ΕΠΙΜΟΡΦΩΤΙΚΗ ΗΜΕΡΙΔΑ
«Καινοτόμες προσεγγίσεις στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών εννοιών»
14 Νοεμβρίου 2024
Ώρα: 12.15

Η ΑΝΑΓΚΑΙΟΤΗΤΑ ΕΝΙΣΧΥΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ.

Κυριαζής Χρήστος
2ο ΓΕΛ Αγίας Βαρβάρας

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σαμπάνη Μαρία
Γυμνάσιο και Λυκειακές τάξεις Αρμενίου

ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ

- Θεωρητικό υπόβαθρο.
- Παραδείγματα που προκαλούν σύγχυση στους μαθητές.
- Χρήσεις συνεπαγωγής και ισοδυναμίας.
- Η αφορμή για τις έρευνες.
- Το ερωτηματολόγιο.
- Οι έρευνες.
- Συμπεράσματα.
- Ενδεικτική βιβλιογραφία.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Συνεπαγωγή ($\Rightarrow$)

Έστω οι προτάσεις p, q.

«Αν ισχύει η p, τότε ισχύει η q»

«Αν ισχύει η p συνεπάγεται η q»

«Η p είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει η q»

«Η q είναι αναγκαία συνθήκη (συνέπεια) όταν ισχύει η p»

«Για να ισχύει η q αρκεί να ισχύει η p»

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ισοδυναμία (⇔)

Έστω οι προτάσεις p, q.

«Ισχύει η p αν, και μόνο αν, ισχύει η q»

«Αν ισχύει η p, τότε ισχύει η q, και αντιστρόφως»

«Αν ισχύει η p τότε, και μόνο τότε, ισχύει η q»

«Η p είναι ικανή συνθήκη και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει η q»

«Η p είναι ισοδύναμη με την πρόταση q»

«Για να ισχύει η p πρέπει και αρκεί να ισχύει η q»

p	q	p ⇔ q
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

Ερώτημα: Διδάσκονται οι μαθητές Μαθηματική Λογική ή έστω κάποια στοιχεία αυτής;

Απάντηση: ΟΧΙ!

Ως εκ τούτου η κατασκευή των ασκήσεων πρέπει να γίνεται με τρόπο, ώστε οι προς απόδειξη συνεπαγωγές ή ισοδυναμίες να εμπλέκουν προτάσεις p, q οι οποίες να είναι και οι δύο αληθείς, διότι υπάρχει σοβαρός κίνδυνος οι μαθητές να μπερδευτούν, να χάσουν χρόνο και κατά συνέπεια να μην αξιολογηθούν σωστά!

Πολλοί «ειδικοί» το συστήνουν ρητά στα βιβλία τους ή στις εργασίες τους: «Στους μαθητές ΔΕΝ δίνουμε ασκήσεις με ψευδείς υποθέσεις».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΣΥΓΧΥΣΗ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $2g(x+y)=g(x-y)+x^2-y^2$ για κάθε $x, y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή.

Θέτοντας y = 0, προκύπτει ότι $g(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$, η οποία δεν είναι σταθερή!

Για τον θεματοδότη για x = y = 0, προκύπτει ότι g(0) = 0, ενώ για x = y, προκύπτει $g(x)=0, x\in\mathbb{R}$!

Τι συμβαίνει; Αν κάποιος ψάξει καλά αυτήν τη συναρτησιακή εξίσωση θα διαπιστώσει ότι δεν έχει λύση, δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση που να την επαληθεύει! Δηλαδή δώσαμε κάποια ψευδή υπόθεση…

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΑΛΟΥΝ ΣΥΓΧΥΣΗ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Θέμα Γ στα ΕΠΑΛ 2024

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε ℃) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: $22,\ 18,\ 20+\kappa,\ 14,\ 16$, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι ίση με $s = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι $\kappa = 10$ (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

Μονάδες 9

Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $\overline{x} = 18 + \frac{\kappa}{5}$ και $s^2 = \frac{4\kappa^2 + 20\kappa + 200}{25}$.

Θέτοντας s = 4 βρίσκουμε ότι κ = 5 ή κ = –10 και ΌΧΙ κ = 10.

Τι θα κάνει ο σκεπτόμενος μαθητής;

Αν το ψάξουμε βαθύτερα, με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz αποδεικνύεται ότι $-\frac{80}{3} \leq \kappa \leq \frac{20}{3}$, δηλαδή αποκλείεται η τιμή κ = 10!

Είναι φανερό πως έχουν δοθεί στους μαθητές ψευδείς υποθέσεις και σύμφωνα με τη Μαθηματική Λογική κάθε απάντηση θα είναι σωστή.

Η ανακοίνωση της ΕΜΕ

Στο Θέμα Γ διαπιστώνουμε αστοχία στη διατύπωση. Ειδικότερα υπάρχει πρόβλημα συμβατότητας μεταξύ των τιμών των δεδομένων και των ζητουμένων. Επισημαίνουμε ότι οι δυνατές τιμές του άγνωστου κ μπορούν να προκύψουν ανεξάρτητα, τόσο από την τυπική απόκλιση, όσο και από τη μέση τιμή που υπολογίζεται με τη βοήθεια του συντελεστή μεταβολής, και δεν συμφωνούν μεταξύ τους.
Προτείνεται να ληφθεί ως σωστή οποιαδήποτε από τις δύο προσεγγίσεις, για να μην αδικηθούν οι υποψήφιοι.

Η ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΤΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

- Δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη σωστή χρήση της ισοδυναμίας και της συνεπαγωγής.
- Η εισαγωγή των συμβόλων γίνεται στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.
- Στις επόμενες τάξεις, η χρήση τους είναι αρκετά περιορισμένη.
- Στις λυμένες εφαρμογές στο Λύκειο γίνεται κάποια χρήση της ισοδυναμίας, αλλά πενιχρή χρήση της συνεπαγωγής (μονοτονία , άρρητες εξισώσεις).
- Έχει παρατηρηθεί η χρήση των συμβόλων αυτών στο Δημοτικό, αλλά και στο Γυμνάσιο, από μαθητές, δασκάλους και καθηγητές!
- Άλλες ειδικότητες καθηγητών χρησιμοποιούν τα σύμβολα αυτά με μηχανικό τρόπο…

Παρόλα αυτά οι μαθητές χρησιμοποιούν εκτενώς τα σύμβολα αυτά, συχνά με λάθος τρόπο.

ΧΡΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ

Η συνεπαγωγή χρησιμοποιείται σε κάθε περίπτωση που θα μπορούσε να υπάρχει κάποια από τις λέξεις:

τότε, **άρα**, **επομένως**, **συνεπώς**, **οπότε** κ.τ.λ.

Για παράδειγμα η έκφραση:
«Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ όπου ο α είναι μικρότερος του β, τότε ο $\alpha\gamma^2$ είναι μικρότερος από τον $\beta\gamma^2$»,
μπορεί να γραφεί ως:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha\gamma^2 \leq \beta\gamma^2$$

ενώ είναι φανερό πως δεν ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma^2 \leq \beta\gamma^2$$

αφού δεν ισχύει το αντίστροφο...

ΧΡΗΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Για τη χρήση της ισοδυναμίας πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί.

Οι πιο χαρακτηριστικές διαδικασίες που απαιτείται η ύπαρξη ισοδυναμιών είναι η επίλυση

εξισώσεων, **ανισώσεων** ή **συστημάτων**.

ΧΡΗΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Για την επίλυση της εξίσωσης $x^2 = x$, η σωστή διαδικασία επίλυσης είναι:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

ενώ είναι λάθος να γράψουμε:

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

ΧΡΗΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Ας μελετήσουμε την ακόλουθη επίλυση της εξίσωσης:

$$\sqrt{x^2+x+1}=x-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow x=0$$

Δουλεύοντας σωστά με τις ισοδυναμίες για την εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}=x-1 \\ \text{και} \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1=(x-1)^2 \\ \text{και} \\ x\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \text{ απορρ.} \\ \text{και} \\ x\ge 1 \end{cases}$$

οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη! Στην ουσία η ισοδυναμία εμπεριέχει την επαλήθευση…

ΧΡΗΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ισοδυναμία απαιτείται και για την επίλυση ενός συστήματος. Για παράδειγμα είναι λάθος να γράψουμε:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+x+1} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{x^2+x+1} \\ y=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

αφού το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ το σωστό είναι:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^2+x+1} \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{x^2+x+1} \\ y=x-1 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,\ \text{απορρ.} \\ y=x-1 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

ΧΡΗΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Ένας λανθασμένος τρόπος λύσης επίλυσης ανίσωσης είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

ενώ είναι ορθό να γράψουμε:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \leq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 2$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ισοδυναμίες είναι απαραίτητες όταν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση με τη μέθοδο της ισοδυναμίας.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

Είναι σωστό να γράψουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, ενώ είναι λάθος να γράψουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική, αφού η συνεπαγωγή που χρησιμοποιούμε δεν επιτρέπει να γυρίσουμε πίσω!

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΑΡΚΕΙ

Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο του «αρκεί», η οποία δεν αναφέρεται καθόλου στα σχολικά βιβλία.

Συγκεκριμένα, μπορούμε να πούμε ότι για να ισχύει η σχέση

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

αρκεί να ισχύει η

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$$

η οποία ισχύει επομένως και η αρχική.

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- Οι ορισμοί πρέπει να διατυπώνονται με τις λιγότερες δυνατές πληροφορίες.
- Ως εκ τούτου, η χρήση ισοδυναμιών είναι απαραίτητη, εκτός και αν οι δοθείσες πληροφορίες επαρκούν για τη χρήση συνεπαγωγής.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΤΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

«Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο σύνολο Α.

Η f λέγεται άρτια στο Α αν και μόνο αν ισχύουν οι:

για κάθε $x \in A$ το $-x \in A$ και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(-x) = f(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

«Έστω η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο διάστημα Δ. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ».

ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ ΚΑΙ «ΠΕΡΙΕΡΓΑ» ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η λανθασμένη χρήση της ισοδυναμίας μπορεί να οδηγήσει σε εντελώς στρεβλά αποτελέσματα.

Για παράδειγμα, αν έχουμε ότι οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
τότε είναι ίσοι αφού ισχύει:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow 2\alpha = 2\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \beta - \alpha \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$$

Το λάθος για κάποιο έμπειρο μάτι βρίσκεται στην τρίτη ισοδυναμία.

Η ΑΦΟΡΜΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΡΕΥΝΑ…

Θέμα Β2ii των πανελλαδικών του 2023

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x},\ x>0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$$

Μια λύση μαθητών:

$$\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\Rightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Rightarrow f(\pi)<f(e)\Rightarrow\pi>e,$$ που ισχύει.

ΟΙ ΕΡΕΥΝΕΣ

39 σχολεία από όλη την Ελλάδα (Αττική, Ωραιόκαστρο, Λιβαδειά, Ρόδος, Λεπτοκαρυά, Λιτόχωρο, Κατερίνη, Αριδαία, Λάρισα κ.τ.λ.).

3 Α.Ε.Ι από όλη την Ελλάδα.

Πρωτοετείς φοιτητές Α.Ε.Ι.	**103 φοιτητές**
Μαθητές Γ΄ Λυκείου (θετικού ή οικονομικού προσανατολισμού)	822 μαθητές

2ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ	ΚΑΚΑΒΑΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ	33
7ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ	ΠΕΤΡΟΥΛΑΚΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	20
ΓΕΛ ΑΡΜΕΝΙΟΥ	ΣΑΜΠΑΝΗ ΜΑΡΙΑ	3
2ο ΓΕΛ ΑΓ. ΒΑΡΒΑΡΑΣ	ΚΥΡΙΑΖΗΣ ΧΡΗΣΤΟΣ	21
6ο ΓΕΛ ΙΛΙΟΥ	ΠΑΠΟΥΤΣΑΚΗ ΧΡΙΣΤΙΝΑ	40
	ΣΠΥΡΙΔΑΚΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ	
	ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	
10ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ	ΣΗΦΑΚΗΣ ΜΑΝΩΛΗΣ	29
	ΝΑΣΤΑΤΟΣ ΣΠΥΡΟΣ	
	ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΓΙΑΝΝΗΣ	

ΕΥΑΓΓΕΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΝΕΑΣ ΣΜΥΡΝΗΣ	ΤΖΕΛΕΠΗΣ ΑΛΚΙΒΙΑΔΗΣ	21
	ΓΙΑΚΟΥΜΑΚΗ ΟΛΓΑ	
ΓΕΛ ΩΡΑΙΟΚΑΣΤΡΟΥ	ΤΑΞΙΔΟΥ ΕΛΕΝΗ	52
	ΤΣΙΜΠΕΡΙΔΗΣ ΜΑΤΘΑΙΟΣ	
	ΚΑΤΡΙΒΑΝΟΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ	
2ο ΓΕΛ ΒΟΥΛΑΣ	ΜΙΧΑΗΛΙΔΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ	32
	ΚΑΛΙΑΚΟΥΔΑΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ	
1ο ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ	ΠΑΠΑΓΓΕΛΗΣ ΝΙΚΟΣ	32
	ΝΤΑΡΑΔΗΜΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ	
	ΤΖΑΚΑ ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ	

1ο ΓΕΛ ΧΑΪΔΑΡΙΟΥ	ΚΑΡΤΕΛΙΑΣ ΓΙΩΡΓΟΣ	27
	ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ	
3ο ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ	ΠΡΕΝΤΑΚΗΣ ΠΑΝΤΕΛΗΣ	23
ΓΕΛ ΑΡΙΔΑΙΑΣ	ΚΟΣΟΓΛΟΥ ΙΟΡΔΑΝΗΣ	13
2ο ΓΕΛ ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗΣ	ΡΑΜΑΝΤΑΝΗΣ ΒΑΓΓΕΛΗΣ	11
14ο ΓΕΛ ΠΕΡΙΣΤΕΡΙΟΥ	ΜΙΧΑΗΛΟΓΛΟΥ ΣΤΕΛΙΟΣ	32
	ΠΑΤΣΙΜΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ	
	ΜΠΛΙΑΣ ΑΓΓΕΛΟΣ	
5ο ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ	ΚΩΝΣΤΑΝΤΕΛΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ	17

1ο ΛΥΚΕΙΟ ΡΟΔΟΥ	ΜΑΛΛΙΑΚΑΣ ΚΩΣΤΑΣ	43
	ΡΙΖΟΥΛΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΣ	
	ΣΤΑΜΑΤΙΑΔΗΣ ΠΟΘΗΤΟΣ	
4ο ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ	ΛΑΤΙΦΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ	30
	ΖΑΠΠΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ	

1ο ΓΕΛ ΑΙΓΑΛΕΩ	ΦΑΝΕΛΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ	35
	ΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ ΑΘΑΝΑΣΙΑ	
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΡΑΠΤΟΥ	ΓΡΙΒΑΣ ΖΗΣΗΣ	38
14ο ΓΕΛ ΛΑΡΙΣΑΣ	ΤΣΑΒΕΣ ΚΩΣΤΑΣ	39
1ο ΓΕΛ ΑΓΙΑΣ ΒΑΡΒΑΡΑΣ	ΑΡΒΑΝΑΚΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ	27
	ΓΙΑΝΝΟΥΛΟΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ	
2ο ΓΕΛ ΧΑΪΔΑΡΙΟΥ	ΓΚΟΥΝΑΣ ΜΑΡΚΟΣ	
	ΣΤΑΜΠΟΥΛΙΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ	30
ΓΕΛ ΛΕΠΤΟΚΑΡΥΑΣ	ΦΑΡΑΣΑΛΗ ΣΟΦΙΑ	12
ΓΕΛ ΛΙΤΟΧΩΡΟΥ	ΜΠΑΚΑΡΟΥ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑ	24

1ο ΓΕΛ ΚΑΤΕΡΙΝΗΣ	ΚΑΡΑΒΙΔΑ ΞΑΝΘΙΠΠΗ	17
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΜΠΑΚΟΓΙΑΝΝΗ	ΜΠΑΚΟΓΙΑΝΝΗΣ ΚΩΝ/ΝΟΣ	15
5ο ΓΕΛ ΛΑΡΙΣΑΣ	ΡΟΙΔΟΥΛΗΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ	25
ΓΕΛ Ν.ΠΕΡΑΜΟΥ	ΜΠΕΝΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ	38
ΓΕΛ ΚΕΡΑΤΕΑΣ	ΠΑΠΑΒΛΑΧΟΣ ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ	9
ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΛ ΑΓΙΩΝ ΑΝΑΡΓΥΡΩΝ	ΣΠΑΘΗΣ ΜΑΡΙΟΣ	34
	ΜΠΑΚΕΤΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ	
	ΣΟΥΚΑΡΑΣ ΕΥΘΥΜΙΟΣ	

Ερωτηματολόγιο

Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις, συμπληρώνοντας τον πίνακα:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

1. $x^2 = x \Rightarrow x = 1$.

2. $x = 0 \Rightarrow x^2 = x$.

3. $x^2 = x \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

4. $x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.

5. $x^2 < 1 \Rightarrow x < 1$.

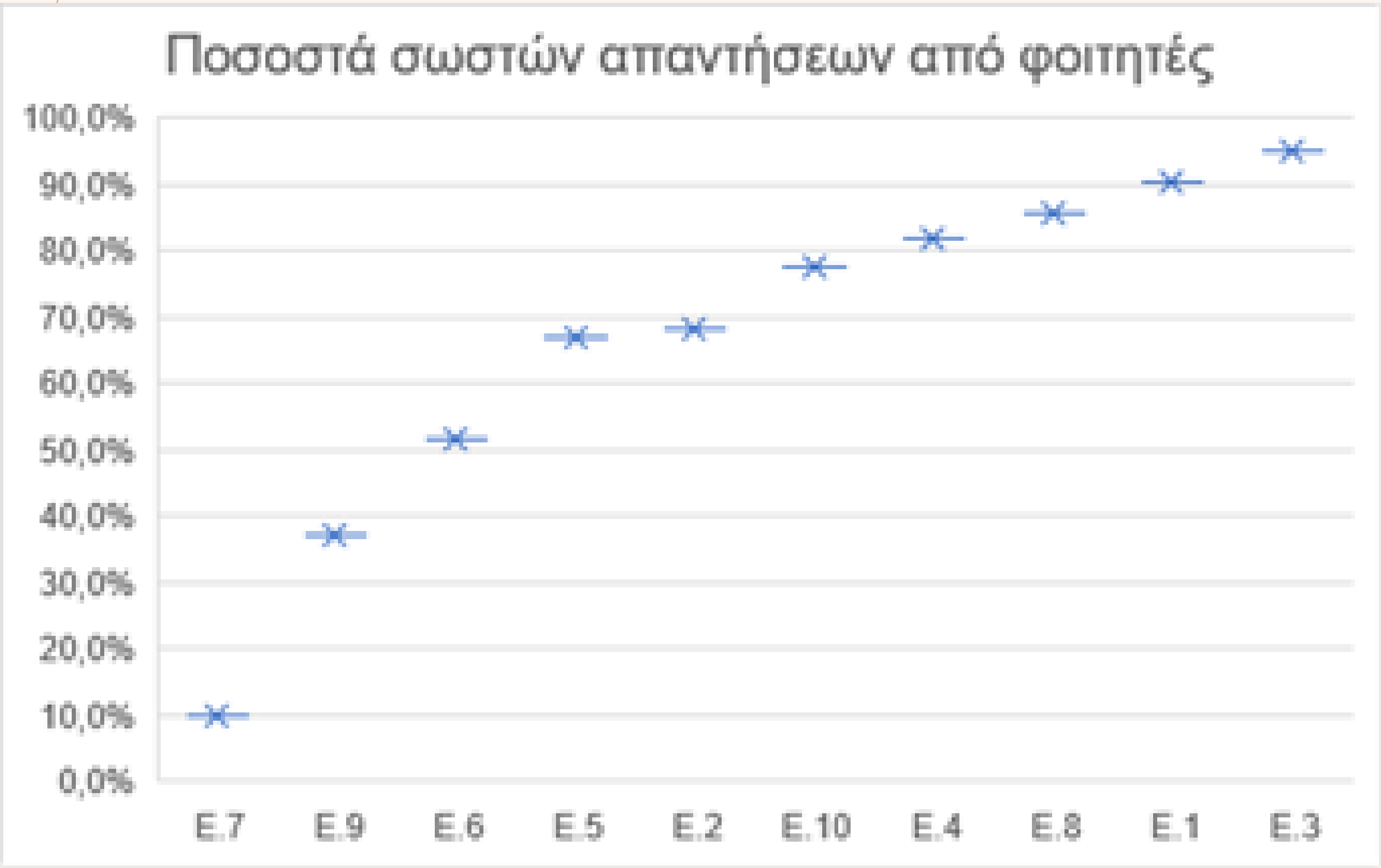
6. $\sqrt{x^2+x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

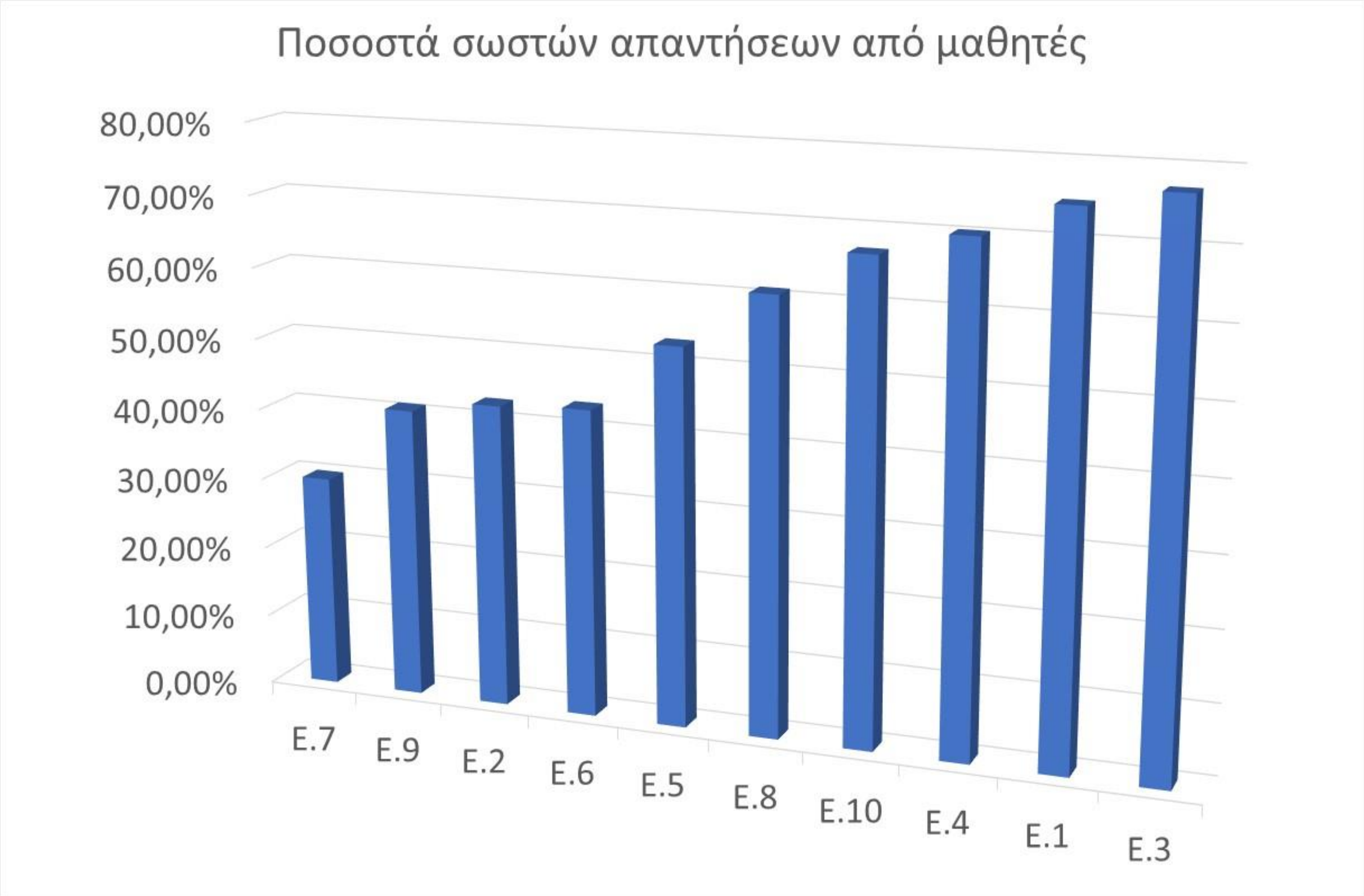
7. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y + x - y = 2 + 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1,$
οπότε η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (1, 1)$.

8. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + x - y = 2 + 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$.

9. $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0$.

10. $\dfrac{x+1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) < 0$.


Ποσοστά σωστών απαντήσεων από φοιτητές
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
E.7
E.9
E.6
E.5
E.2
E.10
E.4
E.8
E.1
E.3


Ποσοστά σωστών απαντήσεων από μαθητές
80,00%
70,00%
60,00%
50,00%
40,00%
30,00%
20,00%
10,00%
0,00%
E.7
E.9
E.2
E.6
E.5
E.8
E.10
E.4
E.1
E.3

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- Δεν τυγχάνουν της βαρύτητας που τους αναλογεί.
- Δάσκαλοι και καθηγητές Μαθηματικών εισάγουν τα σύμβολα αυτά νωρίτερα από όταν πρέπει.
- Καθηγητές άλλων ειδικοτήτων τα χρησιμοποιούν για ευκολία.
- Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα σύμβολα με τρόπο μηχανικό και συχνά λανθασμένο.
- Αυτό δεν μπορεί να είναι καθοριστικά αρνητικός βαθμολογικός παράγοντας για τους μαθητές.
- Στα σχολικά βιβλία δεν χρησιμοποιούνται επαρκώς.
- Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών δεν παρέχονται ικανοποιητικές διευκρινήσεις.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Stewart I. & Tall D. (2020). *Τα θεμέλια των Μαθηματικών*. Odysseus Publishing.

Αγγελής Σ. Α. & Μπλέρης Λ. Γ (2003). *Διακριτά Μαθηματικά*. Εκδόσεις Τζιόλα.

Καρκάνης Β. & Σαράφης Ι. (2023). *Πανελλαδικές 2023: Παρουσίαση χαρακτηριστικών λαθών των μαθητών και δυσκολίες στη βαθμολόγηση των γραπτών τους*. Πρακτικά 34ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, σελ. 354 – 364.

Κυριακόπουλος Κ. Α. (2020). *Χρήσιμες επισημάνσεις στα Μαθηματικά.* Εκδόσεις Ζανταρίδης – Τηλέγραφος.


Thank You
For Your
Attention


Ερωτήσεις
Απαντήσεις