

Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα: Τα αριθμητικά θεμέλια της προ-μοντέρνας άλγεβρας

Γιάννης Χριστιανίδης

Ομότιμος Καθηγητής Ιστορίας των Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
Μέλος του Centre de recherches d'histoire des sciences et des techniques
'Alexandre Koyré' (Paris)

Αντεπιστέλλον μέλος της Académie Internationale d'Histoire des Sciences

ΔΙΑΛΕΞΕΙΣ ΣΤΟ YOUTUBE



Ομιλία Γ. Χριστιανίδη: "Τα Αριθμητικά του Διόφαντου: ένα έργο της προ-μοντέρνας άλγεβρας"

<https://youtu.be/2gUB7Zgf0Ik>



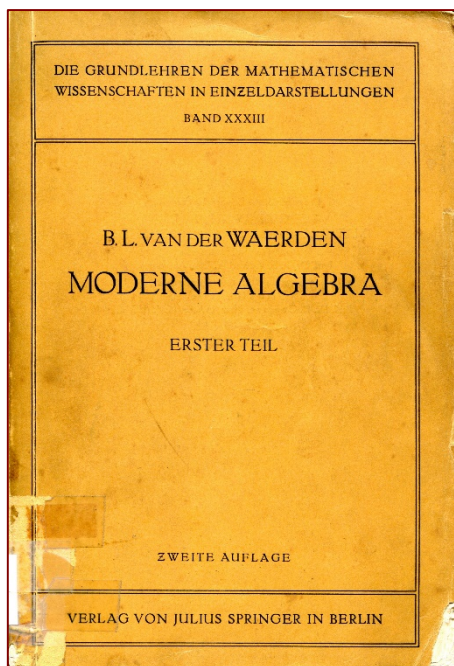
Ομιλία Γ. Χριστιανίδη: "Ιστοριογραφικά ερωτήματα για το έργο του Διόφαντου"

<https://youtu.be/CWMJM8X010>

Η ΤΡΙΜΕΡΗΣ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

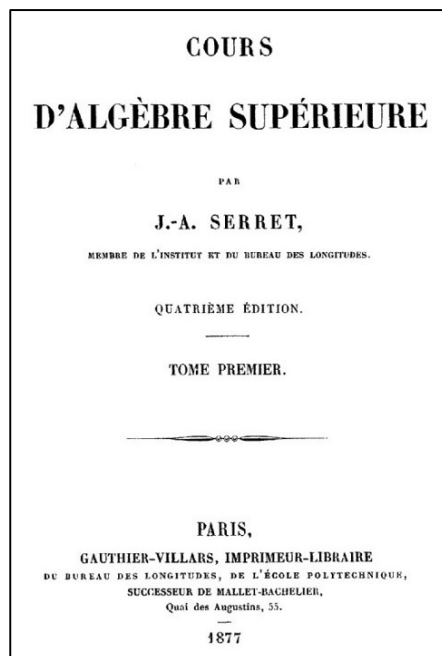
3

Σύγχρονη



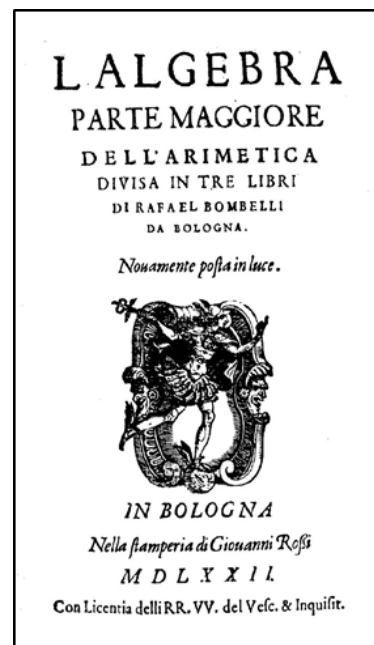
2

Μοντέρνα



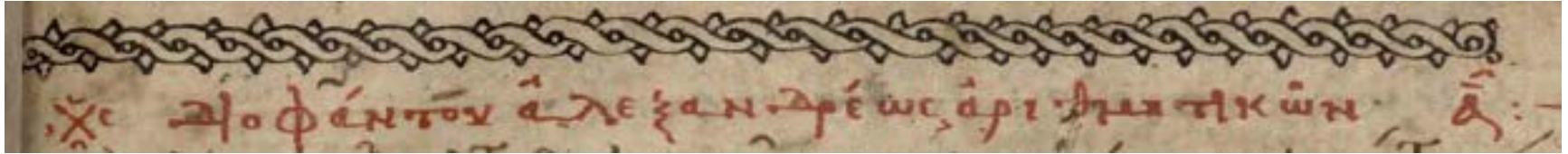
1

Προ-μοντέρνα



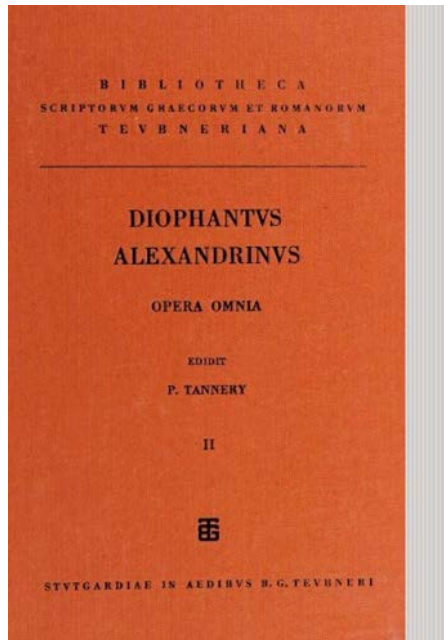
ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ: Η ΖΩΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ

Έζησε περί το 300 μ.Χ. (;) / στην Αλεξάνδρεια (;)

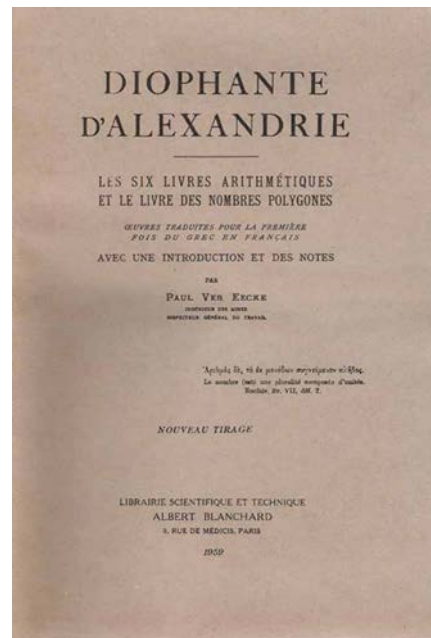


Τα έργα: *Αριθμητικά*, *Περί πολυγώνων αριθμών*

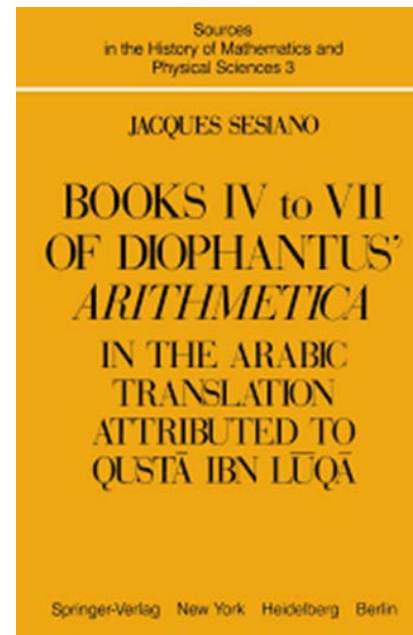
1893-95



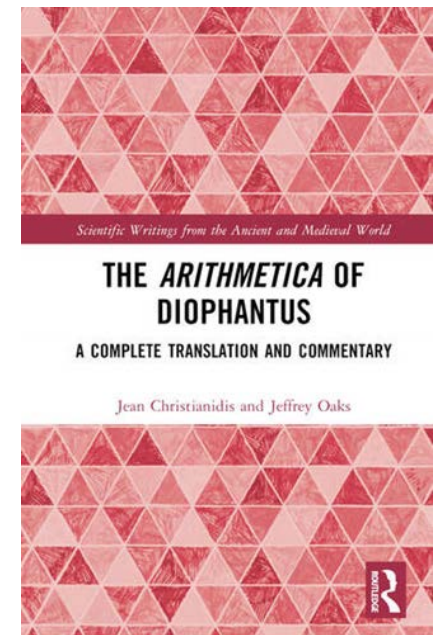
1926



1982



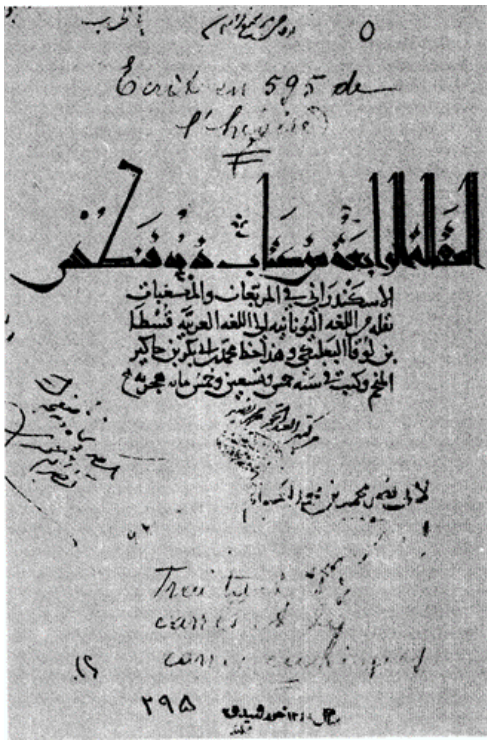
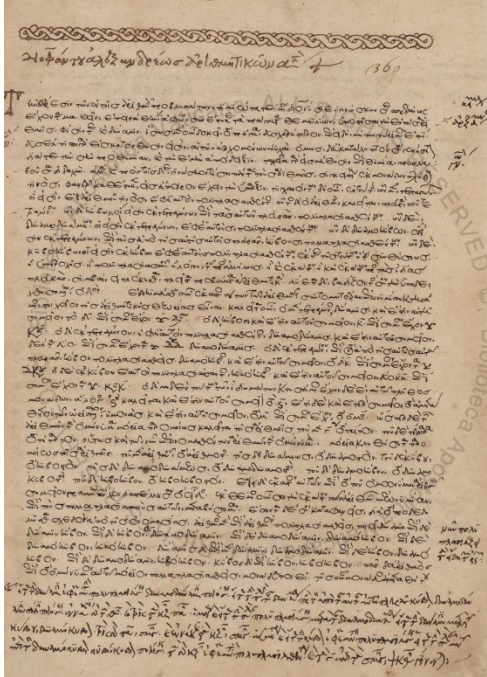
2023



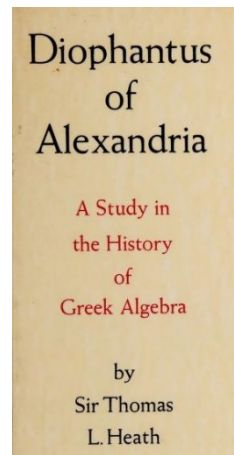
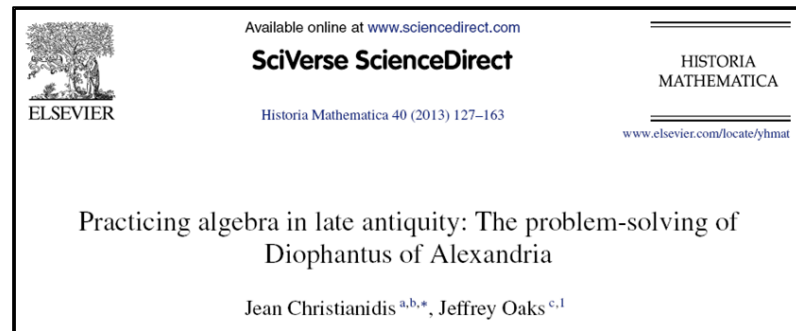
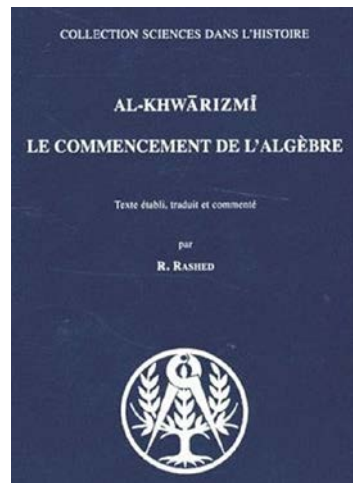
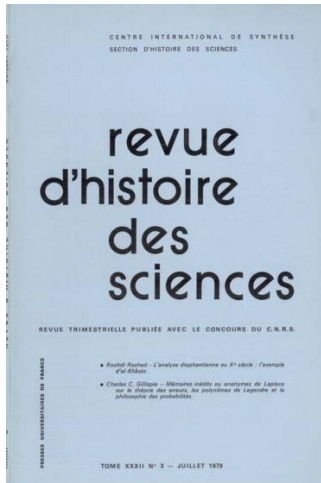
ΤΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

(σώζονται δέκα από τα δεκατρία)

Ελληνικά	Αραβικά	Η σειρά
A		A
B		B
Γ		Γ
Δ	4	4
E	5	5
ΣΤ	6	6
	7	7
		Δ, Ε, ΣΤ



ΑΛΓΕΒΡΑ ή ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ; Διαμάχες (των τελευταίων χρόνων) για τον χαρακτήρα των Αριθμητικών



Roshdi Rashed: «Αν, λοιπόν, ο Διόφαντος χρησιμοποιεί, στην πορεία των λύσεων, αντικαταστάσεις, απαλοιφές και μεταφορές των ειδών, με δυο λόγια, αλγεβρικές τεχνικές, **τα Αριθμητικά εντούτοις δεν είναι μια πραγματεία άλγεβρας. Στη γλώσσα μας, πρόκειται καθαρά για ένα βιβλίο αριθμητικής.**»

Glen Van Brummelen (*Mathematical Reviews*): «**Τα τελευταία χρόνια έχει καταστεί ντεμοντέ να θεωρούνται τα Αριθμητικά ως έργο άλγεβρας.**»

COLLECTION SCIENCES DANS L'HISTOIRE

AL-KHWĀRIZMĪ

LE COMMENCEMENT DE L'ALGÈBRE

Texte établi, traduit et commenté

par

R. RASHED



SOMMAIRE

Préface	vii
---------------	-----

I

AL-KHWĀRIZMĪ MATHÉMATICIEN

INTRODUCTION	3
--------------------	---

I. LES TRADITIONS DE CALCUL AU VIII^e SIÈCLE ET L'ALGÈBRE D'AL-KHWĀRIZMĪ

1.1. Introduction	11
1.2. La langue d'al-Khwārizmī	14
1.3. Al-Khwārizmī et la culture du VIII ^e siècle	16
1.4. Le calcul des linguistes. Classification <i>a priori</i> et combinatoire	18
1.5. Les calculs juridiques	24

II. LES LECTURES MATHÉMATIQUES D'AL-KHWĀRIZMĪ

2.1. Introduction	30
2.2. La <i>mathesis</i> euclidienne et l'idée de l'algèbre d'al-Khwārizmī	31
2.2.1. Les équations et les algorithmes	31
2.2.2. Les quantités irrationnelles quadratiques	43
2.2.3. Démonstration géométrique et démonstration algébrique	49
2.3. Euclide, Héron et al-Khwārizmī	56
2.4. Diophante et al-Khwārizmī	61
2.5. Āryabhaṭa, Brahmagupta et al-Khwārizmī	64

II

TEXTE ET TRADUCTION

ÉDITION ET TRADUCTION	83
-----------------------------	----

LIVRE D'ALGÈBRE ET D'AL-MUQĀBALA	92
Les carrés égaux à des racines	96
Les carrés égaux à un nombre	98
Les racines égales à un nombre	98
Les carrés plus les racines égaux à un nombre	100
Les carrés et le nombre égaux à des racines	104
Les racines plus le nombre égaux aux carrés	106
Chapitre sur la multiplication	122
Chapitre sur l'addition et la soustraction	130
La division <et la multiplication de racines>	134
Chapitre sur les six problèmes	144
Premier des six problèmes	144
Deuxième problème	146
Troisième problème	148
Quatrième problème	150

ΑΛΓΕΒΡΙΣΤΗΣ ή ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ; ή ΟΙ ΔΥΟ ΔΙΟΦΑΝΤΟΙ

- Μέχρι τον 17^ο αι.: Διόφαντος ο αλγεβριστής

Γιατί; Διότι ως αλγεβριστή τον αναγνώριζαν και τον περιέγραφαν οι μαθηματικοί μέχρι εκείνη την εποχή, καθώς η άλγεβρα που οι ίδιοι ασκούσαν (η **προ-μοντέρνα** άλγεβρα) δεν διέφερε επί της ουσίας από την τέχνη που ασκούσε ο Διόφαντος.

- Μετά τον 17^ο αι.: Διόφαντος ο αριθμοθεωρητικός

Γιατί; Διότι τότε η άλγεβρα γίνεται **μοντέρνα**, το έργο του Διόφαντου, ως αλγεβρικό έργο, γίνεται παρωχημένο, αναδύεται η μοντέρνα Θεωρία Αριθμών, και δημιουργείται έτσι ο Διόφαντος της Θεωρίας Αριθμών.

Η άλγεβρα πριν τον 17^ο αι. δεν ήταν ίδια με τη σημερινή στοιχειώδη άλγεβρα. Λειτουργούσε σε διαφορετική εννοιολογική βάση, σε σύγκριση με την άλγεβρα που εγκαινιάζεται με τον Viète το 1591 και βρίσκει την πρώτη της ολοκληρωμένη έκφραση στην περίφημη *La Geometrie* του Descartes (1637).

Αποδείξεις για τις εν λόγω εννοιολογικές διαφορές αποτελούν οι τρόποι με τους οποίους οι προ του 1600 αλγεβριστές έλυναν τα προβλήματα:

- εξέφραζαν τις πράξεις με τρόπους που φαίνονται σήμερα σαν να μην έχουν νόημα ή συνυφαίνονται με τον σύγχρονο συμβολισμό,
- απέφευγαν τους άρρητους συντελεστές στις εξισώσεις,
- δομούσαν τις λύσεις των προβλημάτων διαφορετικά.

Όλες αυτές οι ανωμαλίες αποτελούν τεκμήρια ενός διαφορετικού τρόπου κατανόησης των μονωνύμων, των πολωνύμων και των εξισώσεων.



Την προ του Viète άλγεβρα θα τη λέμε «προ-μοντέρνα άλγεβρα» για να τη διακρίνουμε από τη στοιχειώδη μοντέρνα άλγεβρα.

ΤΟ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ ΤΗΣ ΠΡΟ-MONΤΕΡΝΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Στην προ-μοντέρνα άλγεβρα οι γνωστοί και οι άγνωστοι είναι αριθμοί και οι έννοιες του πολυωνύμου και της εξίσωσης πηγάζουν από τους τρόπους με τους οποίους νοούνταν οι αριθμοί στην αριθμητική.

Χαρακτηριστικά των προ-μοντέρνων αριθμών:

- 1) Ο κάθε αριθμός είναι μια **πολλαπλότητα**.
- 2) Ο κάθε αριθμός είναι αξεχώριστα συνδεδεμένος με το **είδος** του οποίου είναι αριθμός.
- 3) Οι αριθμοί εκφράζονται συχνά ως **συναθροίσεις** ή **διαφορές (αποτομές)** δύο ή περισσότερων αριθμών.



Αυτά τα τρία χαρακτηριστικά μεταφέρθηκαν από τους αριθμούς στις αλγεβρικές εκφράσεις και αποτέλεσαν τη βάση για την προ-μοντέρνα κατανόηση αυτών των εκφράσεων.

ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ – ΕΙΔΗ – ΣΥΛΛΟΓΕΣ/ΔΙΑΦΟΡΕΣ

Αλέξανδρος ο Αφροδισιεύς (στα *Μετά τα φυσικά* του Αριστοτέλη): «**πᾶς γὰρ ἀριθμός τινός ἐστι**»

Το σκέτο «πέντε» δεν υφίσταται. Κάθε «πέντε» είναι «πέντε» κάτι.

Θέων (στη *Μαθηματική σύνταξη* του Πτολεμαίου):

Ονομάζει τις μοίρες, τα πρώτα εξηκοστά, τα δεύτερα εξηκοστά, κ.λπ., διαφορετικά «είδη» (**εἶδη**).

Ένα «πέντε» μπορεί να είναι πέντε μοίρες, πέντε πρώτα λεπτά, πέντε δεύτερα λεπτά, ή πέντε όροι οποιασδήποτε άλλης εξηκονταδικής τάξης.

Αριθμοί ως συλλογές. **2° 1' 12''** Συλλογή δεκαπέντε items τριών διαφορετικών ειδών. (Είναι λάθος η γραφή **2° + 1' + 12''**)

Αριθμοί με έλλειψη (αποτομές). Πτολεμαίος: εκφράζει έναν αριθμό περιφορών ως «**8 με 2 4' μοίρες να λείπουν**».

(Είναι λάθος η γραφή **8π – 2 4'μ**)

ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ: ΜΟΝΩΝΥΜΟ, ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ, ΕΞΙΣΩΣΗ

Προ-μοντέρνο μονώνυμο: ζεύγος πλήθος-και-είδος

Προ-μοντέρνο πολυώνυμο: συλλογή προ-μοντέρνων μονωνύμων

Προ-μοντέρνα εξίσωση: ισότητα δύο συλλογών

Η ιδέα προέρχεται από τους αριθμούς: $2^{\circ} 1' 12''$

- Το « 2° » είναι ένα ζεύγος αποτελούμενο από πλήθος (2) και είδος ($^{\circ}$). Αλλιώς ειπωμένο: το «2» είναι ένα «δύο» του είδους «μοίρα» («δύο μοίρες»).
- Οι αριθμοί 2, 1, 12 δηλώνουν πλήθη. Δεν είναι συντελεστές.
- Τα $^{\circ}$, $'$, $''$ είναι είδη αριθμών. Δεν είναι τιμές (ποσότητες).
- Το 1 γράφεται πάντοτε.
- Οι λέξεις για τα «είδη» κλίνονται (ενικός-πληθυντικός, γένη, πτώσεις).

π.χ.: $2^{\circ} 1' 12'' = 2$ μοίρες, 1 πρώτο εξηκοστό, 12 δεύτερα εξηκοστά

ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΣΤΟ ΠΡΟ-ΜΟΝΤΕΡΝΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

π.χ.: $2^{\circ} 1' 12'' = 2$ μοίρες, 1 πρώτο εξηκοστό, 12 δεύτερα εξηκοστά

Προ-μοντέρνο πολυώνυμο (Διόφαντος):

δυνάμεις $\bar{\beta}$, αριθμός $\bar{\alpha}$, μονάδες $\bar{\iota}\bar{\beta}$ $\Delta^r \bar{\beta} \sim \bar{\alpha} \sim \bar{\iota}\bar{\beta}$

Προ-μοντέρνο πολυώνυμο (al-Khwārazmī):

δύο $māls$, ένα πράγμα, δώδεκα ντιράμ

Μοντέρνο πολυώνυμο: $2x^2 + x + 12$

Τα μοντέρνα x , x^2 κ.λπ. είναι τιμές· τα προ-μοντέρνα «αριθμός», «πράγμα», «δύναμις», « $māl$ » κ.λπ., είναι είδη αριθμών

ΜΙΑ ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι δύο χρήσεις της λέξης «**ἀριθμός**» στον Διόφαντο:

- **ἀριθμός** ως ουσιαστικό (το γράφω «αριθμός»)
- **ἀριθμός** ως κύριο όνομα (το γράφω «Αριθμός»)

Το δικό μας x (αλγεβρικός άγνωστος πρώτου βαθμού) αντιστοιχεί στον Διόφαντο στη λέξη «Αριθμός» (κύριο όνομα, που εμφανίζεται συχνά στα χφφ. ως λ) και όχι στη λέξη «αριθμός» (ουσιαστικό).

π.χ. (πρόβλημα I.8): **Τετάρτῳ ὁ προστιθέμενος ἑκατέρῳ ἀριθμῷ ς ἄ.**

«Έστω ότι ο προστιθέμενος (αριθμός) σε κάθε αριθμό έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός».

Η λέξη «αριθμός» (ουσιαστικό) διαφέρει από τη λέξη «Αριθμός» (κύριο όνομα) όπως η λέξη «city» διαφέρει από τη λέξη «City», τη συνοικία του Λονδίνου.

ΟΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΟΡΟΙ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΑΡΑΒΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ

Ελληνικά βιβλία	Αραβικά βιβλία	
μονάς unité	wāḥid unité	1
ἀριθμός Nombre	shay' ou jidhr Chose ou Racine	x
δύναμις Puissance	māl Māl	x^2
κύβος Cube	ka'b Cube	x^3
δυναμοδύναμις Puissance-Puissance	māl māl Māl Māl	x^4
δυναμόκυβος Puissance-Cube	māl ka'b ou ka'b māl Māl Cube ou Cube Māl	x^5
κυβόκυβος Cube-Cube	ka'b ka'b Cube Cube	x^6
		x^7
	ka'b ka'b māl ou māl māl māl māl Cube Cube Māl ou Māl Māl Māl Māl	x^8
	ka'b ka'b ka'b Cube Cube Cube	x^9
ἀριθμοστόν Inverse Nombre	juz' min shay' partie de la Chose	x^{-1}
δυναμοστόν Inverse Puissance	juz' min māl partie du Māl	x^{-2}
κυβοστόν Inverse Cube		x^{-3}
δυναμοδυναμοστόν Inverse Puissance-Puissance		x^{-4}
δυναμοκυβοστόν Inverse Puissance-Cube		x^{-5}
κυβοκυβοστόν Inverse Cube-Cube		x^{-6}

ΟΙ ΠΡΟ-MONΤΕΡΝΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ: (π.χ. η πρόσθεση στην αριθμητική)

Al-Qalāṣādī (πεθ. το 1486):
«Πρόσθεσε μια ρίζα του έξι σε
μια ρίζα του πέντε· λες ότι το
αποτέλεσμα είναι μια ρίζα του
έξι και μια ρίζα του πέντε».

Αν το γράψουμε όπως θα το
γράφαμε σήμερα θα είχαμε την
ταυτολογία $\sqrt{6} + \sqrt{5} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$.
Για να έχει νόημα το κείμενο θα
έπρεπε να το γράψουμε π.χ.
κάπως σαν $\sqrt{6} + \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{6} \sqrt{5}$

Συμπέρασμα: Η πρόσθεση (και, γενικά, οι αριθμητικές πράξεις) στα
προ-μοντέρνα Μαθηματικά γίνεται εν χρόνω και περιγράφεται με
δύο ρήματα.

Συμπέρασμα: Ο συμπλεκτικός σύνδεσμος «και» δεν ταυτίζεται με το
μοντέρνο «συν» (+).

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ: ΠΡΟΣΘΕΣΗ (ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ)

Διόφαντος, Α.8:

«Ἐστω ὅτι ὁ προστιθέμενος στον κάθε αριθμό έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός. Και αν **προστεθεί** στον 100, **θα είναι** 1 Αριθμός, 100 μονάδες, ενώ αν (**προστεθεί**) στον 20, **γίνεται** 1 Αριθμός, 20 μονάδες.»

Μετάφραση του Ε. Σταμάτη:

Ἦς κληθῇ ὁ προστιθέμενος εἰς ἑκάτερον ἀριθμὸν x . Καὶ ἂν μὲν προστεθῇ εἰς τὸν 100 θὰ εἶναι $x + 100$. Ἐὰν δὲ εἰς τὸν 20 θὰ εἶναι $x + 20$. Καὶ θὰ

- α) Η μτφρ. του Σταμάτη οδηγεί στην ταυτολογία $x + 100 = x + 100$.
- β) Παραλείπει τον συντελεστή 1.
- γ) Τοποθετεί το + όχι στην πράξη αλλά στο αποτέλεσμα της.

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ: ΑΦΑΙΡΕΣΗ (ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ)

Διόφαντος Α.9:

«Ἐστω ὅτι ὁ αφαιρούμενος ἀπὸ τὸν κάθε ἀριθμὸ ἔχει ὀριστεῖ
να εἶναι 1 Ἀριθμὸς. Καὶ ἀν **αφαιρεθεῖ** ἀπὸ τὸν 100, **απομένουν**
100 μονάδες με ἔλλειψη 1 Ἀριθμοῦ, ἐνῶ ἀν (**αφαιρεθεῖ**) ἀπὸ
τὸν 20, **απομένουν** 20 μονάδες με ἔλλειψη 1 Ἀριθμοῦ.»

Μετάφραση τοῦ Ε. Σταμάτη:

“Ἄς κληθῇ ὁ αφαιρούμενος ἐξ ἑκατέρου ἀριθμοῦ x . Καὶ ἂν μὲν αφαιρεθῇ
ἀπὸ τοῦ 100 θὰ εἶναι $100 - x$ · ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ 20 θὰ εἶναι $20 - x$. Καὶ εἶναι

- α) Οδηγεῖ στὴν ταυτολογία $100 - x = 100 - x$.
- β) Παραλείπεται ὁ συντελεστής 1.
- γ) Τοποθετεῖ τὸ $-$ ὄχι στὴν πράξη ἀλλὰ στὸ ἀποτέλεσμά της.

ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ: ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

A.39 (μετάφραση του Ε. Σταμάτη):

Ἐστω ὁ ζητούμενος x . Καὶ ἐὰν μὲν προστεθῇ μετὰ τοῦ 5 γίνεται $x + 5$.
ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῇ (τὸ ἄθροισμα) ἐπὶ τὸν ἄλλον, τουτέστι τὸν 3, γίνον-
ται $3x + 15$. Πάλιν, ἐὰν ὁ x προστεθῇ μετὰ τοῦ 3, γίνονται $x + 3$. ἐὰν δὲ

Πώς εξηγείται ο συντελεστής 1;

«Ἐστω ὅτι ο ζητούμενος ~~είναι~~ 1 Αριθμός. Και αν **προστεθεί** με-
τις 5 μονάδες, **γίνεται 1 Αριθμός, 5 μονάδες**· και αν
πολλαπλασιαστεί ἐπὶ τὸν ἄλλο, δηλαδή τὸν 3, **γίνονται**
3 Αριθμοί, 15 μονάδες ...»

Πώς εξηγείται ο πληθυντικός αριθμός;



ΓΡΙΦΟΙ

πτώσεις, γένος, αριθμός (ενικός, πληθυντικός) και ο 'συντελεστής' 1

Μοντέρνο πολυώνυμο	$x^2 + 4x + 4$
Bombelli (1572)	1 $\underbrace{\quad}_2$ p. 4 $\underbrace{\quad}_1$ p. 4 p. = ριὺ (επιπλέον)
Al-Khwarazmī (περ. 830)	ένα μαλ τέσσερα πράγματα τέσσερα ντιράμ
Διόφαντος	δύναμις $\bar{\alpha}$ ἀριθμοὶ $\bar{\delta}$ μονάδες $\bar{\delta}$ $\Delta^r \bar{\alpha} \sim \bar{\delta} \sim \bar{\delta}$



ΓΡΙΦΟΙ

πτώσεις, γένος, αριθμός (ενικός, πληθυντικός) και ο 'συντελεστής' 1

Μοντέρνο πολυώνυμο $2x^3 + x^2 - 4x - 4$	
Bombelli	$2 \overset{3}{\cup} p.1 \overset{2}{\cup} m.4 \overset{1}{\cup} m.4$ m. = meno (με έλλειψη)
Al-Khwarazmī	δύο κύβοι ένα μαλ <u>με έλλειψη</u> τεσσάρων πραγμάτων <u>και</u> τεσσάρων ντιράμ
Διόφαντος	κύβοι $\bar{\beta}$ δύναμις $\bar{\alpha}$ <u>λείψει</u> ἀριθμῶν $\bar{\delta}$ μονάδων $\bar{\delta}$ $K^r \bar{\beta} \Delta^r \bar{\alpha} \pi \sim \bar{\delta} \mu \bar{\delta}$

Το μοντέρνο $+$ δεν υπάρχει στα προ-μοντέρνα πολυώνυμα. Αντ' αυτού υπάρχει μερικές φορές ο συμπλεκτικός σύνδεσμος «και».

Το μοντέρνο $-$ δεν υπάρχει στα προ-μοντέρνα πολυώνυμα. Αντ' αυτού υπάρχουν λέξεις, όπως η λέξη «λείψει» του Διοφάντου, που σημαίνουν «με έλλειψη», «εκτός», «παρά».

- όλη η τάξη είναι παρούσα **εκτός** από τον Μάνο
- **παρά** 5 λεπτά 2 ώρες

Το προ-μοντέρνο $2x - 5$ («2 Αριθμοί με έλλειψη 5 μονάδων») είναι ένα $2x$ όχι ολόκληρο. Είναι ένα «παρά 5 μονάδες $2x$ ».

Δεν υπάρχει αφαίρεση ανάμεσα στους «2 Αριθμούς» και στις «5 μονάδες».

Η ΠΡΟ-MONΤΕΡΝΑ ΕΞΙΣΩΣΗ

- Η προ-μοντέρνα (πολυωνυμική) εξίσωση είναι εξίσωση μεταξύ δύο συλλογών (προ-μοντέρνων πολυωνύμων).
- Δεν περιέχει πράξεις.
- Όταν λύνεται ένα πρόβλημα με τη μέθοδο της προ-μοντέρνας άλγεβρας, οι πράξεις που επιτάσσει η εκφώνηση πρέπει να γίνουν στη διαδικασία κατάστρωσης της εξίσωσης και όχι στο πλαίσιο της εξίσωσης. Η εξίσωση είναι ελεύθερη πράξεων.
- Η προ-μοντέρνα άλγεβρα δεν ήταν θεωρία εξισώσεων (όπως ήταν η μοντέρνα άλγεβρα μέχρι τον 19ο αι.). Ήταν μέθοδος επίλυσης προβλημάτων δια της μετατροπής τους σε εξισώσεις.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Η επίλυση ενός προβλήματος με προ-μοντέρνα άλγεβρα περιλαμβάνει τα εξής βασικά στάδια:

(1) Οι άγνωστοι λαμβάνουν αλγεβρικά ονόματα, επί των οποίων εφαρμόζονται οι πράξεις που επιτάσσει η εκφώνηση. Το πρόβλημα μετατρέπεται σε μια – στην ιδανική περίπτωση – πολυωνυμική εξίσωση.

(2) Η εξίσωση απλοποιείται ώστε (α) να μην περιέχει όρους που λείπουν και (β) να μην υπάρχουν δύο ή περισσότεροι όροι της ίδιας δύναμης.

Η απλοποίηση περιλαμβάνει δύο βασικά βήματα: (α) Οι όροι της μορφής «Α με έλλειψη Β» πρέπει να αποκατασταθούν ώστε να γίνουν πλήρη Α (al-jabr) και συγχρόνως το Β πρέπει να προστεθεί στο άλλο μέλος της εξίσωσης· και (β) οι όμοιοι όροι στα δύο μέλη της εξίσωσης πρέπει να αντιπαραβληθούν, ώστε να απομείνει η διαφορά τους στην πλευρά του μεγαλύτερου όρου (al-muqābala).

(3) Κατόπιν επιλύεται η απλοποιημένη εξίσωση, με τη χρήση ενός έτοιμου εκ των προτέρων κανόνα (αλγορίθμου).

(4) Αφού βρεθεί η τιμή του αλγεβρικού αγνώστου, υπολογίζονται οι άγνωστοι αριθμοί του προβλήματος.

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-MONΤΕΡΝΑ ΑΛΓΕΒΡΑ: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α.1

α.

Τὸν ἐπιταχθέντα ἀριθμὸν διελεῖν εἰς δύο ἀριθμοὺς ἐν ὑπεροχῇ τῇ δοθείσῃ.

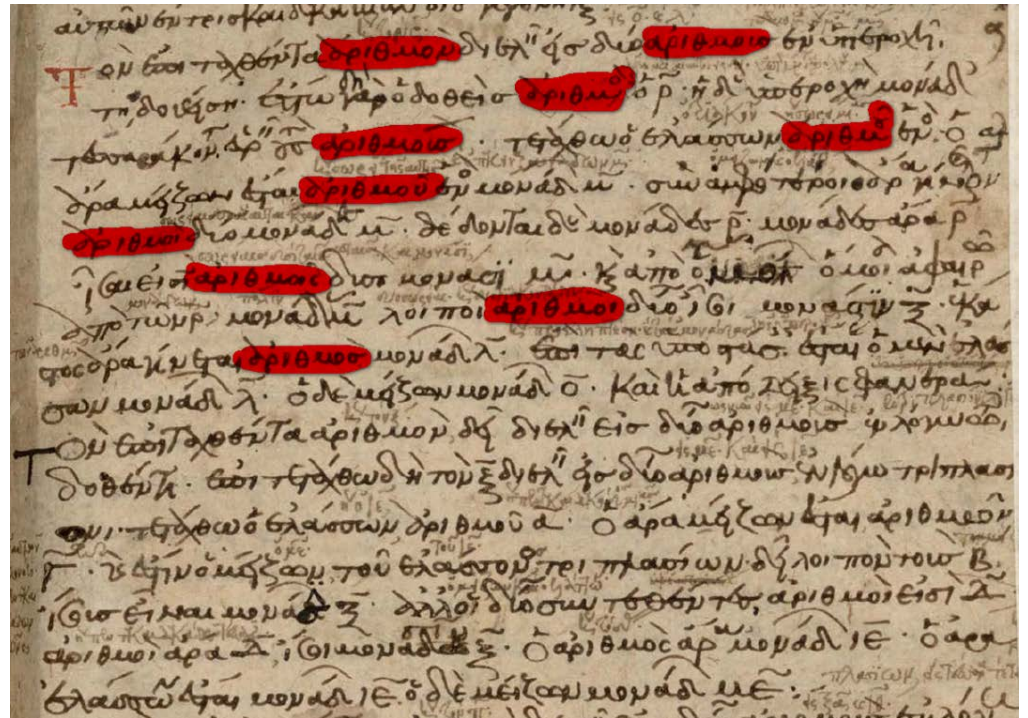
Ἐστω δὴ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ὁ $\bar{\rho}$, ἡ δὲ ὑπεροχὴ $\bar{M}\bar{\mu}$. εὐρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς.

Τετάρτῳ ὁ ἐλάσσων $\bar{\alpha}$. ὁ ἄρα μείζων ἔσται $\bar{\alpha} \bar{M}\bar{\mu}$. συναμφοτέροι ἄρα γίνονται $\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{M}\bar{\mu}$. δέδονται δὲ $\bar{M}\bar{\rho}$.

$\bar{M}$ ἄρα $\bar{\rho}$ ἴσαι εἰσὶν $\bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{M}\bar{\mu}$.

καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. ἀφαιρῶ ἀπὸ τῶν $\bar{\rho}$, $\bar{M}\bar{\mu}$, [καὶ <ἀπὸ> τῶν $\bar{\beta}$ ἀριθμῶν καὶ τῶν $\bar{\mu}$ μονάδων ὁμοίως μονάδας $\bar{\mu}$.] λοιποὶ $\bar{\alpha} \bar{\beta}$ ἴσοι $\bar{M}\bar{\xi}$. ἕκαστος ἄρα γίνε-
ται $\bar{\alpha}$, $\bar{M}\bar{\lambda}$.

ἐπὶ τὰς ὑποστάσεις. ἔσται ὁ μὲν ἐλάσσων $\bar{M}\bar{\lambda}$, ὁ δὲ μείζων $\bar{M}\bar{\sigma}$, καὶ ἡ ἀπόδειξις φανερά.



Να διαιρεθεῖ ἓνας προτεινόμενος ἀριθμός σε δύο ἀριθμούς που ἔχουν δεδομένη διαφορά.

Ἐστω, λοιπόν, ὅτι ὁ δεδομένος ἀριθμός εἶναι ὁ 100 καὶ ἡ διαφορά 40 μονάδες. Να βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Ἐστω ὅτι ὁ μικρότερος ἔχει ὀριστεῖ να εἶναι 1 Ἀριθμός. Ἄρα ὁ μεγαλύτερος θα εἶναι 1 Ἀριθμός, 40 μονάδες. Επομένως καὶ οἱ δύο μαζί γίνονται 2 Ἀριθμοί, 40 μονάδες. Ἀλλὰ ἔχουν δοθεῖ (ὅτι εἶναι) 100 μονάδες. Ἄρα, 100 μονάδες εἶναι ἴσες πρὸς 2 Ἀριθμούς, 40 μονάδες.

Καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. Ἀφαιρῶ ἀπὸ τις 100, 40 μονάδες, καὶ <ἀπὸ> τοὺς 2 Ἀριθμούς καὶ τις 40 μονάδες, ὁμοίως, 40 μονάδες. Απομένουν 2 Ἀριθμοί ἴσοι πρὸς 60 μονάδες. Ἄρα ὁ κάθε Ἀριθμός εἶναι 30 μονάδες.

Στις υποστάσεις: ὁ μικρότερος θα εἶναι 30 μονάδες, ὁ μεγαλύτερος 70 μονάδες, καὶ ἡ ἀπόδειξη εἶναι φανερή.

εκφώνηση του προβλήματος

Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος **αριθμός** σε δύο **αριθμούς** που έχουν δεδομένη διαφορά.
Έστω, λοιπόν, ότι ο δεδομένος **αριθμός** είναι ο 100 και η διαφορά 40 μονάδες. Να βρεθούν οι **αριθμοί**.

κατάστρωση της εξίσωσης

Έστω ότι ο μικρότερος έχει οριστεί να είναι 1 **Αριθμός**. Άρα ο μεγαλύτερος θα είναι 1 **Αριθμός**, 40 μονάδες. Επομένως και οι δύο μαζί γίνονται 2 **Αριθμοί**, 40 μονάδες. Αλλά έχουν δοθεί (ότι είναι) 100 μονάδες. Άρα, 100 μονάδες είναι ίσες προς 2 **Αριθμούς**, 40 μονάδες.

επίλυση της εξίσωσης

Και από ομοίων όμοια. Αφαιρώ από τις 100, 40 μονάδες, και <από> τους 2 **Αριθμούς** και τις 40 μονάδες, ομοίως, 40 μονάδες. Απομένουν 2 **Αριθμοί** ίσοι προς 60 μονάδες. Άρα ο κάθε **Αριθμός** είναι 30 μονάδες.

Στις υποστάσεις: ο μικρότερος θα είναι 30 μονάδες, ο μεγαλύτερος 70 μονάδες, και η απόδειξη είναι φανερή.

απάντηση στο πρόβλημα

Με σύγχρονη γλώσσα

$$\begin{aligned}x + y &= a, \\ x - y &= b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 100, \\ x - y &= 40\end{aligned}$$

$$y := t$$

$$\langle \text{προσθέτω } t \text{ και } 40 \rightarrow t + 40 \rangle$$

$$x := t + 40$$

$$\text{προσθέτω } t \text{ και } t + 40 \rightarrow 2t + 40$$

$$2t + 40 = 100$$

$$t = 30$$

$$y = 30 \quad x = 70$$

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-MONΤΕΡΝΑ ΑΛΓΕΒΡΑ: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.8

Τὸν ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸν $\overline{15}$ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους.

Καὶ τετάχθω ὁ $\alpha^{\circ\circ}$ $\Delta^Y \bar{\alpha}$, ὁ ἄρα ἕτερος ἔσται $\dot{M} \overline{15} \wedge \Delta^Y \bar{\alpha}$. δεήσει ἄρα $\dot{M} \overline{15} \wedge \Delta^Y \bar{\alpha}$ ἴσας εἶναι $\square^{\circ}$.

πλάσσω τὸν $\square^{\circ\circ}$ ἀπὸ $s^{\omega\omega}$ ὅσων δήποτε $\wedge$ τοσούτων M ὅσων ἔστιν ἡ τῶν $\overline{15}$ $\dot{M}$ πλευρά· ἔστω $s \beta \wedge \dot{M} \bar{\delta}$. αὐτὸς ἄρα ὁ $\square^{\circ\circ}$ ἔσται $\Delta^Y \bar{\delta} \dot{M} \overline{15} \wedge s \overline{15}$. ταῦτα ἴσα $\dot{M} \overline{15} \wedge \Delta^Y \bar{\alpha}$. κοινὴ προσκείσθω ἡ λείψις καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὁμοία.

Δ^Y ἄρα $\bar{\epsilon}$ ἴσαι $s \overline{15}$, καὶ γίνεται ὁ $s \overline{15}$ πέμπτων.

ἔσται ὁ μὲν $\overline{\overset{\kappa\epsilon}{\sigma\nu\delta}}$, ὁ δὲ $\overline{\overset{\kappa\epsilon}{\rho\mu\delta}}$, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι $\overline{\overset{\kappa\epsilon}{\nu}}$, ἥτοι $\dot{M} \overline{15}$, καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

Να διαιρεθεῖ ἓνας προτεινόμενος **τετράγωνος** σε δύο **τετραγώνους**.

Ἐστω, λοιπόν, ὅτι ἔχει προταθεῖ να διαιρέσουμε τον 16 σε δύο **τετραγώνους**.

Και ἔστω ὅτι ο πρώτος ἔχει οριστεῖ να εἶναι 1 **Δύναμη**. Ἄρα ο ἄλλος θα εἶναι 16 μονάδες με ἔλλειψη 1 **Δύναμης**. Ἄρα, 16 μονάδες με ἔλλειψη 1 **Δύναμης** θα πρέπει να εἶναι ἴσες προς ἓναν **τετράγωνο**. Σχηματίζω τον **τετράγωνο** ἀπὸ οσουςδήποτε **Αριθμούς** με ἔλλειψη τόσων μονάδων ὡσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων. Ἐστω (ἀπὸ) 2 **Αριθμούς** με ἔλλειψη 4 μονάδων. Ἄρα ο ἴδιος ο **τετράγωνος** θα εἶναι 4 **Δυνάμεις**, 16 μονάδες με ἔλλειψη 16 **Αριθμών**. Αυτά εἶναι ἴσα προς 16 μονάδες με ἔλλειψη 1 **Δύναμης**.

Ας προστεθεῖ αὐτό που λείπει ἀπὸ κοινοῦ και (ας αφαιρεθοῦν) τα ὁμοία ἀπὸ τα ὁμοία. Ἄρα, 5 **Δυνάμεις** εἶναι ἴσες προς 16 **Αριθμούς**, ὁπότε ο **Αριθμός** γίνεται 16 πέμπτα.

Ο ἓνας θα εἶναι 256/25, ο ἄλλος 144/25, και ὅταν προστεθοῦν οἱ δύο γίνονται 400/25, ἥτοι 16 μονάδες, και ο καθένας εἶναι **τετράγωνος**.

Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟ-MONTEPNA ΑΛΓΕΒΡΑ: ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ B.8

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x^2 := t^2$$

$$y^2 := 16 - t^2$$

$$y := 2t - 4$$

$$y^2 \rightarrow 4t^2 + 16 - 16t$$

$$16 - t^2 = 4t^2 + 16 - 16t$$

$$16t = 5t^2$$

$$t = 16/5$$

$$x = 16/5$$

$$y = 12/5$$

ΠΑΡΕΚΒΑΣΗ: Η ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Πρόβλημα Β.8

Αλγεβρογεωμετρική ερμηνεία

Να διαιρεθεί ένας προτεινόμενος τετράγωνος σε δύο τετραγώνους.

Έστω, λοιπόν, ότι έχει προταθεί να διαιρέσουμε τον 16 σε δύο τετραγώνους. Και έστω ότι **ο πρώτος** έχει οριστεί να είναι **1 Δύναμη**. Άρα ο άλλος θα είναι 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης.

Άρα, 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης θα πρέπει να είναι ίσες προς έναν τετράγωνο.

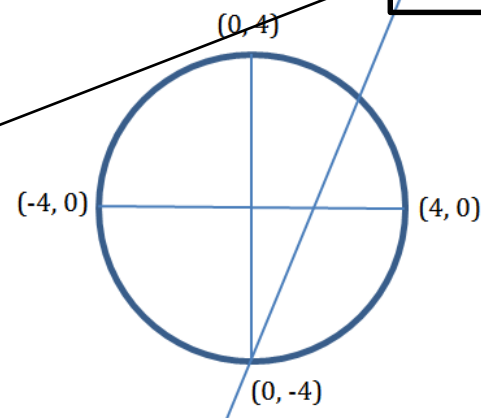
Σχηματίζω **τον τετράγωνο** από οσουςδήποτε Αριθμούς με έλλειψη τόσων μονάδων όσες περιέχει η πλευρά των 16 μονάδων. Έστω (από) **2 Αριθμούς με έλλειψη 4 μονάδων**. Άρα ο ίδιος ο τετράγωνος θα είναι **4 Δυνάμεις, 16 μονάδες με έλλειψη 16 Αριθμών. Αυτά είναι ίσα προς 16 μονάδες με έλλειψη 1 Δύναμης**. Ας προστεθεί αυτό που λείπει από κοινού και (ας αφαιρεθούν) τα όμοια από τα όμοια. Άρα, 5 Δυνάμεις είναι ίσες προς 16 Αριθμούς, οπότε ο Αριθμός γίνεται 16 πέμπτα.

Ο ένας θα είναι 256/25, ο άλλος 144/25, και όταν προστεθούν οι δύο γίνονται 400/25, ήτοι 16 μονάδες, και ο καθένας είναι τετράγωνος.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2t - 4 \end{cases}$$



$$(2t - 4)^2 = 16 - t^2$$

ΠΑΡΕΚΒΑΣΗ: Η ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΔΙΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Trouver trois nombres tels que le carré de chacun d'eux, diminué du nombre qui le suit, forme un carré.

Puisque, si un nombre est, à moins de l'unité, le double d'un nombre, le carré du plus petit nombre, diminué du plus grand nombre, forme un carré, posons que le premier nombre est 1 arithme et 1 unité; Que, de même, le second nombre est 2 arithmes et 1 unité, et que le troisième nombre est 4 arithmes et 1 unité. Il s'établit ainsi que le carré du premier nombre, diminué du second nombre, forme un carré, et que le carré du second nombre, diminué du troisième nombre forme un carré. Reste à avoir que le carré du troisième nombre, diminué du premier nombre, forme aussi un carré. Mais, le carré du troisième nombre, diminué du premier nombre, forme 16 carrés d'arithme et 7 arithmes, lesquels doivent être égaux à un carré. Formons le carré dont la racine est 5 arithmes, et il s'ensuit que **25 carrés d'arithme sont égaux à 16 carrés d'arithme et 7 arithmes**, et l'arithme devient 7/9. Le premier nombre sera 16/9; le second 23/9; et le troisième 37/9, et la proposition est établie.

Comme pour le problème précédent, ces équations définissent une variété V de dimension 3; une méthode analogue conduit d'abord à une hypersurface V' , birationnellement équivalente à V , dans l'espace des coordonnées (z_1, m, n, z_3) : on pose $x = z_1 + m$ et $y = z_2 + n$, d'où $y = 2mz_1 + m^2$, $z_2 = 2mz_1 + m^2 - n$ et $z = 2nz_2 + n^2 = 4mnz_1 + n(2m^2 - n)$, et l'équation de V' s'écrit $16m^2n^2z_1^2 + (16m^3n^2 - 8mn^3 - 1)z_1 + n^2(2m^2 - n)^2 - m = z_3^2$. On peut traiter V' comme dans II.32, en posant $z_3 = 4mnz_1 - p$; on a

$$z_1 = \frac{p^2 - n^2(2m^2 - n)^2 + m}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp}, z_3 = \frac{p - 4mn(p + n(2m^2 - n))^2 + 4m^2n}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp},$$

$$x = \frac{(p + 4m^2n)^2 - n^2(2m^2 + n)^2}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp}, y = \frac{2m((p + 2m^2n)^2 - n^4)}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp},$$

$$z = \frac{4mn(p + n(2m^2 - n))^2 + n(2m^2 + n)}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp},$$

$$z_2 = \frac{2m(p + 2n(m^2 - n))^2 - 2mn^4 + n + m^2}{16m^3n^2 - 8mn^3 - 1 + 8mnp}.$$

Inversement, $m = x - z_1$, $n = y - z_2$ et $p = 4z_1(x - z_1)(y - z_2) - z_3$; la variété de dimension 3 définie par les équations du problème est rationnelle. Diophante choisit $m = n = 1$ de sorte que les formules précédentes deviennent

$$z_1 = \frac{p^2}{8p+7}, z_3 = -p \frac{4p+7}{8p+7}, x = \frac{(p+1)(p+7)}{8p+7}, y = \frac{2(p+1)(p+3)}{8p+7}, z_2 = \frac{2p^2}{8p+7};$$

ces formules définissent une courbe unicursale sur la variété V . On retrouve le paramétrage ci-dessus en posant $p = -\frac{7}{\lambda+4}$; inversement, $\lambda = -4 - \frac{7}{p}$.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β.20

Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε ο τετράγωνος καθενός από τους δύο, αν προσλάβει τον άλλο, να σχηματίζει τετράγωνο.

Έστω ότι ο πρώτος έχει οριστεί να είναι 1 Αριθμός και ο δεύτερος 1 μονάδα, 2 Αριθμοί, [.....]

Αλλά ο τετράγωνος του δεύτερου, όταν προσλάβει τον πρώτο, γίνεται 4 Δυνάμεις, 5 Αριθμοί, 1 μονάδα. Αυτά είναι ίσα προς έναν τετράγωνο. Σχηματίζω τον τετράγωνο από (πλευράς) 2 Αριθμών με έλλειψη 2 μονάδων. Άρα ο ίδιος θα είναι 4 Δυνάμεις, 4 μονάδες με έλλειψη 8 Αριθμών, οπότε ο Αριθμός γίνεται $3/13$.

Ο πρώτος θα είναι $3/13$, ο δεύτερος $19/13$, και ικανοποιούν το πρόβλημα.

$$\begin{cases} (1\text{ος στο τετράγωνο}) + (2\text{ος}) = \square \\ (2\text{ος στο τετράγωνο}) + (1\text{ος}) = \square' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y = \square \\ y^2 + x = \square' \end{cases}$$

Ονόματα	Πράξεις με τα ονόματα	Εξίσωση
$1\text{ος} := 1A$		
$2\text{ος} := 1\mu 2A$		
	Τετραγωνίζω το $1\mu 2A \rightarrow 4\Delta 4A 1\mu$	
	Προσθέτω $1A \rightarrow 4\Delta 5A 1\mu$	
		$4\Delta 5A 1\mu = \square'$
$\sqrt{\square'} := 2A \lambda 2\mu$		
	Τετραγωνίζω το $2A \lambda 2\mu \rightarrow 4\Delta 4\mu \lambda 8A$	
		$4\Delta 5A 1\mu = 4\Delta 4\mu \lambda 8A$

Οι δύο πρώτες ονομασίες έχουν επιλεγεί με μοντέλο την ταυτότητα που θα γράφαμε σήμερα ως $m^2 + (1 + 2m) = (m + 1)^2$, προς την οποία εξομοιώνεται η πρώτη συνθήκη, ενώ η εξίσωση κατασκευάζεται από τη δεύτερη συνθήκη.

Προ-μοντέρνοι αλγεβριστές

- ρ.Michigan 620 (περ. 120 μ.Χ.)
- Διόφαντος (περ. 300 μ.Χ.). Θέων (περ. 375 μ.Χ.) και σχολιαστές Ύστερης Αρχαιότητας και του Βυζαντίου
- Al-Khwārazmī (περ. 830 μ.Χ.) και λοιποί αλγεβριστές στο Κλασικό Ισλάμ (Ibn Turk, Abū Kāmil, al-Karajī, al-Sulamī, al-Khayyām κ.ά.)
- Leonardo Fibonacci (1202: πρώτη έκδοση του *Liber Abbaci*) και αββακιστές του ύστερου Μεσαίωνα (14^{ος}-15^{ος} αι.)
- Ιταλοί αλγεβριστές της Αναγέννησης: Girolamo Cardano, Nicolo Tartaglia, Ludovico Ferrari, Rafael Bombelli κ.ά.
- Ευρωπαίοι μαθηματικοί και ουμανιστές της Αναγέννησης

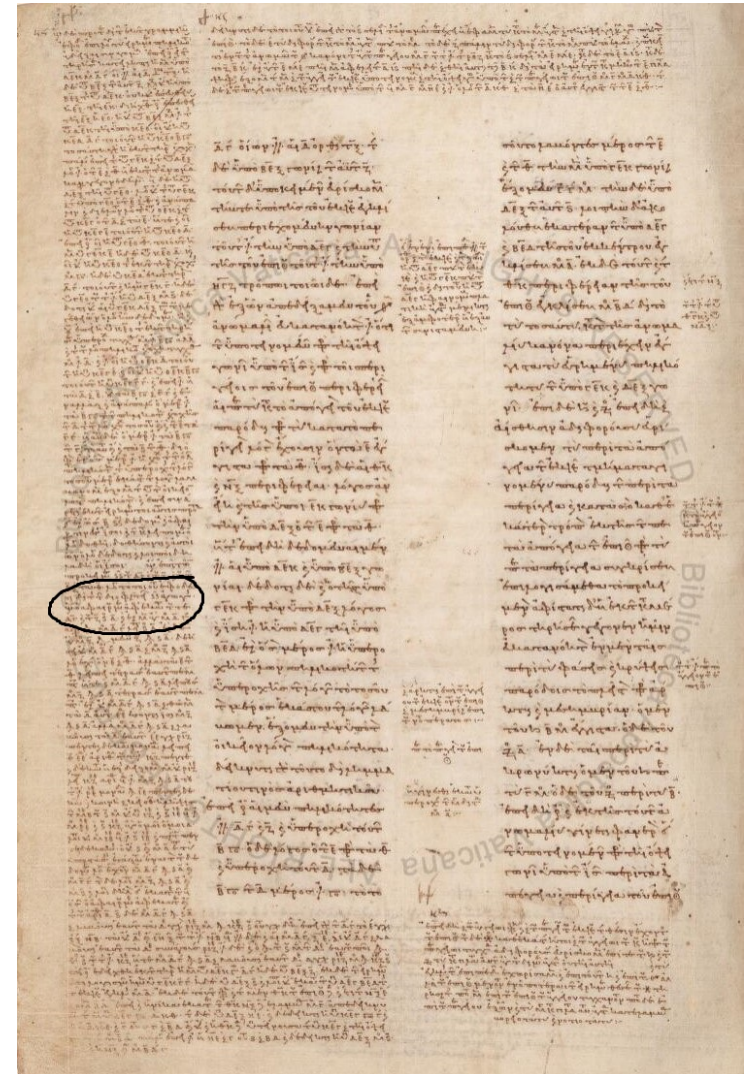
Μοντέρνοι αλγεβριστές

- François Viète (1591: *In artem analyticem Isagoge*)
- Post-Vietan αλγεβριστές: René Descartes, Pierre Fermat, Isaac Newton, Leonhard Euler, Niels Henrik Abel κ.ά.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΜΕΤΑ ΤΟΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟ: ΘΕΩΝ / ΥΠΑΤΙΑ

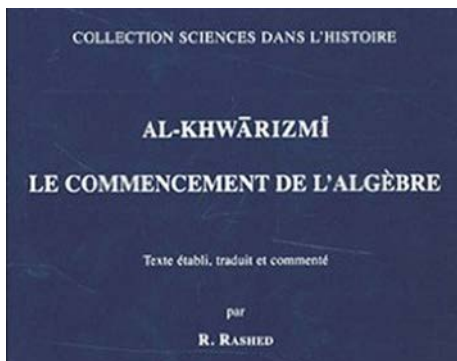


166 Ὑπατία: ἡ Θέωνος τοῦ γεωμέτρου θυγάτηρ, τοῦ Ἀλεξανδρέως φιλοσόφου, καὶ αὐτὴ φιλόσοφος καὶ πολλοῖς γινώριμος· γυνὴ Ἰσιδώρου τοῦ φιλοσόφου. ἤκμασεν ἐπὶ τῆς βασιλείας Ἀρκαδίου. ἔγραψεν ὑπόμνημα εἰς Διόφαντον, τὸν ἀστρονομικὸν Κανόνα, εἰς τὰ Κωνικὰ Ἀπολλωνίου ὑπόμνημα. αὕτη διεσπάσθη παρὰ τῶν Ἀλεξανδρέων, καὶ τὸ



Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΜΕΤΑ ΤΟΝ ΔΙΟΦΑΝΤΟ: ΚΛΑΣΙΚΟ ΙΣΛΑΜ

Η αραβική άλγεβρα **πριν** τη μετάφραση του Qusṭā ibn Lūqā:
al-Khwārazmī (περ. 830) και Abū Kāmil (όψιμος 9^{ος} αι.)

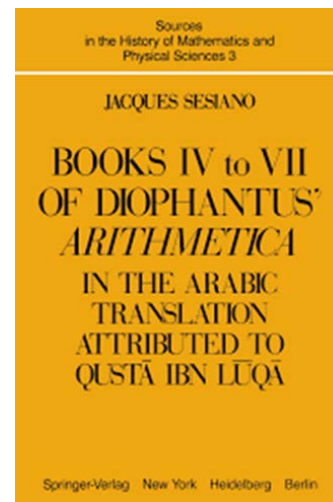


Διόφαντος $\begin{cases} 2^2 + 3^2 = 13 \\ \text{Να διαιρεθεί ο } 13 \text{ σε δύο άλλους } \square \end{cases}$

Abū Kāmil $\begin{cases} 1^2 + 2^2 = 5 \\ \text{Να διαιρεθεί ο } 5 \text{ σε δύο άλλους } \square \end{cases}$



Qusṭā ibn Lūqā:
Μεταφραστής των *Αριθμητικών*



	Karajī	Διόφ.	III.40	B.11	IV.47	Γ.7	V.13	4.15c
	II.45	A.4	III.41	B.12	IV.48	Γ.8	V.14	4.16
al-Khāzin	II.46	A.8	III.42	B.13	IV.49	Γ.9	V.15	4.17
	II.47	A.9	III.43	B.14	IV.50	Γ.10	V.16	4.18
al-Nīsābūrī	II.48	A.10	III.44	B.15	IV.51	Γ.11	V.17	4.19
	II.50	B.22	III.45	B.16	IV.52	Γ.12	V.19	4.20
	III.1	B.20	IV.1	B.22	IV.53	Γ.13	V.20	4.22
‘Alī al-Sulamī	III.2	B.21	IV.2	B.23	IV.54	Γ.14	V.21	4.23
	III.3	B.8*	IV.3	B.24	IV.55	Γ.15	V.22	4.24
Abū l-Wafā’	III.4	B.20*	IV.4	B.25	IV.56	Γ.16	V.28	4.27
	III.7	A.12	IV.5	B.26	IV.57	Γ.17	V.29	4.28
al-Karajī	III.20	A.13	IV.6	B.27	IV.58	Γ.18	V.30	4.29
	III.24	A.16	IV.7	B.28	IV.59	Γ.21	V.31	4.30
al-Zanjānī	III.25	A.17	IV.8	B.29	IV.60	Γ.20	V.32	4.31
	III.26	A.24	IV.9	B.30	IV.61	Γ.19	V.33	4.32
Ibn al-Haytham	III.27	A.25	IV.10	B.31	V.1	4.1	V.34	4.33
	III.28	A.39	IV.11	B.32	V.2	4.2	V.35	4.34
al-Samaw’al	III.29	A.18	IV.12	B.33	V.3	4.3	V.36	4.35
	III.30	A.19	IV.13	B.34	V.4	4.4	V.37	4.36
	III.31	A.20	IV.14	B.35	V.5	4.5	V.38	4.37
Ibn Fallūs	III.32	A.21	IV.40	B.18	V.5	4.6	V.39	4.38
	III.33	A.22*	IV.41	B.19	V.7	4.7	V.40	4.39
Ibn al-Qiftī	III.34	A.22	IV.42	Γ.1	V.8	4.8	V.41	4.40
	III.35	A.23	IV.43	Γ.2	V.9	4.9	V.42	4.41
al-Nūayīrī	III.36	B.8	IV.44	Γ.3	V.10	4.10	V.43	4.20
	III.37	B.9	IV.45	Γ.5	V.11	4.11		
	III.38	B.10	IV.46	Γ.6	V.12	4.14		

Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟΥ ΟΥΜΑΝΙΣΜΟΥ

Χειρόγραφα των *Αριθμητικών* στην Ιταλία τον 15^ο αι.

- **Vat. gr. 304**: αντιγράφηκε το πρώτο μισό του 14^{ου} αι., αποκτήθηκε από την παπική βιβλιοθήκη μετά το 1447, και είναι καταχωρισμένος στον κατάλογο της βιβλιοθήκης του 1455.
- **Vat. gr. 191**: αντιγράφηκε το 1296–98, ανήκε στον ουμανιστή Καρδινάλιο Ισίδωρο της Ρωσσίας και αποκτήθηκε από την παπική βιβλιοθήκη κάποια στιγμή την περίοδο 1464–71. Αναφέρεται στον κατάλογο του 1475.
- **Matrit. 4678**: αντιγράφηκε το δεύτερο μισό του 11^{ου} αι., μεταφέρθηκε στη Μεσσήνη της Σικελίας από τον Κωνσταντίνο Λάσκαρι μετά την άλωση της Κωνσταντινούπολης το 1453.
- **Ambros. Et 157 sup.**, αυτόγραφος του Μάξιμου Πλανούδη, σωζόμενος σε αποσπασματική μορφή, ο οποίος αντιγράφηκε το 1292/1293.
- **Marc. gr. 308**: αντιγράφηκε στα τέλη του 13^{ου} αι., ανήκε στον Καρδινάλιο Βησσαρίωνα. Από τη δωρεά των χειρογράφων του θεμελιώθηκε η Μαρκιανή Βιβλιοθήκη το 1468, και ο κώδικας 308 εμφανίζεται στον αρχικό κατάλογο που συντάχθηκε το ίδιο έτος.

1464: η πρώτη δημόσια μνεία του Διοφάντου στη Δύση



Ο Γερμανός αστρονόμος Regiomontanus (μαθητής του Καρδινάλιου Βησσαρίωνα) έδωσε μια σειρά διαλέξεων στο Πανεπιστήμιο της Πάντοβα για τον Άραβα αστρονόμο al-Faghani, όπου μνημονεύει για πρώτη φορά στη Δύση το έργο του Διόφαντου (από το 1456 ήξερε για τον κώδικα Mar. gr. 308 του Βησσαρίωνα).



«Ο Διόφαντος, όμως, συνέγραψε δεκατρία απaráμιλλης εκλέπτυνσης βιβλία (τα οποία κανένας ως τώρα δεν έχει μεταφράσει στα Λατινικά), στα οποία βρίσκεται ο αληθινός ανθός όλης της αριθμητικής, δηλαδή η τέχνη του rei & census, η οποία σήμερα ονομάζεται με το αραβικό της όνομα, άλγεβρα.



Η διάλεξη του R. δημοσιεύτηκε μόλις το 1537, επομένως οι Ευρωπαίοι μπορούσαν να πληροφορηθούν για τον Διόφαντο από το έτος αυτό και μετά.

Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΑΓΕΝΝΗΣΗΣ



B	Δ	56	A.33	99	B.35	142	Δ.9	195	Δ.36
2	A.1	57	A.34	100	Γ.1	148	Δ.10	196	Δ.37
8	A.2	58	A.35	101	Γ.2	149	Δ.11	197	Δ.38
10	A.4	59	A.37	102	Γ.3	150	Δ.12	200	Δ.39
11	A.5	60	A.39	103	Γ.4	151	Δ.13	201	Δ.40
13	A.6	61	B.8	104	Γ.5	152	Δ.14	202	E.1
14	A.7	62	B.9	105	Γ.6	153	Δ.15	203	E.2
15	A.8	63	B.10	106	Γ.7	158	Δ.16	209	E.3
16	A.9	66	B.11	110	Γ.8	159	Δ.17	210	E.4
18	A.10	67	B.13	111	Γ.9	160	Δ.18	211	E.5
19	A.11	69	B.14	113	Γ.10	161	Δ.19	212	E.6
21	A.12	70	B.15	114	Γ.11	162	Δ.20	213	λμ.1 E.7
26	A.13	72	B.16	116	Γ.12	164	Δ.21	215	λμ.2 E.7
27	A.15	73	B.17	117	Γ.13	167	Δ.22	216	E.7
28	A.16	74	B.19	120	Γ.14	168	Δ.23	217	λμ. E.8
30	A.17	78	B.20	121	Γ.15	169	Δ.24	218	E.8
31	A.18	81	B.21	122	Γ.16	170	Δ.25	219	E.9
35	A.19	83	B.22	123	Γ.17	171	Δ.26	220	E.10
36	A.20	84	B.23	124	Γ.18	172	Δ.27	221	E.11
37	A.21	85	B.24	126	Γ.19	173	Δ.28	222	E.12
41	A.22	86	B.25	127	Γ.20	179	Δ.29	225	E.13
42	A.23	88	B.26	128	Γ.21	180	Δ.30	226	E.14
44	A.25	89	B.27	129	Δ.1	181	Δ.31	232	E.15
49	A.27	90	B.28	133	Δ.2	182	Δ.32	233	E.16
49'	A.28	91	B.29	134	Δ.3	188	Δ.33	234	E.17
50	A.26	92	B.30	136	Δ.4	189	λμ. Δ.34	235	E.18
51	A.29	93	B.31	137	Δ.5	190	Δ.34	236	E.19
53	A.30	96	B.32	138	Δ.6	191	λμ. Δ.35	237	E.20
54	A.31	97	B.33	140	Δ.7	192	Δ.35		
55	A.32	98	B.34	141	Δ.8	194	λμ. Δ.36		

DIOPHANT I
ALEXANDRINI
Rerum Arithmeticarum
Libri sex,
quorū primi duo adiecta habent SCHOLIA,
MAXIMI (ut coniectura est)
PLANVDIS.
Item LIBER DE NVMERIS POLYGONIS
feu Multiangulis.
*Opus incomparabile, uerae Arithmeticae Logisticae perfectio-
nem continens; paucis adhuc usum.*
A GVIL. XYLANDRO Augustano incredibili labore
Latine redditum, & COMMENTARIIS ex-
planatum, inq; lucem editum,
AD
Illustriß. Principē LYD OVICVM Vnirtembergensem.



BASILEAE
PER EVSEBIVM EPISCOPVM,
& NICOLAI Fr. hzredes.
MDLXXV.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primum Græcè & Latine editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, &c.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus HIERONYMI DROVART, viâ Iacobæa,
sub Scuto Solari.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO RECIS.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTVANGVLIS
LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
 & observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.



Excudebat BERNARDVS BOSCH, e Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX. 5

[illegible]

Respondeo quatuor quidem 1.
disiuncte in duos quatuordecim. Ponatur
rursus primi primi 14. N. alterum vero
quatuordecim numerorum cum defectu tot
vitiaturum, quod contra latus disiunctis.
Ubi recte — a. — est, quatuordecim, et
quidem Q. ille vero est, quatuordecim.
Carcere vero strenuam finem aquati
vitiaturibus 16. Igitur Q. 16. — et N. 16.
aquitur vitiaturibus 16. et fit a N. 16. et



- Από τα μέσα του 17^{ου} αι. η προ-μοντέρνα άλγεβρα γίνεται **παρωχημένη**.
- Μαζί και ο Διόφαντος ως αλγεβριστής.
- Αναδύεται η **μοντέρνα άλγεβρα** και η **Θεωρία Αριθμών**.
- Γεννιέται νέο ενδιαφέρον για τον Διόφαντο, όχι πια ως αλγεβριστή αλλά ως αριθμοθεωρητικό.

