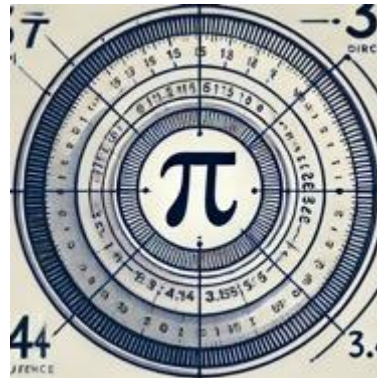


Αριθμοί και Ακολουθίες Αριθμών στα Μαθηματικά: Διεπιστημονική προσέγγιση

Διεπιστημονικό Επιμορφωτικό Συμπόσιο Γ' Αθήνας

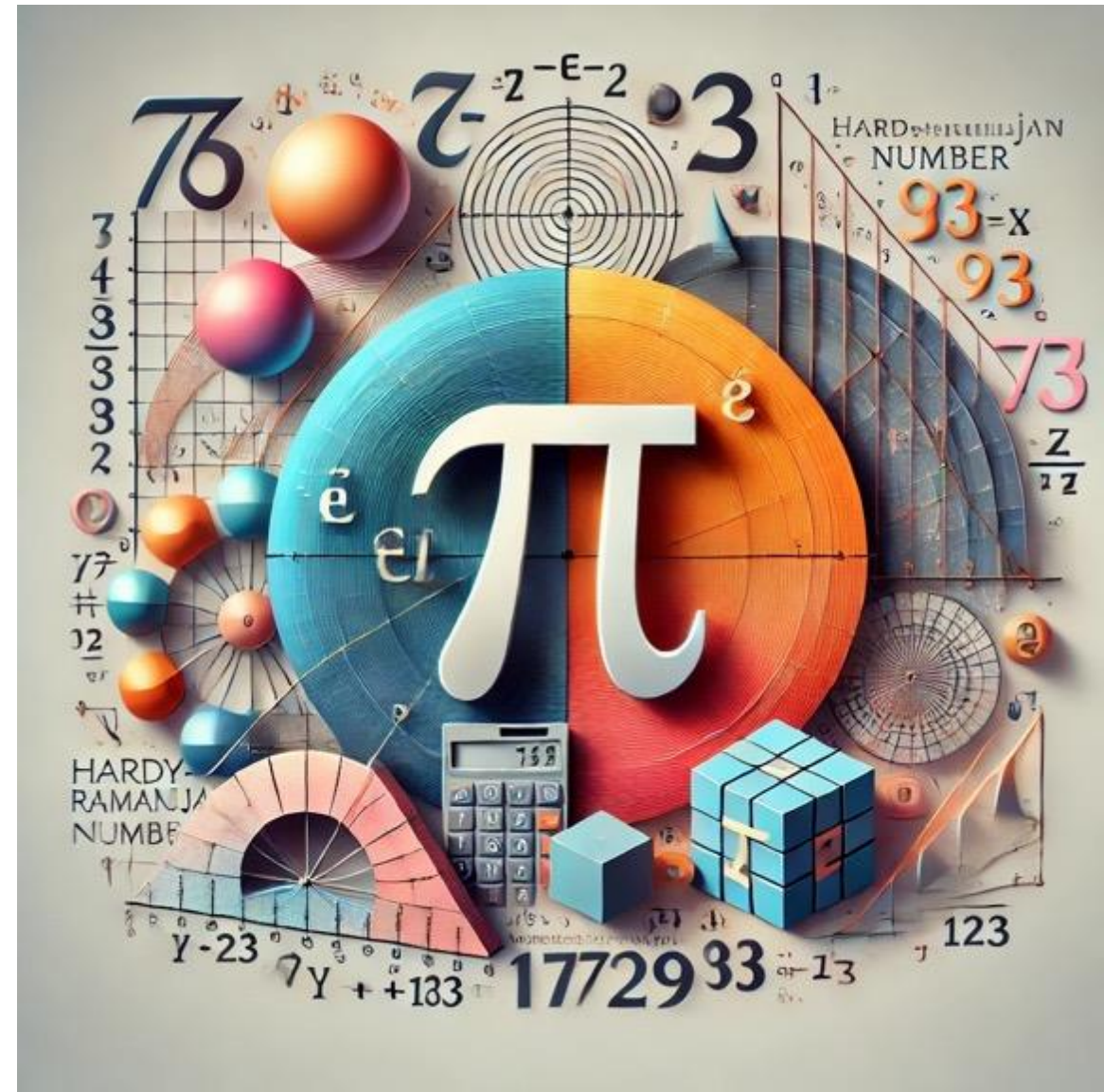
Πού κρύβεται ο π ;



Θανάσης Σ. Σιούρας
π Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Ποιος είναι ο αγαπημένος σας αριθμός;

- ο π ;
- ο αριθμός του Euler (e);
- η τετραγωνική ρίζα του 2;
- Ο 7;.
- Ο 13;
- Ο 1729 ;



Γνωστές και άγνωστες ακολουθίες αριθμών

- Οι πρώτοι αριθμοί (2, 3, 5, 7, 11 ...),
- Οι δυνάμεις του 2 (2, 4, 8, 16, 32 ...)
- Η ακολουθία Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...)
- 1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, 115,...

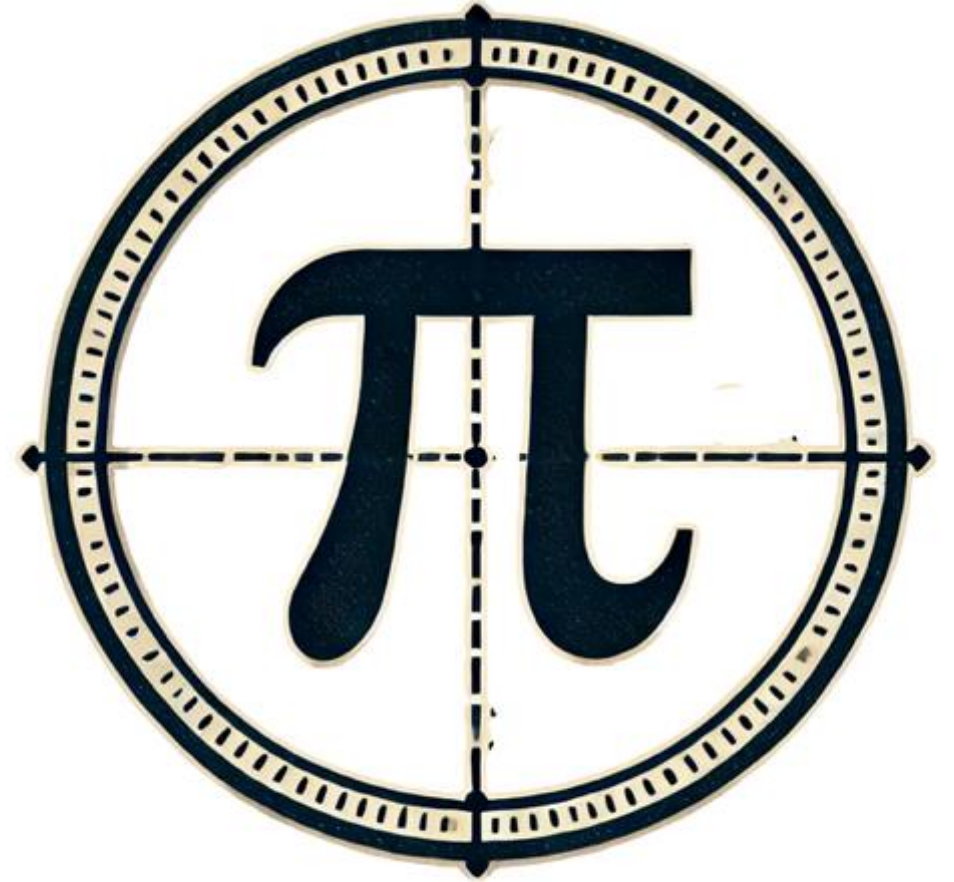


Παραλαβή βαθμολογίας τετράμηνου



Ορισμός του π

Είναι ο λόγος του
μήκους του κύκλου προς
τη διάμετρό του

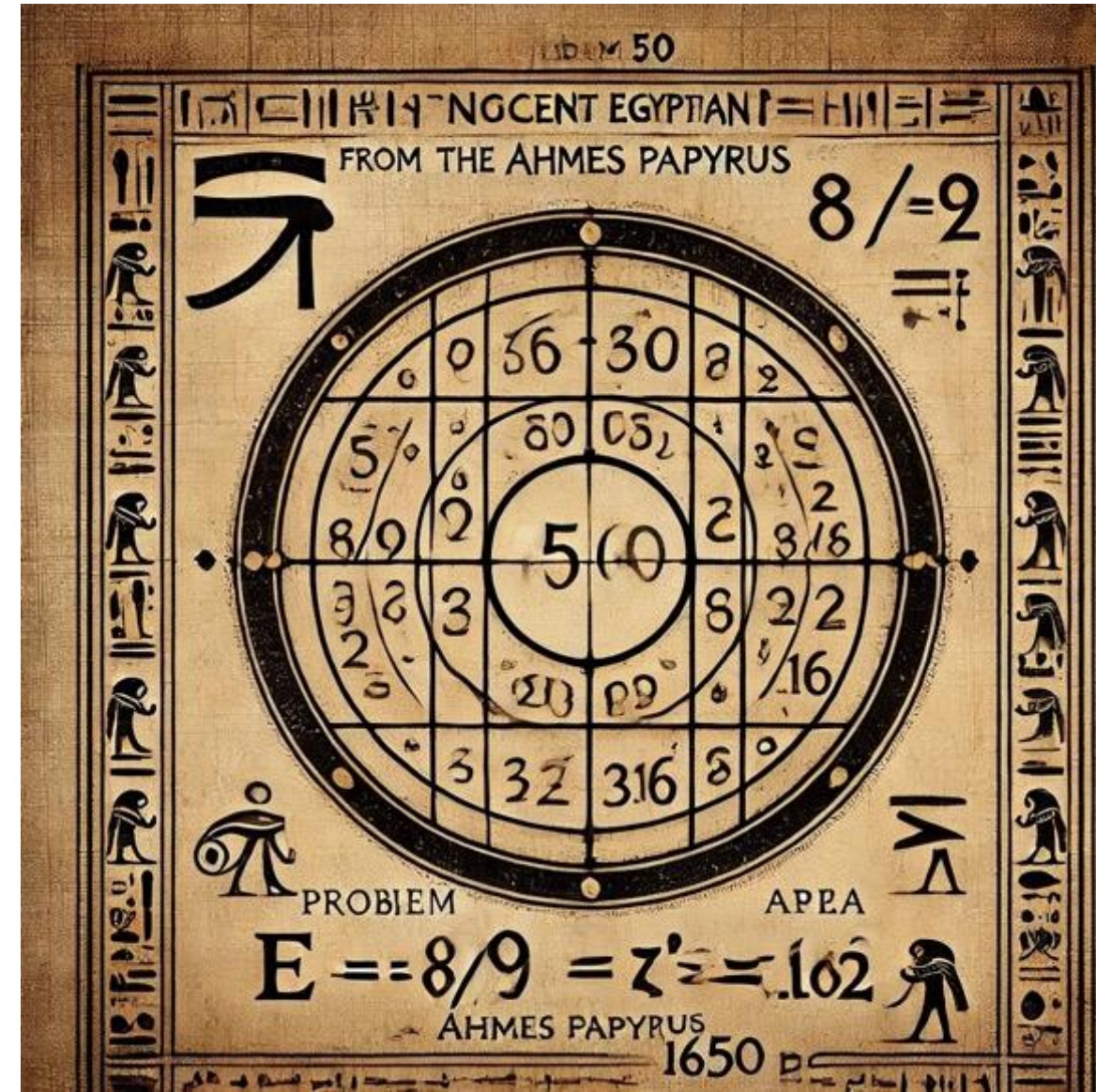


Πρόβλημα 50 από τον πάπυρο Ahmes (1650 π.χ)

Το πρόβλημα πραγματεύεται
τον υπολογισμό του εμβαδού
ενός κυκλικού αγρού
διαμέτρου δ

$$E = (8/9\delta)^2$$

Που ισοδυναμεί με $\pi = 3,16$

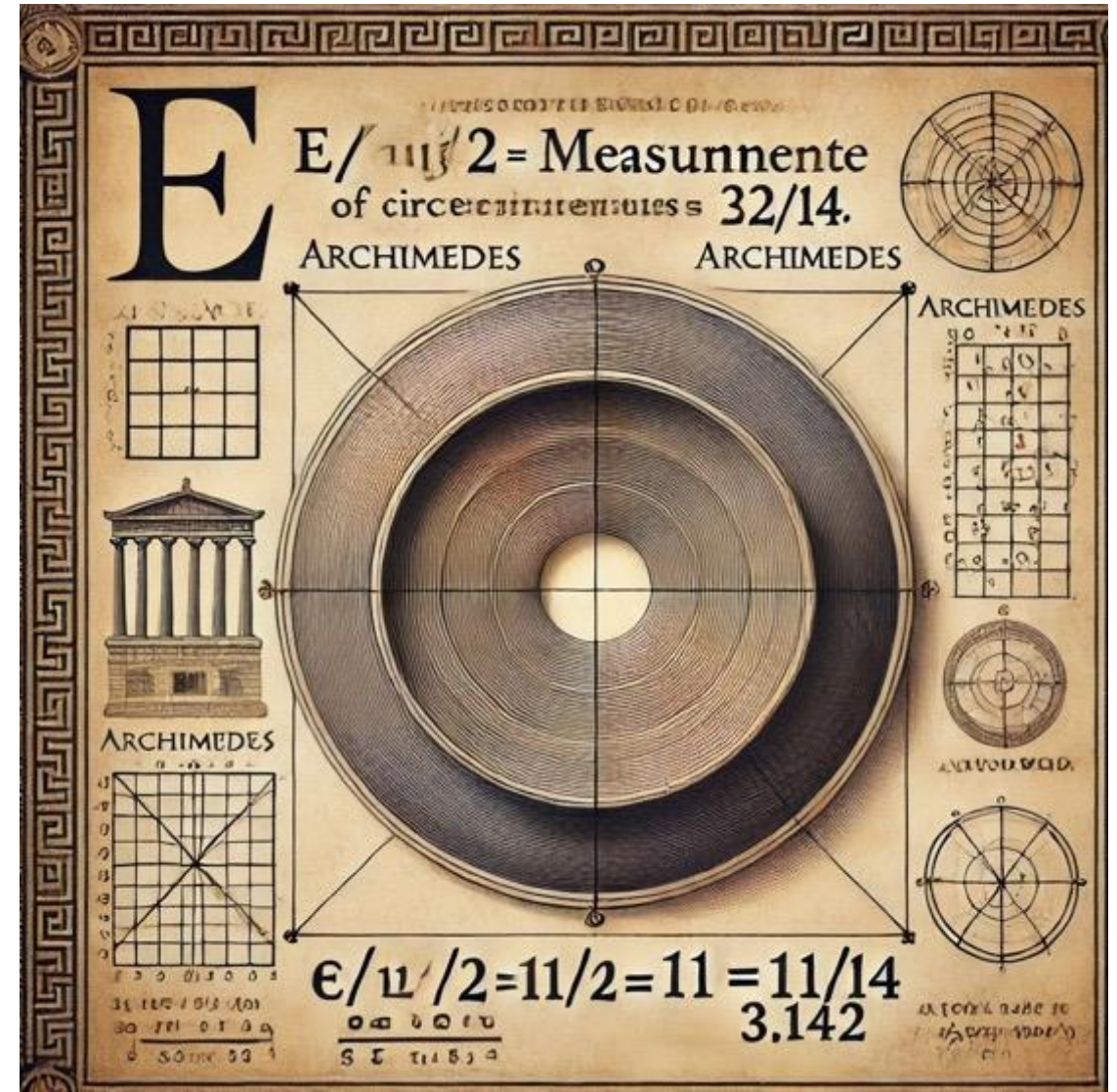


Αρχιμήδους Κύκλου Μέτρησις

Ο λόγος ενός κύκλου προς το τετράγωνο που έχει πλευρά τη διάμετρο είναι ίδιος με το λόγο του 11 προς το 14.

$$\frac{E}{\delta^2} = \frac{11}{14}$$

Που ισοδυναμεί με $\pi = \frac{22}{7}$
 $\approx 3,142$



Αρχιμήδους *Κύκλου Μέτρησις*

Η περίμετρος κάθε κύκλου είναι μικρότερη από το τριπλάσιο και ένα έβδομο της διαμέτρου και μεγαλύτερη από το τριπλάσιο και δέκα εβδομηκοστά πρώτα αυτής.

$$3 \frac{10}{71} < \frac{\text{περίμετρος}}{\text{διαμέτρος}} < 3 \frac{1}{7}$$

ή χρησιμοποιώντας δεκαδικά ψηφία $3,14084... < \pi < 3,14285...$

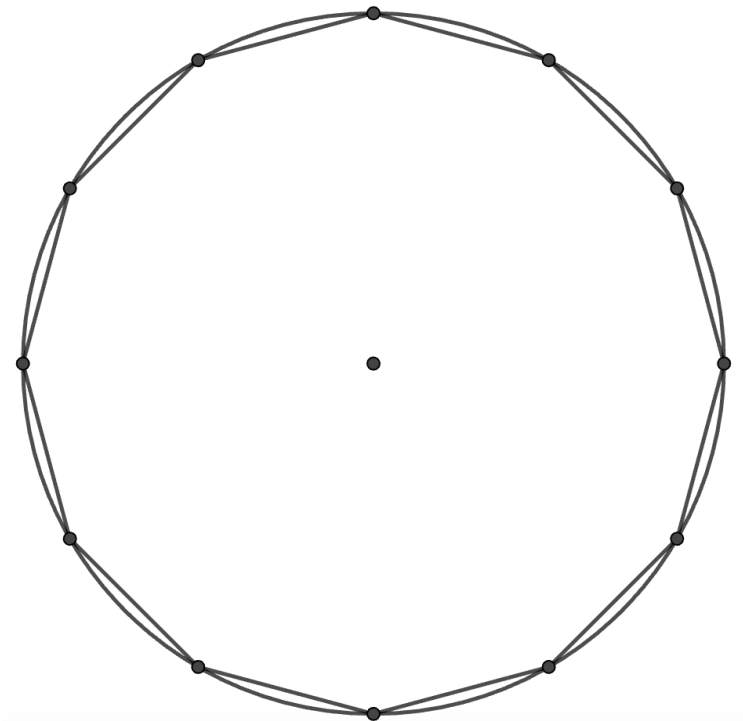
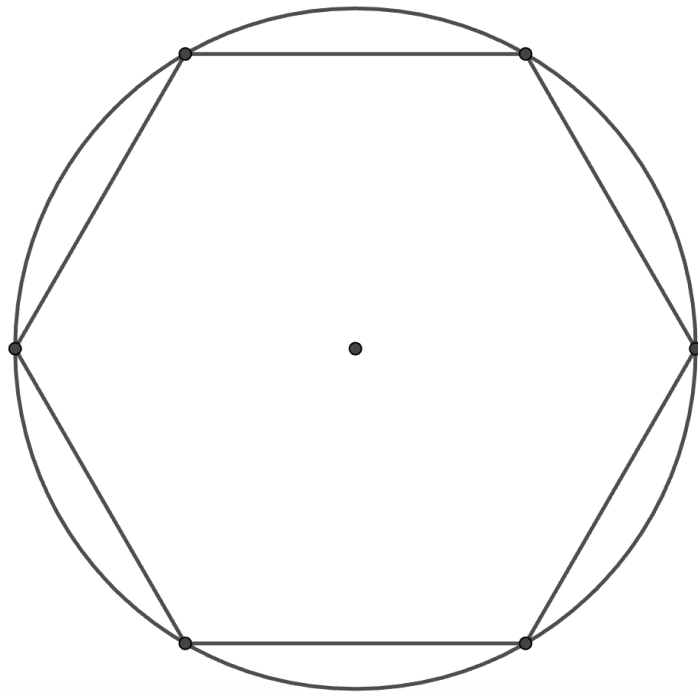
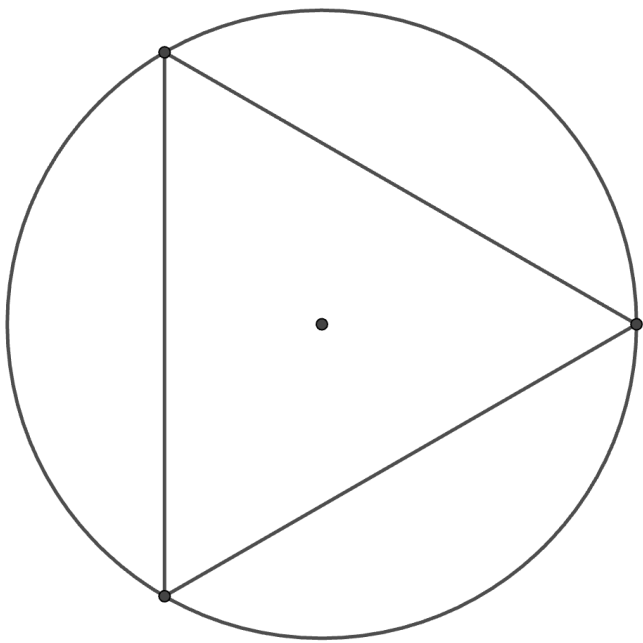
Και μας εξηγεί πώς το έκανε



Η μέθοδος της εξάντλησης

Γύρω στο 250 π.Χ., ο Αρχιμήδης επινόησε τον πρώτο τρόπο για να αποκτήσει το π σε οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια, εφαρμόζοντας τη μέθοδο της εξάντλησης που επινόησε ο Εύδοξος έναν αιώνα νωρίτερα. Ο Αρχιμήδης συνειδητοποίησε ότι οι περίμετροι των κανονικών πολυγώνων που εγγράφονται και περιγράφονται στον κύκλο δίνουν τα άνω και κάτω όρια για το π . Όσο περισσότερες πλευρές έχουν τα πολύγωνα, τόσο πιο κοντά προσεγγίζουν τον κύκλο—«εξαντλώνοντας» το διάστημα μεταξύ του κύκλου και του πολυγώνου, εξ ου και το όνομα

Κύκλος με διάμετρο 1



Βελτίωση των αποτελεσμάτων

Για τα επόμενα 1800 χρόνια, βελτιώθηκαν τα αποτελέσματα του π χρησιμοποιώντας πολύ μεγαλύτερους αριθμούς πλευρών.

- Ο Πτολεμαίος ο Κλαύδιος (91- 161 μ.Χ.). Θα υπολογίσει την τιμή του π σε 3,1417.
- Ο Κινέζος μαθηματικός Liu Hui, βρήκε $\pi = 3,1416$ σε κανονικό εγγεγραμμένο 192γωνο
- Ο αστρονόμος Tsu Ch'ung Chih (430-501 μ.Χ.) προσέγγισε το π με τα όρια $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ χρησιμοποιώντας εγγεγραμμένα πολύγωνα με 24.576 πλευρές,
- Ο François Viète (1540 – 1603 μ.Χ.) υπολόγισε τον π με ακρίβεια 9 δεκαδικών

Η επινόηση του Διαφορικού λογισμού οδήγησε σε μια μεγάλη λίστα άπειρων σειρών για τον υπολογισμό του π .

- Ο James Gregory (1638-1675) μας έδωσε την πρώτη άπειρη σειρά που βρέθηκε ποτέ για το π .

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

- Ο De Lagny που υπολόγισε 117 δεκαδικά ψηφία του π ανέφερε ότι για τον υπολογισμό 100 δεκαδικών ψηφίων απαιτούνταν περισσότεροι από 10^{50} όροι της σειράς.
- Ο Leonhard Euler (1707-1783 μ. Χ.) στην προσπάθειά του να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς των αντίστροφων τετραγώνων βρήκε ότι

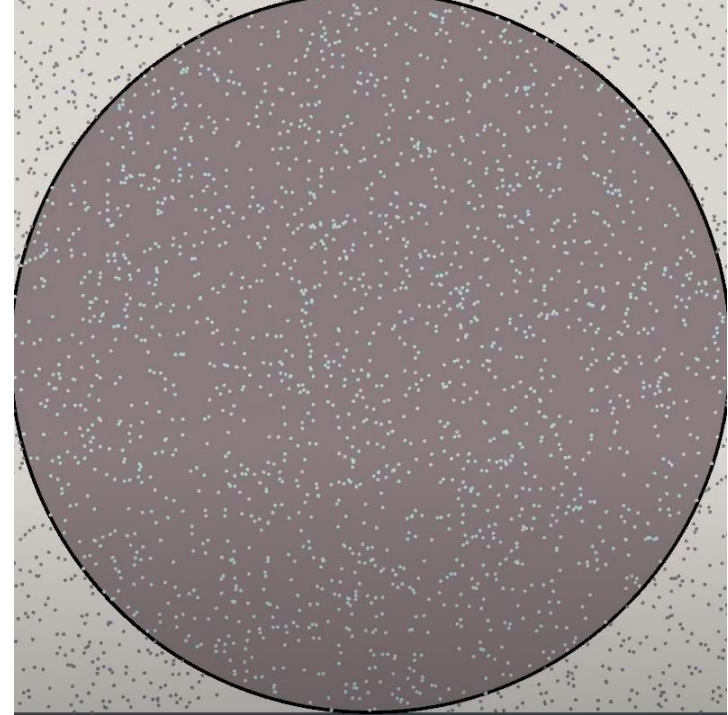
$$\pi^2 / 6 = 1/(1^2) + 1/(2^2) + 1/(3^2) + \dots$$

Υπολογισμός του π με H/Y

- Η πρώτη απόπειρα υπολογισμού του π με ηλεκτρονικό υπολογιστή έγινε το Σεπτέμβριο του 1949 με τον ENIAC. και υπολογίστηκαν 2.037 ψηφία του π σε 70 ώρες, χρόνος που για τα σημερινά δεδομένα είναι ιδιαίτερα μεγάλος. Για τον υπολογισμό ο υπολογιστής
- Όσο αυξάνεται η ταχύτητα των H/Y και βελτιώνεται η ταχύτητα σύγκλισης των αλγορίθμων --Σε κάθε βήμα υπολογισμών διπλασιάζεται ο αριθμός των ψηφίων του π — τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των ψηφίων του π
- Η γνώση όλο και περισσότερων ψηφίων του π , αν και φαίνεται ανούσια, βρίσκει αρκετές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα το ότι δοκιμάζει τις δυνατότητες κάθε καινούργιου υπολογιστή.
- Σήμερα Ελβετοί ερευνητές υπολόγισαν έναν νέο αριθμό-ρεκόρ ψηφίων του π με τη βοήθεια ενός υπερυπολογιστή που έκανε υπολογισμούς επί 108 μέρες και εννέα ώρες, βρήκαν 62,8 τρισεκατομμύρια ψηφία, έναντι περίπου 50 τρισεκατομμυρίων που ήταν το προηγούμενο ρεκόρ του 2020 και το οποίο είχε πάρει υπερτριπλάσιο χρόνο για να βρεθεί. Αναμένουν να μπουν στο βιβλίο Γκινες.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΝΤΕ ΚΑΡΛΟ

- Ας πάρουμε ένα τετράγωνο πλευράς a .
Τότε αυτό θα έχει εμβαδό a^2
- Ο εγγεγραμμένος κύκλος
θα έχει ακτίνα $\frac{a}{2}$ και εμβαδό $\pi a^2/4$



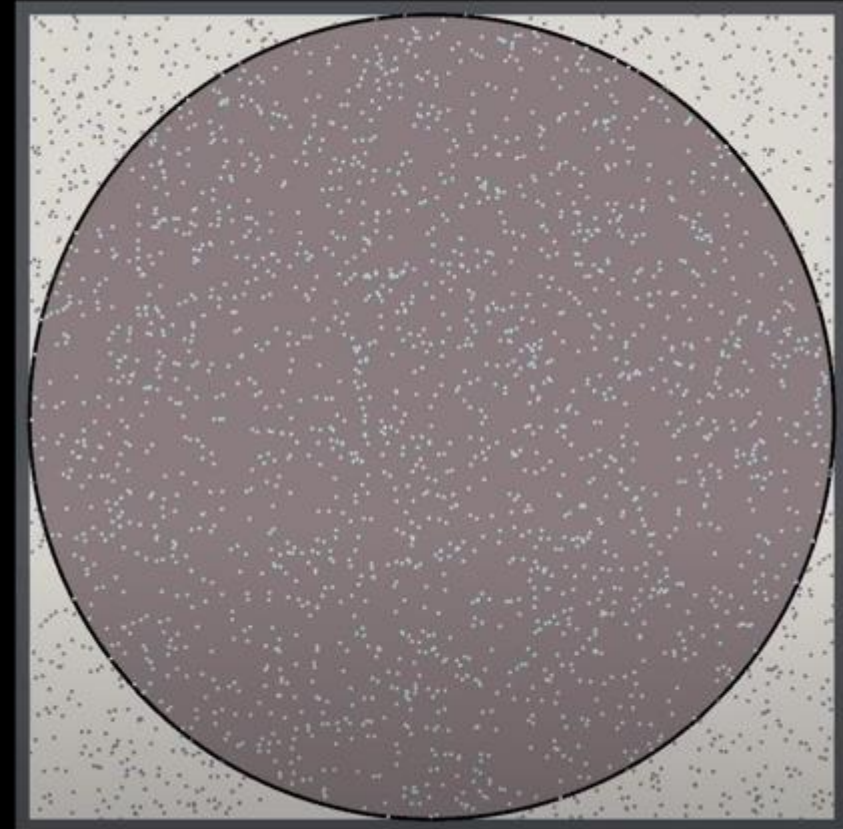
ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΟΝΤΕ ΚΑΡΛΟ

- Επιλέγοντας τυχαία σημεία στο τετράγωνο, η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο εντός του κύκλου είναι το πηλίκο του εμβαδού του κύκλου προς το εμβαδό του τετραγώνου δηλαδή $\pi/4$.
- Αν λοιπόν δημιουργήσουμε N τυχαία σημεία μέσα στο τετράγωνο και M από αυτά βρίσκονται στον κύκλο τότε $\pi/4 = M/N$ Δηλαδή :

- $$\frac{\pi}{4} = \frac{\text{Αριθμός σημειΩων στον κύκλο}}{\text{Αριθμός σημΧιων στο τετρΦγωνο}}$$

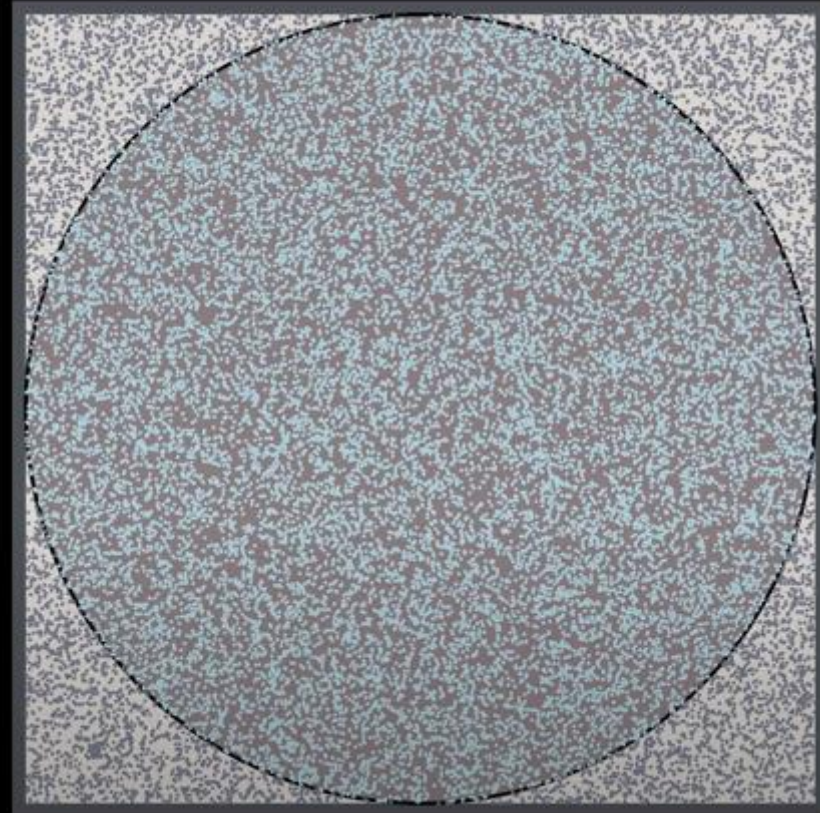
Δοκιμές 2600

$$3.118461 = 4 \left(\frac{2027}{2600} \right)$$



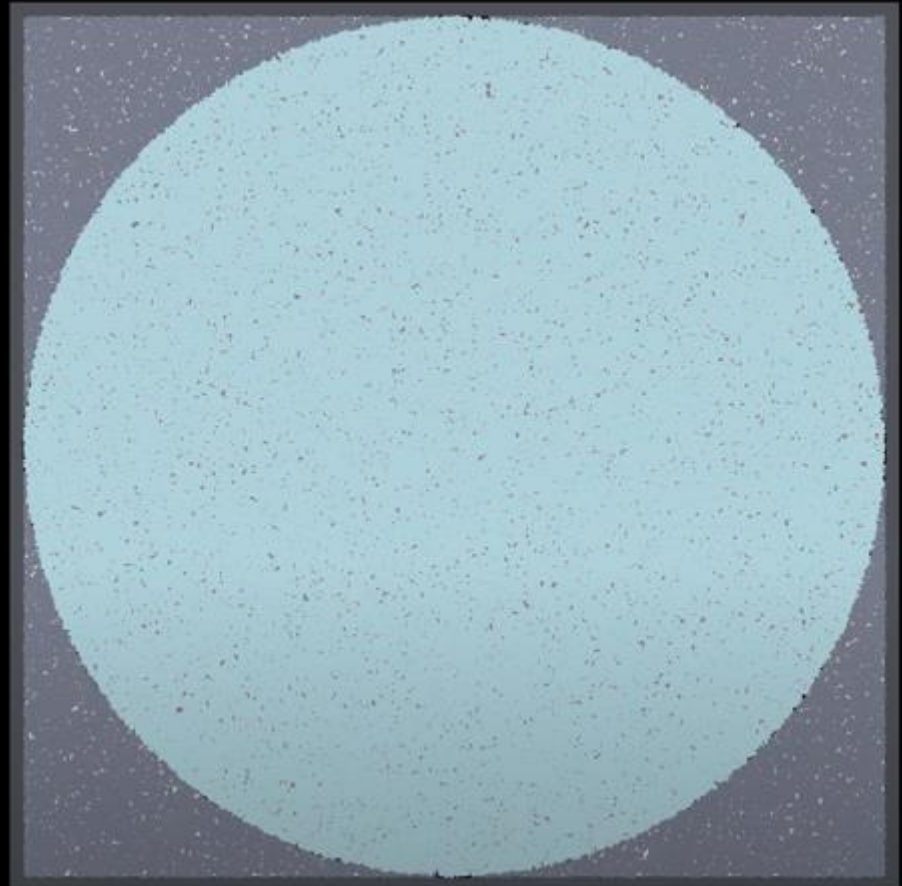
Δοκιμές 25700

$$3.143035 = 4 \left(\frac{20194}{25700} \right)$$



Δοκιμές 193000

$$3.141948 = 4 \left(\frac{151599}{193000} \right)$$



Τι αριθμός είναι ο π ;

- Ο π είναι άρρητος

Το 1767 ο Ελβετός μαθηματικός Johann H. Lambert (1728-1777) απέδειξε ότι ο π είναι άρρητος αριθμός, δηλαδή δεν είναι πηλίκo ακεραίων,

- Ο π είναι υπερβατικός

Το 1882 ο Γερμανός μαθηματικός Ferdinand von Lindemann (1852-1939) απέδειξε ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός, δηλαδή ανήκει στην κλάση των άπειρων αριθμών που δεν μπορούν να είναι λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων με συντελεστές ρητούς.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Να κατασκευαστεί ένα τετράγωνο ίσο με το εμβαδό ενός κύκλου δεδομένης ακτίνας

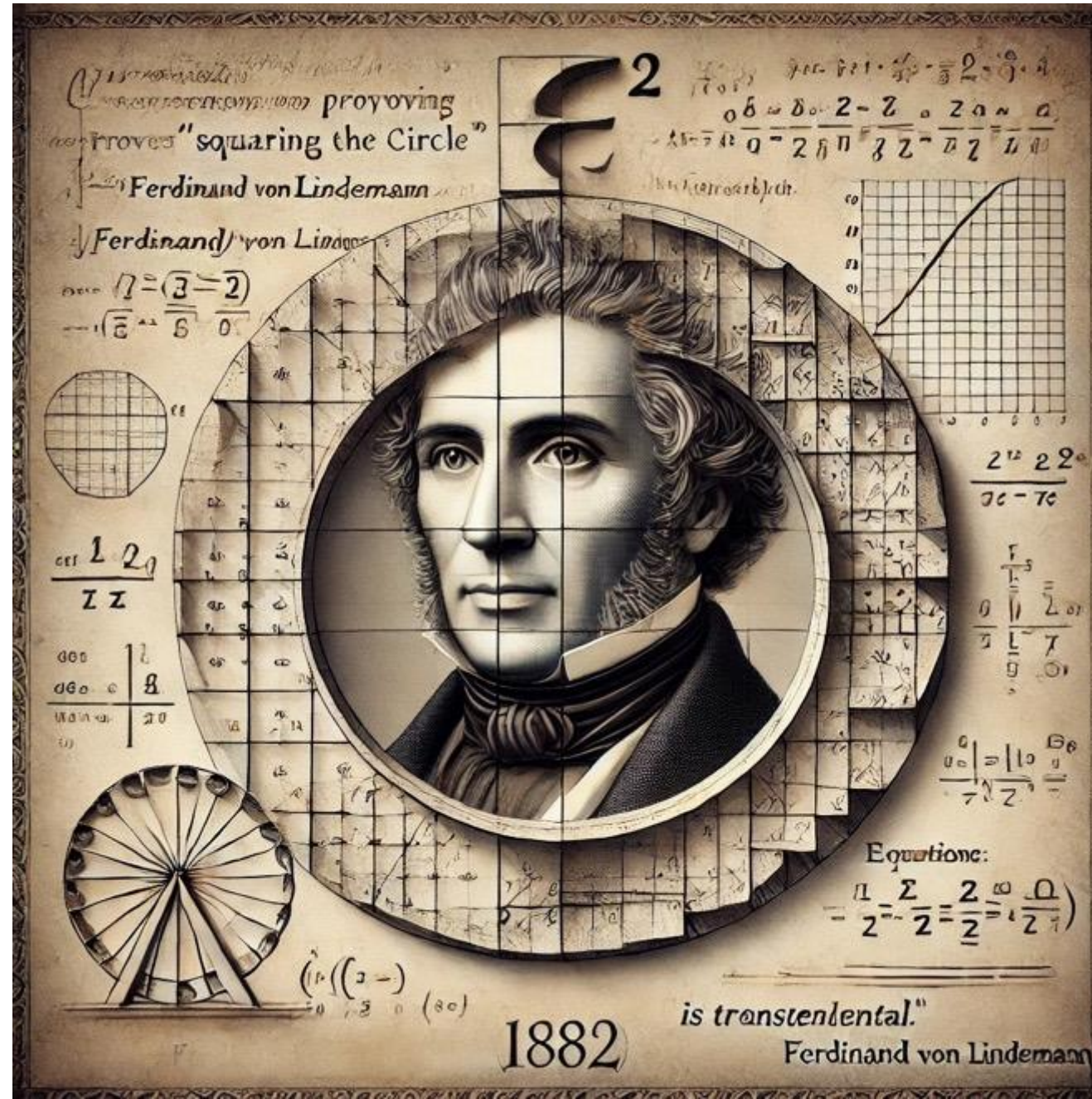
Με τον όρο «κατασκευή» εννοούμε να περιγράφει μια διαδικασία που χρησιμοποιεί αποκλειστικά τα γεωμετρικά όργανα αδιαβάθμητο κανόνα και διαβήτη και το πρόβλημα λύνεται με τομές ευθειών και κύκλων.



Η υπερβατικότητα του π και ο τετραγωνισμός του κύκλου

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου αντιστάθηκε στις προσπάθειες επίλυσης για πάνω από δύο χιλιάδες χρόνια. Η λύση του βρέθηκε το 1882 και δεν προέκυψε από τη Γεωμετρία -όπως ίσως θα περίμεναν οι περισσότεροι—αλλά από την άλγεβρα. Και τούτο διότι οι αλγεβριστές, στο πέρασμα των αιώνων είχαν μελετήσει λεπτομερώς τους αριθμούς και λύθηκε το 1882 όταν ο Φερντιναντ Λίντεμαν απέδειξε ότι ο π είναι υπερβατικός. Και ως υπερβατικός δεν είναι κατασκευάσιμος. Και ο τετραγωνισμός του κύκλου συνδέεται άμεσα με τον π , γιατί αυτή η κατασκευή περνάει μέσα από την κατασκευή τμήματος μήκους π .

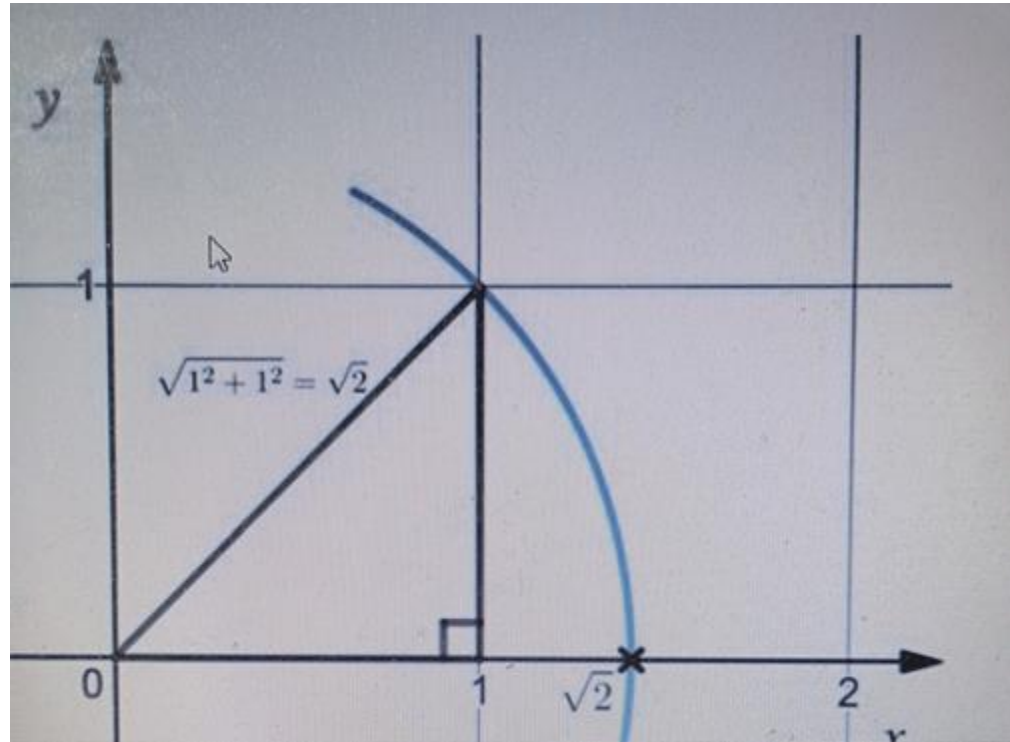
Ferdinand von Lindemann



Πού κάθεται ο π ;

- Τους αριθμούς τους παριστάνουμε με σημεία πάνω σε μια ευθεία. Δίδουμε έτσι οντότητα σε αντικείμενα που δεν είναι απτά.
- Ο π ως υπερβατικός είναι μη κατασκευάσιμος και ως εκ τούτου δεν μπορεί να προσδιοριστεί η θέση του πάνω στη ευθεία των πραγματικών αριθμών, όπως για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$

Αναπαράσταση του $\sqrt{2}$

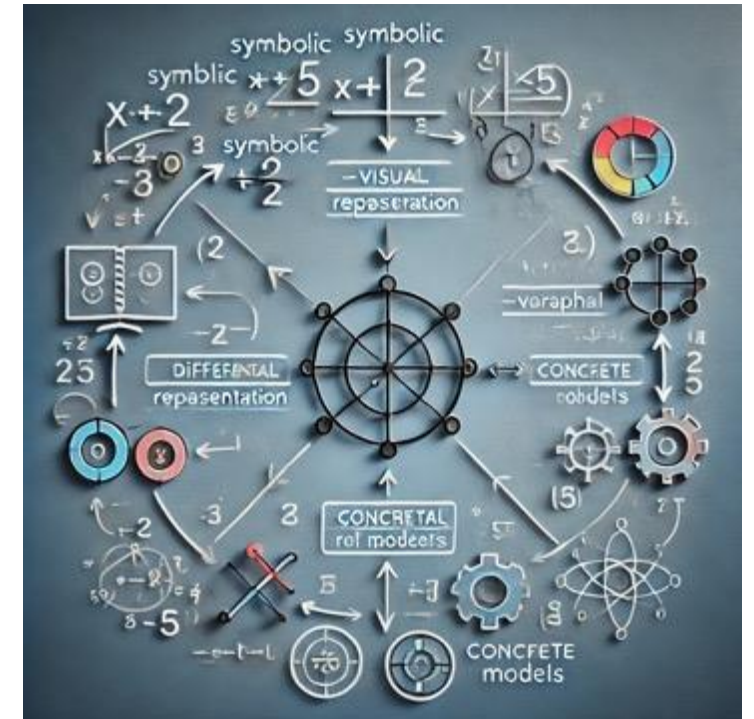
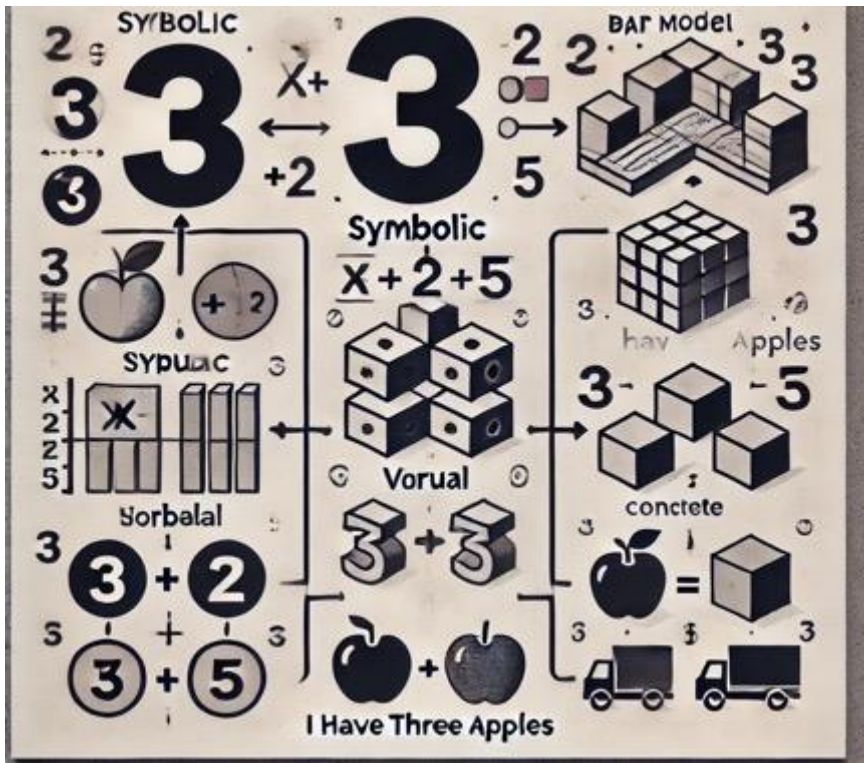


Η σπουδαιότητα των αναπαραστάσεων

- Τα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμοί, συναρτήσεις, διανύσματα, κλπ) , σε αντίθεση με φαινόμενα της Αστρονομίας, της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, κλπ., δεν είναι ποτέ προσβάσιμα μέσω των αισθήσεων ή των οργάνων (μικροσκόπια, τηλεσκόπια, διατάξεις μετρήσεων)
 - Κάθε αναπαράσταση προσφέρει και μια διαφορετική πρόσβαση στο μαθηματικό αντικείμενο
- $f(x)=x^2-2x-3$ $f(x)=(x+1)(x-3)$ $f(x)=(x-1)^2-4$

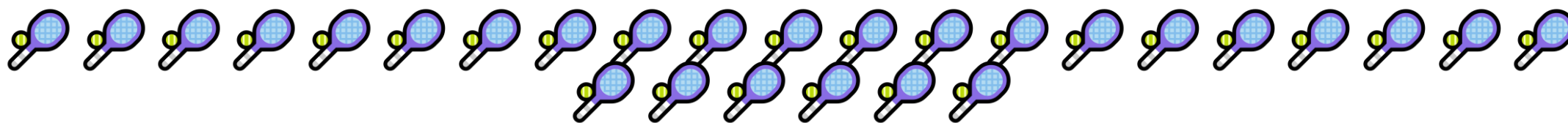
Μαθηματική σκέψη

Η ικανότητα του μαθητή μετάβασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο είναι πολύ συχνά το κρίσιμο κατώφλι για την πρόοδο στη μάθηση και την εκδήλωση της μαθηματικής σκέψης.

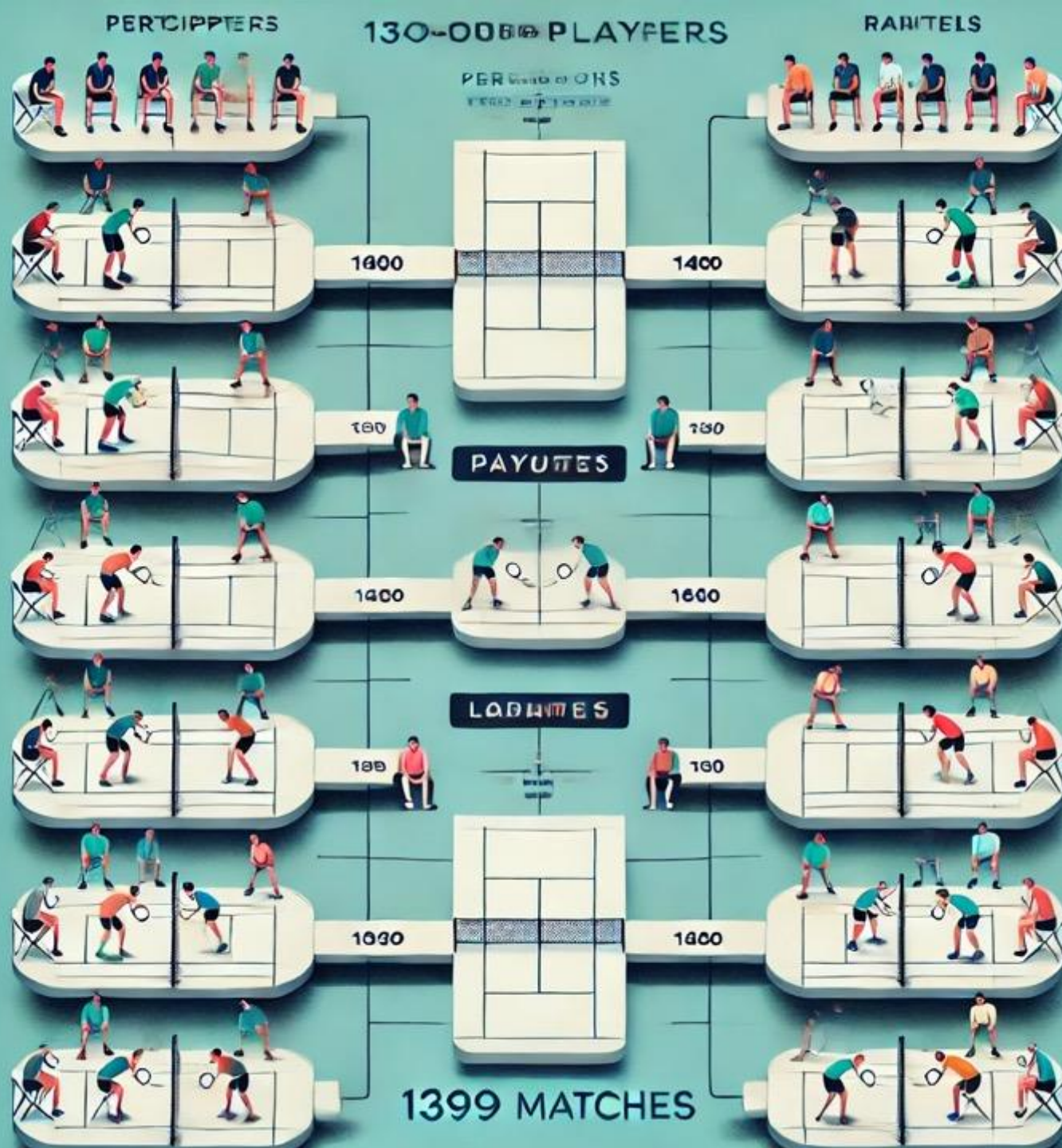


ΔΥΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| + |x-6| = 4$



- Ένας όμιλος τένις έχει 1400 άτομα. Θέλουν να κάνουν ένα πρωτάθλημα μεταξύ των μελών του για να βγάλουν τον πρωταθλητή. Ο κάθε χαμένος φεύγει από το παιχνίδι. Πόσα παιχνίδια θα γίνουν για να βγει ο πρωταθλητής;



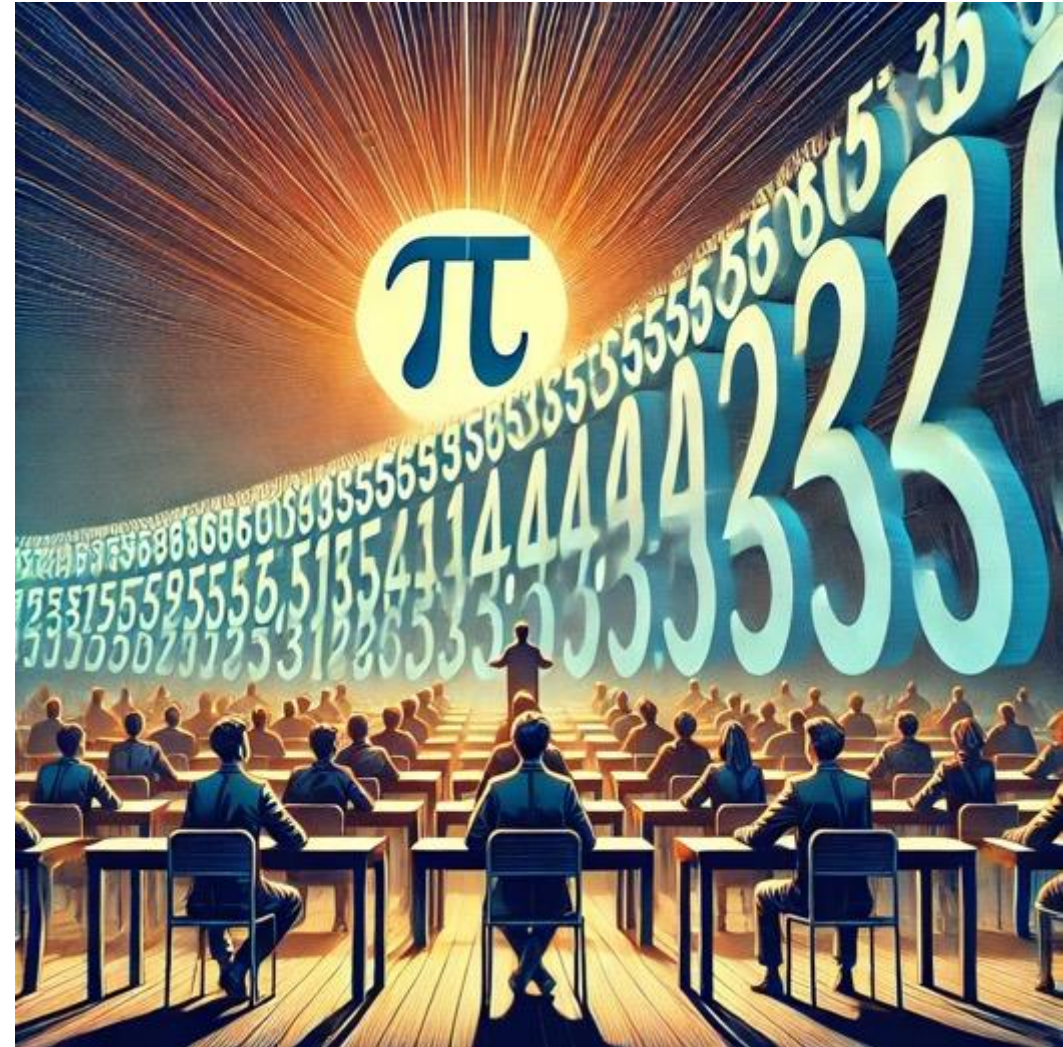
Πολιτιστική επιρροή του π

- Η δημοτικότητα του π τον έχει μετατρέψει, πέρα από τον επιστημονικό κόσμο, σε εικονίδιο της ποπ κουλτούρας.
- Ο π έχει γίνει αντικείμενο πολλών ντοκιμαντέρ και βιβλίων. Ο παγκοσμίως φήμης αστρονόμος Καρλ Σάγκαν σκέφτηκε στο μυθιστόρημά του «Επαφή» του 1985 ότι ένα μήνυμα από τον δημιουργό του Σύμπαντος είναι ενσωματωμένο στον π . Το βιβλίο αναφέρεται στην αναζήτηση εξωγήινης νοημοσύνης.

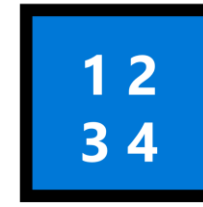


Πολιτιστική επιρροή του π

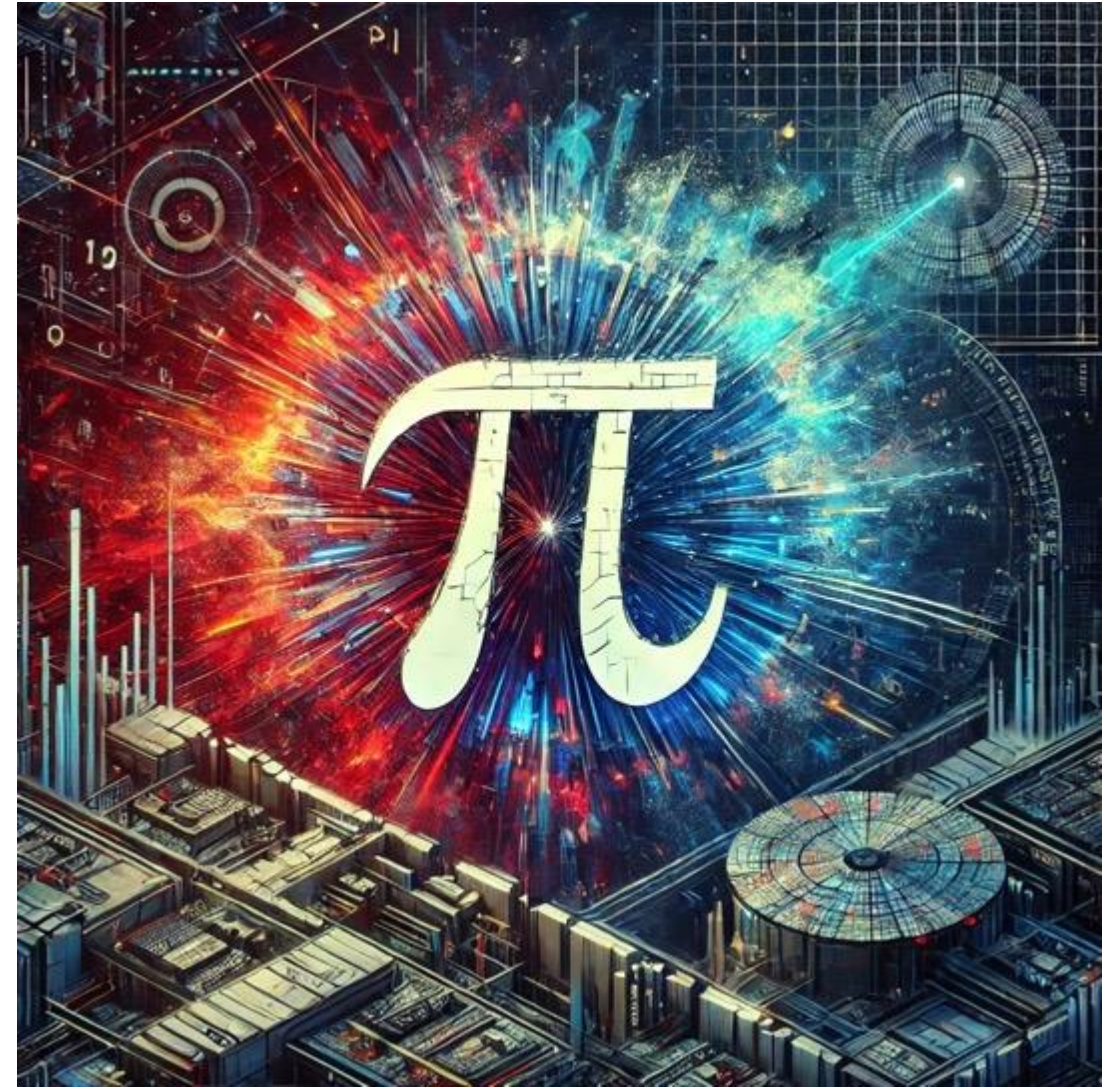
- Διεξάγονται διαγωνισμοί για να καθοριστεί ποιος μπορεί να απαγγείλει τα περισσότερα ψηφία του π . Γνωστό ως πιφιλολογία, το παγκόσμιο ρεκόρ κατέχει ο Thomas W. Ferguson, ο οποίος απήγγειλε τον π με 3.142.958 δεκαδικά ψηφία το 2006.



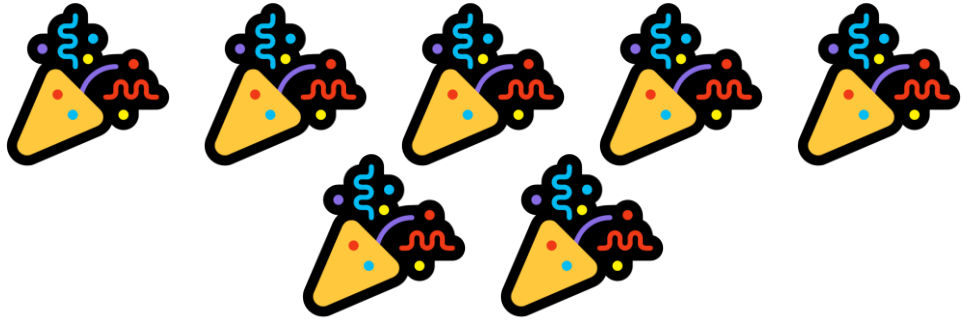
Πολιτιστική επιρροή του π



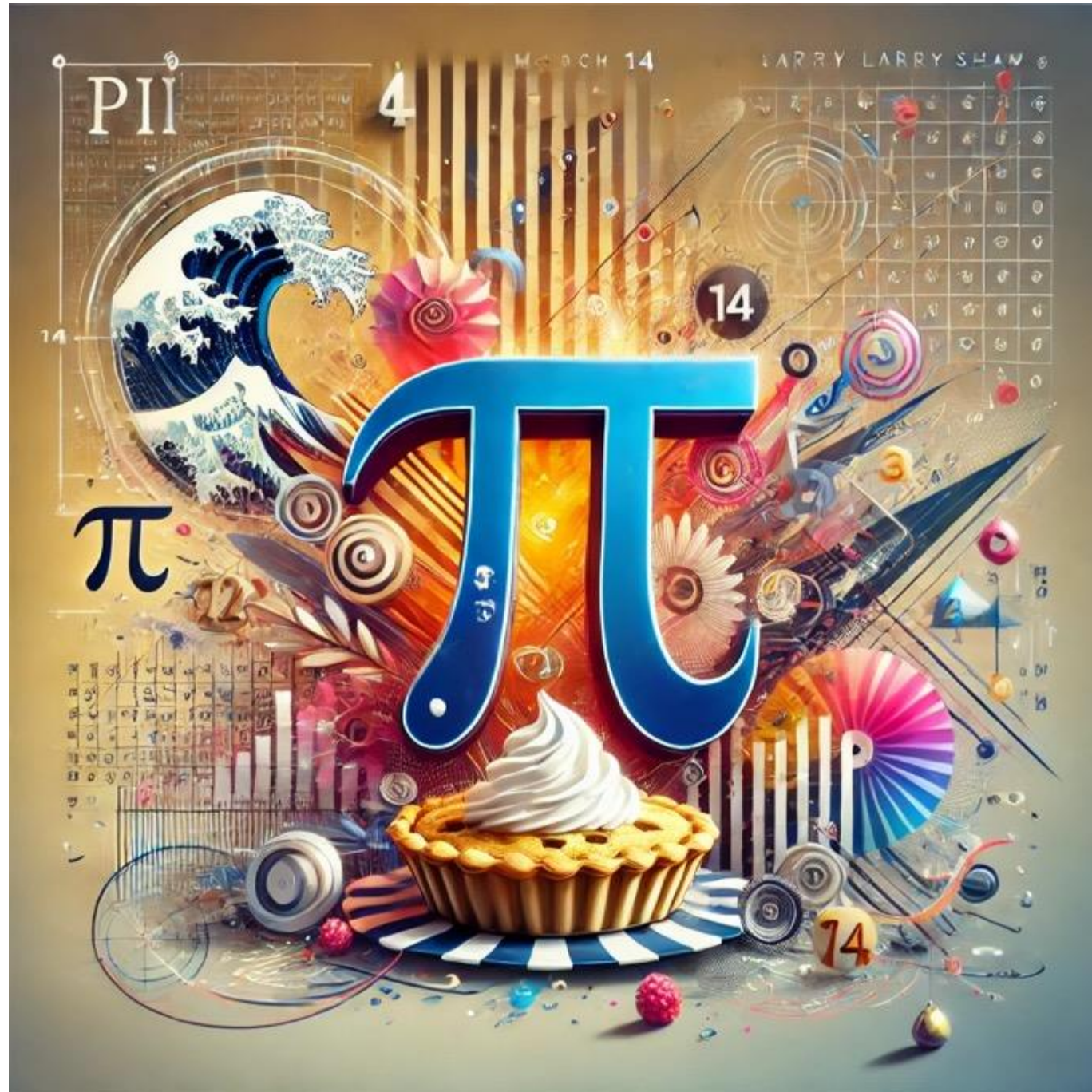
- Ο π εμφανίστηκε στο επεισόδιο του Star Trek του 1967 "The Wolf in the Fold", όπου ο κύριος Sprock σταματά έναν δολοφονικό υπολογιστή δίνοντάς του εντολή να υπολογίσει το τελευταίο ψηφίο για την τιμή του π - μια αδύνατη εργασία που κατέστρεψε τον υπολογιστή.



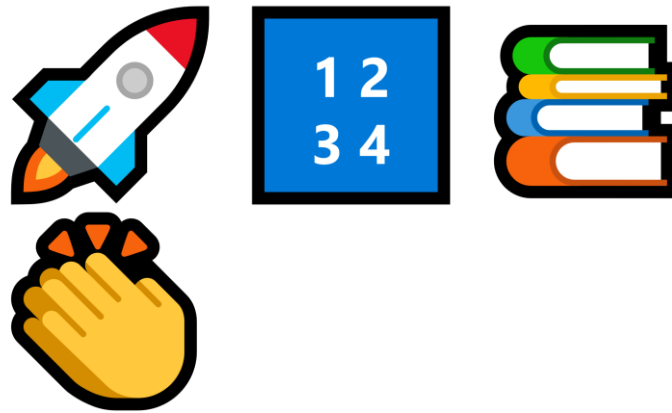
Πότε γιορτάζει ο π ;



- Η παγκόσμια ημέρα του π γιορτάζεται κάθε χρόνο στις 14 Μαρτίου,
- Ο εορτασμός της ημέρας του π καθιερώθηκε το 1988 από τον Carry Shaw.



Σας ευχαριστώ!



Θανάσης Σ. Σιούρας
π Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου