένη Τετάρτη (14/03/2018), σκόρπισε την αίσθηση της απώλειας όχι μόνο στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα που φτώχυνε διακριτά, αλλά και στους ανθρώπους που τον γνώρισαν μέσα από τα βιβλία εκλαϊκευμένης επιστήμης που έγραψε για θέματα της σύγχρονης φυσικής, σε κάθε άνθρωπο που έχει οδηγό στη σκέψη του την επιστημονική αντίληψη για τον κόσμο. Ο Χόκινγκ, που έγινε εμβληματική φυσιογνωμία και λόγω της αναπηρίας του, την οποία αντιπάλεψε με σθένος επί δεκαετίες, άφησε σημαντικό επιστημονικό έργο, τόσο άμεσα με τις θεωρίες του, όσο και επειδή κατάφερνε έως το τέλος να συναρπάζει νέους και μεγαλύτερους σε ηλικία με τα μυστήρια της φύσης που προσπαθούσε να λύσει, να εμπνέει άλλους επιστήμονες με τις ριζοσπαστικές ιδέες του. Ταυτόχρονα, οι τοποθετήσεις του για τα κοινωνικά ζητήματα αποδεικνύουν άνθρωπο με αρχές, που δεν δίστασε να πει πράγματα που δυσαρέστησαν κάποιους ισχυρούς.

..........Ο Χόκινγκ έγινε καθηγητής μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Κέιμπριτζ, στην έδρα που κατείχαν παλαιότερα ο Ισαάκ Νεύτων, ο Τσαρλς Μπάμπατζ και ο Πολ Ντιράκ, ένας από τους ιδρυτές της κβαντομηχανικής. Οι διακρίσεις και τα βραβεία έρχονταν το ένα πίσω από το άλλο, αλλά αυτά δεν έφερναν τα χρήματα που είχε ανάγκη ο Χόκινγκ για να αντιμετωπίσει τα προβλήματα υγείας του. Ετσι καταπιάστηκε, με τη βοήθεια άλλων συγγραφέων, να εκδώσει αρκετά έργα εκλαΐκευσης της θεωρητικής φυσικής, με σημαντικότερο απ' αυτά το περίφημο «Χρονικό του χρόνου», που εκδόθηκε το 1988, έγινε bestseller επί 237 βδομάδες, μεταφράστηκε σε 40 γλώσσες, πούλησε περισσότερα από 10 εκατομμύρια αντίτυπα και εκτόξευσε τη δημοτικότητά του.

Επιστημονικές παρακαταθήκες

Μαζί με τον μαθηματικό Ρότζερ Πένροουζ, έδειξαν ότι, αν υπήρξε η επονομαζόμενη «Μεγάλη Εκρηξη», αυτή πρέπει να ξεκίνησε από μια σημειακή ανωμαλία, μια μοναδικότητα (singularity) άπειρης καμπύλωσης του χωροχρόνου.

.........Ο Χόκινγκ απέδειξε ότι οι μαύρες τρύπες (τα ουράνια σώματα που έχουν τόσο ισχυρή βαρύτητα ώστε δεν μπορεί να ξεφύγει απ' αυτήν ούτε το φως) εκπέμπουν ακτινοβολία, η οποία προς τιμή του ονομάστηκε ακτινοβολία Χόκινγκ, ενώ ταυτόχρονα χάνουν σταδιακά μάζα. Το φαινόμενο οφείλεται σε κβαντικά φαινόμενα στον ορίζοντα γεγονότων, το σφαιρικό όριο της μαύρης τρύπας. Πρόβλεψε την ύπαρξη μικρών μαύρων τρυπών την περίοδο μετά την υποτιθέμενη «Μεγάλη Έκρηξη». Αυτές οι μαύρες τρύπες εικάζεται ότι έχασαν όλη τη μάζα τους μέχρι που εξαφανίστηκαν, ενδεχομένως με εκρήξεις που απελευθέρωσαν μεγάλες ποσότητες Ενέργειας.

Τη δεκαετία του 1970, ο Χόκινγκ ασχολήθηκε με την τύχη των σωματιδίων και των φωτονίων που έχουν πέσει σε μια μαύρη τρύπα, όταν αυτή η τρύπα σταδιακά εξαφανιστεί. Η αρχική του άποψη ήταν ότι η «πληροφορία» (η εντροπία για την ακρίβεια) που συνδέεται με αυτά τα σωματίδια και τα φωτόνια χάνεται. Ομως ο Αμερικανός φυσικός Λέοναρντ Σάσκιντ έδειξε ότι αυτή η παραβίαση του θεμελιώδους δεύτερου νόμου της Θερμοδυναμικής δεν συμβαίνει, πράγμα το οποίο ο Χόκινγκ αναγκάστηκε να παραδεχτεί πολλά χρόνια αργότερα, το 2004, δίνοντας τέλος στο λεγόμενο «πληροφοριακό παράδοξο». Ο Χόκινγκ υποστήριξε στη συνέχεια ότι η πληροφορία «αποθηκεύεται» στον ορίζοντα γεγονότων και επιστρέφει και πάλι σε αντιληπτή μορφή μέσω της ακτινοβολίας Χόκινγκ.

Ο Χόκινγκ ζήτησε να γραφτεί στην ταφόπλακά του η εξίσωση Μπέκενσταϊν - Χόκινγκ για την εντροπία, που εκφράζει την ενότητα τεσσάρων κλάδων γνώσης της φυσικής, εμπεριέχοντας την παγκόσμια σταθερά του Νεύτωνα που συνδέεται με τη βαρύτητα, τη σταθερά του Πλανκ που συνδέεται με τα κβαντικά φαινόμενα, την ταχύτητα του φωτός, άρρηκτα συνδεδεμένη με τη σχετικότητα του Αϊνστάιν, και τη σταθερά του Μπόλτζμαν, άρρηκτα δεμένη με τη θερμοδυναμική.

Μέσα στο κοινωνικό γίγνεσθαι

Ο Χόκινγκ δεν έμεινε αδιάφορος σε όσα συνέβαιναν στην κοινωνία πέρα από το χώρο της επιστήμης. Είχε αποκαλέσει «έγκλημα πολέμου» την εισβολή στο Ιράκ το 2003 και είχε μποϊκοτάρει επιστημονικό συνέδριο στο Ισραήλ, λόγω της καταπίεσης των Παλαιστινίων. Είχε συμμετάσχει στην εκστρατεία για τον πυρηνικό αφοπλισμό, ενώ ήταν υποστηρικτής της δημόσιας καθολικής υγειονομικής περίθαλψης και σφοδρός επικριτής των αντιλαϊκών περικοπών στο βρετανικό σύστημα Υγείας.

Stephen Hawking (με τις πατερίτσες),, Tariq Ali και Vanessa Redgrave, σε διαδήλωση κατά του πολέμου στο Βιετνάμ (1968).

Αποκαλυπτική για τη στάση ζωής και τις φιλοσοφικές απόψεις του ήταν μια συνέντευξή του το Μάη του 2011, στη βρετανική εφημερίδα «Guardian». «Εζησα με την προοπτική πρόωρου θανάτου τα τελευταία 49 χρόνια. Δεν φοβάμαι το θάνατο, αλλά και δεν βιάζομαι να πεθάνω. Εχω τόσο πολλά να κάνω πρώτα», είπε απαντώντας στην ερώτηση «τι φοβάστε στο θάνατο»,.....Η δήλωση αυτή ήρθε σε συνέχεια εκείνων που έγραφε το 2010 στο βιβλίο του «Το Μεγάλο Σχέδιο»,

.......Ο Χόκινγκ δεν δίσταζε να μιλάει για ζητήματα ευρύτερης σημασίας, που ίσως συναντήσει η ανθρωπότητα στο μέλλον, βάζοντας πολλούς σε σκέψη με τις απαντήσεις του. Οταν ρωτήθηκε για το ενδεχόμενο ύπαρξης εξωγήινων, είπε ότι η απεραντοσύνη του σύμπαντος το κάνει πολύ πιθανό και πρόσθεσε: «Αν κάποτε μας επισκεφθούν εξωγήινοι, το αποτέλεσμα νομίζω ότι θα είναι όπως όταν πρωτοπάτησε το πόδι του στην Αμερική ο Χριστόφορος Κολόμβος, γεγονός όχι και τόσο θετικό για τους Ινδιάνους της Αμερικής»...

το ταξίδι στη Σάμο

Το 1998, ο Στίβεν Χόκινγκ είχε ταξιδέψει μέχρι την Σάμο και συγκεκριμένα μέχρι το Πανεπιστήμιο Αιγαίου με αφορμή το συνέδριο κοσμολογίας, το οποίο διοργανωνόταν για δεύτερη φορά στο νησί.
Η ομιλία του στο Πανεπιστήμιο περί δημιουργίας και λειτουργίας του κόσμου είχε τεράστια επιτυχία, καθώς ο Στίβεν Χόκινγκ δεχόταν από τότε εκατοντάδες προσκλήσεις το χρόνο.

Η αξέχαστη ομιλία του Στίβεν Χόκινγκ στο Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Ήταν το Φυσικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης που τον είχε προσκαλέσει στο νησί, για να πραγματοποιήσει ομιλία και να λάβει μέρος στην 21η «τριγωνική συνάντηση», Αστροφυσικής. Η συνάντηση είχε θέμα της «Μαύρες Τρύπες», ένα θέμα με το οποίο ο Στίβεν Χόκινγκ πρώτος καταπιάστηκε. ....Όταν ρωτήθηκε «τι γήινο έχει κατά νου ένα επιστήμονας που έχει όλο το Σύμπαν στο κεφάλι του και αν διαβλέπει κινδύνους για τον πλανήτη μας», ο Χόκινγκ απάντησε με χιούμορ, «Βλέπω κινδύνους στο μέλλον, έχουμε πλέον την τεχνολογία για να κάνουμε ό,τι θέλουμε. Και είναι αρκετή για να τη χρησιμοποιήσουμε για να καταστρέψουμε τον πλανήτη. Ελπίζω να είμαστε σοφοί για να την αξιοποιήσουμε ώστε να εποικήσουμε και να κατακτήσουμε τον γαλαξία μας». Για την ευθύνη του επιστήμονα απέναντι στην κοινωνία είχε ότι είναι μεγάλη «όχι μόνο γιατί πρέπει να προχωρά τη γνώση, αλλά και να τη μεταδίδει. Δεν μπορείς να βάλεις ένα τέλος στη γνώση».

Το μήνυμα της NASA για τον Στίβεν Χόκινγκ

Σε μήνυμα που ανάρτησε στους λογαριασμούς της στα social media, η NASA αναφερόμενη στον θάνατο του Στίβεν Χόκινγκ έγραψε: *«Εις μνήμην Στίβεν Χόκινγκ, ενός ξακουσμένου και πρεσβευτή της επιστήμης. Οι θεωρίες του «ξεκλείδωσαν» ένα σύμπαν πιθανοτήτων, το οποίο εμείς και ο κόσμος εξερευνούμε. Είθε να συνεχίσεις να πετάς σαν τον Σούπερμαν στη μικροβαρύτητα, όπως είπες στους αστροναύτες στον Διεθνή Διαστημικό Σταθμό το 2014».*

Από τις "Εκδόσεις Κάτοπτρο" κυκλοφορούν οι εξής τίτλοι:

• Το χρονικό του Χρόνου – Από τη Μεγάλη Έκρηξη έως τις μαύρες τρύπες,• Το χρονικό του Χρόνου – Εικονογραφημένο,• Ένα συντομότερο χρονικό του Χρόνου ,• Το Μεγάλο Σχέδιο – Νέες απαντήσεις στα έσχατα ερωτήματα της ζωής,• Μαύρες τρύπες – Οι Διαλέξεις Reith του BBC,• Το Σύμπαν σε ένα καρυδότσουφλο, • Μαύρες τρύπες, σύμπαντα-βρέφη και άλλα δοκίμια,• Stephen Hawking – Ο κόσμος μιας ιδιοφυΐας. [**Πηγές:** www.theguardian.com, www.newscientist.com]

2^o θέμα. Μαθηματικά και μπάσκετ

προλεγόμενα Με το μπάσκετ είχαμε ασχοληθεί παλιότερα (τεύχος 40), κι είχαμε τα καλύτερα σχόλια. Στο τεύχος τούτο, ο συνεργάτης της στήλης Μπρούζος Στέλιος (Αθήνα), μετάφρασε ένα σχετικό θέμα του Larry M. Silverberg, καθηγητή Μηχανολογίας και Αεροδιαστημικής Μηχανικής, στο πανεπιστήμιο της Βόρειας Καρολίνας. Απολαύστετο.

"Τα μαθηματικά πίσω από την τέλεια ελεύθερη βολή", του Larry M. Silverberg

Οι λεπτομέρειες μετρούν για έναν καταρτισμένο σουτέρ ελευθέρων βολών. Πριν από 20 χρόνια, ο συνάδελφός μου Dr. Chau Tran και εγώ , αναπτύξαμε έναν τρόπο να προσομοιώσουμε τις τροχιές εκατομμυρίων βολών στο μπάσκετ με τον υπολογιστή. Το πρόγραμμα Math προσφέρει μια μοναδική προοπτική. Κυλάει προς τα μπρος το χρόνο, όσος χρειάζεται ,για να δούμε τα σχέδια πίσω από τις καλύτερες βολές. Ως επί το πλείστον, ανακαλύψαμε πράγματα, που οι παίκτες και οι προπονητές ήδη γνώριζαν - αλλά συχνά, καταλήξαμε και σε κάποια νέα άποψη.

Πήγαμε στους προπονητές στο κρατικό πανεπιστήμιο της Βόρειας Καρολίνας, όπου είναι η βάση μας, και τους είπαμε ότι είχαμε αυτή τη δυνατότητα, να μελετάμε πολύ προσεκτικά τις βολές στο μπάσκετ.

Η πρώτη ερώτησή τους ήταν απλή: *«Ποια είναι η καλύτερη ελεύθερη βολή;», «Θα έπρεπε ο σουτέρ να σκοπεύει προς το μπροστινό μέρος της στεφάνης ή στο πίσω;», «Η καλή ελεύθερη βολή εξαρτάται από το εάν ο παίκτης είναι κοντός ή ψηλός;»*

Προσομοίωση εκατομμυρίων βολών

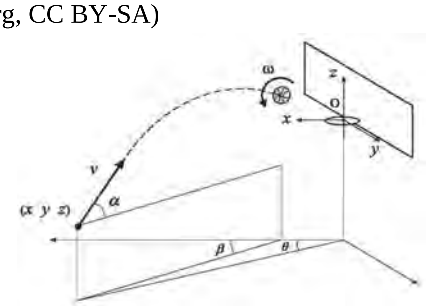
Από μαθηματική άποψη, το μπάσκετ είναι ένα *παιχνίδι τροχιών*. Αυτές οι τροχιές έχουν την ιδιαιτερότητα ότι, η κίνηση της μπάλας δεν αλλάζει πολύ κατά τη διάρκεια της τροχιάς της στον αέρα, αλλά στη συνέχεια αλλάζει ταχύτατα σε χιλιοστά του δευτερολέπτου ,όταν η μπάλα συγκρούεται με το στεφάνι ή το ταμπλό.

Για να προσομοιώσουμε εκατομμύρια τροχιές, χωρίς να απαιτηθεί πολύς χρόνος για να τρέξουμε τον κώδικα, δοκιμάσαμε κάθε κόλπο που μπορούσαμε να σκεφτούμε. Βρήκαμε *πώς να προχωρούμε από μέτρια αλλαγή της κίνησης σε ταχέως μεταβαλλόμενη*, όπως όταν η μπάλα αναπηδάει στο χείλος ή στο ταμπλό.

Μάθαμε *πώς να μετατρέπουμε μεγάλο αριθμό τροχιών σε στατιστικές πιθανότητες*. Δημιουργήσαμε ακόμη και *πλαστές τροχιές*, στις οποίες η μπάλα περνάει μαγικά μέσα από όλα τα φυσικά εμπόδια (το στεφάνι, το ταμπλό, πίσω δίσκο) εκτός από ένα, για να δούμε πού συγκρούεται πρώτα.

Πώς ένας μαθηματικός βλέπει μια ελεύθερη βολή (Larry Silverberg, CC BY-SA)

Η ελεύθερη βολή ήταν το πρώτο σουτ που μελετήσαμε, ο συνάδελφός μου κι εγώ, λεπτομερώς. Ένα παιχνίδι μπορεί να κερδηθεί ή να χαθεί στη γραμμή ελεύθερης βολής. Επιπλέον, η ελεύθερη βολή είναι αναμφισβήτητη, έτσι η τελειότητα στην ελεύθερη βολή μπορεί να συμβάλλει τα μέγιστα. Οι κορυφαίες ομάδες τείνουν να εκτελούν σωστά την ελεύθερη βολή. Το πρόγραμμά μας θα μπορούσε να μας πει , ποιες είναι οι πιθανότητες του σουτέρ να πετύχει μια ελεύθερη βολή - και να μας βοηθήσει να αποτυπώσουμε τι έκανε σωστά ή λάθος.



Αναλύοντας τη ελεύθερη βολή

Μελετήσαμε την ελεύθερη βολή για περίπου πέντε χρόνια.

Ένα από τα πρώτα πράγματα που μάθαμε από τις προσομοιώσεις μας και παρακολουθώντας τα τηλεοπτικά πλάνα ήταν ότι, παίκτες με την ίδια κατάρτιση μπορούν να εκτελούν ελεύθερες βολές με ακρίβεια από 75 έως 90 τοις εκατό.

Η λεπτομέρεια ήταν ότι το 90% των παικτών ήταν όντας καταρτισμένο με το σωστό σουτ - την καλύτερη τροχιά.

Η μοίρα της ελεύθερης βολής ορίζεται από τη στιγμή που η μπάλα αφήνει τα δάχτυλα του παίκτη, έτσι *εξετάσαμε προσεκτικά τις "συνθήκες εκτόξευσης" της μπάλας.*

Η μπάλα *βρίσκεται σε κάποιο ύψος πάνω από το πάτωμα.*

Έχει ρυθμό με τον οποίο *σπινάρει προς τα πίσω* (ονομάζεται backspin) , έχει μια *ταχύτητα εκτόξευσης* και μια *γωνία εκτόξευσης*. Δεδομένου ότι ο σουτέρ δεν εκτοξεύει ποτέ την μπάλα με τον ίδιο τρόπο, οι μικρές διαφορές αντιπροσωπεύουν την κατάρτιση του σουτέρ.

Βρήκαμε ότι, *περίπου τα 3 hertz είναι το καλύτερο backspin*, περισσότερο από αυτό δεν βοηθάει.

Παίρνει περίπου 1 δευτερόλεπτο για να φτάσει η μπάλα στο καλάθι, έτσι *τα 3 hertz ισοδυναμούν με τρεις περιστροφές της μπάλας στον αέρα*, από τη στιγμή που αυτή φεύγει από τα χέρια του παίκτη μέχρι να φτάσει στο καλάθι.

Στη συνέχεια, *υποθέτοντας ότι ο παίκτης απελευθερώνει την μπάλα στα 7 πόδια* πάνω από το έδαφος, *μια γωνία εκτόξευσης περίπου 52 μοιρών είναι καλύτερη*. Με αυτή τη γωνία, η ταχύτητα προώθησης είναι η χαμηλότερη, και η πιθανότητα επιτυχίας της βολής είναι η μεγαλύτερη. Στις 52 μοίρες, ο σκοπευτής μπορεί να πέσει έξω μια μοίρα ή περισσότερο ανάλογα ,χωρίς μεγάλη επίδραση στην επιτυχία της βολής.

Ωστόσο, *η ταχύτητα εκτόξευσης* είναι ακριβώς το αντίθετο. Είναι *η μεταβλητή που πιο δύσκολα μπορεί να ελέγξει ένας παίκτης*. Αν πετάξει τη μπάλα πολύ αργά , η βολή θα είναι μικρή, αν πολύ γρήγορα, η βολή θα είναι μεγάλη. Ένας παίκτης πρέπει *να απομνημονεύσει την κίνηση ολόκληρου του σώματός του*, κατά τη διάρκεια της απελευθέρωσης της μπάλας ,ώστε να μεταδίδει στη μπάλα την ίδια ταχύτητα σταθερά, κάθε φορά που εκτελεί ελεύθερη βολή.

Αν όλες οι άλλες παράμετροι είναι ίδιες , *παίκτες που απελευθερώνουν τη μπάλα ψηλά πάνω από το πάτωμα, έχουν υψηλότερο ποσοστό σκοραρίσματος*. Αυτό είναι ενδιαφέρον, επειδή οι προπονητές μας στο *N.C. State* και άλλοι που μιλήσαμε είπανε ότι, οι ψηλότεροι παίκτες τείνουν να εκτελούν την ελεύθερη βολή χειρότερα από τους πιο κοντούς .Φαίνεται ότι, οι πιο κοντοί παίκτες, ίσως στη πράξη, προσπαθούν σκληρότερα.

Ο τελευταίος όρος απελευθέρωσης της μπάλας ήταν ο πιο εκπληκτικός : *το σημείο στόχος της ελεύθερης βολής*. Βρήκαμε ότι, *ο παίκτης θα πρέπει να στοχεύει την μπάλα προς το πίσω μέρος του χείλους της στεφάνης*. Βασικά, το πίσω μέρος του χείλους της στεφάνης είναι πιο αποδοτικό από το μπροστινό μέρος του χείλους. Σε ύψος *7 ποδιών* απελευθέρωσης της μπάλας, *το κενό μεταξύ της μπάλας και της ράχης του δακτυλίου πρέπει να είναι μικρότερο από 2 ίντσες*. Ένα μικρό κενό είναι το καλύτερο ,είτε η απελευθέρωση της μπάλας ξεκινάει από χαμηλά ή από ψηλά ,ως προς το πάτωμα.

Διδάγματα

Λοιπόν, τι σημαίνουν όλα αυτά για τους παίκτες που επιδιώκουν να βελτιώσουν την ελεύθερη βολή τους; Η έρευνά μας δείχνει ότι ,οι παίκτες πρέπει :

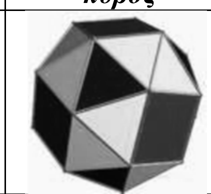
- *Να στοχεύουν τη μπάλα πέρα από το κέντρο του χείλους της στεφάνης προς τα πίσω.*
- *Να εκτοξεύουν τη μπάλα υπό μεγάλη γωνία και ψηλά πάνω από το έδαφος.* (Η μπάλα, στο υψηλότερο σημείο του τόξου της, θα πρέπει να φτάσει στην κορυφή του ταμπλό.).
- *Να ρυθμίζουν την μπάλα ώστε να εξαλείψετε την πλευρική γωνία.*
- *Να προσπαθούν να απελευθερώνουν τη μπάλα με απαλή κίνηση του σώματος*, για να παράγουν μια σταθερή ταχύτητα εκτόξευσης.

Τα τελευταία χρόνια, έχουμε επεκτείνει την εργασία μας ,για να μελετήσουμε, το πώς χτυπάνε το ταμπλό, τα καλύτερα σουτ που πετυχαίνουν καλάθι χτυπώντας ταμπλό, ,και να αναπτύξουμε ένα εργαλείο για όποιον θέλει να τα τελειοποιήσει.

Με το παιχνίδι του τουρνουά να πλησιάζει, φέρνω στο νου μου πόσο ανταγωνιστικό έχει γίνει το παιχνίδι , και ότι έχει γίνει πραγματικά ένα παιχνίδι των ιντσών. Ως παλιός παίκτης μπάσκετ, όπως πολλοί από εσάς, μου αρέσει να το παρακολουθώ - και, κάθε τόσο συχνά, να βλέπω μια τέλεια ελεύθερη βολή. (1 ίντσα=2,54cm, 1 πόδι =30,48cm, 1 hertz=1περιστοφή/δευτερόλεπτο)

3ο θέμα. «αρχιμήδεια στερεά», του Σωτήρη Γκουντουβά

προλεγόμενα παρουσιάζουμε το δεύτερο μέρος των «αρχιμήδειων στερεών»

Αρχιμήδεια στερεά [β΄ μέρος]				
εικοσιδωδεκάεδρο	***Πεπλατυσμένος κύβος***	***Ρομβοεικοσιδωδεκάεδρο***	***Κόλουρο εικοσιδωδεκάεδρο***	***Πεπλατισμένο δωδεκάεδρο***
				
▪ 32 έδρες ▪ 20 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 12 πεντάγωνα	▪ 38 έδρες ▪ 32 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 6 τετράγωνα	▪ 62 έδρες ▪ 20 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 30 τετράγωνα ▪ 12 πεντάγωνα	▪ 62 έδρες ▪ 30 τετράγωνα ▪ 20 εξάγωνα ▪ 12 δεκάγωνα	▪ 92 έδρες ▪ 80 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 12 πεντάγωνα

«*ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ*», Θέματα Γεωμετρίας από την αρχαιότητα ως τον 20ό αιώνα, Σ.Χ.Γκουντουβάς

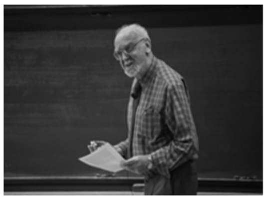
V. ειδήσεις – ειδησούλες

1η. Στη διεύθυνση «https://viterbischool. usc.edu/ news/2018/06/mathematician-m-d-solves-one-of-the-greatest-open-problems-in-the-history-ofmathematics/» , υπό τον τίτλο «Μαθηματικός-M.D. λύνει ένα από τα μεγαλύτερα ανοικτά προβλήματα στην ιστορία των Μαθηματικών» και υπότιτλο «Η 110χρονη υπόθεση Lindelöf αποδεικνύεται επίσημα, ανοίγοντας τις δυνατότητες νέων ανακαλύψεων στον κβαντικό υπολογισμό, τη θεωρία αριθμών και την ασφάλεια στον κυβερνοχώρο», ο Daniel Druhora γράφει: «...Ο Αθανάσιος Φωκάς, μαθηματικός από το Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Θεωρητικής Φυσικής του Πανεπιστημίου του Κέμπριτζ και καθηγητής στο Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών του Ming Hsieh στη Σχολή Μηχανικών Βιομηχανίας Viterbi, ανακοινώνει τη λύση ενός από τα μακροχρόνια προβλήματα η ιστορία των Μαθηματικών, η υπόθεση Lindelöf. Η λύση, που δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά στο arXiv, έχει εκτεταμένες συνέπειες σε τομείς όπως η κβαντική υπολογιστική, η θεωρία αριθμών και η κρυπτογράφηση, η οποία αποτελεί τη βάση για την ασφάλεια στον κυβερνοχώρο...Ο Φώκας είναι τώρα ένα πολύ σπάνιο παράδειγμα επιστήμονας στο στυλ της Αναγέννησης...».

Η στήλη μας, νοιώθει υπερήφανη γιατί είναι η πρώτη στο είδος της, που στο παρελθόν αναφέρθηκε στο πρόσωπο του μεγάλου Έλληνα επιστήμονα. Υποσχόμαστε ότι, σε επόμενο τεύχος, θα παρουσιάσουμε (έστω και με μορφή "τίτλων"), ψηφίδες του έργου του. Θανάσης Φωκάς είναι τακτικό μέλος της Ακαδημίας των Αθηνών.

[**πηγή:** https://viterbischool.usc.edu/news/2018/06/mathematician....]

2η. Στον Αμερικανο-καναδό μαθηματικό Robert P. Langlands (του Ινστιτούτου Προηγμένων Μελετών, του Πανεπιστημίου Princeton) απονεμήθηκε (στις 22 Μάη), σε ειδική τελετή που έγινε στο Όσλο, το Βραβείο Abel για το 2018. Την είδηση ανακοίνωσε η Νορβηγική Ακαδημία Επιστημών και Γραμμάτων τονίζοντας την προσφορά του Langlands στην επιστήμη μέσα από «το οραματικό του πρόγραμμα που συνδέει τη *θεωρία αναπαραστάσεων* με τη *θεωρία αριθμών*».



[**πηγή:** https://thalesandfriends.org/el/2018/03/20/vraveio-abel-ston-robert-langlands/]

3η. Από το βιβλίο "έρωτας & μαθηματικά" του E. Frenkel, σε μετάφραση Τ. Μιχαηλίδη, διαβάζουμε: «Για όσους θεωρούν τα Μαθηματικά βαρετά...Χαρακτηριστικό είναι ένα απόσπασμα από το βιβλίο: "Μπορούν τα Μαθηματικά να είναι μια γλώσσα του έρωτα;....Δεν πιστεύω ότι υπάρχει μαθηματικός τύπος που να περιγράφει ή να εξηγεί τον έρωτα. Όταν αναφέρομαι σε μια σχέση ανάμεσα στον έρωτα και τα Μαθηματικά, δεν εννοώ ότι ο έρωτας μπορεί να αναχθεί σε Μαθηματικά...Τα Μαθηματικά μας προσφέρουν ένα λογικό πλαίσιο και μια πρόσθετη ικανότητα να αγαπήσουμε ο ένας τον άλλο, τον κόσμο γύρω μας..."

[**πηγή:**https://liveyourmaths.com/2016/01/06/]

4η. Ο Σταμάτης Κριμιζής, μέσω των οργάνων που έχει σχεδιάσει είναι ο μόνος επιστήμονας που «ταξίδεψε» σε όλους τους πλανήτες της αστρικής γειτονιάς μας. Μέσα στα 50 χρόνια επιτυχιών υπήρξε, ωστόσο, και μία αποτυχία, την οποία φυσικά δεν μπορεί να ξεχάσει. «Το 2002 εκτοξεύσαμε ένα διαστημόπλοιο για να επισκεφθεί τους πυρήνες από αρκετούς κομήτες. Το λέγαμε CONTOUR», θυμάται ο καθηγητής. Η αποστολή του CONTOUR ήταν να εξερευνήσει τη συμπεριφορά δύο κομητών που θα περνούσαν κοντά στη Γη. Ωστόσο, κατά την πυροδότηση των προωθητήρων του προκλήθηκε υπερθέρμανση, με αποτέλεσμα το μικρό διαστημόπλοιο να καταστραφεί αμέσως. «Ήταν η μεγάλη μου απογοήτευση», μας λέει.

[**πηγή:**https://tinanantsou.blogspot.gr/2018/04/blog-post_79.html]

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;"

Ήταν ο Νικολά Μπουρμπακί, ο οποίος δεν ήταν ένα πρόσωπο, αλλά ***μια ομάδα Γάλλων Μαθηματικών***, οι οποίοι ξεκίνησαν το έτος 1934 στα καφενεία του Quartier Latin να συζητούν για μια θεμελιωμένη με κάθε λεπτομέρεια και με απόλυτη συνέπεια «Μαθηματική Ανάλυση». Κεντρικοί επινοητές του εγχειρήματος ήταν οι μαθηματικοί ***Andre Weil***, ***Henri Cartan***, ***Claude Chevalley***, ***Jean Delsart*** και ***Jean Dieudonne***, οι οποίοι είχαν αποφοιτήσει εκείνα τα χρόνια από την *École Normale Supérieure* και δίδασκαν ως νέοι καθηγητές σε επαρχιακά πανεπιστήμια της Γαλλίας.

[**πηγή:** http://www.ma8imatikos.gr/nicolas-bourbaki]

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ — Ασκήσεις στις ανισότητες

Κωνσταντίνος Γιατράς, Κυριάκος Καμπούκος, Βασίλης Καρκάνης, Μιχάλης Πατσαλιάς
2ο Πειραματικό ΓΕΛ Αθηνών

Τα θέματα που ακολουθούν αναφέρονται στις ανισότητες, ένα αρκετά ενδιαφέρον κεφάλαιο που αποτελεί πρόκληση για μαθητές και συναδέλφους.

Υπάρχουν παραδείγματα που αντιμετωπίζονται μόνο με τη χρήση των ιδιοτήτων των ανισοτήτων και άλλα που βασίζονται σε κάποιες γνωστές ή λιγότερο γνωστές σχέσεις τις οποίες προτάξαμε των λύσεων όπου αυτό θεωρήθηκε απαραίτητο.

Άσκηση 1

Αν x, y, z θετικοί πραγματικοί αριθμοί και α, β, γ, μ, M πραγματικοί αριθμοί ώστε οι αριθμοί $\frac{\alpha}{x}, \frac{\beta}{y}, \frac{\gamma}{z}$ να ανήκουν στο διάστημα [μ,M], να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{x+y+z}$ ανήκει στο [μ,M].

Λύση

Έχουμε $\mu \le \frac{\alpha}{x} \le M$, $\mu \le \frac{\beta}{y} \le M$, $\mu \le \frac{\gamma}{z} \le M$ και επειδή $x, y, z > 0$ έπεται

$\mu x \le \alpha \le Mx$, $\mu y \le \beta \le My$, $\mu z \le \gamma \le \mu z$.

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $\mu(x+y+z) \le \alpha + \beta + \gamma \le M(x+y+z)$ και επειδή $x+y+z > 0$ έπεται

$$\mu \le \frac{\alpha+\beta+\gamma}{x+y+z} \le M$$

Άσκηση 2

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,x,y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \le (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2) \quad (1)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί με α + β + γ = 1 να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \ge 9$$

γ) Αν $x^2+y^2+z^2=56 \ (2)$, τότε να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = x+2y+3z.$$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$(\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + (\gamma z)^2 + 2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\gamma\alpha zx \le$
$\le \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 + \alpha^2 z^2 + \beta^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \beta^2 z^2 +$
$+ \gamma^2 x^2 + \gamma^2 y^2 + \gamma^2 z^2$, ή αρκεί:

$0 \le (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2$, το οποίο ισχύει.

Η ισότητα προφανώς ισχύει όταν και μόνο $\alpha y = \beta x$, $\beta z = \gamma y$, $\gamma x = \alpha z$ (i). Στην περίπτωση $\alpha\beta\gamma \ne 0$ οι σχέσεις (i) παίρνουν την ευκολομνημόνευτη μορφή: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ (ii).

β) Λόγω του (α) έχουμε:

$$\left(\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \le$$
$$\le (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

δηλαδή $9 \le \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

Β΄ Τρόπος

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}$$
$$= 1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}+1=$$

$$=3+\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\geq 3+2+2+2=9,$$

διότι το άθροισμα αντιστρόφων θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

- Άλλη μια λύση μπορεί να δοθεί άμεσα με τη βοήθεια της ανισότητας αριθμητικού – αρμονικού μέσου, δηλαδή τη σχέση: $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}$.

γ) Προφανώς σύμφωνα με την (1) έχουμε:

$$A^2=(x+2y+3z)^2\leq(1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2)=$$

$$=14\cdot 56=2^4\cdot 7^2=28^2$$

οπότε $|A|\leq 28$, δηλαδή $-28\leq A\leq 28$.

Το ίσον ισχύει μόνο όταν $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\lambda$, δηλαδή $x=2\lambda,\ y=2\lambda,\ z=3\lambda$, οπότε

$$(2)\Leftrightarrow\lambda^2+4\lambda^2+9\lambda^2=56\Leftrightarrow 14\lambda^2=56\Leftrightarrow\lambda^2=4\Leftrightarrow\lambda=\pm 2.$$

Για $\lambda=2$, δηλαδή $x=2,\ y=4,\ z=6$ έχουμε $A=28$ (μέγιστη τιμή) και για $\lambda=-2$, δηλαδή $x=-2,\ y=-4,\ z=-6$ έχουμε $A=-28$ (ελάχιστη τιμή).

Άσκηση 3

Έστω x, y, z, ω θετικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $2x>y$, $y^2=x^2+xz$, $yz=x\omega+xy$.

Να δείξετε ότι $\frac{3\omega}{4}<z<\frac{3y}{2}$ (Ι)

Λύση

Από την $2x>y$ υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε $x^2>\frac{y^2}{4}$, οπότε σε συνδυασμό με την $y^2=x^2+xz$ έπεται $y^2>\frac{y^2}{4}+xz$, δηλαδή $\frac{3y^2}{4}>xz$.

Πολλαπλασιάζοντας την $2x>y$ με z παίρνουμε $2xz>yz$, οπότε $\frac{3y^2}{4}>\frac{yz}{2}$. Άρα $\frac{3y}{2}>z$.

Από τις σχέσεις $2xz>yz$ και $yz=x\omega+xy$ έπεται $2xz>x\omega+xy$, οπότε $2z>\omega+y$.

Αποδείχθηκε προηγουμένως ότι $y>\frac{2}{3}z$.

Άρα $2z>\omega+\frac{2}{3}z$, οπότε $\frac{4}{3}z>\omega$, δηλαδή $z>\frac{3\omega}{4}$.

- Άμεση συνέπεια των σχέσεων (Ι) είναι η σχέση $y>\frac{1}{3}\omega$ (ΙΙ) Θα μπορούσε άραγε η (ΙΙ) να προκύψει απ' ευθείας, χωρίς δηλαδή τη χρήση των σχέσεων (Ι) ;;

Άσκηση 4

Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1+|\alpha+\beta+\gamma|}\leq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}+\frac{|\gamma|}{1+|\gamma|}$$

Λύση

Αν α+β+γ = 0, τότε προφανώς ισχύει.

Αν α+β+γ ≠ 0, θα βασιστούμε προφανώς στη γνωστή σχέση $|\alpha+\beta+\gamma|\leq|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ (1)

Με βάση την (1) όμως, καταλήγουμε στην $\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1+|\alpha+\beta+\gamma|}\geq\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}$, ενώ θέλαμε το α΄ μέλος να είναι μικρότερο από το αντίστοιχο β΄ μέλος. Ενδείκνυται λοιπόν να κατασκευάσουμε πρώτα το αντίστροφο του α΄ μέλους δηλαδή το $\frac{1+|\alpha+\beta+\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|}=\frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}+1$ το οποίο προφανώς θέλουμε να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το αντίστοιχο β΄ μέλος.

Πράγματι: $(1)\Rightarrow\frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}\geq\frac{1}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}+1\geq\frac{1}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}+1\Rightarrow$$

$$\frac{1+|\alpha+\beta+\gamma|}{|\alpha+\beta+\gamma|}\geq\frac{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1+|\alpha+\beta+\gamma|}\leq\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}=$$

$$=\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}+\frac{|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}+\frac{|\gamma|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}$$

$$\leq\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}+\frac{|\beta|}{1+|\beta|}+\frac{|\gamma|}{1+|\gamma|},$$ αφού

$$\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\le\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}$$
$$\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\le\frac{|\beta|}{1+|\beta|}$$
$$\frac{|\gamma|}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\le\frac{|\gamma|}{1+|\gamma|}$$

Β΄ Τρόπος

Μπορούμε να γράψουμε απ' ευθείας:

$\dfrac{|\alpha+\beta+\gamma|}{1+|\alpha+\beta+\gamma|}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}}$ *, για να έχουμε το* $|\alpha+\beta+\gamma|$ *μόνο σε μια θέση στον παρονομαστή.*

Τότε θα έχουμε άμεσα …

$$(1)\Rightarrow\frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}\ge\frac{1}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+\frac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}\ge 1+\frac{1}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}\Rightarrow$$
$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{|\alpha+\beta+\gamma|}}\le\frac{1}{1+\dfrac{1}{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}}=\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{1+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}$$

κ.λ.π.

- *Και στις δύο περιπτώσεις βέβαια θεωρήσαμε το α΄ μέλος κ ως αντίστροφο του* $\frac{1}{\kappa}$ *και κατασκευάσαμε πρώτα το* $\frac{1}{\kappa}$.

Γ΄ Τρόπος

Μια άμεση λύση μπορεί να δοθεί με βάση τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$, $t\ne-1$ *η οποία έχει την ιδιότητα* $-1<x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$, *αν θέσουμε* $x=|\alpha+\beta+\gamma|$, $y=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$.

Άσκηση 5

α) Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha-\alpha^2\le\frac{1}{4}$

β) Έστω $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{9\alpha^2+8\alpha\beta+7\beta^2\le 6.}$$

Να αποδείξετε ότι $7\alpha+5\beta+12\alpha\beta\le 9$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $0\le\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}$ ή $0\le(\alpha-\frac{1}{4})^2$ το οποίο ισχύει.

β) Από το (α) έχουμε $\alpha\le\alpha^2+\frac{1}{4}$ και $\beta\le\beta^2+\frac{1}{4}$,

οπότε $7\alpha+5\beta\le 7\alpha^2+\frac{7}{4}+5\beta^2+\frac{5}{4}$,

δηλαδή $7\alpha+5\beta\le 7\alpha^2+5\beta^2+3$

Επίσης $4\alpha\beta\le 2\alpha^2+2\beta^2$.

Άρα $7\alpha+5\beta+4\alpha\beta\le 7\alpha^2+5\beta^2+2\alpha^2+2\beta^2+3$

δηλαδή $7\alpha+5\beta+4\alpha\beta\le 9\alpha^2+7\beta^2+3$

Προσθέτοντας $8\alpha\beta$ στα δυο μέλη παίρνουμε

$$7\alpha+5\beta+12\alpha\beta\le 9\alpha^2+7\beta^2+8\alpha\beta+3\le 9$$

Άσκηση 6

α) Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ge(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

β) Έστω x, y, z θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε x + y + z = 1. Να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2+(z+\frac{1}{z})^2\ge\frac{100}{3}}$$

Λύση

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$, ή

αρκεί $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\ge 0$,

ή αρκεί

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\ge 0$, ή

αρκεί $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\ge 0$,

το οποίο ισχύει.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$3[(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2+(z+\frac{1}{z})^2]\ge 100$$

Έχουμε σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα

$3[(x+\frac{1}{x})^2+(y+\frac{1}{y})^2+(z+\frac{1}{z})^2]\ge(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z})^2=(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})^2$

Από την άσκηση 2 έχουμε $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 9$ οπότε έπεται το ζητούμενο.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 2 ακόμη Ασκήσεις Άλγεβρας

Κ. Κούστας

Άσκηση 1

Έστω η εξίσωση $\frac{\lambda x-1}{3}+\frac{3-x}{2}=\frac{2\lambda^2-1}{3}$ (1) όπου η παράμετρος $\lambda\in\mathbb{R}$. Να λυθεί και να διερευνηθεί η (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

Λύση

$(1)\Leftrightarrow 2(\lambda x-1)+3(3-x)=2(2\lambda^2-1)\Leftrightarrow$

$2\lambda x-2+9-3x=4\lambda^2-2\Leftrightarrow(2\lambda-3)x=4\lambda^2-9$

$\Leftrightarrow(2\lambda-3)x=(2\lambda-3)(2\lambda+3)$.

α) Για $\lambda\neq\frac{3}{2}$ έχουμε: $(1)\Leftrightarrow x=\frac{(2\lambda-3)(2\lambda+3)}{2\lambda-3}\Leftrightarrow x=2\lambda+3$, μοναδική λύση.

β) Για $\lambda=\frac{3}{2}$ έχουμε: $(1)\Leftrightarrow 0\cdot x=0$, αόριστη.

Άσκηση 2

Σε ένα σημείο ενός δρόμου (Σ_1) στις 12 το μεσημέρι, περνά το όχημα Α που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_A=50\frac{km}{h}$. Τρεις ώρες αργότερα απ' το ίδιο σημείο περνά το όχημα Β που κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_B\frac{km}{h}$ προς την ίδια κατεύθυνση με το όχημα Α.

i) Ποιά ώρα το όχημα Β θα συναντήσει το όχημα Α; (Ονομάστε Σ_2 το σημείο συνάντησης και t_A, t_B τους χρόνους που θα χρειαστούν τα οχήματα Α, Β αντιστοίχως για να διανύσουν την απόσταση $\Sigma_1\Sigma_2$).

ii) Ας θεωρήσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ταχύτητας v_B (με μονάδα τα $50\frac{km}{h}$ στον οριζόντιο άξονα) – χρόνου t_B (με μονάδα την $\frac{1}{2}h$ στον κατακόρυφο άξονα). Τη στιγμή της συνάντησης, το σημείο $\Sigma_2\left(x_{\Sigma_2},y_{\Sigma_2}\right)$ ανήκει στη διχοτόμο 1ου, 3ου τεταρτημορίου. Να βρείτε τι ώρα θα συναντηθούν τα οχήματα Α και Β.

iii) Σε συνέχεια του ερωτήματος (ii) εάν υποδιπλασιαστούν οι ταχύτητες των δυο οχημάτων πώς επηρεάζεται η απόσταση $\Sigma_1\Sigma_2$ και οι χρόνοι που απαιτούνται για να διανυθεί αυτή η απόσταση από τα οχήματα Α και Β;

Λύση

i) Είναι $t_A=t_B+3$. Επιπλέον $\Sigma_1\Sigma_2=50\cdot t_A$ και $\Sigma_1\Sigma_2=v_B\cdot t_B$, οπότε: $50\cdot t_A=v_B\cdot t_B\Rightarrow$ $50\cdot(t_B+3)=v_B\cdot t_B\Rightarrow\ldots\Rightarrow t_B=\frac{150}{v_B-50}$ (1).

Άρα η ώρα συνάντησης είναι: $12+3+\frac{150}{v_B-50}$.

ii) Αφού το Σ_2 είναι σημείο της διχοτόμου 1ου, 3ου τεταρτημορίου θα έχουμε:

$x_{\Sigma_2}=y_{\Sigma_2}\Rightarrow v_B=x_{\Sigma_2}\cdot 50\frac{km}{h}$ και $t_B=y_{\Sigma_2}\cdot\frac{1}{2}h$. Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει $y_{\Sigma_2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{150}{x_{\Sigma_2}\cdot 50-50}\Rightarrow x_{\Sigma_2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{x_{\Sigma_2}-1}\Rightarrow$ $x_{\Sigma_2}^2-x_{\Sigma_2}-6=0\Rightarrow x_{\Sigma_2}=3$, αφού $x_{\Sigma_2}>0$.

Οπότε: $t_B=3\cdot\frac{1}{2}h$ $t_B=1{,}5h$. Άρα η ώρα συνάντησης είναι 16 και 30.

iii) Σύμφωνα με το ερώτημα (ii) έχουμε: $v_A=50\frac{km}{h}$, $v_B=3\cdot 50\frac{km}{h}=150\frac{km}{h}$ και $\Sigma_1\Sigma_2=1{,}5h\cdot 150\frac{km}{h}=225km$.

Στο ερώτημα (iii) έχουμε $v'_A=25\frac{km}{h}$ και $v'_B=75\frac{km}{h}$ και νέο σημείο συνάντησης το Σ'_2.

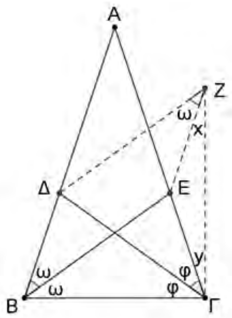
Επομένως έχουμε την σχέση $25\cdot(t'_B+3)=75\cdot t'_B\Rightarrow t'_B+3=3\cdot t'_B\Rightarrow 3=2\cdot t'_B$ $\Rightarrow t'_B=1{,}5h$ και $t'_A=t'_B+3=4{,}5h$ (Δεν μεταβλήθηκαν οι χρόνοι). Εξάλλου $\Sigma_1\Sigma'_2=v'_B\cdot t'_B=75\frac{km}{h}\cdot 1{,}5h=112{,}5km$ (η απόσταση μειώθηκε στο μισό).

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Παράλληλες ευθείες – Παραλληλόγραμμα

από τους Κώστα Γιατρά, Κυριάκο Καμπούκο, Βασίλη Καρκάνη, Μιχάλη Πατσαλιά
2ο Πειραματικό Λύκειο Αθήνας

Άσκηση 1η: Αν δύο διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Απόδειξη: Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ τη διχοτόμο της γωνίας Β και ΓΔ τη διχοτόμο της γωνίας Γ με ΒΕ = ΓΔ. Συμβολίζουμε $\frac{\hat{B}}{2}=\omega$ και $\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\varphi$. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΔΒΕΖ, οπότε ΒΕ = ΔΖ = ΓΔ, ΒΔ = ΕΖ και $\widehat{EZ\Delta}=\widehat{\Delta BE}=\omega$.



Συνεπώς το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ισοσκελές. Με $\Delta\hat{Z}\Gamma=\Delta\hat{\Gamma}Z$ που σημαίνει ω + x = φ + y (1).

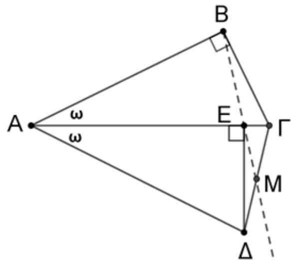
Έστω $\hat{B}\neq\hat{\Gamma}$. Αν $\hat{B}>\hat{\Gamma}$ τότε ω > φ και από σχέση (1) έχουμε y > x. Με y > x στο τρίγωνο ΕΓΖ προκύπτει ΕΖ>ΕΓ και επειδή ΒΔ = ΕΖ συνεπάγεται ΒΔ > ΕΓ. Στα τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΕ ισχύει ΒΓ κοινή, ΔΓ = ΒΕ και ΒΔ > ΕΓ συνεπώς φ > ω ΑΤΟΠΟ. Αν $\hat{B}<\hat{\Gamma}$ τότε ω < φ και από σχέση (1) έχουμε y<x. Με y < x στο τρίγωνο ΕΓΖ προκύπτει ΕΖ<ΕΓ και επειδή ΒΔ = ΕΖ συνεπάγεται ΒΔ < ΕΓ. Στα τρίγωνα ΒΓΔ, ΒΓΕ ισχύει ΒΓ κοινή, ΔΓ = ΒΕ και ΒΔ < ΕΓ συνεπώς φ < ω ΑΤΟΠΟ.Επομένως $\hat{B}=\hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Άσκηση 2η: Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{B}=90^0$, ΑΓ = ΑΔ και ΑΓ διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$. Αν Ε είναι η προβολή του σημείου Δ στην ευθεία ΑΓ, να αποδείξετε ότι η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Β και Ε διέρχεται απο το μέσον Μ της ΓΔ.

Απόδειξη: Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΑΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, επειδή έχουν ΑΓ = ΑΔ και $B\hat{A}\Gamma=\Delta\hat{A}E$ = ω, οπότε ΑΒ = ΑΕ. Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν $B\hat{A}E=\Gamma\hat{A}\Delta=\omega$. Συνεπώς

$A\hat{B}E=A\hat{E}B=A\hat{\Gamma}\Delta=90^0-\frac{\omega}{2}$ (1) και

$A\hat{E}B=M\hat{E}\Gamma$ (κατα κορυφήν) (2)



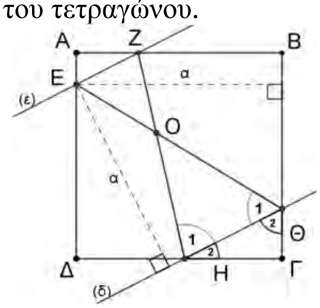
Από τις (1), (2) έχουμε: $E\hat{\Gamma}M=M\hat{E}\Gamma=90^0-\frac{\omega}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΓ είναι ισοσκελές ΜΓ = ΜΕ (3). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ έχουμε $M\hat{\Delta}E=\frac{\omega}{2}$ (4).

Εξάλλου $\Delta\hat{E}M=\Delta\hat{E}\Gamma-M\hat{E}\Gamma=90^o-\left(90^o-\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\omega}{2}$ (5).

Από τις (4), (5) έχουμε $M\hat{\Delta}E=\Delta\hat{E}M=\frac{\omega}{2}$, οπότε το τρίγωνο ΜΕΔ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΕ (6). Από τις (3) και (6) συμπεραίνουμε ότι το Μ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΓΔ.

Άσκηση 3η: Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς μήκους α. Οι παράλληλες ευθείες (ε), (δ), που έχουν απόσταση ίση με το μήκος της πλευράς του τετραγώνου τέμνουν , η μεν (ε) τις πλευρές ΑΔ, ΑΒ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα η δε (δ) τις πλευρές ΓΔ, ΓΒ στα Η, Θ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ΕΘ και ΖΗ ισούται με 45^0.

Απόδειξη: Αν $\hat{\Theta}$, $\hat{H}$ γωνίες του τριγώνου ΟΗΘ θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Theta}+\hat{H}=135^0$. Η απόσταση του σημείου Ε από τις ευθείες ΘΒ, ΘΗ είναι ίση με α, την πλευρά του τετραγώνου.



Άρα το σημείο Ε ισαπέχει από τις ευθείες ΘΒ, ΘΗ, οπότε η ΘΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $H\hat{\Theta}B$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{H}\Theta$. Επειδή ΕΘ και ΖΗ είναι διχοτόμοι των γωνιών $H\hat{\Theta}B$ και $\Delta\hat{H}\Theta$ αντίστοιχα ισχύει

$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\Delta\hat{H}\Theta$ και $\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{2}H\hat{\Theta}B$ (1).

Επίσης για τις εξωτερικές γωνίες $H\hat{\Theta}B$ και $\Delta\hat{H}\Theta$ του ορθογωνίου τριγώνου ΓΗΘ θα ισχύει

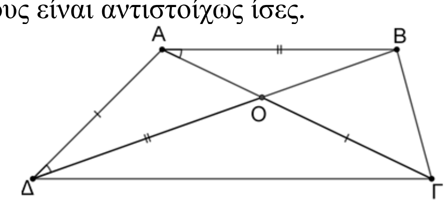
$H\hat{\Theta}B + \Delta\hat{H}\Theta = \left(90^o + \hat{H}_2\right) + \left(90^o + \hat{\Theta}_2\right) = 270^0$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\hat{\Theta}_1 + \hat{H}_1 = 135^0$.

Επομένως $H\hat{O}\Theta = 180^o - 135^o = 45^0$.

Άσκηση 4η: Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο και ισχύει ΑΒ = ΟΔ, ΑΔ = ΟΓ και $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}A$, να αποδείξετε ότι ΑΒ//ΓΔ.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, αφού τότε θα προκύψει $B\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{B}A$ δηλαδη ΑΒ//ΓΔ. Γι' αυτό αρκεί απλώς να δείξουμε ότι $\Delta\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{A}B$, αφού οι πλευρές τους είναι αντιστοίχως ίσες.

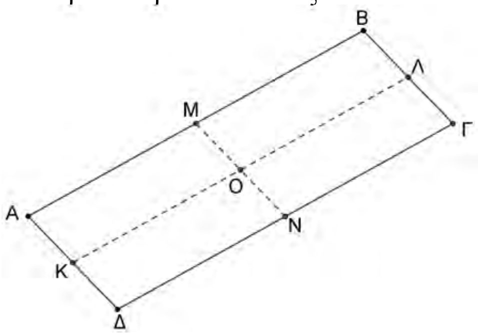


Πράγματι έχουμε: $\Delta\hat{O}\Gamma = B\hat{\Delta}A + \Delta\hat{A}O$ (1) ως εξωτερική του τριγώνου ΟΑΔ. Επίσης $\Delta\hat{A}B = B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O$ (2)

Από τις (1), (2) και εφόσον $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Delta}A$ συμπεραίνουμε ότι $\Delta\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{A}B$.

Άσκηση 5η: Αν σε κυρτό τετράπλευρο, τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών χωρίζουν το τετράπλευρο σε τετράπλευρα με ίσες περιμέτρους, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε ότι οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι ίσες.



Τα τετράπλευρα ΑΜΟΚ, ΟΝΔΚ έχουν ίσες περιμέτρους δηλαδή ισχύει η ισότητα

ΜΟ + ΟΚ + ΑΜ + ΑΚ=ΝΟ + ΟΚ + ΔΚ + ΔΝ (1)

Επειδή τα σημεία Μ, Κ, Λ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου, το τετράπλευρο ΜΛΝΚ είναι παραλληλόγραμμο, του οποίου οι διαγώνιοι διχοτομούνται συνεπώς ΟΜ =ΟΝ (2).

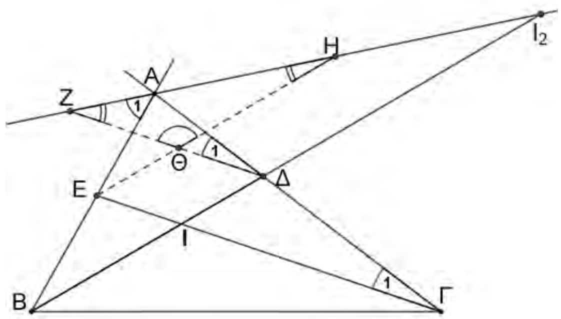
Από το γεγονός ότι το Κ είναι μέσον του ΑΔ συμπεραίνουμε ΑΚ= ΔΚ (3) και επειδή Μ, Ν μέσα των ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα προκύπτει ότι ΑΜ = $\frac{AB}{2}$ και ΔΝ = $\frac{\Gamma\Delta}{2}$ (4). Από τις (1), (2), (3), (4) προκύπτει ΑΒ = ΓΔ.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΑΔ=ΒΓ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Άσκηση 6η: Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ, καθώς και την εξωτερική διχοτόμο χψ της γωνίας Α. Από τα σημεία Δ, Ε φέρνουμε παράλληλες στις διχοτόμους ΓΕ, ΒΔ αντίστοιχα, που τέμνουν την χψ στα σημεία Ζ και Η. Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΔΖ, ΕΗ να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{Z}A = \frac{\hat{B}}{2}, E\hat{H}A = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ β) $Z\hat{\Theta}H = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη



α) Στο τρίγωνο ΔΖΑ είναι.

$\Delta\hat{Z}A = 180^0 - \hat{\Delta}_1 - Z\hat{A}\Delta(1)$. Όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}(2)$

(εντός εκτός επί τα αυτά). Επίσης

$Z\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A} = \frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} + \hat{A} = \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} + \hat{A}$ (3)

Άρα: (1) $\overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \Delta\hat{Z}A = 180^0 - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} - \hat{A} =$

$(180^0 - \hat{A}) - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{B} + \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$.

Συντομότερα:

$\Delta\hat{Z}A = \frac{1}{2}\hat{A}_{\varepsilon\xi.} - \hat{\Delta}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{B} + \hat{\Gamma}\right) - \hat{\Gamma}_1 = \frac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$

Ομοίως (να δείξετε ότι) $E\hat{H}A = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

- Αλλά και απ' ευθείας για το παράκεντρο I_2 έχουμε $A\hat{I}_2B = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, οπότε $E\hat{H}A = A\hat{I}_2B = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

- Ομοίως $\Delta\hat{Z}A = \frac{\hat{B}}{2}$

β) Στο τρίγωνο ΘΖΗ είναι: $Z\hat{\Theta}H = 180^0 - \hat{Z} - \hat{H}$

$$\overset{(\alpha)}{=} 180^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^0 + \left(90^0 - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2}$$

- *Και απ' ευθείας. Αν Ι το έγκεντρο του ΑΒΓ, τότε* $Z\hat{\Theta}H = B\hat{I}\Gamma = 90^o + \frac{A}{2}$ *(Γωνίες με πλευρές παράλληλες και αντίρροπες).*

Ένα ενδυαφέρον σχόλιο επί του προταθέντος θέματος

Γίνεται φανερό πλέον ότι οι παράλληλες προς τις διχοτόμους αντί να άγονται από τα ίχνη Δ,Ε αυτών μπορεί να αχθούν από όποια δήποτε σημεία Δ΄, Ε΄ των ευθειών ΑΓ, ΑΒ διάφορα των κορυφών. Για τα αντίστοιχα σημεία Η΄, Ζ΄ , Θ΄ θα έχουμε και πάλι $E'\hat{H}'A = A\hat{I}_2B = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, $\Delta'\hat{Z}'A = A\hat{I}_3\Gamma = \frac{\hat{B}}{2}$ και $Z'\hat{\Theta}'H' = B\hat{I}\Gamma = 90^o + \frac{A}{2}$ αν όμως οι Ε΄Η΄, Δ΄Ζ΄ είναι παράλληλες στις εξωτερικές διχοτόμους των $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ δηλαδή κάθετες στις ΒΔ, ΓΕ αντιστοίχως, τότε: $\Delta'\hat{Z}'A = 90^o - \frac{\hat{B}}{2}$, $E'\hat{H}'A = 90^o - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$, $Z'\hat{\Theta}'H' = 90^o - \frac{A}{2}$, όπου I_1, I_2, I_3 τα παράκεντρα του ΑΒΓ .

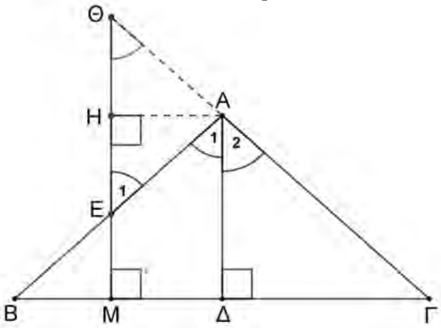
- *Θα μπορούσε λοιπόν να τεθεί ως ερευνητικό θέμα στους μαθητές η γεννίκευση αυτή με την παραλληλία να αναφέρεται σε εσωτερικές ή εξωτερικές διχοτόμους, καθώς και σε μια εσωτερική και μια εξωτερική.*

Άσκηση 7η: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ διαφορετικό από το μέσο της. Στο σημείο Μ φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά ΒΓ που τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Θ αντίστοιχα. Αν ΑΔ και ΑΗ είναι τα ύψη των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΘΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}H = 90^o$ **β) Το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές γ) ΜΘ + ΜΕ = 2ΑΔ.**

Απόδειξη: α) Από την υπόθεση στο τετράπλευρο ΑΗΜΔ είναι: $\hat{H} = \hat{M} = \hat{\Delta} = 90^0$ οπότε αυτό είναι ορθογώνιο Άρα $\Delta\hat{A}H = 90^0$.

β) Η ΑΔ ως ύψος του ισοσκελούς θα είναι και διχοτόμος άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (1). Επίσης $A\Delta \parallel \Theta M$ (ως κάθετες στην ίδια ευθεία), οπότε: $\hat{E}_1 = \hat{A}_2$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{\Theta} = \hat{A}_2$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά) και λόγω της (1) θα είναι $\hat{E}_1 = \hat{\Theta}$. Άρα το τρίγωνο ΑΘΕ είναι ισοσκελές.



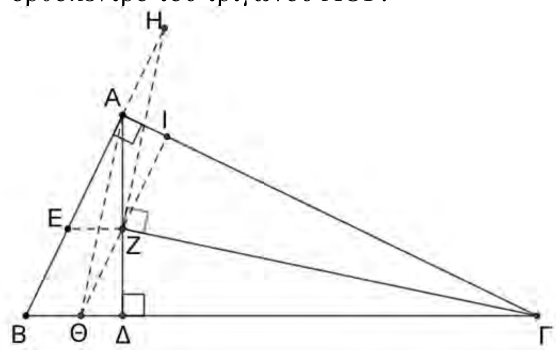
γ) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΘΕ το ΑΗ είναι ύψος, οπότε και διάμεσος. Άρα ΕΗ=ΗΘ (2). Έτσι ΜΘ+ΜΕ = ΜΗ+ΗΘ+ΜΕ $\overset{(2)}{=}$ ΜΗ+(ΕΗ+ΜΕ) = ΜΗ+ΜΗ = 2ΜΗ = 2ΑΔ λόγω του ορθογωνίου ΜΗΑΔ.

Άκηση 8η: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και ΑΔ το ύψος του. Από τυχαίο σημείο Ε της ΑΒ φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΔ στο Ζ. Η κάθετη στη ΓΖ στο Ζ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Η. Επίσης από το Ζ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει τις ΒΓ, ΑΓ στα Η,Ι αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΘΓ

β) ΑΘ || ΖΗ γ) ΑΗ = ΕΒ.

Απόδειξη: α) Από τα δεδομένα $\Theta I \parallel AB$ και $AB \perp A\Gamma$ προκύπτει $\Theta I \perp A\Gamma$, οπότε το ΘΙ είναι ύψος του τριγώνου ΑΘΓ στο οποίο ένα ακόμη ύψος είναι το ΑΔ. Άρα το σημείο τομής τους Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΘΓ.



β) Λόγω του α) το ΓΖ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου ΑΘΓ, δηλαδή $\Gamma Z \perp A\Theta$. Ακόμη $\Gamma Z \perp ZH$ (από υπόθεση). Άρα $A\Theta \parallel ZH$.

γ) Από υπόθεση είναι $\Theta Z \parallel AH$ και λόγω του β) $A\Theta \parallel ZH$ οπότε το ΑΘΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΗ = ΘΖ (1). Επίσης από υπόθεση και το ΘΖΕΒ είναι παραλληλόγραμμο οπότε ΕΒ=ΘΖ (2). Λόγω των (1),(2) είναι ΑΗ =ΕΒ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά Θέματα Άλγεβρας

Λουκάς Κανάκης, Γιώργος Μαυρίδης – Θεσσαλονίκη

Τα θέματα που ακολουθούν αφορούν στην Τριγωνομετρία στα Συστήματα Α΄ Βαθμού και στα μέγιστα και ελάχιστα συναρτήσεων. Φροντίσαμε να αποτελέσει υπόδειξη προς τους μαθητές η αντιμετώπισή τους με τις άκρως απαραίτητες συνθήκες.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημ^4x+συν^4x,\ x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=1-\frac{1}{2}ημ^2 2x$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

ii) $0\le f(x)\le 1$ **για κάθε** $x\in\mathbb{R}$.

iii) Ο αριθμός 1 είναι μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

iv) Ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

Λύση

i) Έχουμε: $f(x)=ημ^4x+συν^4x$

$$=\left(ημ^2x+συν^2x\right)^2-2ημ^2xσυν^2x$$

$$=1^2-\frac{1}{2}\left(4ημ^2xσυν^2x\right)=1-\frac{1}{2}(2ημxσυνx)^2$$

$$=1-\frac{1}{2}ημ^2 2x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε: $0\le ημ^2 2x\le 1$

$$\Rightarrow 0\ge -\frac{1}{2}ημ^2 2x\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le -\frac{1}{2}ημ^2 2x\le 0$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2}ημ^2 2x\le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le f(x)\le 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Παρατηρούμε ότι $f(0)=ημ^4 0+συν^4 0$

$$=0^4+1^4=1.$$

Επομένως, από τη σχέση του ερωτ. **ii)** έχουμε

$$f(x)\le f(0) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Οπότε, ο αριθμός $f(0)=1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f.

iv) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι ο αριθμός 0 είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f. Τότε, υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$. Οπότε, από τη σχέση του ερωτήματος **i)** έχουμε

$$f(x_0)=0\Rightarrow 1-\frac{1}{2}ημ^2 2x_0=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ημ^2 2x_0=1\Rightarrow ημ^2 2x_0=2$$

$$\Rightarrow ημ2x_0=\sqrt{2}>1 \text{ ή } ημ2x_0=-\sqrt{2}<-1,$$

που είναι άτοπο, αφού $-1\le ημ2x_0\le 1$.

Άρα, η υπόθεσή μας, δηλαδή ότι ο αριθμός 0 είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f ήταν εσφαλμένη και συνεπώς ο αριθμός 0 δεν είναι η ελάχιστη τιμή της f.

- Η λύση αυτή είναι ανεξάρτητη από τα ερωτήματα (i), (ii). Με βάση αυτά η απάντηση είναι άμεση αφού $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1\Rightarrow f(x)>0$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx,\quad x\in[0,2\pi]$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση και να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{7\pi}{11}\right)$ και $f\left(\frac{11\pi}{13}\right)$.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=α$ για τις διάφορες τιμές του $α\in\mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y=1$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<1$.

Λύση

i) • Οι τιμές της συνάρτησης

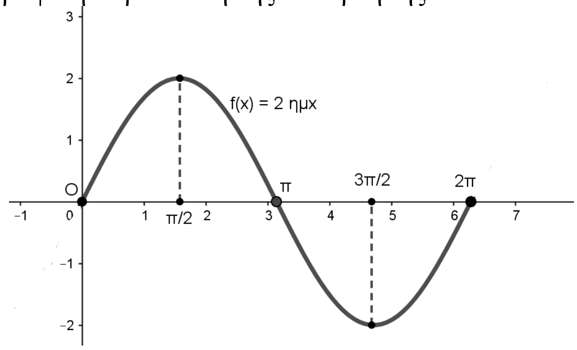
$$f(x)=2ημx,\ x\in[0,2\pi]$$

είναι διπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης ημx, $x\in[0,2\pi]$. Οπότε, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)=2ημx$	0	↗	2 max	↘	0	↘	−2 min	↗	0

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right],\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$. Επίσης, παρουσιάζει για $x=\frac{\pi}{2}$ ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ και για $x=\frac{3\pi}{2}$ ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$.

Με βάση τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f:



- Παρατηρούμε ότι οι τιμές $\frac{7\pi}{11}$ και $\frac{11\pi}{13}$ ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ στο οποίο η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Αρχικά συγκρίνουμε μεταξύ τους τις τιμές $\frac{7\pi}{11}$ και $\frac{11\pi}{13}$. Έχουμε: $\frac{7\pi}{11}-\frac{11\pi}{13}=\frac{91\pi-121\pi}{11\cdot 13}=-\frac{30\pi}{143}<0$

Επομένως, $\frac{7\pi}{11}<\frac{11\pi}{13}$ και συνεπώς $f\left(\frac{7\pi}{11}\right)>f\left(\frac{11\pi}{13}\right)$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

ii) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ συμπίπτει με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας $y=\alpha$ με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Καθώς το α κινείται από το $-\infty$ προς το $+\infty$ πάνω στον άξονα $y'y$ παρατηρούμε ότι η ευθεία $y=\alpha$:

- Δεν έχει κοινά σημεία με την C_f αν $\alpha<-2$
- Έχει ένα κοινό σημείο με την C_f αν $\alpha=-2$
- Έχει δύο κοινά σημεία με την C_f αν $-2<\alpha<0$
- Έχει τρία κοινά σημεία με την C_f αν $\alpha=0$
- Έχει δύο κοινά σημεία με την C_f αν $0<\alpha<2$
- Έχει ένα κοινό σημείο με την C_f αν $\alpha=2$
- Δεν έχει κοινό σημείο με την C_f αν $\alpha>2$.

Επομένως, η εξίσωση $f(x)=\alpha$:

- Είναι αδύνατη αν $\alpha<-2$ ή $\alpha>2$
- Έχει ακριβώς μία ρίζα αν $\alpha=-2$ ή $\alpha=2$
- Έχει ακριβώς δύο ρίζες αν $-2<\alpha<0$ ή $0<\alpha<2$
- Έχει ακριβώς τρεις ρίζες αν $\alpha=0$.

iii) Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=1$. Έχουμε λοιπόν $f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu x=1$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$

Αναζητούμε ποιες από τις παραπάνω τιμές του x ανήκουν στο διάστημα $[0,2\pi]$. Σχετικά με τις τιμές $x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε

$$0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\le 2\kappa\pi\le\frac{11\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{12}\le\kappa\le\frac{11}{12}.$$

Και επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι $\kappa=0$ και αντιστοίχως $x_1=\frac{\pi}{6}$.

Σχετικά με τις τιμές $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε:

$$0\le x\le 2\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\le 2\pi$$

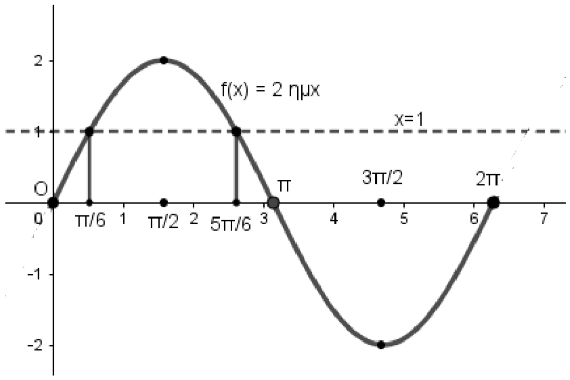
$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6}\le 2\kappa\pi\le\frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12}\le\kappa\le\frac{7}{12}.$$

Και επειδή $\kappa\in\mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\kappa=0$ και αντιστοίχως $x_2=\frac{5\pi}{6}$. Επομένως, τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y=1$ είναι τα σημεία

$$A\left(\frac{\pi}{6},f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \text{ και } B\left(\frac{5\pi}{6},f\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Δηλαδή τα σημεία $A\left(\frac{\pi}{6},1\right)$ και $B\left(\frac{5\pi}{6},1\right)$.

iv) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)<1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=1$.



Έχουμε λοιπόν $f(x)<1 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{6}$ ή $\frac{5\pi}{6} < x \le 2\pi$.

Άσκηση 3

Δίνονται τα συστήματα $\begin{cases} \lambda x + y = 4 \\ x + (\lambda^4 - 2)y = 2\lambda \end{cases}$

και $\begin{cases} \lambda^2 x - 3y = \lambda - 1 \\ x + (1-\lambda^3)y = 3, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

με αντίστοιχες ορίζουσες D και D′.

i) Να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $D + D' = 1$, να αποδείξετε ότι τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Λύση

i) Έχουμε: $D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^4 - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^4 - 2) - 1 \cdot 1$

$= \lambda^5 - 2\lambda - 1$

και $D' = \begin{vmatrix} \lambda^2 & -3 \\ 1 & 1-\lambda^3 \end{vmatrix} = \lambda^2(1-\lambda^3) - 1 \cdot (-3) = \lambda^2 - \lambda^5 + 3$.

Οπότε: $D + D' = (\lambda^5 - 2\lambda - 1) + (\lambda^2 - \lambda^5 + 3)$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Παρατηρούμε ότι $D + D' = (\lambda - 1)^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Άρα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ μία τουλάχιστον από τις ορίζουσες D και D′ είναι διαφορετική του μηδενός και συνεπώς ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

iii) Έχουμε

$$D + D' = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Για $\lambda = 1$ το πρώτο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Για $\lambda = 1$ το δεύτερο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 3y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 1$ τα δύο συστήματα έχουν την ίδια μοναδική λύση $(x, y) = (3, 1)$ και συνεπώς είναι ισοδύναμα.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = συνx - συν^2 x, \quad x \in [0, 2\pi].}$$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{4}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{f(x) \le \frac{1}{4} \ \text{για κάθε} \ x \in [0, 2\pi].}$$

iii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\mathbf{4f(x) = 1 + ημ^4 x \quad (I)}$$

είναι αδύνατη.

Λύση

i) Έχουμε: $f(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow συνx - συν^2 x = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 4συνx - 4συν^2 x = 1 \Leftrightarrow 4συν^2 x - 4συνx + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2συνx - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2συνx = 1 \Leftrightarrow συνx = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow συνx = συν\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2κ\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ κ \in \mathbb{Z}.$

Και επειδή $x \in [0, 2\pi]$, συμπεραίνουμε ότι

$$x = \frac{\pi}{3} \ \text{ή} \ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

ii) Για την $f(x) \le \frac{1}{4}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$4f(x) \le 1$[1], ή $4συνx - 4συν^2 x \le 1$,

ή $4συν^2 x - 4συνx + 1 \ge 0$, ή $(2συνx - 1)^2 \ge 0$

που ισχύει. Αλλά και συνθετικά:

$$\frac{1}{4} - f(x) = \ldots = \frac{(2συνx - 1)^2}{4} \ge 0 \Rightarrow f(x) \le \frac{1}{4}$$

iii) Αποδείξαμε ότι $f(x) \le \frac{1}{4} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Άρα το $\frac{1}{4}$ είναι ελάχιστη τιμή της f την οποία παρουσιάζει σε μια μόνο θέση ακόμη την $\frac{5\pi}{3}$

iv) Αποδείξαμε ότι $4f(x) \le 1$ (1) για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ και προφανώς $g(x) \ge 1$ (2) για κάθε

---

[1] Συμβολικά $f(x) \le \frac{1}{4} \Leftarrow 4f(x) \le 1 \Leftarrow \ldots$

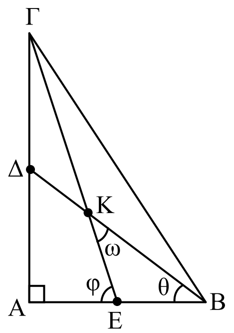
$x \in \mathbb{R}$. Μοναδική περίπτωση λοιπόν να ισχύει η (Ι) είναι να ισχύουν οι (1), (2) συγχρόνως ως ισότητες για κάποιο $x \in [0,2\pi]$. Αλλά στο $[0,2\pi]$ βρήκαμε: $4f(x)=1 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ ενώ για $x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ έχουμε $g(x)=1+\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 1$. Άρα η (Ι) είναι αδύνατη.

- *Φυσικά θα μπορούσαμε αντ' αυτού να βρούμε ότι η (2) ισχύει ως ισότητα στο $[0,2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ μόνο για $x \in \{0,\pi,2\pi\}$ και στη συνέχεια ότι για κάθε $x \in \{0,\pi,2\pi\}$ ισχύει $4f(x)<1$.*

Καθώς επίσης να βρούμε τα σύνολα λύσεων $L_1 = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$ και $L_2 = \{0,\pi,2\pi\}$ των $4f(x)=1,\ g(x)=1$ αντιστοίχως και να δείξουμε ότι $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Έτσι όμως επιφορτιζόμαστε με τη λύση μιας ακόμη εξίσωσης η οποία πιθανόν να είναι δυσκολότερη.

Άσκηση 5

Στο σχήμα φαίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$ και οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ.



Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\varphi = 2\varepsilon\varphi B$ **και** $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}\varepsilon\varphi B$

ii) $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{3\varepsilon\varphi B}{2+2\varepsilon\varphi^2 B}$

iii) $\varepsilon\varphi\omega \le \frac{3}{4}$

iv) **Η γωνία ω γίνεται μέγιστη, όταν και μόνο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

Λύση

i) Έχουμε $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB}$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{A\Gamma}{\frac{1}{2}AB} = 2\frac{A\Gamma}{AB} = 2\varepsilon\varphi B$$

Και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}A\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{1}{2}\varepsilon\varphi B.$

ii) Στο τρίγωνο ΕΒΚ έχουμε $\hat{\varphi} = \widehat{E}_{\varepsilon\xi} = \hat{\omega} + \hat{\theta}$. Επομένως, $\hat{\omega} = \hat{\varphi} - \hat{\theta}$ και συνεπώς

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\varphi-\theta) = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\theta}{1+\varepsilon\varphi\varphi\cdot\varepsilon\varphi\theta}$$

$$= \frac{2\varepsilon\varphi B - \frac{1}{2}\varepsilon\varphi B}{1+2\varepsilon\varphi B\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\varphi B} = \frac{\frac{3}{2}\varepsilon\varphi B}{1+\varepsilon\varphi^2 B}$$

$$= \frac{3\varepsilon\varphi B}{2(1+\varepsilon\varphi^2 B)} = \frac{3\varepsilon\varphi B}{2+2\varepsilon\varphi^2 B}.$$

iii) Για την $\varepsilon\varphi\omega \le \frac{3}{4}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{3\varepsilon\varphi B}{2+2\varepsilon\varphi^2 B} \le \frac{3}{4}$, ή $12\varepsilon\varphi B \le 6+6\varepsilon\varphi^2 B$, ή $2\varepsilon\varphi B \le 1+\varepsilon\varphi^2 B$, ή $1+\varepsilon\varphi^2 B - 2\varepsilon\varphi B \ge 0$, ή $(1-\varepsilon\varphi B)^2 \ge 0$, που ισχύει. Αλλά και συνθετικά

$$\frac{3}{4} - \varepsilon\varphi\omega = \ldots = \frac{6(\varepsilon\varphi B-1)^2}{2+2\varepsilon\varphi^2 B} \ge 0$$

iv) Επειδή η εφω είναι γνησίως αύξουσα στο $(0°, 90°)$, η γωνία ω θα γίνει μέγιστη αν και μόνον αν η εφω γίνει μέγιστη, δηλαδή $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}\ (\text{i})$.

Έχουμε: $(\text{i}) \Leftrightarrow (1-\varepsilon\varphi B)^2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = 1$

$\Leftrightarrow \widehat{B} = 45°$, αφού $0° < \widehat{B} < 90°$.

Άρα, η γωνία ω γίνεται μέγιστη, όταν και μόνο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Σχόλιο: Δοθέντος πλέον ότι $0 < \varepsilon\varphi\omega \le \frac{3}{4}$ η εξίσωση $\frac{3x}{2+2x^2} = \varepsilon\varphi\omega$ με άγνωστο $x = \varepsilon\varphi B$, δηλαδή η $(2\varepsilon\varphi\omega)x^2 - 3x + 2\varepsilon\varphi\omega = 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 16\varepsilon\varphi^2\omega = (3-4\varepsilon\varphi\omega)(3+4\varepsilon\varphi\omega) \ge 0$ και θετικές ρίζες τις $x_1 = \frac{3+\sqrt{\Delta}}{4\varepsilon\varphi\omega} \ge 1$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{\Delta}}{4\varepsilon\varphi\omega} \le 1$ με $x_1 x_2 = 1$ (γιατί ;) Αν λοιπόν $\hat{B} \ge \hat{\Gamma}$, τότε $\varepsilon\varphi B = x_1$ και $\varepsilon\varphi\Gamma = \sigma\varphi B = \frac{1}{x_1} = x_2$

- *Ο υπολογισμός των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου συναρτήσει της γωνίας ω είχε δοθεί ως θέμα στο Ε.Μ.Π. το 1931 και μας είχε* *προταθεί για τη στήλη (Θέματα Παλαιοτέρων εποχών) από το συνάδελφο Τηλέμαχο Μπαλτσαβιά το καλοκαίρι. Με την ευκαιρία αυτή πραγματοποιείται η επιθυμία και των τριών συναδέλφων τους οποίους ευχαριστούμε.*

Άσκηση 6

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι άρτια και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την $f(0)$.

iii) Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα πάνω και στη συνέχεια οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^2-4x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

Ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f;

Λύση

i) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ έχουμε $-x_1,-x_2\in(-\infty,0]$ και $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow$ $f(-x_1)<f(-x_2)$, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$. Επειδή η συνάρτηση f είναι άρτια, η τελευταία σχέση γράφεται $f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii) • Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$. Οπότε, για κάθε $x\le 0$ έχουμε

$$f(x)\ge f(0).$$

• Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Οπότε, για κάθε $x\ge 0$ έχουμε

$$f(x)\ge f(0).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$f(x)\ge f(0) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή την $f(0)$.

iii) Με βάση την υπόθεση, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και στη συνέχεια κατά 3 μονάδες προς τα κάτω. Επομένως,

$$f(x)=g(x+2)-3=(x+2)^2-4(x+2)+8-3$$
$$=x^2+4x+4-4x-8+8-3=x^2+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Στη μνήμη του Βαγγέλη Ευσταθίου

Στις 9 Μαΐου 2018, έφυγε απροσδόκητα από κοντά μας ο Βαγγέλης Ευσταθίου. Καταγόταν από την Αίγινα, μεγάλωσε στην Αθήνα και σπούδασε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών. Ένας εκλεκτός συνάδελφος, μέλος της Ε.Μ.Ε. από τα πρώτα χρόνια μετά την απόκτηση του πτυχίου του με μεγάλη και ανιδιοτελή συνεισφορά στη Μαθηματική Εταιρεία κατά τις διετίες 2001-2003, 2003-2005, 2013-2015, ως ταμίας του ΔΣ για πολλά χρόνια και ως υπεύθυνος για την έκδοση του περιοδικού Ευκλείδη Β'.

Ασυναγώνιστος σε θέματα οργάνωσης, ήταν ένας πολύτιμος και αποτελεσματικός συνεργάτης σε όλα τα Δ.Σ. που συμμετείχε. Η απουσία του αναμφισβήτητα θα είναι δυσαναπλήρωτη.

Από τα πρώτα χρόνια μετά τη λήψη του πτυχίου του ίδρυσε το Φροντιστήριο του το οποίο λειτούργησε με μεγάλη επιτυχία μέχρι πέρυσι, αφού ήταν και εξαιρετικός Μαθηματικός και δάσκαλος με μεγάλη μεταδοτικότητα Ανέπτυξε παράλληλα και επιτυχημένη επιχειρηματική δραστηριότητα στον τομέα της Ναυτιλίας, με την ίδρυση μιας πολύ καλής Ναυτιλιακής Επιχείρησης. Το περασμένο Φθινόπωρο στο νησί της Λευκάδας όπου εδραζόταν η επιχείρηση του, συνεισέφερε τα μέγιστα στην οργάνωση πολύ επιτυχούς συνεδρίου μας.

Ως αγαπητός συνάδελφος, πάντα καλόκαρδος και καλοσυνάτος, είχε μόνο φίλους στους κόλπους της Ε.Μ.Ε. Τον αποχαιρετάμε όλοι με βαθιά την αίσθηση της πίκρας.

Ανάργυρος Φελλούρης

Καθηγητής Μετσοβίου Πολυτεχνείου, Πρόεδρος της ΕΜΕ

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά Θέματα Γεωμετρίας

Σαράφης Γιάννης
Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί Θεσσαλονίκης

Με τις ασκήσεις που ακολουθούν έγινε προσπάθεια να καλυφθεί η ύλη από το $6^{ο}$ μέχρι το $9^{ο}$ κεφάλαιο της Γεωμετρίας Α και Β Λυκείου.
Πριν από τη λύση της άσκησης υπάρχουν κάποιες σκέψεις οι οποίες μας βοηθάνε στην επίλυσή της.

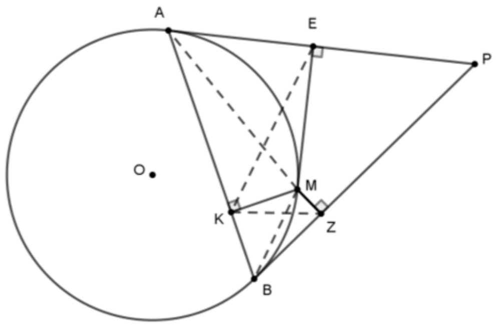
Άσκηση 1η

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο και σημείο Ρ εξωτερικό του κύκλου. Φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Έστω τυχαίο σημείο Μ του ελάσσονος τόξου ΑΒ. Φέρουμε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΜΚ, ΜΕ, ΜΖ στα τμήματα ΑΒ, ΡΑ, ΡΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- **i)** $\widehat{KBM} = \widehat{MZK}$
- **ii)** $\widehat{EKM} = \widehat{MZK}$
- **iii)** $MK^2 = ME \cdot MZ$

Λύση

Σκέψεις…
Η ύπαρξη γωνιών χορδής και εφαπτομένης μας παραπέμπει στην ισότητα με εγγεγραμμένες γωνίες. Έχουμε ορθές γωνίες σε τετράπλευρα οπότε σκεφτόμαστε τα εγγράψιμα τετράπλευρα και τις ιδιότητες τους. Η σχέση με τα ευθύγραμμα τμήματα μπορεί να μετατραπεί σε ισότητα κλασμάτων οπότε θα ανατρέξουμε στην ομοιότητα τριγώνων.



- **i)** Έχουμε $\widehat{MKB} = \widehat{MZB} = 90^\circ$ οπότε το τετράπλευρο ΚΒΖΜ είναι εγγράψιμο, άρα οι γωνίες $\widehat{KBM}$ και $\widehat{KZM}$ είναι ίσες.
- **ii)** Έχουμε $\widehat{AKM} = \widehat{AEM} = 90^\circ$ οπότε το τετράπλευρο ΑΚΜΕ είναι εγγράψιμο, άρα οι γωνίες $\widehat{EKM}$ και $\widehat{EAM}$ είναι ίσες. Η $\widehat{EAM}$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης οπότε είναι ίση με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{KBM}$. Άρα $\widehat{EAM}$ = $\widehat{EKM}$ και $\widehat{EAM}$ = $\widehat{KBM}$ = $\widehat{MZK}$ όποτε $\widehat{EKM}$ = $\widehat{MZK}$.
- **iii)** Τα τρίγωνα ΚΜΕ και ΚΜΖ είναι όμοια διότι έχουν $\widehat{EKM} = \widehat{MZK}$ και $\widehat{MEK} = \widehat{MKZ}$ (όπως στο ερώτημα ii).

$$\frac{MK}{ME} = \frac{MZ}{MK} \Rightarrow MK^2 = ME \cdot MZ.$$

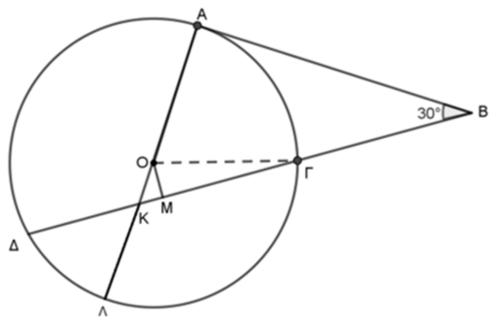
Άσκηση 2η

Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και σημείο Β εξωτερικό του κύκλου τέτοιο ώστε για το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ να ισχύει ΒΑ=2R. Από το σημείο Β φέρουμε τέμνουσα στον κύκλο ΒΓΔ, ώστε $\widehat{AB\Delta} = 30^\circ$. Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΟ, ΓΔ.

- **i)** **Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το μήκος του τμήματος ΟΚ.**
- **ii)** **Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το μήκος της χορδής ΓΔ.**

Λύση

Σκέψεις…
Για να υπολογίσουμε το μήκος μιας χορδής αρκετές φορές χρειάζεται να φέρουμε το απόστημα στη χορδή. Το απόστημα είναι μεσοκάθετος της χορδής οπότε αν είναι εύκολο υπολογίζουμε το μισό μήκος της χορδής. Έχουμε ορθογώνια τρίγωνα με γωνία 30° οπότε θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη ιδιότητα, όπως και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



Φέρουμε το απόστημα ΟΜ στη χορδή ΓΔ. Επειδή Μ μέσο της χορδής ΓΔ αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος ΜΓ.

- **i)** Επειδή το τμήμα ΒΑ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο έχουμε $OA \perp AB$, οπότε το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ορθογώνιο. Επειδή η γωνία $\widehat{ABK} = 30^\circ$ προκύπτει $AK = x$, $BK = 2x$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ έχουμε $BK^2 - AK^2 = AB^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x^2 - x^2 = 4R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4R^2}{3} > R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = x = \frac{2R\sqrt{3}}{3} > R = AO,\ \ BK = \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

Άρα το O είναι μεταξύ των A,K, οπότε

$$OK = AK - AO = \frac{2R\sqrt{3}}{3} - R = \frac{R\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3}$$

ii) Οι γωνίες $\widehat{ABK}$ και $\widehat{KOM}$ είναι οξείες και έχουν τις πλευρές τους κάθετες, οπότε είναι ίσες, άρα $\widehat{KOM} = 30^\circ$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OMK έχουμε $\widehat{KOM} = 30^\circ$, οπότε $KM = \frac{OK}{2}$ και $OM^2 = OK^2 - KM^2 =$

$$= OK^2 - \frac{OK^2}{4} = \frac{3}{4}OK^2.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο OMΓ έχουμε $M\Gamma^2 = O\Gamma^2 - OM^2 = R^2 - \frac{3}{4}OK^2$, οπότε:

$$\Gamma\Delta^2 = 4M\Gamma^2 = 4R^2 - 3OK^2$$

$$= 4R^2 - 3\frac{R^2\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}{9} \Rightarrow \Gamma\Delta = R\sqrt{4\sqrt{3}-3}$$

Παρατήρηση: Με χρήση δύναμης σημείου ως προς κύκλο, θα μπορούσε η ΓΔ να υπολογιστεί απ' ευθείας μέσω των ΚΓ=y, ΚΔ=z. Πράγματι, βρήκαμε άμεσα ότι $AK = \frac{2R\sqrt{3}}{3},\ BK = \frac{4R\sqrt{3}}{3}$. Αν Λ είναι το αντιδιαμετρικό του Α, τότε

$$y\cdot z = KA\cdot K\Lambda = \frac{2R\sqrt{3}}{3}\left(2R - \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) =$$

$$= \frac{4R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{4R^2}{3} (1)$$

και $B\Gamma\cdot B\Delta = BA^2 \Rightarrow (BK-y)(BK+z) = 4R^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BK^2 + BK(z-y) - yz = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16R^2}{3} + \frac{4R\sqrt{3}}{3}(z-y) + \frac{4R^2}{3} - \frac{4R^2\sqrt{3}}{3} = 4R^2$$

$$\Rightarrow 4R + \sqrt{3}(z-y) + R - R\sqrt{3} = 3R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z - y = R - \frac{2R\sqrt{3}}{3}\ (2)$$

Λόγω των (1), (2) τα z,-y είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2 - \left(R - \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)t + \frac{4R^2}{3} - \frac{4R^2\sqrt{3}}{3} = 0$ με διακρίνουσα $D = R^2\left(4\sqrt{3}-3\right) > 0,$ οπότε

$$\Gamma\Delta = z + y = z - (-y) = \frac{\sqrt{D}}{\alpha} = R\sqrt{4\sqrt{3}-3},$$ αφού $z, y > 0$ και $\alpha = 1 > 0$.

Άσκηση 3η

i) **Να βρείτε τις συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιεί το $x \in \mathbb{R}$, ώστε οι αριθμοί x^2-1, $2x+1$, x^2+x+1 να είναι μήκη πλευρών τριγώνου.**

ii) **Να υπολογίσετε τη γωνία η οποία βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου που δημιουργείται από τα παραπάνω μήκη πλευρών.**

Λύση

Σκέψεις…

Θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα. Για να βρούμε τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς των πλευρών(ανα δύο). Για να βρούμε το είδος του τριγώνου θα αξιοποιήσουμε το πόρισμα της γενίκευσης του Πυθαγορείου θεωρήματος

i) Για να είναι οι αριθμοί αυτοί μήκη πλευρών τριγώνου, πρέπει και αρκεί να είναι θετικοί, δηλαδή $x > 1$ και ο μεγαλύτερος από αυτούς να είναι μικρότερος από το άθροισμα των άλλων δύο. Αλλά

$x > 1 \Rightarrow \left(x^2+x+1\right) - \left(x^2-1\right) = x+2 > 0$ και

$\left(x^2+x+1\right) - (2x+1) = x^2 - x = x(x-1) > 0$

Άρα μεγαλύτερος αριθμός από αυτούς είναι ο x^2+x+1.

Πρέπει και αρκεί λοιπόν $x > 1$ και $x^2+x+1 < \left(x^2-1\right) + (2x+1)$ δηλαδή τελικά $x > 1$.

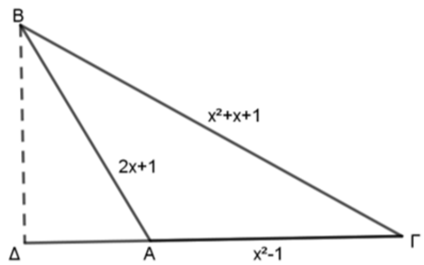
Έστω ΑΒΓ το τρίγωνο με $B\Gamma = x^2+x+1$, $AB = 2x+1$ και $A\Gamma = x^2-1$.

Για το είδος του τριγώνου βρίσκουμε:

$$B\Gamma^2 = \left(x^2+x+1\right)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$A\Gamma^2 + AB^2 = \left(x^2-1\right)^2 + (2x+1)^2 =$$

$x^4 + 2x^2 + 4x + 2$ οπότε



$$B\Gamma^2 - \left(A\Gamma^2 + AB^2\right) =$$

$\left(x^2+x+1\right)^2-\left[\left(x^2-1\right)^2+\left(2x+1\right)^2\right]=$

$2x^3+x^2-2x-1=\left(x^2-1\right)\left(2x+1\right)>0$.

Άρα η γωνία Α είναι αμβλεία.
Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:

$\left(x^2+x+1\right)^2=\left(x^2-1\right)^2+\left(2x+1\right)^2+$

$2\left(x^2-1\right)\cdot A\Delta\Rightarrow$

$\left(x^2-1\right)\left(2x+1\right)=2\left(x^2-1\right)\cdot A\Delta\Rightarrow$

$A\Delta=\dfrac{2x+1}{2}$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ προκύπτει ότι $\widehat{AB\Delta}=30^\circ$, οπότε $\widehat{BA\Delta}=60^\circ$ και συνεπώς $\hat{A}=120^\circ$.

Άσκηση 4η

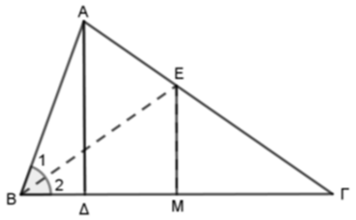
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=2\hat{\Gamma}<90^\circ$, Μ το μέσο της ΒΓ και ΑΔ το ύψος του.

- **i) Να αποδείξετε ότι ΑΒ=2ΜΔ**
- **ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$, όπου α,β,γ τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.**

Λύση

Σκέψεις…

Επειδή έχουμε γωνία διπλάσια μιας άλλης αν φέρουμε διχοτόμο δημιουργούμε ίσες γωνίες, οπότε προκύπτει ισοσκελές τρίγωνο. Αξιοποιούμε τις ιδιότητες που ισχύουν στα ισοσκελή τρίγωνα. Τα παράλληλα τμήματα που δημιουργούνται μας οδηγούν να εφαρμόσουμε το Θ. Θαλή.



Έχοντας διχοτόμο χρησιμοποιούμε το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου. Για το πλήθος των ριζών βρίσκουμε την διακρίνουσα του τριωνύμου. Η σχέση μεταξύ των πλευρών που χρειαζόμαστε θα προκύψει από τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

i) Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΕ, οπότε $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}=\dfrac{\hat{B}}{2}=\hat{\Gamma}$. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές οπότε η διάμεσος ΕΜ είναι και ύψος άρα $EM\perp B\Gamma$. Επειδή $EM//A\Delta$ από το Θ. Θαλή έχουμε $\dfrac{\Delta M}{M\Gamma}=\dfrac{AE}{E\Gamma}\Rightarrow$

$$\frac{\Delta M}{\frac{\alpha}{2}}=\frac{AE}{E\Gamma}\Rightarrow\frac{2\Delta M}{\alpha}=\frac{AE}{E\Gamma}\quad(1)$$

Από το θ. εσωτερικής διχοτόμου έχουμε

$$\frac{AE}{E\Gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}\quad(2)$$

Άρα: $(1),(2)\Rightarrow\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2\Delta M}{\alpha}\Rightarrow\gamma=2\Delta M\Rightarrow AB=2\Delta M$

ii) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:
$\Delta=4\beta^2-4\alpha\gamma=4\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)=4\left(\beta^2-2\alpha\cdot M\Delta\right)$.
Το ΜΔ είναι προβολή της κοινής πλευράς ΑΜ των τριγώνων ΑΜΓ, ΑΜΒ (διαμέσου του ΑΒΓ) στη ΒΓ. Επειδή $90^\circ>\hat{B}>\hat{\Gamma}$, το ίχνος Δ του ύψους ΑΔ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Β, Μ οπότε $\widehat{AM\Gamma}>90^\circ$ και $\widehat{AMB}<90^\circ$. Από το θ. αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ και οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ έχουμε:

$$\beta^2=AM^2+M\Gamma^2+2M\Gamma\cdot M\Delta$$

$$\gamma^2=AM^2+MB^2-2MB\cdot M\Delta$$

αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot M\Delta\Rightarrow\beta^2-2\alpha\cdot M\Delta=\gamma^2>0\Rightarrow\Delta>0$

Η εξίσωση λοιπόν έχει δύο ρίζες άνισες.

Παρατήρηση: Με το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων θα είχαμε συντομότερη λύση.

Άσκηση 5η

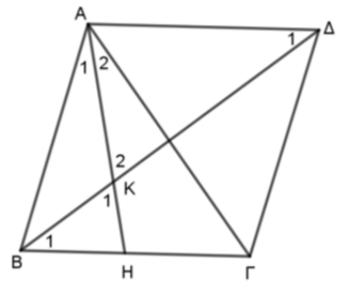
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Κ και την ΒΓ στο σημειο Η. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{KA}{KH}-1=\dfrac{A\Gamma}{AB}$.

Λύση

Σκέψεις…

Η ύπαρξη διχοτόμου στην άσκηση μας παραπέμπει στο θεώρημα εσωτερικής ή εξωτερικής διχοτόμου. Η αναλογία των τμημάτων προκύπτει αρκετές φορές από την ομοιότητα τριγώνων.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{KA}{KH}-\dfrac{A\Gamma}{AB}=1$. Γι' αυτό συμφέρει να μεταφερθούν οι λόγοι στον ίδιο φορέα.



Τα τρίγωνα ΚΒΗ και ΚΑΔ είναι όμοια επειδή έχουν $\widehat{K_1}=\widehat{K_2}$ ως κατακορυφήν και $\widehat{B_1}=\widehat{\Delta_1}$ ως εντός εναλλάξ.

Άρα $\dfrac{KA}{KH}=\dfrac{A\Delta}{BH}=\dfrac{B\Gamma}{BH}$.(1)

Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΗ είναι εσωτερική διχοτόμος οπότε $\dfrac{A\Gamma}{AB}=\dfrac{H\Gamma}{BH}$ (2)

Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$\frac{KA}{KH}-\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{B\Gamma}{BH}-\frac{H\Gamma}{BH}=\frac{B\Gamma-H\Gamma}{BH}=1.$$

Άσκηση 6η

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκος πλευράς 2. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΒΓ=ΓΔ. Αν Μ το μέσο της ΑΔ, να υπολογίσετε:

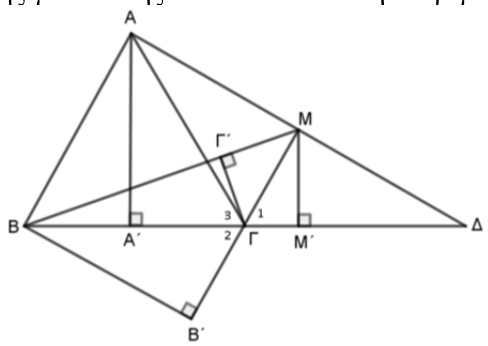
i) Τα μήκη των πλευρών ΜΓ και ΜΒ του τριγώνου ΜΒΓ

ii) Τα μήκη των υψών του τριγώνου ΜΒΓ

Λύση

Σκέψεις…

Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου. Στο τρίγωνο ΜΒΓ αν υπολογίσουμε τη γωνία $\widehat{M\Gamma B}$ από το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς ΜΒ. Αν φέρουμε το ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ δημιουργούνται κάθετα, παράλληλα τμήματα. Ο υπολογισμός των υψών θα προκύψει από την εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος και της γενίκευσης αυτού σε κατάλληλα τρίγωνα.



i) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΓ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ οπότε ΜΓ//ΑΒ και $M\Gamma=\dfrac{AB}{2}=1$. Έχουμε $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}=60^\circ$ ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΒ, ΜΓ και της τέμνουσας ΒΔ. Άρα $\widehat{M\Gamma B}=120^\circ$.Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΜΒΓ έχουμε:

$$MB^2=M\Gamma^2+B\Gamma^2-2M\Gamma\cdot B\Gamma\cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ=$$
$$1+4-2\cdot1\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7,\ \text{οπότε } MB=\sqrt{7}.$$

ii) Έστω $MM', BB', \Gamma\Gamma'$ τα ύψη του τριγώνου ΜΒΓ. Αν φέρουμε το ύψος ΑΑ΄ του τριγώνου ΑΒΓ τότε προκύπτει ότι ΑΑ΄//ΜΜ΄ και

$$MM'=\frac{AA'}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Για να υπολογίσουμε το ύψος ΒΒ΄, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΑ΄Γ και ΒΒ΄Γ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια με ΒΓ=ΑΓ=2 και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2=\hat{\Gamma}_3=60^\circ$. Άρα ΒΒ΄=ΑΑ΄= $\sqrt{3}$.(το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$).

Για να υπολογίσουμε το ύψος ΓΓ΄θα εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΓΓ΄. Επειδή το τμήμα ΜΓ΄ είναι η προβολή της πλευράς ΜΓ στην πλευρά ΜΒ θα εφαρμόσουμε την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΜΒΓ.

Έχουμε:

$$B\Gamma^2=M\Gamma^2+MB^2-2MB\cdot M\Gamma'\Rightarrow$$

$$4=1+7-2\sqrt{7}\cdot M\Gamma'\Rightarrow$$

$$4=1+7-2\sqrt{7}\cdot M\Gamma'\Rightarrow M\Gamma'=\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΓΓ΄ έχουμε

$$\Gamma'\Gamma^2=\Gamma M^2-\Gamma'M^2=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7},\ \text{οπότε } \Gamma'\Gamma=\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Βιβλιογραφία

1. Γεωμετρία Π. Βασιλειάδη (Εκδόσεις Φροντιστηρίων Π. Βασιλειάδη)

2. Γεωμετρία Β΄Λυκείου Γιαννέλου-Δρακόπουλου(Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλο Αθήνα 1984)

3. Γεωμετρία Β Λυκείου Νίκου Κυριακόπουλου(Εκδόσεις Παπαδημητρόπουλου Αθήνα 1991)

4. Γεωμετρία Β Λυκείου Δ. Γουβίτσα (Εκδόσεις Όλυμπος Θεσσαλονίκη 1998)

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα Προσανατολισμού

Σαράφης Γιάννης
Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί Θεσσαλονίκης

Οι ασκήσεις που ακολουθούν αναφέρονται στο κεφάλαιο των Διανυσμάτων και στην Εξίσωση Ευθείας. Πριν από τη λύση κάθε άσκησης υπάρχουν κάποιες σκέψεις οι οποίες μας βοηθάνε στην επίλυσή της.

Άσκηση 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ του επιπέδου τέτοιο, ώστε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$. Δίνεται $|\overrightarrow{B\Delta}|=|\overrightarrow{AB}|=4$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=4\sqrt{3}$.

i) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι μέσο του ΑΓ.

ii) Να αποδείξετε ότι $A\hat{B}\Gamma=90^\circ$.

iii) Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$.

iv) Έστω διάνυσμα $\vec{\delta}=(3,-1)$ και η κορυφή Α(2,1). Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\delta}$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

Λύση

Σκέψεις…

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Για να είναι $A\hat{B}\Gamma=90^\circ$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$. Η γωνία των $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma A}$ θα προκύψει από τον τύπο

$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\frac{\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}}{|\overrightarrow{\Gamma B}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma A}|}$. Θέτουμε $\Delta(x,y)$ και αντικαθιστούμε στην σχέση που δίνεται.

i) Ενδείκνυται να θεωρήσουμε ως σημείο αναφοράς το Δ. Οπότε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Rightarrow$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{\Delta B}+2\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}=\vec{0}\Rightarrow$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

ii) Έχουμε $\overrightarrow{B\Gamma}-2\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{B\Delta}$.

Έτσι προκύπτει $\left(\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\left(2\overrightarrow{B\Delta}\right)^2\Rightarrow$

$\overrightarrow{B\Gamma}^2+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}^2=4\overrightarrow{B\Delta}^2\Rightarrow$

$48+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}+16=64\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

iii) Θα υπολογίσουμε την γωνία από την σχέση

$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\frac{\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}}{|\overrightarrow{\Gamma B}|\cdot|\overrightarrow{\Gamma A}|}$. Έχουμε:

$\overrightarrow{\Gamma A}^2=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}\right)^2=\overrightarrow{BA}^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}^2=$

$16+48=64$, οπότε $|\overrightarrow{\Gamma A}|=8$

$\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma B}^2=48$

Άρα $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\frac{48}{4\sqrt{3}\cdot 8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)=\frac{\pi}{6}$, διότι $0\le\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma B},\overrightarrow{\Gamma A}}\right)\le\pi$.

(Μπορούμε να το αποδείξουμε και γεωμετρικά)

iv) Έστω Δ(x,y), οπότε $\overrightarrow{A\Delta}=(x-2,y-1)$.

$\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\delta}\Rightarrow(x-2,y-1)=\frac{1}{3}(3,-1)\Rightarrow$

$\begin{cases}x-2=1\\ y-1=-\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$. Άρα $\Delta\left(3,\frac{2}{3}\right)$.

Άσκηση 2η

i) Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$, όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

ii) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια, ώστε να ισχύουν: $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{5}=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}=\lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$.

β) Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ ως συνάρτηση του λ.

γ) Έστω διάνυσμα $\vec{x}$ για το οποίο ισχύουν $\vec{x}//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$ και $\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Λύση

Σκέψεις…

Για να είναι δύο διανύσματα αντίρροπα αρκεί να σχηματίζουν γωνία 180° . Εξάλλου για μη μηδενικά διανύσματα έχουμε: $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=0$, ενώ: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

i) Έστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=\vec{\alpha}^2-2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|+\vec{\beta}^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συνφ}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$\text{συνφ}=-1 \Leftrightarrow \varphi=\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

ii) Έχουμε $|\vec{\alpha}|=5\lambda$, $|\vec{\gamma}|=3\lambda$

α) Για να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα θα αξιοποιήσουμε το ερώτημα (i).

Από τη σχέση $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ έχουμε

$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=2\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=2|\vec{\beta}|=2\lambda$

$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\gamma}|\big|=|5\lambda-3\lambda|=2|\lambda|=2\lambda$

Άρα $|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\gamma}|\big|$, οπότε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.

β) $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=\vec{\gamma} \Rightarrow |\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}| \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}|^2=|\vec{\gamma}|^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=\vec{\gamma}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\beta}=5\lambda^2$

$\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=2\vec{\beta} \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|=|2\vec{\beta}| \Rightarrow$

$|\vec{\alpha}+\vec{\gamma}|^2=|2\vec{\beta}|^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}^2=4\vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}=-15\lambda^2$

Όμοια $\vec{\beta}\vec{\gamma}=-3\lambda^2$.

Άρα: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\vec{\gamma}=5\lambda^2-3\lambda^2-15\lambda^2=-13\lambda^2$

γ) Έχουμε: $\vec{x}//\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right) \Rightarrow \vec{x}=\kappa\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

$\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right) \Rightarrow \left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)=0 \Rightarrow$

$\left(\vec{x}-\vec{\beta}\right)\cdot\left(2\vec{\beta}\right)=0 \Rightarrow 2\vec{\beta}\vec{x}-2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow$

$2\vec{\beta}\kappa\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)-2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow 2\lambda^2\kappa-6\lambda^2\kappa-2\lambda^2=0 \Rightarrow$

$\kappa=-\frac{1}{2}$. Άρα $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\beta}-\frac{1}{2}\vec{\gamma}$

Άσκηση 3η

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2xy-5x+5y+6=0$.

i) **Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) οι οποίες είναι μεταξύ τους παράλληλες.**

ii) **Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες με τον άξονα x΄x.**

iii) **Να υπολογίσετε το εμβαδό ενός τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες (ε_1) και (ε_2).**

iv) **Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών (ε_1) και (ε_2).**

Λύση

Σκέψεις…

Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού ως προς $t=x-y$ οπότε θα βρούμε την διακρίνουσα. Για να είναι οι ευθείες παράλληλες θα πρέπει να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα x΄x υπολογίζεται από τον συντελεστή διεύθυνσης. Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι ίσο με το τετράγωνο της απόστασης δύο απέναντι πλευρών του. Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης αξιοποιούμε την ιδιότητα ότι ισαπέχει από τις δύο παράλληλες ευθείες.

i) Έχουμε $x^2+y^2-2xy-5x+5y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2-5(x-y)+6=0 \quad (1)$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού ως προς t=x–y με διακρίνουσα $\Delta=(-5)^2-4\cdot 6=1>0$

Επομένως, $(1)\Leftrightarrow x-y=\frac{5\pm 1}{2} \Leftrightarrow$ x–y=2 ή x–y=3.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες τις $\varepsilon_1: x-y-2=0$ και $\varepsilon_2: x-y-3=0$. Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Β΄ Τρόπος (Γενικότερος):

$(1)\Leftrightarrow x^2-(2y+5)x+y^2+5y+6=0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2+y^2+5y+6-\left(\frac{2y+5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\left(x-\frac{2y+5}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x-\frac{2y+5}{2}=\frac{1}{2}$ ή $x-\frac{2y+5}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x-y-3=0$ ή $x-y-2=0$

ii) Έστω ω η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) με τον άξονα x΄x. Τότε έχουμε

$\lambda=\text{εφ}\omega \Rightarrow \text{εφ}\omega=1 \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{4}$, διότι $\omega\in[0,\pi)$.

iii) Το σημείο Α(2,0) ανήκει στην ευθεία (ε_1).

Η πλευρά α του τετραγώνου είναι

$$\alpha=d(A,\varepsilon_2)=\frac{|2-0-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άρα, το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\alpha^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

iv) Έστω $M(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της μεσοπαράλληλης (δ) των ευθειών (ε_1) και (ε_2).

Έχουμε $M\in(\delta)\Leftrightarrow d(M,\varepsilon_1)=d(M,\varepsilon_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{|x_0-y_0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_0-y_0-3|}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow$$

$$x_0-y_0-2=x_0-y_0-3 \text{ ή } x_0-y_0-2=-x_0+y_0+3\Leftrightarrow$$

$2x_0–2y_0–5=0 \Leftrightarrow x_0-y_0=\frac{5}{2}$.

Άρα η μεσοπαράλληλη (δ) έχει εξίσωση $x-y=\frac{5}{2}$

Άσκηση 4η

Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με Α(–1,3). Μια πλευρά του ορίζει ευθεία με εξίσωση x–2y+3=0. Να βρείτε:

i) Τις εξισώσεις των ευθειών που ορίζουν οι άλλες πλευρές του τετραγώνου.

ii) Σημείο της ευθείας ΑΔ το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Μ(3,1) και Λ(–2,–1).

iii) Την οξεία γωνία που δημιουργείται από το διάνυσμα $\vec{\delta}=(-3,1)$ και την ευθεία ΔΓ.

Λύση

Σκέψεις…

Αξιοποιούμε τις ιδιότητες του τετραγώνου. Δηλαδή οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες, οι διαδοχικές πλευρές είναι κάθετες και όλες οι πλευρές είναι ίσες. Το μήκος της πλευράς υπολογίζεται με δύο τρόπους είτε από την απόσταση σημείου από σημείο είτε από την απόσταση σημείου από ευθεία.

i) Ελέγχουμε αν το σημείο Α είναι σημείο της ευθείας x–2y+3=0. Επειδή –1–6+3≠0, το σημείο Α δεν είναι σημείο της ευθείας x–2y+3=0. Άρα η ευθεία x–2y+3=0 ταυτίζεται με την ευθεία ΔΓ ή την ευθεία ΒΓ. Έστω ότι η εξίσωση x–2y+3=0 παριστάνει την πλευρά ΔΓ. Τότε έχουμε: ΑΒ//ΔΓ$\Rightarrow$ $\lambda_{AB}=\lambda_{\Delta\Gamma}=\frac{1}{2}$. Οπότε ΑΒ: $y-3=\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow AB: x–2y+7=0$.

Εξάλλου: $A\Delta\perp\Delta\Gamma\Rightarrow\lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{\Delta\Gamma}=-1\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\lambda_{A\Delta}=-1$ $\Rightarrow\lambda_{A\Delta}=-2$, οπότε η εξίσωση της ΑΔ είναι y–3=–2(x+1), ή 2x+y–1=0.

Επειδή ΒΓ//ΑΔ, η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση 2x+y+κ=0, κ≠-1.

Αλλά

$$d(A,B\Gamma)=d(A,\Gamma\Delta)\ (i)\Rightarrow\frac{|-2+3+\kappa|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|-1-6+3|}{\sqrt{1+4}}\Rightarrow$$

$|\kappa+1|=4\Rightarrow\kappa=3$ ή $\kappa=-5$.

Η εξίσωση της ΒΓ είναι 2x+y+3=0 ή 2x+y–5=0

- Η σχέση (i) μπορεί να αντικατασταθεί από την $d(A,B\Gamma)=(A\Delta)$, αφού βρεθεί πρώτα το Δ ως σημείο τομής των ΑΔ, ΓΔ.

Ανάλογα εργαζόμαστε όταν η x–2y+3=0 παριστάνει την ΒΓ, οπότε βρίσκουμε: $AB: 2x+y-1=0$ και $\Gamma\Delta: 2x+y+3=0$ ή $\Gamma\Delta: 2x+y-5=0$.

ii) Έστω $K(x_0,y_0)$ σημείο της ΑΔ τέτοιο ώστε $(KM)=(K\Lambda)$. Το σημείο Κ βρίσκεται στην ΑΔ οπότε $2x_0+y_0-1=0$ ή $y_0=-2x_0+1$.

Άρα $K(x_0,-2x_0+1)$.

$(KM)=(K\Lambda)\Leftrightarrow\sqrt{(x_0-3)^2+(1+2x_0-1)^2}=$ $\sqrt{(x_0+2)^2+(-1-1+2x_0)^2}\Leftrightarrow$

$(x_0-3)^2+4x_0^2=(x_0+2)^2+4(x_0-1)^2\Leftrightarrow$

$-2x_0=-1\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $K\left(\frac{1}{2},0\right)$.

- Το Κ μπορεί να βρεθεί και ως σημείο τομής της ΑΔ με τη μεσοκάθετο του ΛΜ.

iii) Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{\delta}_1//\Delta\Gamma$, π.χ. το $\vec{\delta}_1=(2,1)$. Έστω $\theta=\left(\widehat{\vec{\delta},\vec{\delta}_1}\right)$, οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}_1}{|\vec{\delta}|\cdot|\vec{\delta}_1|}.$$

Έχουμε: $\vec{\delta}\cdot\vec{\delta}_1=-5$, $|\vec{\delta}|=\sqrt{10}$, $|\vec{\delta}_1|=\sqrt{5}$.

Άρα $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{-5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{3\pi}{4}$ και η ζητούμενη γωνία είναι $\pi-\theta=\frac{\pi}{4}$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Μεθοδική Επανάληψη Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης.
Χαρ. Στεργίου–Χ. Νάκης–Ιωάν. Στεργίου (Εκδόσεις Σαββάλας 2002)

2) Επαναληπτικά Θέματα Μαθηματικών Β Λυκείου.
Αλέξανδρος Τραγανίτης (Εκδόσεις Σαββάλας 2002)

3) Μαθηματικά Προσανατολισμού Β Λυκείου (Εκδόσεις Κανδύλας 2010)

4) Μαθηματικά Β Λυκείου Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών. (Εκδόσεις Μαυρίδη 2016)

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου.

Ν. Χιωτέλης - 1° ΓΕΛ Αθηνών

Η ύλη της Άλγεβρας της Α' Λυκείου δίνει την δυνατότητα της εξοικείωσης των μαθητών με τις έννοιες της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού της και του συνόλου τιμών της καθώς και με τις έννοιες της μονοτονίας και των ακρότατων. Στα παρακάτω παραδείγματα αποφεύγονται οι πολύπλοκες μαθηματικές πράξεις καθώς ο στόχος είναι η κατανόηση των εννοιών.

Άσκηση 1η

Δίνεται η μη σταθερή συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x^2 + 2x + |\lambda - 1|}$$

όπου α, β, λ είναι πραγματικοί αριθμοί.

i) Να δείξετε ότι β≠0.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

iii) Για λ=2 να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς ριζικά και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η γραφική παράσταση να διέρχεται από τα σημεία Α(0,1) και Β(1,3).

Λύση.

i) Δουλεύουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν β=0 τότε η συνάρτηση είναι σταθερή με τύπο $f(x)=\alpha$, που είναι αντίθετο με την υπόθεση, δηλαδή άτοπο. Άρα β≠0.

ii) Πρέπει και αρκεί για κάθε x ϵ R να ισχύει:

$$x^2 + 2x + |\lambda - 1| \geq 0, \text{ δηλαδή } \Delta \leq 0,$$

όπου Δ η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου, αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός.

Αλλά:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 4|\lambda - 1| \leq 0 \Leftrightarrow |\lambda - 1| \geq 1 \Leftrightarrow$$
$$\lambda - 1 \geq 1 \text{ ή } \lambda - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

iii) Για λ=2 η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \alpha + \beta\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \alpha + \beta\sqrt{(x+1)^2} = \alpha + \beta|x+1|$$

Στη συνέχεια πρέπει και αρκεί $f(0)=1$, $f(1)=3$.

Οι σχέσεις αυτές οδηγούν στο σύστημα:

$$1 = \alpha + \beta, 3 = \alpha + 2\beta$$

Με λύση α= –1, β=2.

Άσκηση 2η

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$g(x) = \sqrt[3]{x^4}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης χωρίς τη χρήση του συμβόλου του ριζικού αλλά χρησιμοποιώντας ρητό εκθέτη.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Λύση.

i) Το πεδίο ορισμού αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τη συνθήκη $x^4 \geq 0$. Άρα $A_g = R$.

ii) Αφού $|x|^4 = x^4$ η συνάρτηση γράφεται

$$g(x) = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{4/3}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της απόλυτης τιμής ο τύπος της συνάρτησης μπορεί να γραφτεί απαλλαγμένος από την απόλυτη τιμή $g(x) = x^{4/3}$ για x≥0 και $g(x) = (-x)^{4/3}$ για x<0.

iii) Έστω $0 \leq x_1 < x_2$, τότε $x_1^{4/3} < x_2^{4/3}$ και επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Αν $x_1 < x_2 \le 0$, τότε $-x_1 > -x_2 \ge 0$ και επομένως $(-x_1)^{4/3} > (-x_2)^{4/3}$ Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Από τη συμπεριφορά της καταλαβαίνουμε ότι η συνάρτηση εμφανίζει την ελάχιστη τιμή της μόνο για x=0. Η ελάχιστη αυτή τιμή είναι, $g_{min} = g(0) = 0$.

Άσκηση 3η

Ένα σύρμα μήκους 8 μέτρων κόβεται σε δύο κομμάτια.

Το ένα κομμάτι έχει μήκος x μέτρα. Λυγίζοντας κατάλληλα το κάθε κομμάτι κατασκευάζουμε δύο τετράγωνα.

i) Να γράψετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η μεταβλητή x.

ii) Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων δίνεται από την συνάρτηση:

$$E(x) = \frac{1}{8}x^2 - x + 4,$$

και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

iii) Να εξηγήσετε για πιο λόγο η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και να βρείτε την τιμή του x για την οποία η E παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της E.

iv) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x ώστε το άθροισμα των εμβαδών να ισούται με 5 τετραγωνικά μέτρα.

Λύση.

i) Το ένα κομμάτι έχει μήκος x με $x \in (0,8)$, οπότε το άλλο θα έχει μήκος 8 –x, (προφανώς τότε και $0<8-x<8$).

ii) Με το κομμάτι μήκους x κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο που έχει περίμετρο x άρα πλευρά x/4 και επομένως εμβαδόν $E_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$.

Όμοια το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται από το άλλο κομμάτι μήκους 8–x, είναι $E_2 = \left(\frac{8-x}{4}\right)^2$.

Τελικά το άθροισμα των εμβαδών δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο,

$$E(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = \frac{2x^2 - 16x + 64}{16} = \frac{1}{8}x^2 - x + 4,$$

με πεδίο ορισμού το διάστημα (0,8) όπως εξηγήθηκε στο ερώτημα I.

iii) Η παραπάνω συνάρτηση έχει τη μορφή παραβολής. Επειδή ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι θετικός (1/8), γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Συγκεκριμένα η κορυφή της Κ έχει συντεταγμένες

$$K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right).$$

Στη δική μας περίπτωση έχουμε $\frac{-\beta}{2\alpha} = 4$ και $\frac{-\Delta}{4\alpha} = 2$.

Άρα το ελάχιστο της συνάρτησης εμφανίζεται για x=4.

Τα κομμάτια τότε είναι ίσα με μήκη x=4, 8–x=4 και το συνολικό εμβαδόν τους είναι 2 (σε τετραγωνικά μέτρα).

iv) Στο (0,8) έχουμε:

$$E(x) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{8}x^2 - x + 4 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{6}$$

Όμως $4 - 2\sqrt{6} < 0$ και $4 + 2\sqrt{6} > 8$.

Επομένως καμιά από τις τιμές αυτές δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Συνεπώς δεν υπάρχουν τιμές του x τέτοιες ώστε E(x)=5.

Διαφορετικές οπτικές ενός βασικού θέματος

Από τον **Γιώργο Σ. Τασσόπουλο**

Το θέμα που θα πραγματευτούμε είναι η εύρεση της ικανής και αναγκαίας συνθήκης μεταξύ των συντελεστών ενός τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ώστε οι ρίζες του x_1,x_2 να ικανοποιούν μια συγκεκριμένη σχέση.

Οι πλέον βολικές περιπτώσεις προκύπτουν όταν η σχέση είναι 1ου βαθμού ή συμμετρική ως προς τις ρίζες.

Ας θεωρήσουμε το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+\lambda$ και ας απαιτήσουμε αρχικά: Να βρεθεί το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει κάποια από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $2x_1+x_2=5$ **(1)**

β) $\lambda x_1+x_2=5$ **(2)**

γ) $3\left(x_1^2+x_2^2\right)+5x_1^2x_2+5x_1x_2^2=45$ **(3)**

Λύση

α) Με την προϋπόθεση ότι $\alpha\neq 0$, $\Delta\geq 0$, δηλαδή $9-4\lambda\geq 0$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x_1+x_2=5\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=2\\ x_2=1\\ \lambda=2 \end{array}\right\},$$

δεκτή τιμή του λ, αφού τότε $\Delta=9-4\lambda=9-4\cdot 2=1>0$

β) $$(2)\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda x_1+x_2=5\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} (\lambda-1)x_1=2\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\overset{\lambda\neq 1}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{r} x_1=\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_2=3-\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1=\dfrac{2}{\lambda-1}\\ x_2=\dfrac{3\lambda-5}{\lambda-1}\\ \dfrac{2}{\lambda-1}\cdot\dfrac{3\lambda-5}{\lambda-1}=\lambda\quad (\mathrm{i}) \end{array}\right\}\ (\mathrm{i})\Leftrightarrow \frac{2}{\lambda-1}\cdot\frac{3\lambda-5}{\lambda-1}=\lambda\Leftrightarrow$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+10=0\Leftrightarrow(\lambda-2)\left(\lambda^2-5\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\lambda\in\left\{2,\sqrt{5},-\sqrt{5}\right\}$, δεκτές τιμές αφού ικανοποιούν την $9-4\lambda\geq 0$.

γ) $(3)\Leftrightarrow 3\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]+$
$+5x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=45\Leftrightarrow$
$3(9-2\lambda)+5\cdot\lambda\cdot 3=45\Leftrightarrow\lambda=2$.

δ) Στη συνέχεια ας απαιτήσουμε οι ρίζες να ικανοποιούν μια σχέση μεγαλύτερου βαθμού (μη συμμετρική), π.χ. την $\frac{2}{7}x_1^3+x_2=\frac{23}{7}$ (4), με $\lambda\in\mathbb{Q}$

α΄τρόπος (ίδιος με τον προηγούμενο)

$$(4)\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \dfrac{2}{7}x_1^3+x_2=\dfrac{23}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{2}{7}x_1^3+3-x_1=\dfrac{23}{7}\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \left(x_1-2\right)\left(2x_1^2+4x_1+1\right)=0\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1=2 \text{ ή } x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{2}\\ x_2=3-x_1\\ x_1\cdot x_2=\lambda \end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1=2\\ x_2=1\\ \lambda=2 \end{array}\right\}.$$

Αν $x_1\neq 2$, τότε $x_1\cdot x_2=\lambda\Rightarrow\lambda\notin Q$.

β΄ τρόπος

Εκτελώντας τη διαίρεση $x^3:\left(x^2-3x+\lambda\right)$ βρίσκουμε

$x^3=\left(x^2-3x+\lambda\right)\cdot\left(x+3\right)+\left(9-\lambda\right)x-3\lambda$ για κάθε $x\in R$.

Άρα $x_1^{\,3}=\left(x_1^{\,2}-3x_1+\lambda\right)\cdot\left(x_1+3\right)+$

$+\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda=$

$=0\cdot\left(x_1+3\right)+\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda=\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda$

Ομοίως $x_2^3=\left(9-\lambda\right)x_1^2-3\lambda$.

Ανάγεται λοιπόν στη μορφή (β).

Έτσι έχουμε

$$(3)\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\frac{2}{7}\left[\left(9-\lambda\right)x_1-3\lambda\right]+x_2=\frac{23}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2=\frac{23+6\lambda}{7}\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}\left(11-2\lambda\right)x_1=2+6\lambda\\ x_1+x_2=3\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\overset{\lambda\neq\frac{11}{2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{c}x_1=\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_2=3-\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x_1=\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\\ x_2=\frac{31-12\lambda}{11-2\lambda}\\ x_1\cdot x_2=\lambda\end{array}\right\}$$

Αλλά: $x_1\cdot x_2=\lambda\Leftrightarrow\frac{2+6\lambda}{11-2\lambda}\cdot\frac{31-12\lambda}{11-2\lambda}=\lambda\Leftrightarrow$

$4\lambda^3+28\lambda^2-41\lambda-62=0\Leftrightarrow$

$\left(\lambda-2\right)\left(4\lambda^2+36\lambda+31\right)=0\Leftrightarrow\lambda=2\in Q$,

αφού το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=20\sqrt{5}$, δηλαδή άρρητες ρίζες.

- *Αν η σχέση ήταν μεγαλύτερου βαθμού ως προς* x_1 *ή* x_2 *π.χ. τετάρτου βαθμού τότε ομοίως εκτελώντας τη διαίρεση* $x^4:\left(x^2-3x+\lambda\right)$ βρίσκουμε

$x^4=\left(x^2-3x+\lambda\right)\left(x^2+3x+9-\lambda\right)+$

$+\left(27-6\lambda\right)x+\lambda^2-9\lambda$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$x_i^4=\left(27-6\lambda\right)x_i+\lambda^2-9\lambda$, για $i\in\{1,2\}$

γ΄ τρόπος

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν

($x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$)

ή αντιστρόφως

($x_1=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$)

ουσιαστικά η σχέση (4) ισοδυναμεί με

$$\frac{2}{7}x_1^{\,3}+x_2=\frac{23}{7}\ \text{ ή }\ \frac{2}{7}x_2^{\,3}+x_1=\frac{23}{7},$$

δηλαδή με

$$\left(\frac{2}{7}x_1^{\,3}+x_2-\frac{23}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}x_2^{\,3}+x_1-\frac{23}{7}\right)=0\quad(\mathrm{I})$$

Έχουμε: $(\mathrm{I})\Leftrightarrow\frac{4}{49}\left(x_1\cdot x_2\right)^3-\frac{23}{7}\left(x_1+x_2\right)+$

$+\frac{2}{7}\left(x_1^{\,4}+x_2^{\,4}\right)-\frac{46}{49}\left(x_1^{\,3}+x_2^{\,3}\right)+$

$+x_1\cdot x_2+\frac{529}{49}=0$.

Αλλά $x_1^{\,3}+x_2^{\,3}=\left(x_1+x_2\right)^3-$

$-3x_1\cdot x_2\left(x_1+x_2\right)=27-9\lambda$,

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1\cdot x_2=9-2\lambda,$

$x_1^{\,4}+x_2^{\,4}=\left(x_1^{\,2}+x_2^{\,2}\right)^2-2\left(x_1\cdot x_2\right)^2=$

$=\left(9-2\lambda\right)^2-2\lambda^2=2\lambda^2-36\lambda+81$

Οπότε: $(\mathrm{I})\Leftrightarrow\frac{4}{49}\lambda^3-\frac{23}{7}\cdot3+\frac{2}{7}\left(2\lambda^2-36\lambda+81\right)-$

$-\frac{46}{49}\left(27-2\lambda\right)+\lambda+\frac{529}{49}=0\Leftrightarrow\ldots$

$4\lambda^3+28\lambda^2-41\lambda-62=0$ κλπ.

- *Εντελώς όμοια θα μπορούσαμε να έχουμε:* $(1)\Leftrightarrow\left(2x_1+x_2-5\right)\left(2x_2+x_1-5\right)=0$ *καθώς και* $(2)\Leftrightarrow\left(\lambda x_1+x_2-5\right)\left(\lambda x_2+x_1-5\right)=0$ *κ.λ.π.*

Όσον αναφορά στη σχέση (4) που είναι τρίτου βαθμού ως προς x_1,x_2 *συμφέρει να αναχθεί πρώτα στην πρωτοβάθμια ως προς* x_1,x_2 *σχέση*

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2-\frac{23+6\lambda}{7}\right]=0$$

και στη συνέχεια στην

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_1+x_2-\frac{23+6\lambda}{7}\right]\cdot$$

$$\left[\frac{2\left(9-\lambda\right)}{7}x_2+x_1-\frac{23+6\lambda}{7}\right]=0$$

αντί της (Ι) που είναι μεγαλύτερου βαθμού ως προς $x_1,\ x_2$.

Τελικά συμφερότερος είναι ο δεύτερος τρόπος, αφού ανάγει όλες τις σχέσεις σε πρωτοβάθμιες.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέματα Γ΄ Λυκείου

Σπύρος Γλένης, Μαθηματικός - Πειραματικό Σχολείο Πανεπιστημίου Αθηνών

Τα θέματα που ακολουθούν αναφέρονται στις αντίστροφες συναρτήσεις στο Θεώρημα Bolzano και στην αυστηρή αντιμετώπιση του θεωρήματος εύρεσης του ορίου σύνθεσης συναρτήσεων. Εξετάζονται δε και κάποιες ιδιότητες συνάρτησης μέσω της γραφικής της παράστασης.

Άσκηση 1η

α) Να βρείτε όλες τις γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\sqrt{1+f^2(x)}=\frac{1}{συνx}$ (1) για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

β) Υπάρχει f συνάρτηση «1–1» αλλά όχι γνησίως μονότονη που να ικανοποιεί την ιδιότητα (1);

γ) Υπάρχει συνάρτηση f όχι «1–1» που να ικανοποιεί την ιδιότητα (1);

Λύση

α) $\sqrt{1+f^2(x)}=\frac{1}{συνx}\Leftrightarrow 1+f^2(x)=\frac{1}{συν^2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)=\frac{1}{συν^2x}-1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1-συν^2x}{συν^2x}\Leftrightarrow$

$f^2(x)=\frac{ημ^2x}{συν^2x}\Leftrightarrow f^2(x)=εφ^2x\Leftrightarrow |f(x)|=|εφx|$.

Για το πρόσημο της f στο $Δ=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ θα επιλύσουμε αρχικά την $f(x)=0$. Είναι:

$f(x)=0\Leftrightarrow |f(x)|=0\Leftrightarrow |εφx|=0\Leftrightarrow εφx=0\Leftrightarrow$

$x=0$. Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και f γνησίως φθίνουσα ισχύει $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$. Οπότε $|f(x)|=|εφx|\Leftrightarrow -f(x)=εφx\Leftrightarrow f(x)=-εφx$.

Ομοίως για $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ έχουμε $f(x)\geq f(0)\Rightarrow$ $f(x)\geq 0$. Οπότε $|f(x)|=|εφx|\Leftrightarrow f(x)=-εφx$.

Αποδείξαμε ότι $f(x)=-εφx$ για κάθε $x\in Δ$.

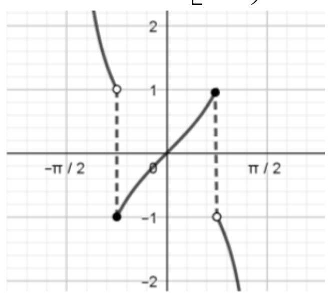
Σχόλιο: Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x)=|εφx|$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι οι

$$f(x)=\begin{cases} εφx, & x\in A \\ -εφx, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-A \end{cases}$$

με $A\subseteq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Δηλαδή υπάρχουν τόσες συναρτήσεις όσα και τα υποσύνολα A του διαστήματος (–π/2, π/2).

β) Αρκεί να βρούμε συνδυασμό των καμπύλων $y=εφx$ και $y=-εφx$ ώστε να μην υπάρχουν σημεία με την ίδια τετμημένη. Μια τέτοια συνάρτηση βλέπουμε στην εικόνα όπου έχουμε επιλέξει ως σύνολο A το διάστημα $A=\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

γ) Μια προφανής περίπτωση συνάρτησης που δεν είναι 1–1 είναι η $f(x)=|εφx|$ που προκύπτει από το σχόλιο, αν θεωρήσουμε $A=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.



- Μερικά ενδιαφέροντα ερωτήματα που αφορούν τις συναρτήσεις με την ιδιότητα (1): Αν η f είναι περιττή τότε θα είναι 1–1; Το αντίστροφο ισχύει; Αν η f δεν είναι 1–1 είναι υποχρεωτικά άρτια;

Άσκηση 2η

Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης y = f(x) .Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)ημ(\pi x)]$ β) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-1}{(x+2)f(x)}$

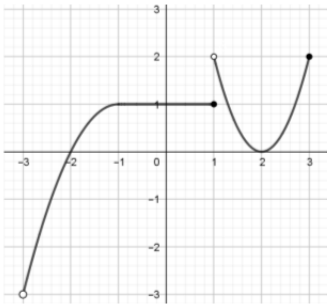
γ) $\lim\limits_{x\to -1}(f\circ f)(|x|)$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-f(x)}{f(x+2)}$

Λύση

α) Εδώ εμφανίζεται για πρώτη φορά το θεώρημα του ορίου σύνθεσης συναρτήσεων σε απλή μορφή και γι' αυτό θα δώσουμε αναλυτικά την απάντηση.

Έχουμε $ημ(\pi x)=h(g(x))$ με $g(x)=\pi x=u$ και $h(u)=ημu$.

Αλλά $\lim_{x\to1} g(x)=\pi=u_0,\ u\neq\pi=u_0$ κοντά στο 1 και $\lim_{u\to\pi} h(u)=\lim_{u\to\pi}\eta\mu u=0$.



Άρα $\lim_{x\to1}\eta\mu(\pi x)=\lim_{x\to1}h(g(x))=0$

Εξάλλου , $\lim_{x\to1^-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1^+}f(x)=2$ επομένως:

$\lim_{x\to1^-}\left[f(x)\eta\mu(\pi x)\right]=1\cdot0=0$,

$\lim_{x\to1^+}\left[f(x)\eta\mu(\pi x)\right]=2\cdot0=0$.

Άρα $\lim_{x\to1}\left[f(x)\eta\mu(\pi x)\right]=0$.

β) $\lim_{x\to-2}(x^2-1)=3$, $\lim_{x\to-2}\left[(x+2)f(x)\right]=0$.

Για $x<-2$ ισχύει $(x+2)f(x)>0$ και για $x>-2$ επίσης ισχύει $(x+2)f(x)>0$.

Τότε $\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x+2)f(x)}=+\infty$.

Άρα $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-1}{(x+2)f(x)}=+\infty$.

γ) Για $x\in(-2,-1)$ έχουμε $1<|x|<2$ οπότε $f(|x|)=f(u)$ με $u=|x|$. Αλλά $\lim_{x\to-1^-}u=1^+$, $u\neq1=u_0$ στο (-2,-1) και $\lim_{u\to1^+}f(u)=2$.

Άρα $\lim_{x\to-1^-}f(f(|x|))=0$. Για $x\in(-1,0)$ ισχύει $0<|x|<1$ Άρα $f(|x|)=1$ και $f(f(|x|)=f(1)=1$.

Τότε $\lim_{x\to-1^+}(f\circ f)(|x|)=\lim_{x\to-1^+}1=1$.

Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα «όριο σύνθετης συνάρτησης» διότι $y=f(|x|)=1=y_0$ για $x\in(-1,0)$. Άρα δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

δ) Η $g(x)=\frac{1-f(x)}{f(x+2)}$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ είναι σταθερή με $g(x)=0$. Τότε $\lim_{x\to0}\frac{1-f(x)}{f(x+2)}=0$.

Φαινομενικά το $\lim_{x\to0}\frac{1-f(x)}{f(x+2)}$ είναι μορφή $\frac{0}{0}$, ωστόσο υπάρχει μια σημαντικότατη ποιοτική διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή: ο παρονομαστής τείνει στο μηδέν ενώ ο αριθμητής είναι μηδέν οπότε και το πηλίκο είναι ταυτοτικά μηδέν κοντά στο $x_o=0$.

Άσκηση 3η

Αν οι πραγματικές συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\Delta=[\alpha,\beta]$ και $f(\Delta)\subseteq g(\Delta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in\Delta$ ώστε $f(x_o)=g(x_o)$.

Λύση: Αν η συνάρτηση g είναι σταθερή τότε $g(\Delta)=\{c\}$. Επειδή $f(\Delta)\neq\varnothing$ και τα μόνα υποσύνολα του $\{c\}$ είναι το $\varnothing$ και το $\{c\}$ υποχρεωτικά $f(\Delta)=\{c\}$ οπότε οι f, g είναι ίσες και ισχύει $f(x_o)=g(x_o)=c$ για κάθε $x_o\in\Delta$.

Αν η g δεν είναι σταθερή, από το θεώρημα μέγιστης κι ελάχιστης τιμής υπάρχουν $\gamma,\delta\in\Delta$ ώστε $g(\gamma)\le g(x)\le g(\delta)$ για κάθε $x\in\Delta$. Επομένως $f(\Delta)\subseteq[g(\gamma),g(\delta)]=g(\Delta)$. Αυτό ισοδυναμεί με την $g(\gamma)\le f(x)\le g(\delta)$ για κάθε $x\in\Delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\gamma<\delta$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ με $h(\gamma)=f(\gamma)-g(\gamma)\ge0$ και $h(\delta)=f(\delta)-g(\delta)\le0$. Άρα $h(\gamma)h(\delta)\le0$.

Αν $h(\gamma)h(\delta)<0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in(\gamma,\delta)$ ώστε $h(x_o)=0$.

Αν $h(\gamma)h(\delta)=0$ τότε $h(\gamma)=0$ ή $h(\delta)=0$ άρα για $x_o=\gamma$ ή $x_o=\delta$ ισχύει $h(x_o)=0$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ένα τουλάχιστο $x_o\in[\gamma,\delta]\subseteq\Delta$ ώστε $h(x_o)=0$ δηλαδή $f(x_o)=g(x_o)$. Είναι σχετικά εύκολο να εξετάσουμε αν το συμπέρασμα ισχύει για Δ = (α, β].

Άσκηση 4η

Για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$f^3(x)+2xf^2(x)+x^2f(x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\quad(1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $x+f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

β) Να επιλύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$

Αν x_0 είναι μια λύση στο (β) ερώτημα:

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο αυτό.

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}$

Λύση

α) $f^3(x)+2xf^2(x)+x^2f(x)=1\Leftrightarrow f(x)\left(x+f(x)\right)^2=1$

Προφανώς $x+f(x)\neq0$ οπότε η συνεχής στο διάστημα $\Delta=\mathbb{R}$ συνάρτηση $g(x)=x+f(x)$ διατηρεί πρόσημο. Από την (1) για $x=0$ έχουμε $f^3(0)=1\Rightarrow f(0)=1$ οπότε $g(0)=1>0$. Άρα $g(x)>0$ δηλαδή $x+f(x)>0$ στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in IR$ έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{1}{(x_1+f(x_1))^2}=\frac{1}{(x_2+f(x_2))^2}$$
$$\Rightarrow x_1+f(x_1)=x_2+f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

Η f είναι «1–1» άρα έχει αντίστροφη.

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{(x+f(x))^2}\Leftrightarrow y=\frac{1}{(x+y)^2}$$

Ισχύει $y>0$, $x+y>0$ και ισοδύναμα έχουμε:

$$\sqrt{y}=\frac{1}{x+y}\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{y}}-y$$

δηλαδή η εξίσωση $f(x)=y$ έχει πραγματική λύση για κάθε $y>0$. Άρα $f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-x, x>0$.

β) Επειδή $f(x)>0$, η $f^{-1}(x)=f(x)$ έχει λύσεις μόνον για $f^{-1}(x)>0$ και

$$f^{-1}(x)>0\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}-x>0\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Επειδή η f^{-1} είναι «1–1» ισχύει

$$f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}-f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x=x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{f^{-1}(x)}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}-x=x$$

$$1=2x\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}^3=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

γ) Στην επίλυση του (β) είδαμε ότι η λύση $x_o=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ικανοποιεί την ισότητα $f^{-1}(x_o)=x_o$ άρα και την $f(x_o)=x_o$. Για $x\neq x_o$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{f(x)-x_o}{f^{-1}(f(x))-x_o}=\frac{u-x_o}{f^{-1}(u)-x_o}=$$
$$=\frac{1}{\frac{f^{-1}(u)-x_o}{u-x_o}}=\frac{1}{\frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(x_o)}{u-x_o}}=h(u)$$

Όπου $u=f(x)$ με: $\lim\limits_{x\to x_o}u=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)=x_o$ και $u\neq x_0$ κοντά στο x_0 (γιατί ;)

Τότε $\lim\limits_{x\to x_o}h(u)=\dfrac{1}{\lim\limits_{u\to x_o}\frac{f^{-1}(u)-f^{-1}(x_o)}{u-x_o}}=\dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(x_o)}$ διότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη με $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-1$, οπότε $\left(f^{-1}\right)'(x_o)=\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)=-2$. Άρα $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=-\frac{1}{2}$,

δηλαδή $f'(x_0)=-\frac{1}{2}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη λοιπόν είναι η $(\varepsilon):y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$, δηλαδή η $(\varepsilon):y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2\sqrt[3]{4}}$

δ) Για $x\neq x_o$ έχουμε: $\dfrac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}=\dfrac{\frac{f^{-1}(x)-x}{x-x_o}}{\frac{f(x)-x}{x-x_o}}=$

$$\frac{\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_o)+x_o-x}{x-x_o}}{\frac{f(x)-f(x_o)+x_o-x}{x-x_o}}=\frac{\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_o)}{x-x_o}-1}{\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}-1}$$

Τότε: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{f(x)-x}=\dfrac{\left(f^{-1}\right)'(x_o)-1}{f'(x_o)-1}=\dfrac{-2-1}{-0{,}5-1}=2.$

Η λύση στο (δ) με κανόνα De L' Hospital προϋποθέτει παράγωγο σε διάστημα κι όχι μόνο σε ένα σημείο x_o. Αρκετά ενδιαφέρον ερώτημα είναι κι η μελέτη των ασύμπτωτων της f.

Άσκηση 5η

Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης $y=f(x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f(x) καθώς και τα διαστήματα όπου είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η σύνθεση $f\circ f$ και να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες.

γ) Να επιλύσετε την εξίσωση $(f\circ f)(x)=1$.

δ) Να μελετήσετε τη συνέχεια της $f\circ f$.

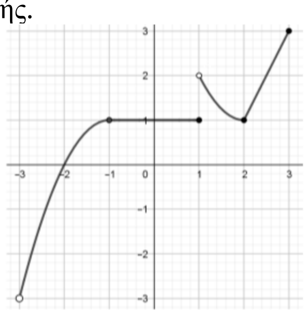
ε) Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f\circ f$.

στ) Να μελετήσετε το πρόσημο της $f\circ f$

Δίνεται ότι $f\left(-1-\sqrt{3}\right)=-2$, $f\left(-1-\sqrt{2}\right)=-1$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού είναι το $\Delta=(-3,3]$ και το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta)=(-3,3]$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-3,1]$ και $(1,3]$. Στο $x_o=1$ η f δεν είναι συνεχής.



β) Η σύνθεση $f\circ f$ ορίζεται όταν

$$\begin{cases} x\in(-3,3] \\ f(x)\in(-3,3] \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-3,3]$$

Για $x=0$: $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(1)=1$

Για $y=0$: $(f\circ f)(x)=0\Leftrightarrow f(f(x))=0\Leftrightarrow f(x)=-2\Leftrightarrow$ $x=-1-\sqrt{3}$. Επομένως η γραφική παράσταση της $f\circ f$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(-1-\sqrt{3},0\right)$ και $B(0,1)$.

γ) $f(f(x))=1\Leftrightarrow -1\le f(x)\le 1$ ή $f(x)=2$ $\Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le x\le 1$ ή $x=2{,}5$.

δ) Για $x_o\in(-3,1)\cup(1,3]$ έχουμε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)=u_o$ με $u_o\in(-3,3]$. Αν $u_o\ne 1$ $\lim\limits_{x\to x_o} f(f(x))=\lim\limits_{u\to u_o} f(u)=f(u_o)=f(f(x_o))$ άρα η $f\circ f$ είναι συνεχής. Από το (γ) έχουμε ότι $u_o\ne 1$ για $x_o\in(-3,-1)\cup(1,2)\cup(2,3]$.

Αν $x\in(-1,1)$ τότε $(f\circ f)(x)=1$ είναι συνεχής ως σταθερή. Αν $x_o=-1$

$$\lim_{x\to -1} f(f(x))=\lim_{u\to 1} f(u)=1=f(f(-1))$$

Αν $x_o=1$, τότε $\lim\limits_{x\to 1^+} f(f(x))=\lim\limits_{u\to 2} f(u)=1=f(f(1))$,

$$\lim_{x\to 1^-} f(f(x))=\lim_{x\to 1^-} 1=1=f(f(1))$$

οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(f(x))=f(f(1))$.

Αν $x_o=2$, τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(f(x))=\lim\limits_{u\to 1^+} f(u)=2$ και $f(f(2))=f(1)=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 2} f(f(x))\ne f(f(2))$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $(-3,2)\cup(2,3]$.

ε) Αν $-3<x_1<x_2\le -1-\sqrt{2}$ ισχύει

$$f(x_1)<f(x_2)\le -1\Rightarrow f(f(x_1))<f(f(x_2))$$

άρα η $f\circ f$ γνησίως αύξουσα στο $\left(-3,-1-\sqrt{2}\right]$.

Αν $-1-\sqrt{2}\le x_1<x_2\le 1$ ισχύει

$$-1\le f(x_1)\le f(x_2)\le 1\Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2))=1$$

επομένως η $f\circ f$ είναι σταθερή στο $\left[-1-\sqrt{2},1\right]$.

Αν $1<x_1<x_2<2$ ισχύει

$$2>f(x_1)>f(x_2)>1\Rightarrow 1<f(f(x_1))<f(f(x_2)).$$

Επίσης αν $1=x_1<x_2<2$

$$1=f(f(x_1))<f(f(x_2))$$

άρα $f\circ f$ γνησίως αύξουσα στο $[1,2)$.

Αν $2<x_1<x_2\le \dfrac{5}{2}$ ισχύει

$$1<f(x_1)<f(x_2)\le 2\Rightarrow f(f(x_1))>f(f(x_2))\ge 1$$

άρα $f\circ f$ γνησίως φθίνουσα στο $\left(2,\dfrac{5}{2}\right]$.

Αν $\dfrac{5}{2}\le x_1<x_2\le 3$ ισχύει

$$2\le f(x_1)<f(x_2)\le 3\Rightarrow 1\le f(f(x_1))<f(f(x_2))$$

άρα $f\circ f$ γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{5}{2},3\right]$.

στ) Επειδή η f έχει ακριβώς μια ρίζα, διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-3,-1-\sqrt{3}\right)$, $\Delta_2=\left(-1-\sqrt{3},2\right)$ και $\Delta_3=(2,3]$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -3^+} f(f(x))=\lim\limits_{u\to -3^+} f(u)=-3$. Τότε $f(x)<0$ κοντά στο $x_o=-3$ άρα $f(x)<0$ στο $\Delta_1=\left(-3,-1-\sqrt{3}\right)$. $0\in\Delta_2$ και $f(f(0))=1$ άρα $f(x)>0$ στο Δ_2. Επίσης $f(f(2))=1>0$. $3\in\Delta_3$ και $f(f(3))=3$ άρα $f(x)>0$ στο Δ_3. Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε $f(x)<0$ για $x\in\left(-3,-1-\sqrt{3}\right)$ και $f(x)>0$ για $x\in\left(-1-\sqrt{3},3\right]$.

Β΄ Τρόπος: Η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-3,-1-\sqrt{2}\right]$ κι έχουμε

$$x<-1-\sqrt{3}\Leftrightarrow (f\circ f)(x)<(f\circ f)(-1-\sqrt{3})$$

Τότε $(f\circ f)(x)<0$. Η $f\circ f$ είναι σταθερή στο διάστημα $\left[-1-\sqrt{2},1\right]$ με $(f\circ f)(x)=1>0$. Η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,2)$, άρα $(f\circ f)(x)\ge(f\circ f)(1)=1>0$. Η $f\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(2,\dfrac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{5}{2},3\right]$ άρα $(f\circ f)(x)\ge(f\circ f)\left(\dfrac{5}{2}\right)=1>0$, $x\in(2,3]$.

Επίσης $(f\circ f)(2)=1>0$. Συνοψίζοντας $f(x)<0$ για $x\in\left(-3,-1-\sqrt{3}\right)$ και $f(x)>0$ για $x\in\left(-1-\sqrt{3},3\right]$.

Το Βήμα του Ευκλείδη

Επιμέλεια: **Γιάννης Στρατής – Βαγγέλης Ευσταθίου**

Ο ρόλος των πολλαπλών προσεγγίσεων της μαθηματικής γνώσης

Ενδεικτικά θέματα από τα Μαθηματικά του Λυκείου

Δημήτρης Ντριζος, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, Τρίκαλα

Στο παρόν άρθρο –αξιοποιώντας τα θέματα που ακολουθούν– επιχειρούμε να αναδείξουμε, με συντομία, μία επιπλέον πτυχή της διδασκαλίας των Μαθηματικών: Πέραν του στόχου της καλλιέργειας και ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών να απαντούν σε ερωτήματα Μαθηματικών, είναι σημαντικό να ασκήσουμε τους μαθητές και στην ικανότητα να τροποποιούν οι ίδιοι προβλήματα αλλά και μεμονωμένα ερωτήματα μαθηματικών.

Αυτή η ικανότητα των στοχευμένων τροποποιήσεων φέρνει τον μαθητή στο επίκεντρο της γνώσης και η καλλιέργειά της εμπεριέχει μια εξόχως υψηλή παιδευτική αξία. Η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής προϋποθέτει ανάλογη εμπειρία από τον διδάσκοντα αλλά και έφεση συνδυασμένη με αρκετή προσωπική δουλειά από τον μαθητή. Από ένα σημείο και μετά όμως, οι μαθητές που θα εμπλακούν αυτόβουλα και με προσωπικό ζήλο σε μια τέτοια διαδικασία, θα είναι σε θέση να "βλέπουν" την εσωτερική δομική διασύνδεση των υποθέσεων (δεδομένων) με τα ζητούμενα. Αλλά και να βρίσκουν από μόνοι τους ποια ακριβώς τροποποίηση των δεδομένων απαιτείται, που να οδηγεί σε μια συγκεκριμένη επιθυμητή αλλαγή στα ζητούμενα.

Στη λογική των εν λόγω τροποποιήσεων εντάσσουμε και την ικανότητα να μπορούν οι μαθητές να αναδιατυπώνουν ένα ερώτημα από την τυπική συμβολική γλώσσα των Μαθηματικών σε εκείνη της αντίστοιχης γεωμετρικής εποπτείας και αντίστροφα. Εντάσσουμε επίσης, την εμπέδωση της ικανότητας να αναγνωρίζουν τη δομική διαφορά μεταξύ *του ευθέος και του αντιστρόφου μιας μαθηματικής πρότασης*.

Τα θέματα που ακολουθούν προτείνονται ως έναυσμα για προσωπική δουλειά με στόχο την καλλιέργεια της ικανότητας που περιγράψαμε παραπάνω, και επιλέχθηκαν γιατί προσφέρονται στην ανάπτυξη της κεντρικής ιδέας αυτού του άρθρου.

1. Βασικές προτάσεις και ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων

Θέμα 1 (1η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g(-x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$.

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0,$$

να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha<\beta$

ii) υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

Απόδειξη

Τα ερωτήματα **α)** και **β)** διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος γ) και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{Bmatrix}\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0\\ \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2)+1=0\\ (\beta^3-3\beta^2+5\beta+2)-11=0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(\alpha)=-1\\ f(\beta)=11\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(\alpha)-5=-1-5\\ f(\beta)-5=11-5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(\alpha-1)=-6\\ g(\beta-1)=6\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}-g(1-\alpha)=-6\\ g(\beta-1)=6\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(1-\alpha)=6\\ g(\beta-1)=6\end{Bmatrix}$$

Επομένως $g(1-\alpha)=g(\beta-1)$ και επειδή η g είναι $1-1$, διαδοχικά έχουμε:

$$g(1-\alpha)=g(\beta-1)\Rightarrow 1-\alpha=\beta-1\Rightarrow\alpha+\beta=2$$

δ.i) Ισχύει

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0\Rightarrow\alpha(\alpha^2-3\alpha+5)=-3<0\Rightarrow$$

$\alpha<0$, καθώς $\alpha^2-3\alpha+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Επίσης είναι,

$$\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0\Rightarrow\beta(\beta^2-3\beta+5)=9>0\Rightarrow$$

$\beta>0$, καθώς $\beta^2-3\beta+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Οπότε $\alpha<\beta$

δ.ii) Πρόκειται για ερώτημα ύπαρξης ρίζας συνάρτησης (θεώρημα του Bolzano) και μοναδικότητας της ρίζας (μονοτονία συνάρτησης).

Σχόλιο

Στο ερώτημα δ.i) του παραπάνω θέματος αποδείξαμε ότι $\alpha<0$ και $\beta>0$. Σας προτείνουμε να αποδείξετε κάτι ακόμη που να "περιορίζει" περισσότερο τα α και β:

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α για τον οποίο ισχύει $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0$ είναι μοναδικός και ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

Επίσης, ότι ο αριθμός β για τον οποίο ισχύει $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$ είναι μοναδικός και ανήκει στο διάστημα $(2,3)$.

Θέμα 1 (2η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(-x)+g(x)=0$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν: $\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+4=0$ και $\beta^3-3\beta^2+4\beta-8=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** σε ένα ακριβώς σημείο, η τετμημένη του οποίου βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β.

Απόδειξη

Τα ερωτήματα **α)** και **β)** διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος **γ)** και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{Bmatrix}\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+4=0\\ \beta^3-3\beta^2+4\beta-8=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2)-\alpha+2=0\\ (\beta^3-3\beta^2+5\beta+2)-\beta-10=0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(\alpha)-\alpha=-2\\ f(\beta)-\beta=10\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(\alpha-1)+5-\alpha=-2\\ g(\beta-1)+5-\beta=10\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(\alpha-1)-\alpha=-7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}-g(1-\alpha)-\alpha=-7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(1-\alpha)+\alpha=7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(1-\alpha)-(1-\alpha)=6\\ g(\beta-1)-(\beta-1)=6\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(1-\alpha)-(1-\alpha)=g(\beta-1)-(\beta-1)\ :(1)$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$h(x)=g(x)-x=x^3+x,\ x\in\mathbb{R},$$

η σχέση (1) γράφεται $h(1-\alpha)=h(\beta-1)$ (2) και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη απλή) θα είναι και $1-1$, οπότε:

$$(2)\Rightarrow 1-\alpha=\beta-1\Rightarrow\alpha+\beta=2$$

δ) Πρόκειται για ερώτημα ύπαρξης ρίζας συνάρτησης (θεώρημα του Bolzano) και μοναδικότητας της ρίζας (μονοτονία συνάρτησης).

Θέμα 1 (3η εκδοχή)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0$ και $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$.

Απόδειξη

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων της υπόθεσης και εφαρμόζοντας βασικές αξιοσημείωτες ταυτότητες, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta+5(\alpha+\beta)-6=0$$

Η τελευταία με $\alpha+\beta=x$, παίρνει τη μορφή: $x^3-3x^2+(5-3\alpha\beta)x+6\alpha\beta-6=0$, και επαληθεύεται για $x=2$, οπότε και γράφεται:

$$(x-2)(x^2-x+3-3\alpha\beta)=0\ :(1)$$

Αλλά $x^2-x+3-3\alpha\beta>x^2-x+3>0$ (γιατί;)

Τελικά: $(1)\Rightarrow x=2\Rightarrow\alpha+\beta=2$.

[Η απόδειξη αυτή της τρίτης εκδοχής, προτάθηκε από τον συνάδελφο Γ. Ρίζο]

Θέμα 2 (1η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της πρώτης ορθής γωνίας των αξόνων;

Να αποδείξετε την εικασία σας.

Θέμα 2 (2η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της δεύτερης ορθής γωνίας των αξόνων;

Να αποδείξετε την εικασία σας.

Θέμα 3 (μια σύνθεση … κύκλου και συνάρτησης)

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο $K(\alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, και ακτίνα $\rho>0$.

Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετες.

Σχόλιο

Πριν αντιμετωπίσετε το παραπάνω θέμα 3 στο πλαίσιο του Διαφορικού Λογισμού, θα είχε ενδιαφέρον να επινοήσετε μια γεωμετρική αναπαράστασή του, μέσω της οποίας να φαίνεται "χωρίς λόγια" η λύση του θέματος.

2. Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Σε έναν άξονα $x'x$ να θεωρήσετε τα σημεία

$$A(3) \text{ και } B(5).$$

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία $M(x)$ πάνω στον $x'x$ τέτοια, ώστε:

i) $MA+MB=2$ **ii)** $MA+MB=1$ **iii)** $MA+MB=4$

β) Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής να γράψετε τις γεωμετρικές ισότητες i), ii) και iii) ως εξισώσεις με άγνωστο τον x και, στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων αυτών στο πλαίσιο της γεωμετρικής εποπτείας.

Θέμα 2

Σε έναν άξονα $x'x$ να πάρετε δύο οποιαδήποτε σημεία $A(\alpha)$ και $B(\beta)$, και έπειτα να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία του άξονα στα οποία αντιστοιχούν οι αριθμοί $\alpha-\beta, \beta-\alpha$, και $\alpha+\beta$.

3. Τετραγωνική ρίζα και απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση

$$\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2+40x+400}=0,\ x\in\mathbb{R},\ (1)$$

α) Να λύσετε την εξίσωση (1).

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία $M(x,y)$ καρτεσιανού επιπέδου Oxy που επαληθεύουν την (1).

Θέμα 2

Για τις διαστάσεις α και β ενός ορθογωνίου είναι:

$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ και $\beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου ισούται με 1, και ότι η περίμετρός του είναι μικρότερη από 7 μονάδες.

Ένα σχόλιο για τη δομική διασύνδεση της υπόθεσης με το ζητούμενο

Στο παραπάνω θέμα 2 οι διαστάσεις α και β του ορθογωνίου δόθηκαν με αριθμητικές τιμές τις:

$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ και $\beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, (1η επιλογή).

Χωρίς να αλλάξουμε καθόλου τη "λογική" του θέματος, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες επιλογές αριθμητικών τιμών για τα α και β, μεταβάλλοντας ανάλογα και τα ζητούμενα αριθμητικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα:

$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{8-2\sqrt{15}},\sqrt{8+2\sqrt{15}}\right)$, (2η επιλογή) ή

$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{12-2\sqrt{35}},\sqrt{12+2\sqrt{35}}\right)$, (3η επιλογή) κτλ.

Παρατηρήστε ότι στην 1η επιλογή "παίζουν" οι αριθμοί 2 και 3 [2+3=5, $2\cdot 3=6$], στη 2η επιλογή οι αριθμοί 3 και 5 [3+5=8, $3\cdot 5=15$], ενώ στην 3η επιλογή οι αριθμοί 5 και 7 [5+7=12, $5\cdot 7=35$]. Σκεπτόμενοι επαγωγικά, μπορείτε πλέον να "μαντέψετε" τον τύπο που "κρύβεται" πίσω από τις παραπάνω επιλογές:

$$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{(\kappa+\lambda)-2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}},\sqrt{(\kappa+\lambda)+2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}\right),$$

όπου κ,λ θετικοί ακέραιοι.

Αναφορικά τώρα με το αριθμητικό αποτέλεσμα του γινομένου $\alpha\cdot\beta$ που παίρνουμε, καθώς αλλάζουμε αριθμητικές τιμές στα κ,λ, ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή: "*Αν* $\alpha=\sqrt{(\kappa+\lambda)-2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}$ *και* $\beta=\sqrt{(\kappa+\lambda)+2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}$ *όπου* κ,λ *θετικοί ακέραιοι, με* $\kappa<\lambda$, *τότε ισχύει:* $\alpha\cdot\beta=\lambda-\kappa$" (η απόδειξη είναι απλή).

Θέμα 3

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους $\frac{\sqrt{2\mu}}{2}$ και κάθετες πλευρές με μήκη κ και λ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\kappa^4+2\mu\lambda^2}+\sqrt{\lambda^4+2\mu\kappa^2}=\frac{3\mu}{2}$

[Δ. Ντρίζος, Ευκλείδης Β΄ (1997), τεύχη 24 και 25]

4. 1η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θέμα 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=A\Gamma$, θεωρούμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE τα οποία τέμνονται στο Z. Να εξετάσετε αν ισχύει $Z\Delta=ZE$.

Θέμα 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE τα οποία τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $Z\Delta=ZE$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

Θέμα 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=A\Gamma$, θεωρούμε τις διχοτόμους του $B\Delta$ και ΓE οι οποίες τέμνονται στο Z. Να εξετάσετε αν ισχύει $Z\Delta=ZE$.

Θέμα 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τις διχοτόμους του $B\Delta$ και ΓE οι οποίες τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $Z\Delta=ZE$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

Σχόλιο

Στους στόχους της παραπάνω 1ης ενότητας θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας εντάσσεται, πέραν των άλλων, η καλλιέργεια και εμπέδωση της ικανότητας να αναγνωρίζουν οι μαθητές τη δομική διαφορά μεταξύ *του ευθέος και του αντιστρόφου μιας μαθηματικής πρότασης*.

5. 2η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θέμα 1

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην υποτείνουσα ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{BKM} = \widehat{M\Lambda\Gamma} = \hat{\omega}$, όπου $\hat{\omega}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Σχόλιο

Η παραπάνω 2η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναδεικνύει την ιδέα της *γενίκευσης προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο·* και θα μπορούσε να θεωρηθεί ενδεικτική μιας πρότασης με στόχο να αναδείξει τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους σε προνομιακό πεδίο άσκησης αναλυτικής και συνθετικής σκέψης.

6. Δύο θέματα Γεωμετρίας για μια διερευνητική εργασία (Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου)

Θέμα 1

Να εξετάσετε αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία Σ στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ τέτοια, ώστε (ΑΒΣ) = (ΒΣΓ) = (ΑΣΓ)

Θέμα 2

Λήμμα: Ένα σημείο Ρ ανήκει στο ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν και μόνο αν ο λόγος των αποστάσεων του Ρ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισούται με $\frac{\text{συν}B}{\text{συν}\Gamma}$.

Να αποδείξετε το λήμμα και στη συνέχεια, ως εφαρμογή του, να αποδείξετε την

Πρόταση: Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Μια πρόταση εργασίας στα εγγράψιμα τετράπλευρα

Θέμα 1

Εμβαδόν κυρτού τετραπλεύρου: Αν θ είναι η γωνία των διαγωνίων δ_1 και δ_2 κυρτού τετραπλεύρου, τότε το εμβαδόν Ε αυτού του τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \text{ημ}\theta$

(βασική άσκηση του σχολικού βιβλίου)

Άσκηση: Θεωρούμε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα κατά τρόπο που το καθένα από αυτά να έχει την κορυφή της ορθής γωνίας του στην υποτείνουσα του άλλου. Οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές σχηματίζουν ένα τετράπλευρο.

Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις κορυφές των δύο εν λόγω ορθών γωνιών χωρίζει το προηγούμενο τετράπλευρο σε δύο άλλα τετράπλευρα τα οποία είναι:

α) Ισεμβαδικά μεταξύ τους και

β) Εγγράψιμα σε ίσους κύκλους.

Θέμα 2

Λήμμα: Το συμμετρικό του ορθόκεντρου τριγώνου ως προς τον φορέα οποιασδήποτε πλευράς του είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Να αποδείξετε το λήμμα και έπειτα, ως εφαρμογή του, να αποδείξετε την επόμενη

Βασική ιδιότητα του ορθόκεντρου: Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, τότε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Η είναι συμμετρικός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΒ.

Γενικό Σχόλιο

Ενδεικτικές απαντήσεις σε ορισμένα των παραπάνω θεμάτων βρίσκονται στη διεύθυνση http://thess.pde.sch.gr/jn/index.php/news/140-yliko-seminarion-imeridon, στις αναρτήσεις που αναφέρονται σε επιμορφωτικές δραστηριότητες του Δ. Ντρίζου.

Βιβλιογραφία

[1] Kukushkin, V. Περιοδικό Quantum (ελληνική έκδοση), Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο, τόμος 8, τχ 4, (2001), σ. 19.

[2] Στράντζαλος, Χ. (1997). *Θέματα Ειδικής Διδακτικής των Μαθηματικών* (Σημειώσεις), ΜΠΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, σ. 12-14.

[3] Δ. Ντρίζος, *Μαθηματικές Συναντήσεις - Σημειώματα Μαθηματικών*, αναρτημένα στην ιστοσελίδα http://srv-dide.tri.sch.gr/sxsymboyloi/?page_id=6

ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY

μία και ... ακόμα μία διαπραγμάτευση.

Σωτήρης Ε. Λουρίδας

1. Morley Frank (1860-1937). Σημαντικός Άγγλος Μαθηματικός που από το 1887 έζησε στην Πενσυλβάνια. Δίδαξε στο Haverford College και στη συνέχεια έγινε πρόεδρος του Μαθηματικού τμήματος στο Johns Hopkins University. Διετέλεσε πρόεδρος της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας. Διετέλεσε επίσης εκδότης και συντάκτης της Εφημερίδας Μαθηματικών της Αμερικής (1900-1921). Τα κύρια πεδία που ασχολήθηκε ήταν η «Θεωρία των Λειτουργιών», η θεωρία «τόνωσης όγκου» όπου έχουμε τον ρόλο των σύνθετων αριθμών στην Γεωμετρία και τη «Θεωρία των Λειτουργιών». Έγινε διάσημος από το θεώρημα των τριχοτόμων (Trisector Theorem) του Morley (αυτό που διαπραγματευόμαστε εδώ και που έγινε γνωστό το 1899). Ο Morley υπήρξε δεινός διεθνής σκακιστής.

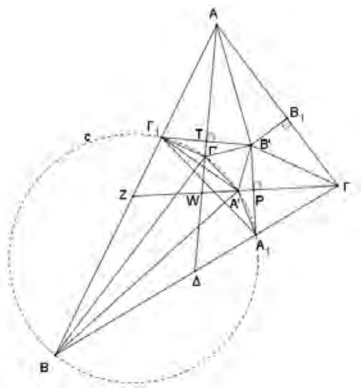
2. Τρίγωνο Morley ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το τρίγωνο που έχει ως κορυφές τα σημεία τομής των ζευγών των τριχοτόμων που είναι προσκείμενες σε κάθε πλευρά του τριγώνου $AB\Gamma$. Η ύπαρξη βέβαια του τριγώνου Morley δεν σημαίνει ότι αυτό είναι κατασκευάσιμο γεωμετρικά, αφού ως γνωστόν ενώ οι τριχοτόμοι μίας γωνίας υπάρχουν, η τριχοτόμηση γωνίας είναι εν γένει αδύνατη με κανόνα και διαβήτη.

3. Τη διαπραγμάτευση αυτή του Θεωρήματος Morley που ακολουθεί άμεσα για πρώτη φορά αλλά με υπόδειξη, ώστε να ασχοληθούν περαιτέρω οι μαθητές που ασχολούνται με τα διαγωνιστικά μαθηματικά, την είχα παρουσιάσει στις σημειώσεις, «Σωτήρης Ε. Λουρίδας: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (Θεωρία – Ασκήσεις) Κεφάλαιο Ι, Ε.Μ.Ε. Αθήνα 2002 », αλλά μεταγενέστερα και στο βιβλίο, «S.E.Louridas – M.T.Rassias: Problem – Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry από τις εκδόσεις Springer». Εδώ στον «ΕΥΚΛΕΙΔΗ Β'» παρουσιάζεται πλήρως η συγκεκριμένη αυτή απόδειξη του θεωρήματος Morley. Στη συνέχεια παραθέτουμε και μία άλλη «προκύπτουσα» διαπραγμάτευση, από την σκέψη που βλέπουμε στην πρώτη απόδειξη.

4. Εκτός των άλλων από το θεώρημα αυτό και τις διαπραγματεύσεις του προκύπτουν σημαντικά διδακτικά συμπεράσματα στο art of problems solving (Η τέχνη του να επιλύεις προβλήματα).

Θεώρημα Morley:
«Οι τριχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται σε σημεία που είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου»

Απόδειξη:



Σχ.1

Για την απόδειξη του θεωρήματος, αν πάρουμε ως βάση π.χ. τις τριχοτόμους $A\Delta, AB'$ και $\Gamma B', \Gamma Z$ των γωνιών $\angle A, \angle\Gamma$ αντιστοίχως του τριγώνου $AB\Gamma$, αρχικά θα τις χρησιμοποιήσουμε ως διχοτόμους των αντίστοιχων γωνιών που δημιουργούνται, χρησιμοποιώντας την βασική ιδιότητα: Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας απέχει ίσες αποστάσεις από τις πλευρές της. Επομένως αν θεωρήσουμε $B'B_1 \perp A\Gamma, B'\Gamma_1 \perp A\Delta, B'A_1 \perp \Gamma E$ με $\{T\} \equiv A\Delta \cap B'\Gamma$ και $\{P\} \equiv \Gamma Z \cap B'A$, προκύπτει $B'\Gamma_1 = B'A_1 = 2B'B_1$. Έτσι το τρίγωνο $B'\Gamma_1 A_1$ είναι ισοσκελές με $\angle\Gamma_1 B'A_1 = 2\pi - \left(\pi - \frac{2\angle A}{3}\right) - \left(\pi - \frac{2\angle\Gamma}{3}\right) = 2\frac{\angle A}{3} + 2\frac{\angle\Gamma}{3}$. Αντίστοιχες γωνίες είναι οι $2\frac{\angle\Gamma}{3} + 2\frac{\angle B}{3}$, $2\frac{\angle B}{3} + 2\frac{\angle A}{3}$. Αν υποθέσουμε $2\angle\frac{\Gamma}{3} + 2\angle\frac{A}{3} \leq \frac{\pi}{3}$ και $2\angle\frac{A}{3} + 2\angle\frac{B}{3} \leq \frac{\pi}{3}$, και $2\angle\frac{B}{3} + 2\angle\frac{\Gamma}{3} \leq \frac{\pi}{3}$, τότε $4\angle\frac{\Gamma}{3} + 4\angle\frac{A}{3} + 4\angle\frac{B}{3} \leq \pi \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{4}{3}\pi \leq \pi \Rightarrow 4 \leq 3$ πράγμα άτοπο. Επομένως τουλάχιστον μία εκ των $2\angle\frac{\Gamma}{3} + 2\angle\frac{A}{3}$, $2\angle\frac{A}{3} + 2\angle\frac{B}{3}$ και $2\angle\frac{B}{3} + 2\angle\frac{\Gamma}{3}$, θα είναι μεγαλύτερη του $\frac{\pi}{3}$. Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε π.χ. $\angle\Gamma_1 B'A_1 = 2\frac{\angle A}{3} + 2\frac{\angle\Gamma}{3} > \frac{\pi}{3}$ (θα μπορούσαμε με βάση ανάλογα σκεπτικά, να θεωρήσουμε $2\angle\frac{B}{3} + 2\angle\frac{\Gamma}{3} > \frac{\pi}{3}$ ή $2\angle\frac{B}{3} + 2\angle\frac{A}{3} > \frac{\pi}{3}$), ώστε να «χωρέσει» εντός αυτής η γωνία των $\frac{\pi}{3}$, του προς απόδειξη ισόπλευρου τριγώνου $A'B'\Gamma'$. Θεωρούμε λοιπόν $2\angle\frac{A}{3}+2\angle\frac{\Gamma}{3}>\frac{\pi}{3}$, που είναι ισοδύναμη και με την $\angle B<\frac{\pi}{2}$, και τις τριχοτόμους $A\Delta, AB'$ και $\Gamma B', \Gamma Z$ των γωνιών $\angle A, \angle \Gamma$ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε έχουμε $\angle \Gamma_1 B' A_1>\frac{\pi}{3}$, $B'\Gamma_1=B'A_1=2B'B_1$ και ότι υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο $B'\Gamma'A'$ με $\Gamma'\in T\Delta, A'\in PZ$ **(*)**, οπότε ορίζονται οι ίσες γωνίες $\angle\Gamma'B'\Gamma_1, \angle A'B'A_1$, ως εξής: $\angle\Gamma'B'\Gamma_1=\angle A'B'A_1=\frac{\angle\Gamma_1B'A_1-\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\angle A}{3}+\frac{\angle\Gamma}{3}-\frac{\pi}{6}$.

Εδώ άμεσα παίρνουμε την ισότητα των τριγώνων $\Gamma'B'\Gamma_1, A'A_1B'$. Παρατηρούμε ότι $\Gamma_1\Gamma'=\Gamma'B'=B'A'=A'A_1=\Gamma'A'$ και βέβαια $\angle A_1\Gamma_1B'>\angle\Gamma'\Gamma_1B'$. Το τετράπλευρο $\Gamma'\Gamma_1A_1A'$ είναι ισοσκελές τραπέζιο που ως γνωστόν είναι εγγράψιμμο σε κύκλο **c**. Συμπεραίνουμε ότι $\angle A_1\Gamma_1B'>\Gamma'B_1B'$ και $\angle A'A_1\Gamma_1=2\angle A_1\Gamma_1A'$, με

$$\angle A'A_1\Gamma_1=\angle B'A_1\Gamma_1-\angle B'A_1A'=\frac{\pi-\angle\Gamma_1B'A_1}{2}-\angle A'B'A_1=$$

$$\frac{\pi-\frac{2(\angle A+\angle\Gamma)}{3}}{2}-\left(\frac{A+\angle\Gamma}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$$

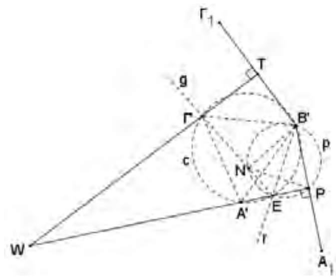
$$=\frac{2(\pi-\angle A-\angle\Gamma)}{3}=2\frac{\angle B}{3}.$$

Έτσι έχουμε $\angle A'A_1\Gamma_1+\angle A_1\Gamma_1A'=\frac{2}{3}\angle B+\frac{1}{3}\angle B=\angle B$, ή $\angle A_1A'\Gamma_1=\pi-\angle B$, από όπου προκύπτει ότι το τετράπλευρο $BA_1A'\Gamma_1$ είναι εγγράψιμμο στον κύκλο c. Άρα παίρνουμε $\angle A'B\Gamma_1=2\angle A_1BA'$ (1). Ομοίως έχουμε $\angle A_1B\Gamma'=2\angle\Gamma'B\Gamma_1$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει πλέον ότι $\angle A_1BA'=\angle A'B\Gamma'=\angle\Gamma'B\Gamma_1$ δηλαδή ότι οι ημιευθείες $BA', B\Gamma'$ είναι οι τριχοτόμοι της γωνίας $\angle B$. Λόγω του ότι οι τριχοτόμοι γωνίας είναι μοναδικές, αποδείχτηκε πράγματι ότι:

Οι τριχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται σε σημεία που είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

(*) Θα αποδείξουμε εδώ στο **Σχ.2** (που είναι αποσπασμένο κομμάτι του σχήματος 1) την ύπαρξη του ισόπλευρου τριγώνου $B'\Gamma'A'$ με $\Gamma'\in TW, A'\in PW$, αν W το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των ευθύγραμμων τμημάτων Γ_1B' και $B'A_1$, που έχουν ως αντίστοιχα μέσα τα σημεία T, P.

1ος τρόπος:



Σχ.2

Κατασκευάζουμε με πλευρά $B'P$ το ισόπλευρο τρίγωνο $B'NP$ και τον περιγεγραμμένο του κύκλο **p** που τέμνει την μεσοκάθετη του $B'A_1$ στο σημείο E. Παρατηρούμε άμεσα ότι

$$\angle PEB'=\angle PNB'=\frac{\pi}{3}, \angle B'EN=\angle B'PN=\frac{\pi}{3} \ (3).$$

Ονομάζουμε Γ′ το σημείο τομής των ευθειών EN,TW και θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο **c** στο τρίγωνο $B'\Gamma'E$ που τέμνει την PW στο Α′. Από εδώ με βάση τη σχέση (3) παίρνουμε

$$\angle B'A'\Gamma'=\angle B'EN=\frac{\pi}{3} \ (4) \text{ και } \angle\Gamma'B'A'=\angle\Gamma'EW=\frac{\pi}{3} \ (5).$$

Από τις σχέσεις (4), (5) προκύπτει ότι το τρίγωνο $B'\Gamma'A'$ είναι ισόπλευρο. Ο τρόπος αυτός αποδεικνύει την ύπαρξη του ισόπλευρου τριγώνου $B'\Gamma'A'$ μέσω της γεωμετρικής του κατασκευής (κατασκευής δηλαδή με κανόνα και διαβήτη). Δηλαδή εδώ έχουμε γεωμετρική κατασκευή και ύπαρξη του ισοπλεύρου τριγώνου $B'\Gamma'A'$.

2ος τρόπος: Θεωρούμε (Επανερχόμαστε στο **Σχ.1**) εντός της γωνίας $\angle\Gamma_1B'A_1$ δύο ημιευθείες $B'x, B'y$, έτσι ώστε $\angle\Gamma_1B'x=\angle A_1B'y=\frac{\angle A_1B'\Gamma_1-\frac{\pi}{3}}{2}=$

$=\frac{\angle A+\angle\Gamma}{3}-\frac{\pi}{6}$, τότε $\angle\Gamma_1B'x+\frac{\pi}{2}=\angle A_1B'y+\frac{\pi}{2}=$

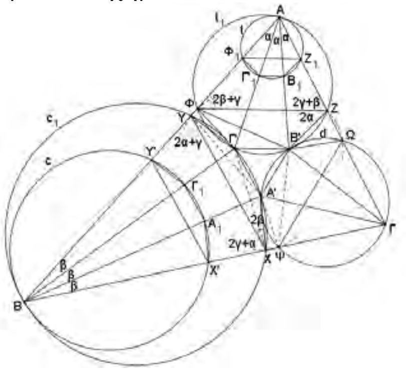
$=\frac{\angle A+\angle\Gamma}{3}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}<\pi$, οπότε οι $B'x, B'y$ τέμνουν τις TW, PW στα σημεία Γ', A' αντιστοίχως. Από τη ισότητα των ισοσκελών τριγώνων $\Gamma'B'\Gamma_1, A'B'A_1$, ως εχόντων ίσες βάσεις και γωνίες βάσεων ίσες με $\frac{\angle A+\angle\Gamma}{3}-\frac{\pi}{6}$, προκύπτει $B'\Gamma'=B'A'$ και επειδή $\angle A'B'\Gamma'=\angle A_1B'\Gamma_1-2\angle\Gamma_1B'x=\frac{\pi}{3}$ το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι ισόπλευρο. Ο τρόπος αυτός αποδεικνύει την ύπαρξη μόνο και όχι την κατασκευή, του ισόπλευρου τριγώνου $B'\Gamma'A'$.

Και μία άλλη «προκύπτουσα» συνθετική από-

δειξη του θεωρήματος Morley.

Στην προηγούμενη διαπραγμάτευση, στο σχήμα (1) βρίσκαμε $\angle\Gamma_1 A_1 B = \pi - \angle B' A_1 \Gamma_1 - \angle \Gamma_1 A_1 B' = 2\gamma + \alpha$. Με βάση αυτό προχωράμε στη συνθετική απόδειξη που ακολουθεί:

Απόδειξη: Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $\angle B \le \angle A \le \angle \Gamma$, οπότε $\angle B \le \angle A < \frac{\pi}{2}$. Επίσης ας θεωρήσουμε $\angle B = 3\beta, \angle A = 3\alpha, \angle\Gamma = 3\gamma$. Θα εργαστούμε στο σχήμα 3 που ακολουθεί:



Σχ.3

Έστω σημείο X' της $B\Gamma$, τέτοιο ώστε $\angle Y'X'B = 2\gamma + \alpha$, οπότε $\angle BY'X' = 2\alpha + \gamma$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c στο τρίγωνο $BX'Y$ τέμνει τις τριχοτόμους της γωνίας B στα σημεία $A_1 \Gamma_1$ και έτσι έχουμε $X'A_1 = A_1\Gamma_1 = \Gamma_1 Y'$ και βέβαια $\angle A_1 X'Y' = \angle X'Y'\Gamma_1 = 2\beta$. Εργαζόμαστε ομοίως με βάση τη γωνία $\angle A$ και παίρνουμε το εγγεγραμμένο πεντάγωνο $A\Phi_1\Gamma_1' B_1 Z_1$, με $\angle A\Phi_1 Z_1 = 2\beta + \gamma$ και $\angle AZ_1\Phi_1 = 2\gamma + \beta$. Επίσης έχουμε εδώ $\angle\Gamma_1'\Phi_1 Z_1 = \angle\Phi_1 Z_1 B_1 = 2\alpha$. Ισχύει $\Phi_1\Gamma_1' = \Gamma_1' B_1 = B_1 Z_1$, λόγω των τριχοτόμων της γωνίας $\angle A$. Έστω Γ' το σημείο τομής των τριχοτόμων προς την AB των γωνιών $\angle B, \angle A$. Θεωρούμε εδώ τα πεντάγωνα $BXA'\Gamma'Y$, $A\Phi\Gamma'B'Z$ αντίστοιχως ομοιόθετα των πενταγώνων $BX'A_1\Gamma_1 Y'$ και $A\Phi_1\Gamma_1' B_1 Z_1$. Τότε παίρνουμε

$\angle\Gamma'YB = \angle\Gamma_1 Y'B = 2\alpha + 2\beta + \gamma$ και

$\angle\Gamma'\Phi A = \angle\Gamma_1\Phi_1 A = 2\alpha + 2\beta + \gamma$. Άρα

$\angle\Gamma'YB = \angle\Gamma'\Phi A = 2\alpha + 2\beta + \gamma \Rightarrow \Gamma'\Phi = \Gamma'Y \Rightarrow \Gamma'B' = \Gamma'A'$

και $\angle XYB + \angle Z\Phi A = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \frac{2\pi}{3}$ που σημαίνει ότι $\angle(YX, \Phi Z) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle A'\Gamma'B' = \frac{\pi}{3}$. Άρα το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι ισόπλευρο. Καταρχάς και επειδή $\angle B \le \angle A < \frac{\pi}{2}$, έχουμε εύκολα

$\angle A'XB = 2\beta + 2\gamma + \alpha > \frac{\pi}{2}$ και

$\angle AZB' = 2\alpha + 2\gamma + \beta > \frac{\pi}{2}$. Εδώ θεωρούμε $\Psi \in B\Gamma : A'\Psi = A'X$ και $\Omega \in A\Gamma : B'\Omega = B'Z$. Τότε

$\angle\Omega B'Z = \pi - 2\angle\Omega ZB' = 2\angle AZB' - \pi =$

$= 2(2\alpha + 2\gamma + \beta) - \pi = \frac{\pi}{3} - 2\beta \Rightarrow$

$\angle A'B'\Omega = 2\pi - \angle\Omega B'Z - \angle ZB'\Phi - \angle\Phi B'A' \Rightarrow$

$\angle A'B'\Omega = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3} - 2\beta\right) - (\pi - 3\alpha) - \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \ldots =$

$= \pi - 2\gamma$ (1). Ομοίως παίρνουμε

$\angle XA'\Psi = \pi - 2\angle A'XB = \pi - (\pi - 2\beta - 2\gamma - \alpha) \Rightarrow$

$\angle XA'\Psi = -\pi + 4\beta + 4\gamma + 2\alpha = \ldots = \frac{\pi}{3} - 2\alpha \Rightarrow$

$\angle\Psi A'B' = 2\pi - \left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) - (\pi - 3\beta) - \beta - \frac{\pi}{3} = \ldots =$

$= \pi - 2\gamma$ (2). Από τις σχέσεις $(1), (2)$ προκύπτει ότι το $\Omega B'A'\Psi$ είναι ισοσκελές τραπέζιο εγγράψιμο σε κύκλο **d**. Παρατηρούμε ότι $\angle B'\Omega\Psi = \pi - \angle\Omega B'A' = \pi - (\pi - 2\gamma) = 2\gamma$ και

$\angle\Omega\Psi B' = \frac{\angle B'\Omega\Psi}{2} = \gamma$. Άρα

$\angle B'\Omega\Psi + \angle\Omega\Psi B' = 3\gamma = \angle\Gamma \Rightarrow \pi - \angle\Omega B'\Psi = \angle\Gamma \Rightarrow$

$\angle\Gamma + \angle\Omega B'\Psi = \pi$. Η τελευταία αυτή σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Omega B'\Psi$ είναι εγγράψιμμο στον κύκλο **d**. Άρα τα σημεία $\Gamma, \Omega, B', A', \Psi,$ είναι σημεία του κύκλου **d**. Από αυτό έχουμε άμεσα ότι οι $\Gamma B', \Gamma A'$ είναι τριχοτόμοι της γωνίας $\angle\Gamma$.

Αποδείχτηκε και εδώ με την μέθοδο αυτή ότι πράγματι: *Οι τριχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου τέμνονται σε σημεία που είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.*

Διδακτικό συμπέρασμα: Όταν ασχολούμαστε με την επίλυση ενός Μαθηματικού θέματος, τότε είναι υπαρκτό το ενδεχόμενο κάποιο κομμάτι (όχι αναγκαστικά γνήσιο) της ενασχόλησης αυτής να λειτουργήσει ως αναζήτηση ικανών συνθηκών για την εξασφάλιση του ζητούμενου που μπορούν να μας οδηγήσουν και σε συνθετική λύση. Πιθανόν όμως η συνθετική αυτή λύση να καθιστά δύσκολη την απάντηση στο ερώτημα «Πώς το σκέφτηκες;» Επομένως μάλλον είναι αναγκαία κάποια αιτιολόγηση του σκεπτικού πριν την όποια Λύση. Για παράδειγμα στη επίλυση ενός προβλήματος Πρακτικής Αριθμητικής είναι απαραίτητο το «πακέτο»: Σκέψη-Λύση κάτι που γινόταν «απαιτητικά» στα παλαιότερα Άριστα βιβλία της Πρακτικής Αριθμητικής.

Ας μας επιτραπεί εδώ να κάνουμε δύο αναφορές για ευρύτερη ενασχόληση με το θεώρημα Morley:

1. **Στο βιβλίο «Γεωμετρικά Θέματα» του διακεκριμένου Μαθηματικού κ. Μαραγκάκη Μανόλη, καθώς και στο νέο βιβλίο «Ουσιώδη Μαθηματικά» που συνέγραψε με τον κ. Μεταξά Μιχάλη, όπου υπάρχουν σημαντικές αποδείξεις του θεωρήματος Morley.**
2. **Στη διπλωματική εργασία «Με αφορμή το θεώρημα Morley» του κ. Πιτσά Κώστα, με επιβλέποντα καθηγητή τον καθηγητή του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Λάππα Διονύση.**

Χρήση ιδιοτήτων συνάρτησης στην επίλυση εξίσωσης ή ανίσωσης

Απόστολος Δέμης, Πρότυπο Γενικό Λύκειο Βαρβακείου Σχολής.

Στα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου – και όχι μόνον – συχνά μια εξίσωση ή μια ανίσωση επιλύεται με την βοήθεια ορισμένων χαρακτηριστικών μιας ή περισσοτέρων συναρτήσεων. Συνήθως αυτά τα χαρακτηριστικά αφορούν στην ιδιότητα του 1–1, στην μονοτονία, στα ακρότατα, στην ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης κλπ.

Η μονοτονία μιας συνάρτησης κατέχει προεξάρχοντα ρόλο στην μελέτη των χαρακτηριστικών που προαναφέραμε. Έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις εξισώσεων ή ανισώσεων είναι το απαραίτητο μέσον επίλυσής τους.

Στα μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου προσδιορίζουμε την μονοτονία μιας συνάρτησης συνήθως με την χρήση του προσήμου της παραγώγου της.

Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως ο προσδιορισμός της μονοτονίας μέσω αλγεβρικών χειρισμών είναι ευκολότερος ή συντομότερος.

- Παραθέτουμε μερικές χρήσιμες προτάσεις σχετικές με την μονοτονία μιας συνάρτησης. Παραλείπουμε τις αποδείξεις των πέντε πρώτων προτάσεων ως σχετικώς απλούστερων. Οι μαθητές μπορούν να τις αντιμετωπίσουν ως ασκήσεις.

Πρόταση 1. (Άθροισμα συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας)

(i) Αν οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ με $A \cap B \neq \varnothing$ είναι γνησίως αύξουσες (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσες) και λ, μ είναι οποιοιδήποτε θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση $\lambda f + \mu g : A \cap B \to \mathbb{R}$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα).

(ii) αν η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα) και λ είναι οποιοσδήποτε αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε η συνάρτηση

$$\lambda f : A \to \mathbb{R}$$

είναι γνησίως φθίνουσα (αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα).

Πρόταση 2. (Γινόμενο συναρτήσεων με το ίδιο είδος μονοτονίας)

Αν οι συναρτήσεις

$f : A \to [0, +\infty)$ και $g : B \to [0, +\infty)$ με $A \cap B \neq \varnothing$

είναι γνησίως αύξουσες (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσες), τότε η συνάρτηση

$$fg : A \cap B \to \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα).

Πρόταση 3. (Μονοτονία της $\frac{1}{f}$, αλγεβρικής αντίστροφης της μονότονης συνάρτησης f) Αν η συνάρτηση

$$f : A \to (0, +\infty)$$

είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως, γνησίως φθίνουσα), τότε η συνάρτηση

$$\frac{1}{f} : A \to (0, +\infty)$$

είναι γνησίως φθίνουσα (αντιστοίχως, γνησίως αύξουσα). Το ίδιο ισχύει αν $f : A \to (-\infty, 0)$, γενικότερα δηλαδή όταν οι τιμές της f είναι ομόσημες

Πρόταση 4. (Σύνθεση μονοτόνων συναρτήσεων)

Αν οι συναρτήσεις

$$f : A \to B \text{ και } g : B \to \mathbb{R}$$

είναι γνησίως μονότονες, τότε η συνάρτηση

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}$$

είναι:

(i) γνησίως αύξουσα στην περίπτωση που και οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας,

(ii) γνησίως φθίνουσα στην περίπτωση που και οι δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Πρόταση 5. Αν μια συνάρτηση *f* είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) η *f* είναι συνάρτηση 1–1 στο Δ,

(ii). η συνάρτηση $f^{-1}: f(\Delta)\to\Delta$ έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την *f*.

Πρόταση 6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathrm{B}\to\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) για κάθε $x\in\mathrm{B}$ ισχύει $f(g(x))=x$ και

(2) για κάθε $x\in\mathrm{A}$ ισχύει $g(f(x))=x$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Οι συναρτήσεις *f* και *g* είναι 1–1.

(ii) $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ και $g(\mathrm{B})=\mathrm{A}$.

(iii) $f^{-1}=g$ και $g^{-1}=f$.

(iv) Αν η συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα και το σύνολο $\mathrm{A}\cap f(\mathrm{A})=\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ είναι μη κενό, τότε ο αριθμός $m\in\mathrm{A}\cap f(\mathrm{A})$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ – δηλαδή της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ – αν και μόνον αν ο *m* είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=x$.

Απόδειξη **(i)** Θεωρούμε δύο τυχαία στοιχεία x_1 και x_2 του Α τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε από την συνθήκη (2) συμπεραίνουμε ότι

$$x_1=g(f(x_1))=g(f(x_2))=x_2.$$

Δηλαδή ισχύει $x_1=x_2$, οπότε η συνάρτηση *f* είναι 1–1.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση *g* είναι επίσης 1–1.

(ii) Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο x του συνόλου $f(\mathrm{A})$.

Τότε υπάρχει ένα στοιχείο x' του Α τέτοιο, ώστε $f(x')=x$.

Από την συνθήκη **(2)** αντιλαμβανόμαστε ότι ορίζεται το $g(f(x'))$ και ισούται με x', αφού έχουμε $x'\in\mathrm{A}$.

Επομένως το $f(x')$ πρέπει να είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού Β της συνάρτησης g, δηλαδή πρέπει να ισχύει $x\in\mathrm{B}$.

Άρα κάθε στοιχείο του $f(\mathrm{A})$ είναι και στοιχείο του Β. Έτσι ισχύει $f(\mathrm{A})\subseteq\mathrm{B}$.

Θεωρούμε τώρα τυχαίο στοιχείο x του συνόλου Β.

Τότε από την συνθήκη **(1)** συμπεραίνουμε ότι έχουμε $f(g(x))=x$. Το ότι ισχύει αυτή η σχέση σημαίνει ότι αναγκαστικά το $g(x)$ είναι στοιχείο του πεδίου ορισμού Α της συνάρτησης *f*.

Αν συμβολίσουμε με x' το $g(x)$, τότε έχουμε $f(x')=x$. Προφανώς το $f(x')$ είναι τιμή της συνάρτησης *f*, δηλαδή το x είναι στοιχείο του $f(\mathrm{A})$.

Άρα αποδείξαμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου Β είναι και στοιχείο του συνόλου $f(\mathrm{A})$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\mathrm{B}\subseteq f(\mathrm{A})$.

Τελικά από όσα προηγήθηκαν συμπεραίνουμε ότι $f(\mathrm{A})=\mathrm{B}$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $g(\mathrm{B})=\mathrm{A}$.

(iii) Από την συνθήκη **(1)** και το **(ii)** συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(g(x))=x$ για κάθε $x\in f(\mathrm{A})$, όπου βεβαίως το $f(\mathrm{A})$ είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτηση f^{-1}.

Τότε επιβάλλοντας την συνάρτηση f^{-1} και στα δύο μέλη της συνθήκης **(1)**, παίρνουμε για κάθε $x\in f(\mathrm{A})$ την σχέση $f^{-1}(f(g(x)))=f^{-1}(x)$, δηλαδή την σχέση $f^{-1}(x)=g(x)$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ισχύει $g^{-1}(x)=f(x)$.

(iv) Υποθέτουμε ότι ο $m\in\mathrm{A}\cap f(\mathrm{A})$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m)=f^{-1}(m)$.

Τότε προφανώς ισχύει $f(f(m))=f(f^{-1}(m))$, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$f(f(m))=m. \qquad (1)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι ο *m* είναι και λύση της εξίσωσης $f(x)=x$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m)=m$.

Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ισχύει $f(m)\neq m$. Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες δύο δυνατές περιπτώσεις:

- Είναι $f(m)<m$. Αφού ή συνάρτηση *f* είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(f(m))<f(m)$.

Τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $m < f(m)$, το οποίο είναι αδύνατον λόγω της αρχικής παραδοχής.

- Είναι $f(m) > m$. Αφού ή συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(f(m)) > f(m)$.

  Τότε από την (1) συμπεραίνουμε ότι ισχύει $m > f(m)$, το οποίο είναι αδύνατον λόγω της αρχικής παραδοχής.

Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και στις δύο περιπτώσεις. Επομένως αναγκαστικά ισχύει $f(m) = m$, δηλαδή ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$.

Τώρα υποθέτουμε ότι ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή ότι ισχύει $f(m) = m$.

Τότε επιβάλλοντας και στα δύο μέλη αυτής της ισότητας την συνάρτηση f^{-1} παίρνουμε την σχέση $f^{-1}(f(m)) = f^{-1}(m)$, δηλαδή την σχέση $m = f^{-1}(m)$.

Επομένως λόγω της αρχικής παραδοχής μας ισχύει η σχέση $f(m) = f^{-1}(m)$. Άρα ο m είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$.

Πρόταση 7. Αν $m \in (0, +\infty)$ και η συνάρτηση $f: A \to (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα), τότε η συνάρτηση $g: A \to (0, +\infty)$, $g(x) = f^m(x)$ είναι γνησίως αύξουσα (φθίνουσα).

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Τότε για κάθε $x \in A$ γράφουμε:

$$g(x) = f^m(x) = \left(e^{\ln f(x)}\right)^m = e^{m \ln f(x)}.$$

Η συνάρτηση $y = \ln f(x)$, ως σύνθεση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $y = \ln x$ και $y = f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα (πρόταση 4).

Επομένως και η συνάρτηση $y = m \ln f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού $m > 0$ (πρόταση 1).

Έτσι καταλήγουμε ότι η συνάρτηση g, ως σύνθεση των γνησίως αυξουσών συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = m \ln f(x)$, είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοίως εργαζόμαστε για την περίπτωση κατά την οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στρατηγική επίλυσης εξίσωσης με την χρήση της μονοτονίας συνάρτησης

Βασική μέθοδος επίλυσης μια εξίσωσης με την βοήθεια της έννοιας της συνάρτησης είναι η χρήση της ιδιότητας 1–1.

Έστω ότι μας δίδεται να επιλύσουμε μια εξίσωση. Για να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα 1–1 μιας συνάρτησης συνήθως εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Προσδιορίζουμε το σύνολο αναφοράς της εξίσωσης που μας δίδεται. Δηλαδή καθορίζουμε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο πρέπει (ή με άλλα λόγια, μπορούν) να περιέχονται οι λύσεις της εξίσωσης.

2. Εντοπίζουμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α και γνωστό στοιχείο a του Α έτσι, ώστε η εξίσωση που μας έχει δοθεί για επίλυση να μπορεί να πάρει την μορφή $f(x) = f(a)$ και να είναι ισοδύναμη με αυτήν.

3. Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1–1.

4. Συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης στο Α είναι η $x = a$.

Σχόλια:

Στην ανωτέρω ακολουθία βημάτων επίλυσης συνήθως το δεύτερο βήμα εμφανίζει την μεγαλύτερη δυσκολία, καθώς πρέπει να βρούμε την συνάρτηση f και να εκτιμήσουμε την λύση a.

Ως προς την f πρέπει να γνωρίζουμε ότι συνήθως η προσφορότερη μέθοδος προσδιορισμού της είναι ο εντοπισμός μιας δομής που επαναλαμβάνεται μέσα στις εκφράσεις που δομούν την εξίσωση.

Για τον προσδιορισμό της λύσης a συνήθως δοκιμάζουμε ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές του x, όπως:

i. τα ουδέτερα στοιχεία των πράξεων 0 και 1,

ii. αναλόγως της μορφής της συνάρτησης f, τους αριθμούς e και π,

iii. αριθμούς που καθιστούν 0, 1, e, π κλπ. μια επαναλαμβανόμενη έκφραση στο σώμα της εξίσωσης.

Σε κάποιες περιπτώσεις το a προκύπτει κατόπιν συλλογιστικής διαδικασίας σχετικά με το ποια μπορεί να είναι η κατάλληλη τιμή του.

Στο τρίτο βήμα – στην απόδειξη της ιδιότητας 1–1 της συνάρτησης f – συνήθως αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Α. Τότε από την ανωτέρω πρόταση 5, συμπεραίνουμε ότι η f είναι 1–1 σε αυτό. Εδώ πρέπει να προσέξουμε ιδιαιτέρως το εξής: Υπάρχει περίπτωση το Α να μην είναι διάστημα ή η f να είναι κατά διαστήματα μονότονη στο Α. Τότε εντοπίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας A_1, A_2, …, A_ν της f και εφαρμόζουμε την στρατηγική που περιγράψαμε προηγουμένως σε **κάθε ένα** από τα διαστήματα αυτά.

Προβλήματα

Πρόβλημα 1. Αν είναι $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,+\infty)$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x.$$

Λύση Η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται ισοδυνάμως ως εξής:

$$\alpha^x+\beta^x=\gamma^x+\delta^x \Leftrightarrow \frac{\alpha^x}{\gamma^x}+\frac{\beta^x}{\gamma^x}=\frac{\gamma^x}{\gamma^x}+\frac{\delta^x}{\gamma^x}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x=1+\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x+1-\left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\right)=0.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x+1-\left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x\right).$$

Είναι φανερό πως η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x)=0$.

Επειδή είναι $\delta>\gamma$, ισχύει $\frac{\delta}{\gamma}>1$. Επομένως η συνάρτηση $y=\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή είναι $\gamma>\alpha$ και $\gamma>\beta$ ισχύει $\frac{\alpha}{\gamma}<1$ και $\frac{\beta}{\gamma}<1$. Επομένως οι συναρτήσεις $y=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x$ και $y=\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσες.

Άρα η συνάρτηση $y=\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η συνάρτηση $y=-\left(\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x\right)$ είναι γνησίως αύξουσα βάσει της προτάσεως 1. Από την ίδια πρόταση συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως είναι 1 – 1.

Όπως παρατηρούμε είναι $f(0)=0$. Άρα η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x)=f(0)$, οπότε η μοναδική λύση της είναι το 0.

Πρόβλημα 2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[5]{29+x}.$$

Λύση Προφανώς σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το διάστημα $[2,+\infty)$. Για x=2 δεν επαληθεύεται ενώ για $x\in(2,+\infty)$ έχουμε:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[5]{29+x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[5]{29+x}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{x-2}}+\frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[5]{x-2}}-\frac{\sqrt[5]{29+x}}{\sqrt[5]{x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[10]{(x-2)^5}}{\sqrt[10]{(x-2)^2}}+\frac{\sqrt[15]{(x-2)^5}}{\sqrt[15]{(x-2)^3}}-\sqrt[5]{\frac{29+x}{x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[10]{(x-2)^3}+\sqrt[15]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{\frac{x-2+31}{x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[10]{(x-2)^3}+\sqrt[15]{(x-2)^2}-\sqrt[5]{1+\frac{31}{x-2}}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^{\frac{3}{10}}+(x-2)^{\frac{2}{15}}-\left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}=0.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-2)^{\frac{3}{10}}+(x-2)^{\frac{2}{15}}-\left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Από όσα προηγήθηκαν είναι φανερό πως η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=0$ ή με την εξίσωση $f(x)=f(3)$, αφού είναι $f(3)=0$. Καθώς η συνάρτηση $y=x-2$ είναι γνησίως αύξουσα και η συνάρτηση $y=1+\frac{31}{x-2}$ είναι γνησίως φθίνουσα (πρόταση 3), συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $y=(x-2)^{\frac{3}{10}}$ και $y=(x-2)^{\frac{2}{15}}$ είναι γνησίως αύξουσες (πρόταση 7), ενώ η συνάρτηση $y=\left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ είναι γνησίως φθίνουσα (πρόταση 7).

Επομένως η συνάρτηση $y=-\left(1+\frac{31}{x-2}\right)^{\frac{1}{5}}$ είναι

γνησίως αύξουσα, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (πρόταση 1).
Έτσι καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(3)$, και επομένως και η δοθείσα εξίσωση, έχει ως μοναδική λύση το 3.

Πρόβλημα 3. Δίδεται ο $a\in(1,+\infty)$ και η συνάρτηση $f_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=a^x+a^{\frac{4}{x}}$.
(i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f_a.
(ii) Να λύσετε στο $(0,+\infty)$ τις εξισώσεις:

(α) $2^x+3^x+2^{\frac{4}{x}}+3^{\frac{4}{x}}=102$,

(β) $2^x+3^x+2^{\frac{4}{x}}+3^{\frac{4}{x}}=26$.

Λύση (i) Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς $x_1,x_2\in[2,+\infty)$ τέτοιους, ώστε $x_1<x_2$. Τότε έχουμε

$$f_a(x_2)-f_a(x_1)=a^{x_2}+a^{\frac{4}{x_2}}-\left(a^{x_1}+a^{\frac{4}{x_1}}\right)$$
$$=a^{x_2}-a^{x_1}-\left(a^{\frac{4}{x_1}}-a^{\frac{4}{x_2}}\right)$$
$$=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)-a^{\frac{4}{x_2}}\left(a^{\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}}-1\right)$$
$$=a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)-a^{\frac{4}{x_2}}\left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}-1\right). \quad (1)$$

Επειδή είναι $a>1$, η συνάρτηση $y=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Καθώς είναι $x_1<x_2$, έχουμε $x_2-x_1>0$ και $\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}>0$.

Επομένως ισχύει $a^{x_2-x_1}>a^0$ και $a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}>a^0$, οπότε έχουμε

$$a^{x_2-x_1}-1>0 \text{ και } a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}-1>0. \quad (2)$$

Επειδή ισχύει $2\le x_1<x_2$, έχουμε $x_1x_2>4$. Επομένως ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$x_1>\frac{4}{x_2} \text{ και } x_2-x_1>\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \quad (3)$$

Καθώς η συνάρτηση $y=a^x$ είναι γνησίως αύξουσα, από τις ανισότητες (3) συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$a^{x_1}>a^{\frac{4}{x_2}} \text{ και } a^{x_2-x_1}>a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}. \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$a^{x_2-x_1}-1>a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}-1>0. \quad (5)$$

Καθώς από την πρώτη από τις ανισότητες (4) έχουμε $a^{x_1}>a^{\frac{4}{x_2}}>0$, τότε από την (5), με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, παίρνουμε

$$a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)>a^{\frac{4}{x_2}}\left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}-1\right) \text{ ή ισοδυνάμως}$$

$$a^{x_1}\left(a^{x_2-x_1}-1\right)-a^{\frac{4}{x_2}}\left(a^{\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}}-1\right)>0.$$

Έτσι από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f_a(x_2)-f_a(x_1)>0$, δηλαδή $f_a(x_2)>f_a(x_1)$.
Επομένως η συνάρτηση f_a είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Επαναλαμβάνοντας το ανωτέρω συλλογισμό καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2]$.

(ii) (α) Είναι φανερό πως η εξίσωση $2^x+3^x+2^{\frac{4}{x}}+3^{\frac{4}{x}}=102$ μπορεί να γραφεί με την μορφή $f_2(x)+f_3(x)=120$. Αν συμβολίσουμε με f την συνάρτηση f_2+f_3, τότε η εξίσωση γράφεται $f(x)=120$.

Παρατηρούμε ότι το 120 μπορεί να γραφεί είτε ως $f(1)$ είτε ως $f(4)$.

Από το (i) και την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$. Επομένως η f είναι 1–1 στο κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,2]$ και $[2,+\infty)$. Έτσι η δοθείσα εξίσωση

- στο διάστημα $(0,2]$ παίρνει την μορφή $f(x)=f(1)$, οπότε έχει ως μοναδική λύση σε αυτό τον αριθμό 1, ενώ
- στο διάστημα $[2,+\infty)$ παίρνει την μορφή $f(x)=f(4)$, οπότε έχει ως μοναδική λύση σε αυτό τον αριθμό 4.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι οι μοναδικές λύσεις της δοθείσας εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 4.

β) Είναι φανερό πως η εξίσωση

$2^x+3^x+2^{\frac{4}{x}}+3^{\frac{4}{x}}=26$, σύμφωνα με όσα έχουμε πει ποιο πάνω, μπορεί να πάρει την μορφή $f(x)=f(2)$.

Είδαμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,2]$ γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Αφού η f είναι 1–1 στο διάστημα $(0,2]$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=f(2)$ σε αυτό είναι ο αριθμός 2.

Αφού η f είναι 1–1 στο διάστημα $[2,+\infty)$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=f(2)$ σε αυτό είναι ο αριθμός 2.

Τελικά, είναι φανερό, πως η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης στο $(0,+\infty)$ είναι ο αριθμός 2.

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε και με τον εξής τρόπο.

Όπως θα δούμε στην πρόταση 10 στην συνέχεια, από τα διαστήματα μονοτονίας της f συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός 2 είναι η μοναδική θέση ελαχίστου της f. Επομένως αυτός είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=f(2)$.

Πρόβλημα 4. Αν είναι $a\in(0,+\infty)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $f_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f_a(x)=3^x+3^{\frac{a^2}{x}}.$$

(i) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f_a.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $3^x+4^{\frac{1}{x}}=7$.

Λύση **(i)** Αν εργαστούμε ακριβώς όπως στο πρόβλημα 1, (i) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,a]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a,+\infty)$.

(ii) Είναι προφανές ότι μια λύση της εξίσωσης $3^x+4^{\frac{1}{x}}=7$ είναι ο αριθμός 1. Έχει όμως και άλλη ρίζα;

Για να αξιοποιήσουμε πρώτο μέρος του προβλήματος σκεφτόμαστε ότι θα μας βοηθούσε να δώσουμε στην εξίσωση την μορφή $3^x+3^{\frac{a^2}{x}}=7$, δηλαδή $f_a(x)=7$ για κατάλληλο a.

Επομένως πρέπει να μετατρέψουμε το $4^{\frac{1}{x}}$ σε δύναμη με βάση το 3. Έτσι γράφουμε

$$4^{\frac{1}{x}}=\left(10^{\log 4}\right)^{\frac{1}{x}}=10^{\frac{\log 4}{x}}=10^{\log 3\frac{\log 4}{x\log 3}}$$
$$=\left(10^{\log 3}\right)^{\frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{1}{x}}=3^{\frac{a^2}{x}},$$

όπου συμβολίσαμε με a τον μεγαλύτερο της μονάδας αριθμό $\sqrt{\dfrac{\log 4}{\log 3}}$.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση παίρνει την μορφή $f_a(x)=7$ με $a=\sqrt{\dfrac{\log 4}{\log 3}}$.

Από το (i) γνωρίζουμε ότι η f_a είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,a]$, οπότε είναι και 1–1 σε αυτό. Καθώς $1\in(0,a]$ και ισχύει $f_a(1)=7$, η εξίσωση γράφεται $f_a(x)=f_a(1)$ και προφανώς έχει μοναδική λύση στο $(0,a]$ το 1.

Παρατηρούμε ότι

$$3^{a^2}=3^{\frac{\log 4}{\log 3}}=\left(10^{\log 3}\right)^{\frac{\log 4}{\log 3}}=10^{\log 3\cdot\frac{\log 4}{\log 3}}$$
$$=10^{\log 4}=4.$$

Επομένως έχουμε $f_a(a^2)=3^{a^2}+3^{\frac{a^2}{a^2}}=4+3=7$.

Έτσι η δοθείσα εξίσωση μπορεί να γραφεί και με την μορφή $f_a(x)=f_a(a^2)$.

Επειδή ισχύει $a>1$, έχουμε $a^2>a$. Δηλαδή $a^2\in[a,+\infty)$.

Από το (i) γνωρίζουμε ότι η f_a είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a,+\infty)$. Άρα είναι 1–1 σε αυτό και επομένως η εξίσωση $f_a(x)=f_a(a^2)$ έχει εδώ μοναδική λύση τον αριθμό a^2.

Τελικά συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδικές λύσεις τους αριθμούς 1 και $\dfrac{\log 4}{\log 3}$.

Πρόβλημα 5. Να λύσετε την εξίσωση

$$(x-1)^{\frac{1}{\ln(e-1)}}-(e-1)^{\ln x}=1.$$

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού το $(1,+\infty)$. Η πράξη της αφαίρεσης συχνά δημιουργεί δυσκολίες στους αλγεβρικούς χειρισμούς, αφού εν μέρει δεν είναι συμβατή με ορισμένες σχέσεις όπως, για παράδειγμα, με την διάταξη.

Έτσι σε ορισμένες περιπτώσεις μετασχηματίζουμε μια εξίσωση ή μια ανίσωση, ώστε τα μέλη της να έχουν μορφή αθροισμάτων. Αυτή είναι μια στρατηγική που εφαρμόζουμε συχνά σε εξισώσεις με άρρητες παραστάσεις.

Αυτήν την στρατηγική ακολουθούμε και εδώ γράφοντας την δοθείσα εξίσωση με την μορφή

$$(x-1)^{\frac{1}{ln(e-1)}}=(e-1)^{ln\,x}+1.$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=(x-1)^{\frac{1}{ln(e-1)}}$$

και $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=(e-1)^{ln\,x}+1$.

Τότε η εξίσωση παίρνει την μορφή $f(x)=g(x)$ με σύνολο ορισμού το $(1,+\infty)$. Στο $(1,+\infty)$ προφανώς ισχύει $g(x)>1$ και $f(x)>0$ Ορίζονται λοιπόν και οι δύο συναρτήσεις $f(g(x))$

$$g(f(x)),\ f(g(x))=(g(x)-1)^{\frac{1}{ln(e-1)}}$$
$$=\left((e-1)^{ln\,x}\right)^{\frac{1}{ln(e-1)}}=(e-1)^{\frac{ln\,x}{ln(e-1)}}=\left(e^{ln(e-1)}\right)^{\frac{ln\,x}{ln(e-1)}}$$
$$=e^{\frac{ln\,x\,ln(e-1)}{ln(e-1)}}=e^{ln\,x}=x,\ g(f(x))=(e-1)^{ln(f(x))}+1=$$
$$=(e-1)^{ln(x-1)\frac{1}{ln(e-1)}}+1=\left(e^{ln(e-1)}\right)^{\frac{ln(x-1)}{ln(e-1)}}+1$$
$$=e^{ln(e-1)\frac{ln(x-1)}{ln(e-1)}}+1=e^{ln(x-1)}+1=x-1+1=x.$$

Η συνάρτηση g αποτελεί σύνθεση

- της συνάρτησης $y=(e-1)^x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού $e-1>1$ και
- της συνάρτησης $y=ln\,x$ η οποία επίσης είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα βάσει της πρότασης 4.

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις της πρότασης 6, οπότε η εξίσωση $f(x)=g(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $g(x)=x$, δηλαδή με την εξίσωση $(e-1)^{ln\,x}+1=x$.

Επειδή το σύνολο στο οποίο την επιλύουμε είναι το διάστημα $(1,+\infty)$ αυτή μετασχηματίζεται ισοδυνάμως ως εξής:

$$\frac{(e-1)^{ln\,x}}{x}+\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow\frac{e^{ln(e-1)ln\,x}}{e^{ln\,x}}+\frac{1}{x}=1$$
$$\Leftrightarrow e^{(ln(e-1)-1)ln\,x}+\frac{1}{x}=1.$$

Είναι φυσικό να ορίσουμε την συνάρτηση

$$h:(1,+\infty)\to\mathbb{R}\ \text{ με }\ h(x)=e^{(ln(e-1)-1)ln\,x}+\frac{1}{x}.$$

Επομένως η εξίσωση $g(x)=x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x)=1$.

Επειδή είναι $e-1<e$, έχουμε $ln(e-1)<1$, δηλαδή $ln(e-1)-1<0$.

Από την πρόταση 1 ii) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $y=(ln(e-1)-1)ln\,x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Από την πρόταση 4 συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $y=e^{(ln(e-1)-1)ln\,x}$, ως σύνθεση της γνησίως αύξουσας συνάρτησης $y=e^x$ και της γνησίως φθίνουσας $y=(ln(e-1)-1)ln\,x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

Καθώς η συνάρτηση $y=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$, συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (πρόταση 1).

Είναι φανερό λοιπόν πως η h είναι 1 – 1.

Προσπαθούμε να εντοπίσουμε δι’ εκτιμήσεως μια λύση της εξίσωσης $h(x)=1$. Είναι φυσικό, λόγω της μορφής της εξίσωσης, να δοκιμάσουμε τον αριθμό $e>1$.

Παρατηρούμε ότι

$$h(e)=e^{(ln(e-1)-1)ln\,e}+\frac{1}{e}=e^{ln(e-1)-1}+\frac{1}{e}$$
$$=\frac{e^{ln(e-1)}}{e}+\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}+\frac{1}{e}=1.$$

Επομένως η εξίσωση $h(x)=1$ στην πραγματικότητα έχει την μορφή $h(x)=h(e)$.

Άρα η μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης, και επομένως και της δοθείσας, είναι το e.

Θέματα παλαιοτέρων Εποχών

Επιμέλεια: Γιώργος Σ. Τασσόπουλος

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ-ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ Ε.Μ.Π. ΤΟ 1962.

Τοπογράφοι – Αγρονόμοι Ε.Μ.Π. 1962

Θέμα 1ο (Εξεταστής Ι. Αργυράκος)

Να αποδειχθεί ότι εις παν τρίγωνον αληθεύει η σχέσις:

$$\frac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})}{\text{συνΑ}}+\frac{\text{συν}(\text{Γ}-\text{Α})}{\text{συνΒ}}+\frac{\text{συν}(\text{Α}-\text{Β})}{\text{συνΓ}}+2=$$

$$=\frac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})\text{συν}(\text{Γ}-\text{Α})\text{συν}(\text{Α}-\text{Β})}{\text{συνΑσυνΒσυνΓ}}$$

Απόδειξη

1^{ος} Τρόπος: (Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς- Γυμνάσιο Κεραμειών Κεφαλλονιάς)

Μόλις κάποιος διαβάσει το θέμα, καταλαβαίνει ότι δεν έχει νόημα σε ορθογώνια τρίγωνα. Αυτό το "εις παν τρίγωνον" δεν έπρεπε να γραφεί…, αλλά αντ' αυτου «εις παν μη ορθογώνιον τρίγωνον»

Αν $\dfrac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})}{\text{συνΑ}}=\kappa_1$, $\dfrac{\text{συν}(\text{Γ}-\text{Α})}{\text{συνΒ}}=\kappa_2$, $\dfrac{\text{συν}(\text{Α}-\text{Β})}{\text{συνΓ}}=\kappa_3$

τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(\kappa_1+1)+(\kappa_2+1)+(\kappa_3+1)=\kappa_1\kappa_2\kappa_3+1.$$

Έχουμε

$$\kappa_1+1=\frac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})}{\text{συνΑ}}+1=\frac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})+\text{συνΑ}}{\text{συνΑ}}=$$

$$=\frac{\text{συν}(\text{Β}-\text{Γ})-\text{συν}(\text{Β}+\text{Γ})}{\text{συνΑ}}=$$

$$=\frac{2\text{ημΒημΓ}}{\text{συνΑ}}=\frac{2\cdot\frac{\beta}{2R}\cdot\frac{\gamma}{2R}}{\text{συνΑ}}=\frac{\beta\gamma}{2R^2\text{συνΑ}}=$$

$$=\frac{\frac{2(\text{ΑΒΓ})}{\text{ημΑ}}}{2R^2\text{συνΑ}}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{R^2\text{ημΑσυνΑ}}=$$

$$=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{\frac{1}{2}R^2\text{ημ}2\text{Α}}=\frac{(\text{ΑΒΓ})}{(\text{ΟΒΓ})},$$

όπου Ο το περίκεντρο του ΑΒΓ, όταν $\hat{\text{Α}}<90^\circ$.

Διακρίνουμε στη συνέχεια δύο περιπτώσεις.

α) Αν το $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ είναι οξυγώνιο και

$(\text{ΑΒΓ})=\text{Ε}$, $(\text{ΟΒΓ})=\text{Ε}_1$, $(\text{ΟΓΑ})=\text{Ε}_2$, $(\text{ΟΑΒ})=\text{Ε}_3$

τότε δείξαμε ότι $\kappa_1+1=\dfrac{\text{Ε}}{\text{Ε}_1}$.

Ομοίως $\kappa_2+1=\dfrac{\text{Ε}}{\text{Ε}_2}$, $\kappa_3+1=\dfrac{\text{Ε}}{\text{Ε}_3}$ και αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_1}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_2}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_3}=\kappa_1\kappa_2\kappa_3+1.$$

Πράγματι

$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3+1=\left(\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_1}-1\right)\cdot\left(\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_2}-1\right)\cdot\left(\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_3}-1\right)+1=$$

$$=\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_1}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_2}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_3}+\frac{\text{Ε}^2\cdot(\text{Ε}-\text{Ε}_1-\text{Ε}_2-\text{Ε}_3)}{\text{Ε}_1\cdot\text{Ε}_2\cdot\text{Ε}_3}-1+1=$$

$$\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_1}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_2}+\frac{\text{Ε}}{\text{Ε}_3},\ \text{αφού}\ \text{Ε}=\text{Ε}_1+\text{Ε}_2+\text{Ε}_3.$$

- *Το γινόμενο θα μπορούσε να βρεθεί και με βάση τον τύπο*

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=$$

$$=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma\quad(I)$$

με $x=-1,\ \alpha=\dfrac{E}{E_1},\ \beta=\dfrac{E}{E_2},\gamma=\dfrac{E}{E_3}$ *ίσο με*

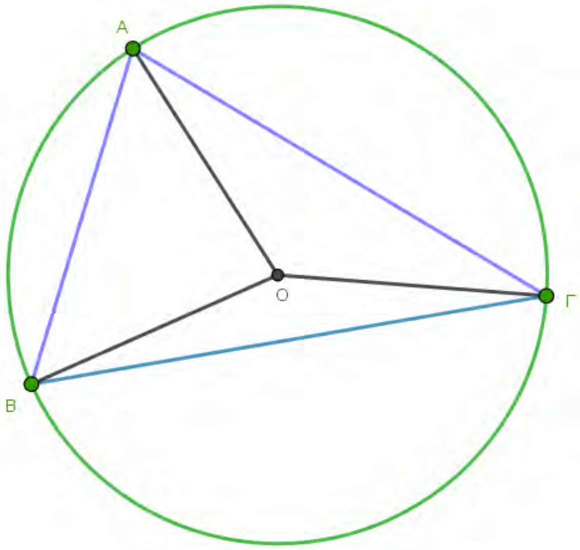
$$(-1)^3+\left(\frac{E}{E_1}+\frac{E}{E_2}+\frac{E}{E_3}\right)(-1)^2+$$

$$+\left(\frac{E^2}{E_1E_2}+\frac{E^2}{E_2E_3}+\frac{E^2}{E_3E_1}\right)(-1)+\frac{E^3}{E_1E_2E_3}=$$

$$= -1 + \left(\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3}\right) - E^2 \cdot \frac{E_3 + E_1 + E_2}{E_1 E_2 E_3} +$$

$$+ \frac{E^3}{E_1 E_2 E_3} = 1 + \left(\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3}\right)$$

αφού $E_1 + E_2 + E_3 = E$



β) Αν $\hat{A} > 90^o$, τότε το μόνο που αλλάζει είναι ότι:

$E_1 = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \eta\mu\left(360^o - 2A\right) = -\frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \eta\mu 2A,$

οπότε $\kappa_1 + 1 = -\frac{E}{E_1}$ και $E = E_2 + E_3 - E_1$.

Αρκεί λοιπόν τότε να δείξουμε ότι

$$-\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3} = \kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 1.$$

Πράγματι τότε έχουμε:

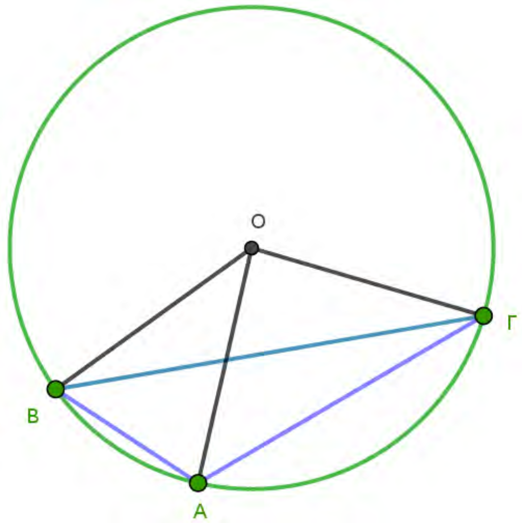
$$\kappa_1\kappa_2\kappa_3 + 1 = \left(-\frac{E}{E_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{E}{E_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{E}{E_3} - 1\right) + 1 =$$

$$= -\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3} + \frac{E^2 \cdot (-E - E_1 + E_2 + E_3)}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3} - 1 + 1 =$$

$$= -\frac{E}{E_1} + \frac{E}{E_2} + \frac{E}{E_3} \text{ αφού } E = E_2 + E_3 - E_1.$$

- *Το γινόμενο θα μπορούσε να βρεθεί επίσης με εφαρμογή του τύπου (I) με τη διαφορά ότι τώρα*

$$\alpha = -\frac{E}{E_1}$$



Εκείνη την εποχή τα θέματα έφεραν την υπογραφή των θεματοδοτών, μια συνήθεια που εξακολουθεί να υπάρχει στη Μέση Εκπαίδευση.

Ας γίνει μια μικρή αναφορά στον άνθρωπο που έβαλε αυτό το θέμα, τον Ιωάννη Αργυράκο. Είχε την Έκτακτη Έδρα Γενικής Αστρονομίας και Γαιοδετικοαστρονομικών Προσδιορισμών στο Ε.Μ.Π. Ήταν διδάκτωρ του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών. Επιβλέπων της διδακτορικής του διατριβής ήταν ο Σταύρος Πλακίδης , καθηγητής Αστρονομίας στο Πανεπιστήμιο Αθηνών. Η διατριβή υπεβλήθη το 1945 και είχε ως θέμα "Μελέτη της πορείας του εκκρεμούς Fennon 55 του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών".

2^{ος} Τρόπος: (Γ. Τασσόπουλος)

Έχουμε: $\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{-\sigma\upsilon\nu(B+\Gamma)} =$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + \eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma - \sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma + 1}{\varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma - 1}$$

Αν θέσουμε $x = \varepsilon\varphi A$, $y = \varepsilon\varphi B$, $w = \varepsilon\varphi\Gamma$, τότε έχουμε ως γνωστόν $x \cdot y \cdot w = x + y + w$, οπότε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{yw+1}{yw-1} = \frac{\frac{xyw}{x}+1}{\frac{xyw}{x}-1} = \frac{\frac{x+y+w}{x}+1}{\frac{x+y+w}{x}-1} =$$

$$= \frac{2x+y+w}{y+w} = \frac{2x}{y+w} + 1$$

Ομοίως $\dfrac{\text{συν}(\Gamma-\text{A})}{\text{συνB}}=\dfrac{2y}{x+w}$

και $\dfrac{\text{συν}(\text{A}-\text{B})}{\text{συν}\Gamma}=\dfrac{2w}{x+y}$.

Αν θέσουμε: $\dfrac{2x}{y+w}=\alpha$, $\dfrac{2y}{x+w}=\beta$, $\dfrac{2w}{x+y}=\gamma$,

τότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$2+(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+1)\cdot(\beta+1)\cdot(\gamma+1),\ \text{ή}$$

$$5+\alpha+\beta+\gamma=1^3+(\alpha+\beta+\gamma)\cdot1^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\cdot1+\alpha\beta\gamma,$$

ή $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\gamma=4$, ή

$$\frac{4xy}{(x+w)(y+w)}+\frac{4yw}{(x+y)(x+w)}+\frac{4xw}{(x+y)(y+w)}+$$

$$+\frac{8xyw}{(x+y)(y+w)(x+w)}=4$$

ή τελικά

$$xy(x+y)+yw(y+w)+wx(x+w)+2xyw=$$

$$=(x+y)(y+w)(w+x)$$

που προκύπτει εύκολα με εκτέλεση πράξεων ή παραγοντοποίηση του α΄μέλους.

- *Αφορμή για τη μελέτη του θέματος αυτού αποτέλεσε κατά το συνάδελφο κ. Τ. Μπαλτσαβιά, που το πρότεινε, η λύση του στο «Δελτίο Θεμάτων» του Α. Πάλλα με ένα συνθετικό τρόπο εντελώς αδικαιολόγητο, ενώ όπως θα δείτε στη συνέχεια με την αναζήτηση ικανών σχέσεων για την εξασφάλιση της ζητούμενης (Μέθοδος του αρκεί) θα μπορούσε να αποτελέσει μια πολύ φυσιολογική λύση.*

3^{ος} Τρόπος (Από το Δελτίο Θεμάτων του Α. Πάλλα):

Από τη γνωστή σχέση

$$\text{εφA}+\text{εφB}+\text{εφ}\Gamma=\text{εφA εφB εφ}\Gamma\ \text{(i)}$$

με πολλαπλασιασμό (σύμφωνα με το Δελτίο) ή καλύτερα με διαίρεση των μελών της με εφA εφB εφΓ και θέτοντας εφB εφΓ =x, εφΓ εφA =y, εφA εφB =z, βρίσκουμε $xy+yz+zx=xyz$ (1).

Στη συνέχεια με έκπληξη διαβάζουμε ότι:

$$(1)\underset{;;}{\Rightarrow}2(x-1)(y-1)(z-1)+(x+1)(y-1)(z-1)+$$

$$+(x-1)(y+1)(z-1)+(x-1)(y-1)(z+1)=$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)\ (2)\Rightarrow 2+\frac{x+1}{x-1}+\frac{y+1}{y-1}+\frac{z+1}{z-1}=$$

$$=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{y+1}{y-1}\cdot\frac{z+1}{z-1}\ (3)\Rightarrow$$

$$\frac{\text{συν}(\text{B}-\Gamma)}{\text{συνA}}+\frac{\text{συν}(\Gamma-\text{A})}{\text{συνB}}+\frac{\text{συν}(\text{A}-\text{B})}{\text{συν}\Gamma}+2=$$

$$=\frac{\text{συν}(\text{B}-\Gamma)\text{συν}(\Gamma-\text{A})\text{συν}(\text{A}-\text{B})}{\text{συνAσυνBσυν}\Gamma}(4)$$

Υπονοείται βέβαια ότι

$$x-1=\ldots=\frac{\text{συνA}}{\text{συνB}\cdot\text{συν}\Gamma}\neq0,$$

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\text{εφB}\cdot\text{εφ}\Gamma+1}{\text{εφB}\cdot\text{εφ}\Gamma-1}=\ldots=\frac{\text{συν}(\text{B}-\Gamma)}{\text{συνA}}$$

- *Η πρώτη συνεπαγωγή $(1)\Rightarrow(2)$ είναι σχεδόν απίθανο να επινοηθεί. Η αντίστροφη πορεία όμως είναι εντελώς φυσιολογική. Δηλαδή αν διατυπώσουμε τη λύση ως εξής: Για να ισχύει η (4) αρκεί να ισχύει η (3), ή αρκεί να ισχύει η (2) και να διαιρεθούν τα μέλη της με $(x-1)(y-1)(z-1)$, ή αρκεί να ισχύει η (1) που είναι άμεση συνέπεια της (i). Τότε η λύση νομίζω είναι άκρως διδακτική και αποδεκτή από τον αναγνώστη*

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ: Ένας καλός συνάδελφος … έφυγε

Ένας καλός συνάδελφος και φίλος ο Βασίλης ο Κατσαργύρης, δεν είναι πια ανάμεσα μας από τις 23 Ιουλίου 2018. Τον χάσαμε στα πλαίσια τις φονικότερης πυρκαγιάς στην ιστορία του σύγχρονου ελληνικού κράτους[1].

Ο Βασίλης γεννήθηκε στις Ράχες Κυπαρισσίας το 1948, επήρε πτυχίο μαθηματικού στο Πανεπιστήμιο της Αθήνας και μεταπτυχιακό τίτλο στην Αγγλία. Μεταξύ άλλων ήταν χρόνια βοηθός στο ΕΜΠ , είχε διδάξει στα ΠΕΚ, ήταν μέλος της συγγραφικής ομάδας των βιβλίων του λυκείου στις αρχές της 10ετίας του 90. Ήταν πάντα στο πλευρό της ΕΜΕ, μεταξύ άλλων από τα πλέον ενεργά μέλη της Επιτροπής του Προγράμματος της ΕΜΕ για το Λύκειο του 2012, κλπ. Τελικός διορισμός στο Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο επί 25ετία.

Εγώ τον γνώρισα στην συγγραφή των βιβλίων για το λύκειο. Μπορώ να πω με σιγουριά ότι στην προσπάθεια αυτή υπήρχε πάθος, ενθουσιασμός και δουλειά σχεδόν χωρίς ωράρια ή σαββατοκύριακα. Ο Βασίλης ήταν καλό παιδί, καλός στην συνεργασία, είχε βαθιές μαθηματικές γνώσεις, (που ειδικά σήμερα μας είναι ιδιαίτερα πολύτιμο χαρακτηριστικό), φυσικά είχε μεγάλη πείρα από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τέλος … δεν ήταν από εκείνους που …τα ξέρουν όλα ! (κάτι που νομίζω ότι σήμερα το έχουμε ιδιαίτερη ανάγκη).

Κρίνω σκόπιμο να αναφέρω ένα επεισόδιο, που μου το διηγήθηκε ο ίδιος, που έλαβε χώρα στα πλαίσια τις συγγραφής των βιβλίων του Λυκείου, που το αναφέρω διότι αντανακλά και χαρακτηριστικά του Βασίλη αλλά και τις κοινωνίας μας: Είχε εκδοθεί το βιβλίο της Α Λυκείου και κάποια στιγμή ξεκίνησε μια κριτική με κύριο φορέα τον πλέον δημοφιλή ραδιοσταθμό της εποχής, που το είχε κάνει πρώτο θέμα, από εκεί πέρασε σε πολλά ΜΜΕ, και υπήρχε γενικώς μια ατμόσφαιρα ότι το βιβλίο είναι γεμάτο «λάθη».[2] ΔΕΝ ΒΡΙΣΚΩ ΛΟΓΟΥΣ ΝΑ ΕΚΦΡΑΣΩ ΤΟ ΠΟΣΟ ΕΝΤΟΝΑ ΠΙΣΤΕΥΩ ΣΤΟ ΔΙΚΑΙΩΜΑ ΤΗΣ ΚΡΙΤΙΚΗΣ και φυσικά μια κριτική μπορεί να είναι και πολύ σωστή και οι συγγραφείς ανάξιοι. Όμως εδώ γινόταν κριτική η οποία δεν έδινε την δυνατότητα νηφάλιου διαλόγου με ορθολογικά επιχειρήματα. Η μία πλευρά μπορούσε να λέει κυριολεκτικά ο τι θέλει και προς επίρρωση αυτού αναφέρω ότι εγώ εζήτησα να εμφανισθώ σε γνωστό μεγάλο κανάλι όπου σε βιντεοσκοπηθείσα συνέντευξη είπα μεταξύ άλλων περίπου ότι « Ναι υπάρχουν λάθη, που είναι επουσιώδεις αβλεψίες που διορθώνονται εύκολα και καταστάσεις ανάλογες εμφανίζονται σε όλες σχεδόν τις διεθνείς εκδόσεις». Ε λοιπόν στα κεντρικά νέα του σταθμού το βράδυ, η φράσης μου έγινε «Ναι υπάρχουν λάθη», τελεία και παύλα!. Κάτι ανάλογο έγινε επίσης και με τον καθηγητή του ΕΜΠ Γιώργο Παντελίδη.

Ο Βασίλης, όπως όλοι μας, ήταν πολύ οργισμένος και αποφάσισε να επισκεφθεί κάποιες εφημερίδες να θέσει τους αρμοδίους δημοσιογράφους προ των ευθυνών τους. Έδινε την ψυχή του για την υπόθεση της συγγραφής, μάλιστα θυμάμαι ότι μου είχε πει κάποια ημέρα ότι είδε στον ύπνο του ολοκληρώματα που φορούσαν κουστούμια !. Όπως μου έλεγε λοιπόν, βρέθηκε στο γραφείο του δημοσιογράφου του αρμόδιου για τα εκπαιδευτικά θέματα, μιας από τις μεγάλες εφημερίδες. Στην συζήτηση σε ένα ξέσπασμα είπε περίπου τα εξής : «… Τι είναι αυτά που γράφετε ? Ποιοι σας τα λένε αυτά? Γιατί δεν ζητήσατε την άποψη των συγγραφέων ? Το βιβλίο αυτό γράφτηκε από μαθηματικούς που έχουν κάποια προσόντα καθηγητές Πανεπιστημίου, εκπαιδευτικούς με μεγάλη πείρα, και κρίθηκε από αντίστοιχη ομάδα κριτών. Έχουμε δώσει τον εαυτό μας για αυτό το βιβλίο, έχουμε κοιτάξει βιβλία από όλο τον κόσμο κλπ. Το τραπέζι του σαλονιού του σπιτιού μου είναι γεμάτο βιβλία, χαρτιά, μολύβια, γομολάστιχες, σε μόνιμη βάση. Καθώς πλησίαζαν τα Χριστούγεννα ρώτησα τα παιδιά μου τι δώρο θέλουν να τους πάρω και μου απάντησαν «Τίποτα δεν θέλουμε μπαμπά. Απλά θέλουμε να αδειάσεις το τραπέζι στο σαλόνι από τα βιβλία να βάλουμε ένα βάζο με λουλούδια». Στο σημείο αυτό βούρκωσε. Ο συνομιλητής του επηρεάστηκε από την συναισθηματικότητα και ειλικρίνεια του Βασίλη και του είπε περίπου τα εξής : «… Κοιτάξτε, όπως ξέρετε το θέμα αυτό τρέχει έντονα κάποιες ημέρες τώρα. Εδώ έρχονται κάθε ημέρα σωρεία πληροφοριών όλων των ειδών που είναι αδύνατον να ελεγχθούν πλήρως. Στις 8μμ «κλείνει» το τυπογραφείο. Η πίεση χρόνου που έχουμε είναι τεράστια. Αν δεν γράψουμε κάτι θα μείνουμε πίσω».

Θα κλείσω το κείμενο αυτό με έναν σχολιασμό σχετικά με τις πυρκαγιές της 23 Ιουλίου. Κάθε θάνατος έχει στοιχεία τραγικότητας που ποικίλουν από τις ιδιαίτερες συνθήκες. Γενικά αποδεχόμεθα σχετικά ευκολότερα θανάτους που οφείλονται σε δυνάμεις που θεωρούμε ότι σαν άνθρωποι δεν μπορούμε να υπερβούμε, π.χ. επιδημίες, ιατρικούς λόγους κλπ. Όμως η απώλεια του ΒΑΣΙΛΗ και άλλων 100 περίπου συνανθρώπων μας στις 23 Ιουλίου γενικώς θεωρούμε ότι κυρίως ήταν θέμα ανθρώπινης αβελτηρίας που διαχέεται στον κοινωνικό μας κορμό για πολλές δεκαετίες τώρα, που φαίνεται να συμφωνούμε γενικώς σε αυτό το τελευταίο, και κατά καιρούς στο παρελθόν το έχουμε συζητήσει κυρίως στις στιγμές της κρίσης, όμως δεν έχουμε καταφέρει φευ να οργανωθούμε σε πράξεις. Αυτό δίνει ένα ασύμμετρο στοιχείο τραγικότητας στους θανάτους της 23 Ιουλίου.

Εύχομαι στον αγαπημένο φίλο τον Βασίλη να είναι ελαφρό το χώμα της Αττικής γης που τον σκεπάζει
Και εύχομαι για εμάς τους υπόλοιπους να καταφέρουμε να οργανώσουμε τα πράγματα έτσι, ώστε μετά από 3-4 χρόνια να μην έχουμε την ίδια κατάσταση και να μην λέμε τα ίδια ή παρεμφερή.

ΣΤΑΥΡΟΣ Γ ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ, Ομότιμος καθηγητής ΕΚΠΑ

[1] Ο τελευταίος επίσημος απολογισμός (στις Σεπτεμβρίου 2018 αναφέρεται σε 99 νεκρούς) ενώ υπήρξαν και 164 τραυματίες, εκ των οποίων οι 23 παιδιά. Η πυρκαγιά στο Νέο Βουτζά και το Μάτι είναι η φονικότερη στην ιστορία του σύγχρονου ελληνικού κράτους και η δεύτερη πιο φονική πυρκαγιά παγκοσμίως κατά τον 21ο αιώνα, μετά τις πυρκαγιές στην Αυστραλία στις 7 Φεβρουαρίου 2009 που είχαν σκοτώσει 180 άτομα.

[2] Αξίζει να αναφέρω ότι η ΕΜΕ, δεν είχε συμμετάσχει σε αυτή την συγχορδία.

Μία χρήσιμη ταυτότητα και μερικές εφαρμογές της

Τσιλιακός Λευτέρης

Α. Αν Κ, λ ϵ **N***, με (Κ,λ)=1, τότε υπάρχουν α, β, γ, δ ϵ **N*** τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες: $K\cdot x^2-\lambda\cdot y^2=K(a\cdot x\pm\beta\cdot y)^2-\lambda(\gamma\cdot x\pm\delta\cdot y)^2$ (1)

Απόδειξη

(1) $\Leftrightarrow K\cdot x^2-\lambda\cdot y^2=K(a^2\cdot x^2\pm2\cdot a\cdot\beta\cdot x\cdot y+\beta^2\cdot y^2)-\lambda(\gamma^2\cdot x^2\pm2\cdot\gamma\cdot\delta\cdot x\cdot y+\delta^2\cdot y^2)$

Για τον υπολογισμό των α, β, γ, δ πρέπει και αρκεί:

$K\cdot\alpha^2-\lambda\cdot\gamma^2=K$ (2)

$K\cdot\beta^2-\lambda\cdot\delta^2=-\lambda$ (3)

$K\cdot a\cdot\beta-\lambda\cdot\gamma\cdot\delta=0$ (4)

(4) $\Leftrightarrow K\cdot a\cdot\beta=\lambda\cdot\gamma\cdot\delta\Leftrightarrow\frac{\beta}{\delta}=\frac{\lambda\cdot\gamma}{K\cdot a}\Leftrightarrow\frac{\beta^2}{\delta^2}=\frac{\lambda^2\cdot\gamma^2}{K^2\cdot a^2}\Leftrightarrow\frac{K\cdot\beta^2}{\lambda\cdot\delta^2}=\frac{\lambda\cdot\gamma^2}{K\cdot a^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{K\cdot\beta^2-\lambda\cdot\delta^2}{\lambda\cdot\delta^2}=\frac{\lambda\cdot\gamma^2-K\cdot a^2}{K\cdot a^2}$ και λόγω των (2) και (3) έχουμε:

$\frac{-\lambda}{\lambda\cdot\delta^2}=\frac{-K}{K\cdot a^2}\Leftrightarrow a^2=\delta^2\Leftrightarrow a=\delta$ (5)

Οι σχέσεις (3) και (4) λόγω της (5) γράφονται: $K\cdot\beta^2-\lambda\cdot a^2=-\lambda$ (6)

$K\cdot a\cdot\beta-\lambda\cdot\gamma\cdot\alpha=0\Leftrightarrow K\cdot\beta=\lambda\cdot\gamma\Leftrightarrow\frac{K}{\lambda}=\frac{\gamma}{\beta}$ και επειδή (Κ,λ)=1 θα πρέπει:

$\gamma=K\cdot\rho$ (7)

$\beta=\lambda\cdot\rho$ (8)

με ρ ϵ **N*.**

Η (6) λόγω της (8) γίνεται: $K(\lambda\cdot\rho)^2-\lambda\cdot\alpha^2=-\lambda\Leftrightarrow K\cdot\lambda^2\cdot\rho^2-\lambda\cdot\alpha^2=-\lambda\Leftrightarrow K\cdot\lambda\cdot\rho^2-\alpha^2=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha^2-K\cdot\lambda\cdot\rho^2=1$ (9)

Υπάρχει όμως πάντοτε μία ελάχιστη θετική και ακέραια λύση (α,ρ) της (9)

(αρκεί $K\cdot\lambda\neq\omega^2$, με ω ϵ **N*).** Έτσι οι ζητούμενες τιμές των α, β, γ, δ είναι οι εξής:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\text{ (ο α της λύσης (α,ρ))}\\ \beta=\lambda\rho\\ \gamma=\kappa\rho\\ \delta=\alpha\end{array}\right\}\qquad(10)$$

Έτσι η (1) διαμορφώνεται ως εξής: $K\cdot x^2-\lambda\cdot y^2=K(a\cdot x+\lambda\cdot\rho\cdot y)^2-\lambda(K\cdot\rho\cdot x+\alpha\cdot y)^2$ (11)

Το 2^o μέλος της (11) μετά τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη και την (9) καταλήγει εύκολα στο 1^o μέλος. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και αν ως 2^o μέλος της (11) έχουμε το $K(a\cdot x-\lambda\cdot\rho\cdot y)^2-\lambda(K\cdot\rho\cdot x-\alpha\cdot y)^2$. Επειδή λύση της (9) είναι και το ζεύγος (α, -ρ), συνάγεται αμέσως από την (11) η ταυτότητα: $K\cdot x^2-\lambda\cdot y^2=K(a\cdot x\pm\lambda\cdot\rho\cdot y)^2-\lambda(K\cdot\rho\cdot x\pm\alpha\cdot y)^2$ (12)

Παράδειγμα:

Να γραφεί ταυτότητα της μορφής (12), που έχει ως πρώτο μέλος της το διώνυμο: $3x^2-17y^2$

Λύση:

Είναι: *K*=3, λ=17. Το σημαντικό τώρα είναι να βρούμε την ελάχιστη θετική και ακέραια λύση της διοφαντικής εξίσωσης: $a^2-K\cdot\lambda\cdot\rho^2=1$ ή $a^2-51\cdot\rho^2=1$ (13)

που σύμφωνα με την θεωρία υπάρχει πάντοτε αρκεί ο συντελεστής του ρ^2 να μην είναι μηδέν ή τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού. Αυτό επιτυγχάνεται αν αναπτύξουμε την $\sqrt{51}$ σε συνεχόμενο κλάσμα και εφαρμόσουμε τον γνωστό αλγόριθμο για την εύρεση των κλασμάτων που συγκλίνουν στην $\sqrt{51}$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & \\ & 1 & \mathbf{7} & \mathbf{50} \\ \sqrt{51} = & 7; & 7 & 14 \\ & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ & 1 & 0 & \end{array}$$

Όπου $\frac{7}{1}=\frac{7\cdot 1+0}{7\cdot 0+1}$, $\frac{50}{7}=\frac{7\cdot 7+1}{7\cdot 1+0}$

(Θυμίζουμε ότι: $\sqrt{51}=7+\left(\sqrt{51}-7\right)=7+\frac{51-49}{\sqrt{51}+7}=7+\frac{1}{\frac{\sqrt{51}+7}{2}}=7+\frac{1}{7+\left(\frac{\sqrt{51}+7}{2}-7\right)}=$

$$=7+\frac{1}{7+\left(\frac{\sqrt{51}-7}{2}\right)}=7+\frac{1}{7+\frac{51-49}{2\cdot\left(\sqrt{51}+7\right)}}=7+\frac{1}{7+\frac{1}{\sqrt{51}+7}}=7+\frac{1}{7+\frac{1}{14+\ldots}}$$

και η διαδικασία εύρεσης της $\sqrt{51}=[7;7,14]$ τελειώνει όταν βρεθεί πηλίκο, το 14, (διπλάσιο του αρχικού 7). Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η (13) έχει ως ελάχιστη θετική και ακέραια λύση την (α,ρ)=(50,7) που αντιστοιχεί στο πηλίκο 14.

Έτσι έχουμε: α=50, ρ=7 και από την (10) βρίσκουμε: $\beta=\lambda\cdot\rho=17\cdot 7=119$, $\gamma=K\cdot\rho=3\cdot 7=21$, δ=α=50 Επομένως η ταυτότητα που ζητάμε βάσει της (12) είναι η εξής:

$$3\cdot x^2-17\cdot y^2=3\cdot\left(50\cdot x\pm 119\cdot y\right)^2-17\cdot\left(21\cdot x\pm 50\cdot y\right)^2 \qquad (14)$$

Β. Από την (14) φαίνεται αμέσως ότι κάθε διοφαντική εξίσωση της μορφής

$$K\cdot x^2-\lambda\cdot y^2=M \qquad (15)$$

με *K*,λϵ**N*,** (*K*,λ)=1 και Μϵ**Z***, που έχει μία λύση $\left(x_0,y_0\right)$ θα έχει μέσω της (14) και δύο άλλες λύσεις. Άρα τελικά θα έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα:

Η εξίσωση $3\cdot x^2-17\cdot y^2=130$ (16)

έχει ως μία λύση της την $\left(x_0,y_0\right)=\left(7{,}1\right)$. Έτσι με τη βοήθεια της (14) η εξίσωση (16) έχει και τις λύσεις: $\left(x_1,y_1\right)=(50\cdot x_0+119\cdot y_0,\ 21\cdot x_0+50\cdot y_0)$=(469 , 197)

$\left(x_2,y_2\right)=(50\cdot x_0-119\cdot y_0,\ 21\cdot x_0-50\cdot y_0)$=(231 , 97)

Έτσι κάθε λύση της (16) δίνει δύο νέες λύσεις της, οπότε η (16) έχει τελικά άπειρες λύσεις.

Όπως είπαμε κάθε λύση $\left(x_0,y_0\right)$ της (15) δίνει μία νέα λύση $\left(x_1,y_1\right)$ της (15) τέτοια ώστε $x_1>x_0$, $y_1>y_0$ Συγκεκριμένα:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot x_0+\lambda\cdot\rho\cdot y_0=x_1 \\ K\cdot\rho\cdot x_0+\alpha\cdot y_0=y_1 \end{array}\right\} \text{ με } K,\ \lambda,\ \alpha,\ \rho,\ x_0,\ y_0\in\mathbf{N^*}$$

Οπότε: $x_0=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & \lambda\cdot\rho \\ y_1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & \lambda\cdot\rho \\ K\cdot\rho & \alpha \end{vmatrix}}=\frac{\alpha\cdot x_1-\lambda\cdot\rho\cdot y_1}{a^2-K\cdot\lambda\cdot\rho^2}=\frac{\alpha\cdot x_1-\lambda\cdot\rho\cdot y_1}{1}=a\cdot x_1-\lambda\cdot\rho\cdot y_1$ (λόγω της (9)) και $y_0 = -K\cdot\rho\cdot x_1 + a\cdot y_1$, δηλαδή $\left.\begin{array}{l} x_0 = a\cdot x_1 - \lambda\cdot\rho\cdot y_1 \\ y_o = -K\cdot\rho\cdot\chi_1 + \alpha\cdot y_1 \end{array}\right\}$ (17)

Έτσι αν είναι γνωστή μία λύση (x_1, y_1) της (15) με «μεγάλα» x_1, y_1 μπορούμε μέσω των τύπων (17) να βρούμε μία λύση (x_0, y_0) της (15) τέτοια ώστε $x_0 < x_1$ και $y_0 < y_1$

Βλέπουμε λοιπόν ότι από τη λύση $(x_1, y_1) = (469{,}197)$ της (16) έχουμε την μικρότερη λύση (x_0, y_0) της (16) που είναι η εξής: $\left.\begin{array}{l} x_0 = 50\cdot 469 - 17\cdot 7\cdot 197 = 7 \\ y_0 = -3\cdot 7\cdot 469 + 50\cdot 197 = 1 \end{array}\right\}$

Για πληρέστερη κατανόηση του παραδείγματος που προηγήθηκε, σημειώνουμε εδώ μερικά απαραίτητα θεωρητικά στοιχεία, μέσω κατάλληλων παραδειγμάτων:

I. Η ανάπτυξη της $\sqrt{51}$ σε συνεχόμενο κλάσμα, όπως δείξαμε, είναι αρκετά επίπονη και μάλιστα όταν το πλήθος των όρων κάθε περιόδου της ανάπτυξης είναι μεγάλο. Υπάρχει ένας απλός αλγόριθμος, που βελτιώθηκε από τον γράφοντα, για την εύρεση αυτής της ανάπτυξης, που είναι ο εξής: $\sqrt{51} = 7 + 0{,}141428429\ldots$

$$\frac{1}{0{,}141428429\ldots} = 7 + 0{,}070714216\ldots$$

$$\frac{1}{0{,}070714216} = 14 + 0{,}141428429\ldots. \quad \text{Τέλος } 1^{\text{ης}} \text{ περιόδου}$$

$$\frac{1}{0{,}141428429} = 7 + 0{,}070714216\ldots.$$

$$\frac{1}{0{,}070714216\ldots.} = 14 + 0{,}141428429 \quad \text{Τέλος } 2^{\text{ης}} \text{ περιόδου κτλ επ' άπειρον.}$$

$$\text{Άρα: } \sqrt{51} = \left[\begin{array}{cccccc} 7; & 7, & 14, & 7, & 14, & \ldots \\ & \Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\varsigma & 1\eta & \Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}o\delta o\varsigma & 2\eta & \end{array}\right]$$

II. Θα επιλύσουμε τώρα στο **N*xN*** την εξίσωση $x^2 - 41y^2 = -1$. Αναπτύσσουμε την $\sqrt{41}$ σε συνεχόμενο κλάσμα και έχουμε όπως στην $\sqrt{51}$ προηγουμένως τον πίνακα:

$$\sqrt{41} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 6 & 13 & 32 & 397 & 826 \\ 1 & 6 & 13 & 32 & 397 & 826 & 2049 \\ 6; & 2, & 2, & 12, & 2, & 2, & 12,\ldots. \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 62 & 129 & 320 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 5 & 62 & 129 \end{array}\right]$$

Ο πίνακας ξεκινάει από την μεσαία γραμμή, όπου μετά από τον πρώτο όρο, τον $6 = [\sqrt{41}]$[1], αρχίζει αμέσως η περίοδος 2,2,12, που εδώ έχει περιττό πλήθος στοιχείων (εδώ 3 στοιχεία). Το τελευταίο στοιχείο της περιόδου είναι πάντοτε το διπλάσιο του αρχικού 6 δηλ. ο 12. Έτσι αν συμβολίσουμε με α τον πρώτο όρο (εδώ το 6), τότε ο τελευταίος όρος της πρώτης περιόδου είναι ο 2α. Την πρώτη περίοδο ακολουθεί η δεύτερη, μετά η τρίτη κτλ επ' άπειρον. Θεωρητικές ανάγκες απαιτούν τη γραφή της πρώτης στήλης του πίνακα όπως εμφανίζεται, έτσι ώστε, με απλό αλγόριθμο να βρεθούν τα κλάσματα $\frac{6}{1}(<\sqrt{41})$, $\frac{13}{2}(>\sqrt{41})$, $\frac{32}{5}(<\sqrt{41})$ κτλ επ' άπειρον.

[1] $[\sqrt{41}] =$ ακέραιο μέρος της $\sqrt{41}$

Έτσι: $\frac{6}{1}=\frac{6\cdot 1+0}{6\cdot 0+1}$, $\frac{13}{2}=\frac{2\cdot 6+1}{2\cdot 1+0}$, $\frac{32}{5}=\frac{2\cdot 13+6}{2\cdot 2+1}$ κτλ επ' άπειρον.

Όταν το ανάπτυγμα μίας $\sqrt{n}$ όπου $n\in$ **N*** και $n\neq K^2, K\in$ **N*** σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με <u>περιττό</u> πλήθος όρων, όπως η $\sqrt{41}$, τότε οι όροι του κλάσματος $\frac{32}{5}$ που αντιστοιχεί στον τελευταίο και μεγαλύτερο όρο της 1ης περιόδου (εδώ του 12) είναι η μικρότερη θετική λύση της $x^2-41y^2=-1$ $\left(32^2-41\cdot 5^2=-1\right)$.

Το αυτό συμβαίνει και για τους όρους κάθε κλάσματος που αντιστοιχεί στον τελευταίο όρο 2α κάθε περιόδου περιττής τάξεως. Οι όροι του κλάσματος $\frac{2049}{320}$ που αντιστοιχεί στον τελευταίο όρο της 2ης περιόδου είναι η μικρότερη θετική λύση της $x^2-41y^2=1$ $\left(2049^2-41\cdot 320^2=1\right)$.

Το αυτό συμβαίνει και για τους όρους κάθε κλάσματος που αντιστοιχεί στον τελευταίο όρο 2α κάθε περιόδου άρτιας τάξεως. Όταν το ανάπτυγμα μίας $\sqrt{n}$ σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με <u>άρτιο</u> πλήθος όρων, τότε οι όροι των κλασμάτων που αντιστοιχούν στον τελευταίο όρο 2α της κάθε περιόδου είναι λύσεις αποκλειστικά της εξίσωσης $x^2-ny^2=1$.

Παράδειγμα

$$\sqrt{51}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 50 & 707 & \\ 1 & 7 & 50 & 707 & 4999 & \\ 7; & 7, & 14, & 7, & 14, & \ldots \\ 0 & 1 & 7 & 99 & 700 & \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 99 & \end{bmatrix}$$

Έτσι τα ζεύγη (50,7), (4999,700) … που αντιστοιχούν στον τελευταίο όρο της κάθε περιόδου <u>7,14</u> (περίοδος με δύο στοιχεία), είναι λύσεις της $x^2-51y^2=1$.

Τελειώνουμε με μερικά πολύ χρήσιμα Θεωρήματα.

Θ_1. Το ανάπτυγμα της $\sqrt{n}$ σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με ***περιττό*** πλήθος όρων αν ο n είναι πρώτος του τύπου 4κ+1 (πχ n=29=4·7+1). Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει.

Θ_2. Το ανάπτυγμα της $\sqrt{n}$ σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με ***άρτιο*** πλήθος όρων αν ο n είναι πρώτος του τύπου 4κ+3 (πχ n=7=4·1+3). Το αντίστροφο **δεν** ισχύει.

Θ_3. Αν η εξίσωση $x^2-ny^2=1$ (1) έχει τη λύση (α,β) ή αν η ανάπτυξη της $\sqrt{n}$ σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με ***άρτιο*** πλήθος όρων, τότε μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση της (1) αρκεί να υψώσουμε το $\left(\alpha+\beta\sqrt{n}\right)$ σε μία τυχαία δύναμη m ($m\in$ **N***) και να γράψουμε το αποτέλεσμα στη μορφή A+B$\sqrt{n}$. Το ζεύγος (A,B) θα είναι μία νέα λύση της (1).

Θ_4. Αν η εξίσωση $x^2-ny^2=-1$ (2) έχει τη λύση (α,β) ή αν η ανάπτυξη της $\sqrt{n}$ σε συνεχόμενο κλάσμα έχει περίοδο με *περιττό* πλήθος όρων, τότε μπορούμε να έχουμε άπειρες λύσεις της (2) αν ορίσουμε τους A και B από την εξίσωση: $\left(\alpha+\beta\sqrt{n}\right)^m=A+B\cdot\sqrt{n}$ με m περιττό.

Το εκάστοτε ζεύγος (A,B) θα είναι μία νέα λύση της (2).

Αν όμως m άρτιος, τότε το ζεύγος (A,B) θα είναι μία λύση της εξίσωσης $x^2-ny^2=1$.

Θ_5. Αν το ζεύγος (α,β) ικανοποιεί την εξίσωση $x^2-ny^2=-1$, τότε το ζεύγος (A,B) με $A=2a^2+1$, $B=2a\beta$ ικανοποιεί την εξίσωση $x^2-ny^2=1$.

Χρήσιμη παρατήρηση που απορρέει από το θεώρημα **Θ_3.**

Από τη λύση (α,β) της $x^2-ny^2=1$ και για κάθε $m\in$ **N***, βρίσκουμε μία νέα λύση της (A,B) από τους τύπους: $A=\frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{n}\right)^m+\left(\alpha-\beta\sqrt{n}\right)^m}{2}$ και $B=\frac{\left(\alpha+\beta\sqrt{n}\right)^m-\left(\alpha-\beta\sqrt{n}\right)^m}{2\cdot\sqrt{n}}$.

Από μια ανισότητα μύριες έπονται

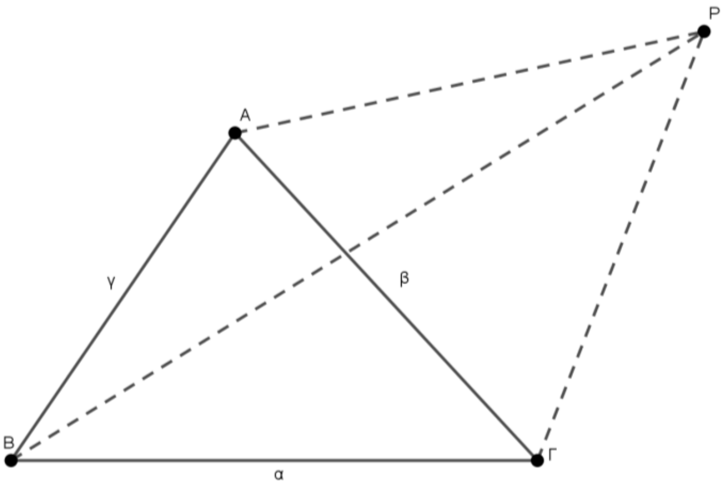
Γεώργιος Θεοδωρόπουλος

Ο σκοπός του άρθρου αυτού είναι να δείξει πως από μία γενική ανισότητα στο τρίγωνο μπορούν να προκύψουν, ως ειδικές περιπτώσεις, δεκάδες νέες ανισότητες για τα στοιχεία του τριγώνου.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, x, για τυχαίο σημείο Ρ του χώρου και τις πλευρές α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ , ισχύει:

$$\boxed{(x+y+z)\left(xPA^2+yPB^2+zP\Gamma^2\right)\geq yz\alpha^2+zx\beta^2+xy\gamma^2} \text{(I)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Είναι: $(x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{P\Gamma})^2\geq 0$

Οπότε: $\chi^2PA^2+y^2PB^2+z^2P\Gamma^2+2xy\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+2yz\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}+2zx\overrightarrow{P\Gamma}\cdot\overrightarrow{PA}\geq 0$ **(1)**

Έχουμε: $2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2-(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2-\overrightarrow{BA}^2=PA^2+PB^2-\gamma^2$

Όμοια: $2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{P\Gamma}=PB^2+P\Gamma^2-\alpha^2$

$2\overrightarrow{P\Gamma}\cdot\overrightarrow{PA}=P\Gamma^2+PA^2-\beta^2$

Έτσι η **(1)** γράφεται:
$\chi^2PA^2+y^2PB^2+z^2P\Gamma^2+xy(PA^2+PB^2-\gamma^2)+yz(PB^2+P\Gamma^2-\alpha^2)+zx(P\Gamma^2+PA^2-\beta^2)\geq 0$
Επομένως:
$(\chi^2+xy+xz)PA^2+(y^2+yx+yz)PB^2+(z^2+zx+zy)P\Gamma^2-xy\gamma^2-yz\alpha^2-zx\beta^2\geq 0$

$$\Leftrightarrow x(x+y+z)PA^2+y(x+y+z)PB^2+z(x+y+z)P\Gamma^2\geq xy\gamma^2+yz\alpha^2+zx\beta^2$$

άρα : $(x+y+z)(xPA^2+yPB^2+zP\Gamma^2)\geq yz\alpha^2+zx\beta^2+xy\gamma^2$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Για $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ η **(I)** γίνεται:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma P\Gamma^2)\geq\beta\gamma\alpha^2+\gamma\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma^2$$

έτσι: $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma P\Gamma^2)\geq\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

άρα: $\boxed{\alpha PA^2+\beta PB^2+\gamma P\Gamma^2\geq\alpha\beta\gamma}$ **(II)**

- Αν το Ρ ταυτιστεί με το περίκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, τότε η **(II)** γίνεται: $\alpha R^2+\beta R^2+\gamma R^2\geq\alpha\beta\gamma$

  άρα: $\boxed{R^2\geq\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}$ **(III)**

- Από τον νόμο ημιτόνων και την **(III)** παίρνουμε:

$$\boxed{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\geq 4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma} \text{(IV)}$$

2. Για x=y=z=1 η **(I)** γίνεται:

$$\boxed{3\left(PA^2+PB^2+P\Gamma^2\right)\geq\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \text{(V)}$$

- Αν το Ρ ταυτιστεί με το περίκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, τότε η **(V)** δίνει:

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\leq 9R^2} \text{(VI)}$$

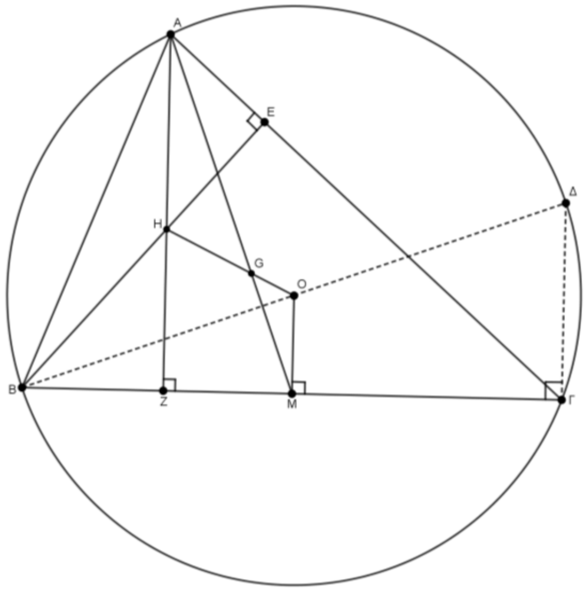
- Αν το P ταυτιστεί με το κέντρο βάρους G του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η **(V)** δίνει:

$$\boxed{GA^2+GB^2+G\Gamma^2\geq\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}\quad \textbf{(VII)}$$

- Λαμβανόμενου υπ' όψη ότι $GA=\frac{2}{3}\mu_\alpha$, $GB=\frac{2}{3}\mu_\beta$ κ' $G\Gamma=\frac{2}{3}\mu_\gamma$, η **(VII)** δίνει:

$$\boxed{{\mu_\alpha}^2+{\mu_\beta}^2+{\mu_\gamma}^2\geq\frac{3}{4}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)}\quad \textbf{(VIII)}$$

3.



Σχ. 1

- Έστω H το ορθόκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. Αν BΔ είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\Gamma\Delta^2=4R^2-\alpha^2$ **(1)**.

Αν $OM\perp B\Gamma$ (όπου O το περίκεντρο του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$) τότε $AH=2MO=\Gamma\Delta$ (αφού το ΟΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$), έτσι $AH^2=4R^2-\alpha^2$ (λόγω της **(1)**) όμοια

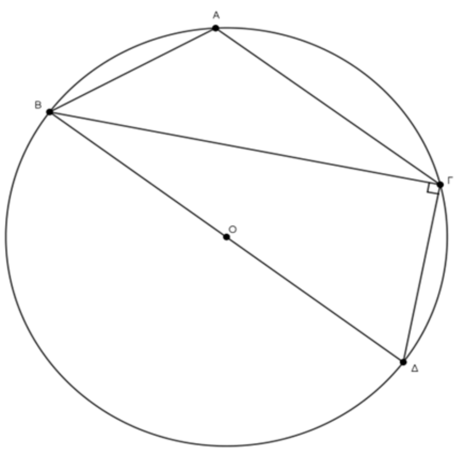
$$BH^2=4R^2-\beta^2$$
$$\Gamma H^2=4R^2-\gamma^2$$

Αν το P ταυτιστεί με το H , τότε η **(II)** γίνεται:

$$\alpha HA^2+\beta HB^2+\gamma H\Gamma^2\geq\alpha\beta\gamma\quad (\mathbf{2})$$

$$\alpha(4R^2-\alpha^2)+\beta(4R^2-\beta^2)+\gamma(4R^2-\gamma^2)\geq\alpha\beta\gamma$$

άρα $$\boxed{R^2\geq\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}{4(\alpha+\beta+\gamma)}}\quad \textbf{(IX)}$$



Σχ. 2

- Στο Σχ. 1 είναι

$H\Delta=\Delta\Gamma=B\Delta\sigma\upsilon\nu\Delta\left(\alpha\pi\acute{o}\ \tau o\ o\rho\theta.\ \overset{\triangle}{\Gamma B\Delta}\right)=$ $2R\sigma\upsilon\nu A\ (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \hat{\Delta}=\hat{A})$.

Στο Σχ. 2 είναι $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^\circ$, έτσι

$HA=2R\sigma\upsilon\nu(180^\circ-A)=-2\sigma\upsilon\nu A$

Άρα $HA^2=4R^2\sigma\upsilon\nu^2A$, οπότε η **(2)** γίνεται :

$4R^2(\alpha\sigma\upsilon\nu^2A+\beta\sigma\upsilon\nu^2B+\gamma\sigma\upsilon\nu^2\Gamma)\geq\alpha\beta\gamma$ έτσι

$$\boxed{\frac{\sigma\upsilon\nu^2A}{\beta\gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2B}{\gamma\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma}{\alpha\beta}\geq\frac{1}{4R^2}}\quad \textbf{(X)}$$

- Με τη βοήθεια του νόμου ημιτόνων η **(X)** μετασχηματίζεται στην

$$\boxed{\frac{\sigma\upsilon\nu^2A}{\eta\mu B\eta\mu\Gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2B}{\eta\mu\Gamma\eta\mu A}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\Gamma}{\eta\mu A\eta\mu B}\geq 1}\quad \textbf{(XI)}$$

4. Για $x=\frac{1}{\alpha^2}$, $y=\frac{1}{\beta^2}$, $z=\frac{1}{\gamma^2}$ η **(I)** δίνει:

$$\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\left(\frac{PA^2}{\alpha^2}+\frac{PB^2}{\beta^2}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma^2}\right)\geq\frac{\alpha^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{\beta^2}{\gamma^2\alpha^2}+\frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}$$

ή $\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\left(\frac{PA^2}{\alpha^2}+\frac{PB^2}{\beta^2}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma^2}\right)\geq\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$

οπότε $\frac{PA^2}{\alpha^2}+\frac{PB^2}{\beta^2}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma^2}\geq\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}$ **(3)**

Είναι γνωστή η ανισότητα $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, με $x,y,z\in\mathbb{R}$ η οποία για $x=\alpha^2, y=\beta^2, z=\gamma^2$ γίνεται $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\geq\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$,

έτσι $\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}\geq 1$, οπότε η **(3)** δίνει:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{PA^2}{\alpha^2}+\frac{PB^2}{\beta^2}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma^2}\geq 1}}\quad \textbf{(XII)}$$

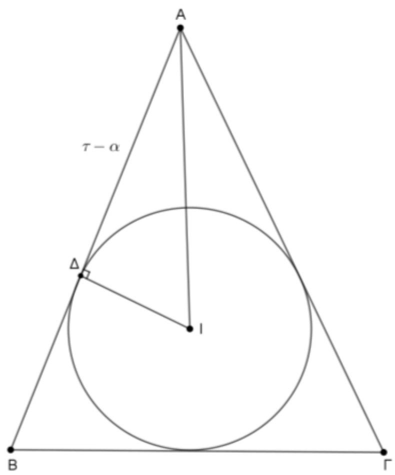
- Αν το P ταυτιστεί με το περίκεντρο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η **(XII)** δίνει:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\geq\frac{1}{R^2}}}\quad \textbf{(XIII)}$$

- Αν το P ταυτιστεί με το κέντρο βάρους G του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η **(XII)** γίνεται:

$\frac{GA^2}{\alpha^2}+\frac{GB^2}{\beta^2}+\frac{G\Gamma^2}{\gamma^2}\geq 1$, οπότε $\frac{\left(\frac{2}{3}\mu_\alpha\right)^2}{\alpha^2}+\frac{\left(\frac{2}{3}\mu_\beta\right)^2}{\beta^2}+\frac{\left(\frac{2}{3}\mu_\gamma\right)^2}{\gamma^2}\geq 1$, άρα:

$$\boxed{\boldsymbol{\left(\frac{\mu_\alpha}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\mu_\beta}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\mu_\gamma}{\gamma}\right)^2\geq\frac{9}{4}}}\quad \textbf{(XIV)}$$



Αν το P ταυτιστεί με το έκκεντρο I του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ η **(XII)** γίνεται:

$$\frac{IA^2}{\alpha^2}+\frac{IB^2}{\beta^2}+\frac{I\Gamma^2}{\gamma^2}\geq 1 \ \textbf{(4)}$$

Θα υπολογίσουμε το IA^2 ως συνάρτηση των πλευρών του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

Από το ορθογώνιο $\overset{\triangle}{A\Delta I}$ έχουμε:

$$IA=\frac{\tau-\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}, \text{ έτσι } IA^2=\frac{(\tau-\alpha)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}} \ \textbf{(5)}$$

Από το θεώρημα των συνημιτόνων στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε:

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \ =\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}-1\right)=(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$, άρα $4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}==(\beta+\gamma)^2-\alpha^2=(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)=2\tau\cdot 2(\tau-\alpha)=4\tau(\tau-\alpha)$, επομένως $\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$, οπότε η **(5)** γίνεται: $IA^2=\frac{\beta\gamma(\tau-\alpha)}{\tau}$, έτσι η **(4)** γίνεται:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\beta\gamma(\tau-\alpha)}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha(\tau-\beta)}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta(\tau-\gamma)}{\gamma^2}\geq\tau}}\quad \textbf{(XV)}$$

5. Για $\chi=\frac{1}{\alpha}$, $y=\frac{1}{\beta}$, $z=\frac{1}{\gamma}$ η **(I)** γίνεται: $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{PA^2}{\alpha}+\frac{PB^2}{\beta}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma}\right)\geq\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$

οπότε: $\boxed{\boldsymbol{\frac{PA^2}{\alpha}+\frac{PB^2}{\beta}+\frac{P\Gamma^2}{\gamma}\geq\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}}}$ **(XVI)**

Βιβλιογραφία

1. N.D.Kazarinoff, Geometric Inequalities, M.A,A., USA, 1961.
2. Ι.Φ.Πανάκη, Γεωμετρία Τριγώνου, Τόμος Α, Gutenberg, Αθήνα, 1969.
3. O.Pottema, κ.α., Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publisieng Gronigen, Netherlands, 1969.
4. H. Sedrakyan, N. Sedrakyan, Geometric Inequalities, Springer, USA, 2017.

<<Ομόκεντροι κύκλοι>>

Από την ποιητική συλλογή της Βαρβάρας Καγιούλη

«Ασκήσεις Χαρμολύπης»

Εκδόσεις Γαβριηλίδη

Πάντοτε οι ομόκεντροι κύκλοι φάνταζαν μπροστά του σαν ένα εφιαλτικό γεωμετρικό σχήμα υπαγορευμένης ενσωμάτωσης σε ένα αυστηρά οριοθετημένο σύστημα συμβατικών, μέσα στον έκδηλο σουρεαλισμό τους, υποχρεώσεων. Τους συναντούσε στις παρελάσεις όταν έπρεπε να συγχρονίσει το βήμα του με το βηματισμό της ομάδας του που σε παράταξη μάχης προετοιμαζόταν για ηρωικές επελάσεις εναντίον προαιώνιων εχθρών, με τους γονείς να τραβούν συγκινητικές φωτογραφίες των μελλοντικών πολιορκητικών μηχανών τους για τρυφερά οικογενειακά λευκώματα. Τους συναντούσε στις σχολικές συναθροίσεις όταν έπρεπε να συγχρωτιστεί με την αναίδεια των δημοφιλών που επέβαλλαν εν είδει αυθεντίας την εξουσία τους στα πλήθη των απελπιστικά στωικών, με το δάσκαλο ανυποψίαστο, βυθισμένο στο βιβλίο του, να μιλά για τη σημασία των ειρηνικών διευθετήσεων.

Τους συναντούσε στις περιστασιακές παρέες του όταν έπρεπε να προσποιηθεί τον ευτυχή απέναντι στο δυστυχή εαυτό του σε μαζώξεις αφόρητα κενολογούντων συνδαιτυμόνων που πρόβαλλαν τα έπαθλά τους από μια ζωή φανατικά δεμένη στο άρμα της επίδειξης. Τους συναντούσε στις κηδείες, όταν ήθελε να γελάσει, αλλά δυστυχώς δεν μπορούσε, βλέποντας το συγγενολόι, μέσα στην ασήκωτη συντριβή του, να βουτά πεινασμένο στο καζάνι με την ψαρόσουπα με τον πεθαμένο απ΄ τον τάφο να τους σιχτιρίζει για την απαρέγκλιτη τήρηση της ιλαρής εθιμοτυπικής τους αβρότητας. Τους συναντούσε στους προθαλάμους της εξουσίας όταν μαζί με άλλους έτρεχε για μια χειραψία και μια φωτογραφία με το νέο αρχηγό, με τη φωτογραφία να κοσμεί το σύνθετο με τα γυαλισμένα ασημικά κάτω ακριβώς από τις προσεκτικά στοιχισμένες αγιογραφίες, διαπιστευτήρια μιας ζωής απόλυτα στοιχισμένης σε ελληνορθόδοξα ιδανικά. Τους συναντούσε στο μεγάλο τραπέζι των συνεδριάσεων την ώρα των αντικριστών γραφείων τη στιγμή των απλανών περιπλανώμενων στο χώρο βλεμμάτων, τον καιρό της ζητούμενης επαγγελματικής συνευθύνης, όταν ο καθένας περιέφερε τις μικρές του ιδιοτέλειες, σταθερά προσανατολισμένοι στη φίλαυτη ύπαρξή τους, αυτοί οι ενσυνειδήτως ιδεολογικά τοποθετημένοι στην αριστερή κοίτη του ποταμού, έτοιμοι μόνο για την επανάσταση των ιδιαζουσών ειδεχθών ατομικών περιπτώσεων.

Συχνά νιώθει την ανάγκη να μουντζουρώσει τους ομόκεντρους κύκλους της κεντρικά ελεγχόμενης ζωής του με το μαύρο μαρκαδόρο που χάσκει στην ξύλινη μολυβοθήκη του γραφείου του, να τους εξαφανίσει κάτω από το μελάνι της συγκρατημένα εκφρασμένης οργής του, αυτός ο ξεβρασμένος απ΄ το κύμα της σιωπής αποσυνάγωγος του κόσμου νιώθει στιγμές στιγμές την εσώτατη ανάγκη να φωνάξει ότι πράγματι ήρθε η ώρα των αποσκιρτήσεων από μια ποδηγετημένη ζωή αλλεπάλληλων ομόκεντρων κύκλων, ότι ήρθε, έστω και όψιμα, η ώρα των συμπλεύσεων με τους πεισματικά ανορθόδοξους και τους αιρετικά αποκλίνοντες απ΄ τις επίσημες καταστατικές θεωρήσεις. Όμως η φωνή του πνίγεται, πριν ακόμη ακουστεί, από τα επιβλητικά βήματα των ευπροσάρμοστων καθώς σέρνουν τα παπούτσια τους στα πεζοδρόμια της πολιτείας των αμετακίνητων βεβαιοτήτων και των ανώδυνων, για την ευστάθεια του συστήματος, εκμυστηρεύσεων σε μια συντεταγμένη πορεία άψογης, κατά τα ειωθότα, τακτοποίησης ενός εν υπνώσει στίλβοντος κόσμου ταριχευμένων αισθημάτων.

… Για χιλιάδες σαν κι' εσένα

Θα αρκέσει μια μπρίζα

Νικόλας Άσιμος

ΑΣΚΗΣΗ 298 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104)

Αν α,β,γ είναι τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ και R, ρ οι ακτίνες του περιγεγραμμένου, εγγεγραμμένου κύκλων του τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\alpha-\beta}\le 3\frac{R}{\rho} \quad (1).$$

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ 1^Η^ (Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη)

Λόγω $2\tau=\alpha+\beta+\gamma$, η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{2\tau-\gamma}{2(\tau-\gamma)}+\frac{2\tau-\alpha}{2(\tau-\alpha)}+\frac{2\tau-\beta}{2(\tau-\beta)}\le\frac{3R}{\rho}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\tau+\tau-\gamma}{2(\tau-\gamma)}+\frac{\tau+\tau-\alpha}{2(\tau-\alpha)}+\frac{\tau+\tau-\beta}{2(\tau-\beta)}\le\frac{3R}{\rho}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\tau}{2(\tau-\gamma)}+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2(\tau-\alpha)}+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2(\tau-\beta)}+\frac{1}{2}\le 3\frac{R}{\rho}$$

$$\frac{\tau}{\tau-\gamma}+\frac{\tau}{\tau-\alpha}+\frac{\tau}{\tau-\beta}\le 6\frac{R}{\rho}-3\Leftrightarrow$$

$$\frac{\tau}{\frac{E}{\rho_\gamma}}+\frac{\tau}{\frac{E}{\rho_\alpha}}+\frac{\tau}{\frac{E}{\rho_\beta}}\le 6\frac{R}{\rho}-3\Leftrightarrow\frac{\tau\rho_\gamma}{\tau\rho}+\frac{\tau\rho_\alpha}{\tau\rho}+\frac{\tau\rho_\beta}{\tau\rho}\le 6\frac{R}{\rho}-3\Leftrightarrow$$

$\rho_\gamma+\rho_\alpha+\rho_\beta\le 6R-3\rho\Leftrightarrow 4R+\rho\le 6R-3\rho\Leftrightarrow$ $2\rho\le R$ σχέση, που ισχύει από το Θ. Euler $OI^2=R^2-2R\rho\ge 0$. Η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ 2^Η^ (Θωμάς Τσάκας – Πάτρα)

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\eta\mu A+\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}=$$

$$\frac{2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}{4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}$$ και συνεπώς, είναι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\gamma+\alpha-\beta}=\frac{2(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)}{4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}}=$$

$=\dfrac{2(\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)R}{\rho}$, αφού ως γνωστόν ισχύει η σχέση $\rho=4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$. Έτσι, αρκεί να δειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma\le\frac{3}{2}$ (2)

$$\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\le 2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$$

(με την ισότητα για Β=Γ) και συνεπώς, $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma\le\sigma\upsilon\nu A+2\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}$ ή

$\sigma\upsilon A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma\le 1-2\eta\mu^2\frac{A}{2}+2\eta\mu\frac{A}{2}$, οπότε αρκεί: $-2\eta\mu^2\frac{A}{2}+2\eta\mu\frac{A}{2}+1\le\frac{3}{2}$. Πράγματι, το αριστερό μέλος της ανισότητας δέχεται για $\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$ (δηλ. για $A=\frac{\pi}{3}$) **μέγιστη τιμή** $\frac{3}{2}$.

Λύση έστειλαν: Δήμος Παπαδόπουλος – Έδεσα, Σπύρος Γιαννακόπουλος – Αθήνα, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια, Ιωάννης Ανδρής – Αθήνα, Κων/νος Νερούτσος – Γλυφάδα, Αντώνης Ιωαννίδης – Χολαργός.

ΑΣΚΗΣΗ 299 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104).

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει ότι: $\alpha+\beta+\gamma=3$, τότε να δειχθεί ότι:

$$\left(\frac{5-\alpha}{3-\alpha}\right)^{\alpha^3}\cdot\left(\frac{5-\beta}{3-\beta}\right)^{\beta^3}\cdot\left(\frac{5-\gamma}{3-\gamma}\right)^{\gamma^3}\ge 8 \quad (1).$$

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι).

ΛΥΣΗ (Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3\ln\frac{5-x}{3-x}$ στο διάστημα (0,3). Επειδή $f'(x)=3x^2\ln\frac{5-x}{3-x}+\frac{2x^3}{(5-x)(3-x)}$, $f''(x)=6x\ln\frac{5-x}{3-x}+$

$\frac{12x^2}{(5-x)(3-x)}+\frac{4x^3(4-x)}{(5-x)^2(3-x)^2}>0$, για κάθε $x\in(0,3)$ η f είναι κυρτή στο $(0,3)$. Από την ανισότητα του Jensen προκύπτει η σχέση:

$\frac{1}{3}(f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma))\geq f(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})=f(1)=\ln 2$

δηλαδή $\alpha^3\ln\frac{5-\alpha}{3-\alpha}+\beta^3\ln\frac{5-\beta}{3-\beta}+\gamma^3\ln\frac{5-\gamma}{3-\gamma}\geq 3\ln 2$

ή $\ln[(\frac{5-\alpha}{3-\alpha})^{\alpha^3}\cdot(\frac{5-\beta}{3-\beta})^{\beta^3}\cdot(\frac{5-\gamma}{3-\gamma})^{\gamma^3}]\geq \ln 2^3=8$ ή

$(\frac{5-\alpha}{3-\alpha})^{\alpha^3}\cdot(\frac{5-\beta}{3-\beta})^{\beta^3}\cdot(\frac{5-\gamma}{3-\gamma})^{\gamma^3}\geq 8$.

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Δημήτρης Παπαδόπουλος – Έδεσσα, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια, Σωτήρης Σκοτίδας – Καρδίτσα, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Αντώνης Ιωαννίδης – Χολαργός, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη.

ΑΣΚΗΣΗ 300 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104)

Δίνεται τρίεδρος γωνία ΟΧΥΖ με εδρικές γωνίες $\hat{YOZ}=\alpha, \hat{ZOX}=\beta, \hat{XOY}=\gamma$ και απέναντι προς αυτές διέδρους Α,Β,Γ αντιστοίχως. Να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

I) $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ (1)

II) $\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\nu A\\ \sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu B\\ \sigma\upsilon\nu\gamma=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\end{cases}$ (2)

(Γιώργος Τριάντος – Αθήνα).

ΛΥΣΗ (Θωμάς Τσάκας – Πάτρα)

Από σημείο Δ της ΟΧ φέρουμε την ΔΕ κάθετη στο επίπεδο ΥΟΖ και από το Ε τις $EK\perp OZ$ και $E\Theta\perp OY$. Από το θεώρημα των τριών καθέτων είναι $\Delta K\perp OZ$ και $\Delta\Theta\perp OY$. Σύμφωνα με το πρόβλημα είναι $\Delta\hat{\Theta}E=B$ και $\Delta\hat{K}E=\Gamma$ απέναντι των $\hat{XOZ}=\beta$ και $\hat{XOY}=\gamma$ αντιστοίχως. Από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα έχουμε τις σχέσεις:

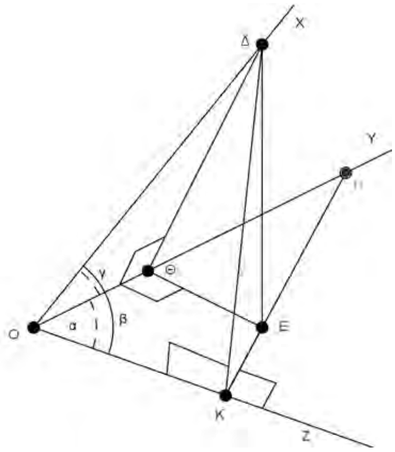
τριγ. $KO\Delta:\eta\mu\beta=\frac{\Delta K}{O\Delta},\sigma\upsilon\nu\beta=\frac{OK}{O\Delta}$ (3)

τριγ. $\Theta\Delta O:\eta\mu\gamma=\frac{\Delta\Theta}{O\Delta},\sigma\upsilon\nu\gamma=\frac{O\Theta}{O\Delta}$ (4)

τριγ. $E\Delta\Theta:\eta\mu B=\frac{\Delta E}{\Theta\Delta},\sigma\upsilon\nu B=\frac{\Theta E}{\Theta\Delta}$ (5)

τριγ. $E\Delta K:\eta\mu\Gamma=\frac{\Delta E}{\Delta K}$ (6),

τριγ. $KOH:\eta\mu\alpha=\frac{HK}{OH},\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{OK}{OH}$ (7).



Από τις σχέσεις (3),(4),(5),(6) έχουμε:

$\eta\mu\beta\eta\mu\Gamma=\frac{\Delta K}{O\Delta}\cdot\frac{\Delta E}{\Delta K}=\frac{\Delta E}{O\Delta}=\frac{\Delta E}{\Delta\Theta}\cdot\frac{\Delta\Theta}{O\Delta}=\eta\mu B\eta\mu\gamma$

και άρα $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$. Ομοίως αποδεικνύεται η ισότητα $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B}=\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A}$, γεγονός που αποδεικνύει την (1). Από την ομάδα (2), έστω προς απόδειξη η σχέση $\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\gamma\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu B$. Αυτή γράφεται ισοδυνάμως ως εξής:

$\frac{OK}{O\Delta}=\frac{O\Theta}{O\Delta}\cdot\frac{OK}{OH}+\frac{\Delta\Theta}{O\Delta}\cdot\frac{HK}{OH}\cdot\frac{\Theta E}{\Theta\Delta}\Leftrightarrow$

$OK=\frac{O\Theta\cdot OK}{OH}+\frac{HK\cdot\Theta E}{OH}\Leftrightarrow OK\cdot OH=O\Theta\cdot OK$

$+HK\cdot\Theta E\Leftrightarrow OK(OH-O\Theta)=HK\cdot\Theta E\Leftrightarrow$

$OK\cdot\Theta H=HK\cdot\Theta E\Leftrightarrow\frac{OK}{\Theta E}=\frac{HK}{\Theta H}$ (8)

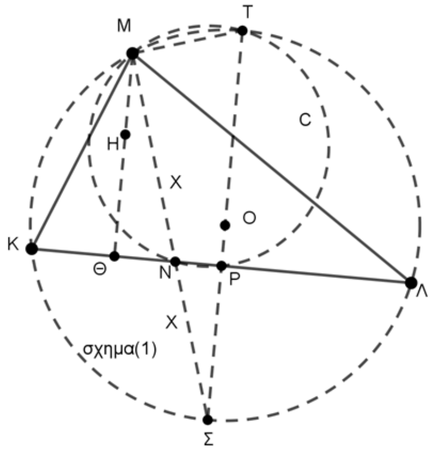
Η σχέση (8) ισχύει από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΚΗΟ και ΘΗΕ , που έχουν κοινή την οξεία γωνία Η. Ομοίως, αποδεικνύονται οι άλλες δύο σχέσεις.

Λύση έστειλαν: Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη, Δήμος Παπαδόπουλος – Έδεσσα, Αντώνης Ιωαννίδης – Χολαργός, Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη.

ΑΣΚΗΣΗ 301 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104) .

Από την κορυφή Μ τριγώνου ΚΛΜ φέρουμε τό ύψος ΜΘ μήκους h, τη διάμεσο ΜΡ και τη διχοτόμο ΜΝ. Το σημείο Ν είναι το μέσον του ΘΡ. Η απόσταση της κορυφής Μ από το ορθόκεντρο Η του τριγώνου αυτού είναι d. Να υπολογισθεί το μήκος της διχοτόμου ΜΝ. (Γιώργος Τριάντος – Αθήνα)

ΛΥΣΗ (Δήμος Παπαδόπουλος – Έδεσσα) Η διχοτόμος ΜΝ διέρχεται από το μέσον Σ του τόξου ΚΛ. Αν Τ το αντιδιαμετρικό του Σ , τότε το τετράπλευρο ΜΝΡΤ είναι εγγράψιμμο σε κύκλο c (σχήμα (1)) ενώ το ΜΘΣΡ είναι παραλ/μο οπότε ΣΝ=ΜΝ=x. Ακόμη, $OP=\frac{HM}{2}=\frac{d}{2}$

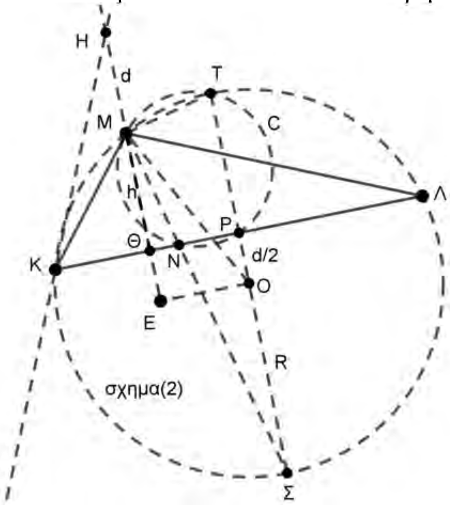


Από τη δύναμη του σημείου Σ ως πρός τον κύκλο (c) έχουμε: $ΣN \cdot ΣM = ΣP \cdot ΣT$ ή $x \cdot 2x = h \cdot 2R$ (1) όπου $R = OΣ = h + \frac{d}{2}$ (2). Η (1) λόγω της (2) δίνει

$$2x^2 = h \cdot 2(h + \frac{d}{2}) \Leftrightarrow x^2 = h(h + \frac{d}{2}) \Rightarrow x = \sqrt{h(h + \frac{d}{2})}$$

Σημείωση της στήλης: Η συγκεκριμμένη απόδειξη αφορά σε τρίγωνο **οξυγώνιο** με τα σημεία Η, Ο να είναι **εσωτερικά** σημεία του. Τι συμβαίνει όμως σε **αμβλυγώνιο** τρίγωνο;

Θα δείξουμε ότι στη περίπτωση αμβλυγωνίου τριγώνου αποκλείεται το σημείο Ν να είναι το μέσον του ΘΡ δηλ. το ΜΘΣΡ να είναι παρ/μο.



Αν το ΜΘΣΡ είναι παρ/μο τότε ΜΘ=ΣΡ δηλαδή $h = R + \frac{d}{2}$ και άρα $R = h - \frac{d}{2}$. Έστω Ε η τομή της ΜΘ με την εκ του Ο παράλληλη στην ΚΛ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΕΜ έχουμε:

$$OE^2 = OM^2 - ME^2 = R^2 - (h + \frac{d}{2})^2 =$$

$$= (h - \frac{d}{2})^2 - (h + \frac{d}{2})^2 = -2hd < 0$$

άτοπο. Στη περίπτωση **ορθογωνίου τριγώνου** και πάλι καταλήγουμε σε ισοσκελές ορθογώνιο για το οποίο δεν έχει νόημα η άσκηση.

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία.

ΑΣΚΗΣΗ 302 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104)

Αν οι αριθμοί α,β,γ με $α < β < γ$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^3 - 3x + 1 = 0$ τότε να υπολογισθεί η τιμή του αθροίσματος $S = \frac{α}{β} + \frac{β}{γ} + \frac{γ}{α}$. (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

ΛΥΣΗ (Σωτήρης Σκοτίδας – Καρδίτσα)

Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$ παρατηρούμε ότι: $f(-2)f(-1) = -3, f(0)f(1) = -1, f(1)f(2) = -3$.

Άρα, είναι: $-2 < α < -1, 0 < β < 1, 1 < γ < 2$.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν t είναι μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε και ο αριθμός $t^2 - 2$ είναι επίσης ρίζα της, αφού: $f(t^2 - 2) = (t^2 - 2)^3 -$

$-3(t^2 - 2) + 1 = t^6 - 6t^4 + 9t^2 - 1 = (t^2 - 3t)^2 - 1$

$= (t^2 - 3t + 1)(t^2 + 3t - 1) = f(t)(t^2 + 3t - 1) = 0$

Ώστε, $\{α, β, γ\} = \{α^2 - 2, β^2 - 2, γ^2 - 2\}$.

Επειδή $0 < α + 2 < 1, 0 < β^2 < 1, 2 < β + 2 < 3, 1 < γ^2 < 4$, $3 < γ + 2 < 4, 1 < α^2 < 4$ είναι κατ' ανάγκην: $α + 2 = β^2, β + 2 = γ^2, γ + 2 = α^2$. Από τους τύπους του Vieta έχουμε: $α + β + γ = 0$, $αβ + βγ + γα = -3$, $αβγ = -1$, οπότε η παράσταση γράφεται:

$$S = \frac{α}{β} + \frac{β}{γ} + \frac{γ}{α} = \frac{α^2γ + β^2α + γ^2β}{αβγ} =$$

$$= -(α^2γ + β^2α + γ^2β) = -[γ(γ + 2) + α(α + 2) + γ(γ + 2)] =$$

$$-[α^2 + β^2 + γ^2 + 2(α + β + γ)] = -(α^2 + β^2 + γ^2) =$$

$$= -[(α + β + γ)^2 - 2(αβ + βγ + γα)] = -[0^2 - 2(-3)] = -6$$

Λύση έστειλαν: Γιώργος Αποστολόπουλος–Μεσολόγγι, Γιώργος Τσιώλης–Τρίπολη, Σπύρος Γιαννακόπουλος–Αθήνα, Αντώνης Ιωαννίδης–Χολαργός, Γιάννης Ηλιόπουλος–Καλαμάτα, Θωμάς Τσάκας–Πάτρα, Γιώργος Νικητάκης–Σητεία, Δήμος Παπαδόπουλος–Έδεσσα, Δημήτρης Καρτσακλής–Αγρίνιο, Γιώργος Δεληστάθης–Κάτω Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 303 (ΤΕΥΧΟΥΣ 104)

Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών και των διαγωνίων του είναι L. Να δειχθεί ότι για το εμβαδόν του Ε ισχύει η σχέση: (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος).

ΛΥΣΗ (Σπύρος Γιαννακόπουλος – Αθήνα)

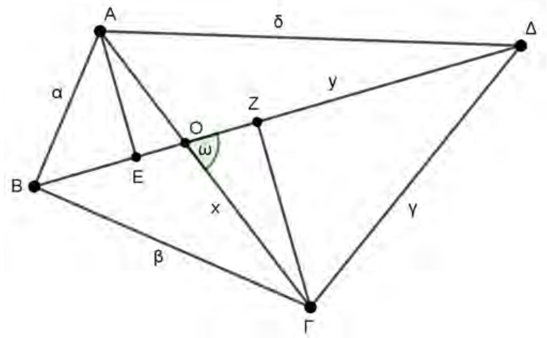
Ονομάζουμε α,β,γ,δ τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου και x,y τα μήκη των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ αντιστοίχως. Φέρουμε $AE \perp BΔ$, $ΓZ \perp BΔ$.

Το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι:

$$E = (ABΔ) + (ΓBΔ) = \frac{1}{2}y \cdot AE + \frac{1}{2}y \cdot ΓZ =$$

$$\frac{1}{2}y\cdot AO\cdot \eta\mu\omega+\frac{1}{2}y\cdot \Gamma O\cdot \eta\mu\omega=$$

$\frac{1}{2}y\cdot \eta\mu\omega\cdot(AO+\Gamma O)=\frac{1}{2}y\cdot \eta\mu\omega\cdot x$, άρα, είναι



$$E=\frac{1}{2}xy\eta\mu\omega\le\frac{1}{2}xy\Rightarrow 8E\le 4xy \quad (1).$$

Αρκεί να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση: $4xy\le L$. Η τελευταία γράφεται ισοδυνάμως:

$4xy\le\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+x^2+y^2$ ή

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+(x-y)^2-2xy\ge 0 \quad (2).$

Όμως, ισχύει ότι: $xy\le\alpha\gamma+\beta\delta\Leftrightarrow -2xy\ge-2\alpha\gamma-2\beta\delta$ και επομένως, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2xy\ge\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$

$-2\alpha\gamma-2\beta\delta=(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2\ge 0$.

Άρα, η (2) ισχύει και συνεπώς η ζητούμενη.

Σημείωση: Εδώ έγινε χρήση του γεγονότος ότι σε κάθε κυρτό τετράπλευρο το γινόμενο των διαγωνίων του είναι μικρότερο ή ίσο του αθροίσματος των γινομένων των απέναντι πλευρών του. Η ισότητα ισχύει στην περίπτωση εγγραψίμου τετραπλεύρου (1ο θεώρημα Πτολεμαίου).

Λύση έστειλαν: Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη, Αντώνης Ιωαννίδης – Χολαργός, Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Ιωάννης Ανδρής – Αθήνα, Δήμος Παπαδόπουλος–Έδεσσα, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

325. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $3\le\frac{\mu_\alpha}{\upsilon_\alpha}+\frac{\mu_\beta}{\upsilon_\beta}+\frac{\mu_\gamma}{\upsilon_\gamma}\le\frac{4R+\rho}{3\rho}$, όπου $\mu_\alpha,\mu_\beta,\mu_\gamma$ οι διάμεσοι, $\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma$ τα ύψη, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(Γιώργος Νικητάκης – Σητεία)

326. Σε τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν είναι $B\hat{A}M=\hat{\Gamma}$ και $M\hat{A}\Gamma=\frac{\pi}{12}$ τότε να δειχθεί ότι: $\hat{B}-\hat{\Gamma}\ge\frac{5\pi}{12}$.

(Γιώργος Αποστολόπουλος- Μεσολόγγι).

327. Σε ευθεία (ε) δίνονται τρία σημεία Δ,Ε,Ζ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων των εγγεγραμμένων στα τρίγωνα ΑΒΓ στα οποία η πλευρά ΒΓ ανήκει στην ευθεία (ε) και τα ίχνη των υψών, των διχοτόμων και των διαμέσων που άγονται από την κορυφή Α συμπίπτουν με τα σημεία Δ,Ε,Ζ αντιστοίχως. (Γιώργος Τριάντος – Αθήνα). Καλή δύναμη στη νέα σχολική χρονιά!!!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

35ο
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: έρευνα και εκπαίδευση τον 21ο αιώνα

ΑΘΗΝΑ
Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε., Ν. ΗΡΑΚΛΕΙΟ
7-9 ΔΕΚ 2018