Επιμορφωτική Ημερίδα

Καινοτόμες προσεγγίσεις στη διδασκαλία και μάθηση μαθηματικών εννοιών

6ο & 8ο ΓΕΛ Περιστερίου

Πέμπτη 14 Νοεμβρίου 2024

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Δρ Γιώργος Κόσυβας, Σ. Ε.
Μαθηματικών Β΄ Αθήνας**

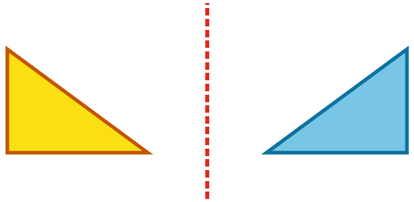
Ισομετρικοί Μετασχηματισμοί

- Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί περιγράφουν την κίνηση δισδιάστατων σχημάτων στο επίπεδο, με την οποία ένα αρχικό αντικείμενο αλλάζει **με ανάκλαση, ολίσθηση ή στροφή.**
- Η διαδικασία αυτή "μετασχηματίζει" κάθε σημείο του αρχικού σχήματος σε ένα σημείο του τελικού σχήματος. **Το τελικό σχήμα λέγεται και εικόνα του αρχικού.**
- Οι μετασχηματισμοί που μελετούμε στη Β΄ Γυμνασίου αναφέρονται σε επίπεδα γεωμετρικά σχήματα **που διατηρούν τη μορφή και το μέγεθός τους.** Τέτοιοι μετασχηματισμοί ονομάζονται **ισομετρίες**. Στις ισομετρίες το αρχικό σχήμα και η εικόνα του είναι συμπτώσιμα.

Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί (ΓΜ) ισομετριών

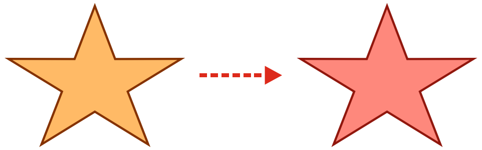
Κινήσεις γεωμετρικών σχημάτων στο επίπεδο. Διαδικασία με την οποία αλλάζει η θέση (και πιθανώς ο προσανατολισμός) του σχήματος.

α) Ανάκλαση



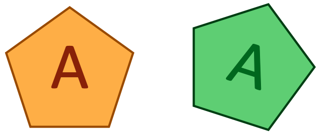
Συμμετρία ως προς άξονα.

β) Μεταφορά



Αλλαγή θέσης, σε ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση

γ) Στροφή



Περιστροφή ως προς σημείο δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα κατά γωνία.

Η ανάκλαση δεν διατηρεί τον προσανατολισμό των γωνιών. Η ιδιότητα αυτή την καθιστά μη επίπεδη μετακίνηση σε αντίθεση με τη στροφή και τη μεταφορά οι οποίες, είναι μετακινήσεις στο επίπεδο.

Ιστορική επισκόπηση της Γεωμετρίας Μετασχηματισμών

- **René Descartes(1596-1650):** Συνέβαλε στην Αναλυτική Γεωμετρία. Χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Σε κάθε σημείο μιας καμπύλης δίνονται δύο αριθμοί που παριστάνουν τη θέση του στο επίπεδο.

- **Felix Klein (1849-1925):** Συνέδεσε αλγεβρικές ιδέες με γεωμετρικά σχήματα. Μελέτη της θεωρίας ομάδων στη γεωμετρία.

Οι ΓΜ και το πρόγραμμα Enlanger

- Το πρόγραμμα Erlangen, που προτάθηκε από τον Felix Klein το 1872, **είναι μια περιγραφή της Γεωμετρίας ως το σύνολο των ιδιοτήτων των σχημάτων που διατηρούνται αμετάβλητες μέσω των ομάδων μετασχηματισμών.**
- Πριν από το πρόγραμμα αυτό η Γεωμετρία ήταν απλώς διερεύνηση σημείων, γραμμών και επιπέδων **με βάση την απαγωγική λογική και την τυπική απόδειξη.** Το εν λόγω πρόγραμμα εισήγαγε την ενοποίηση της Ευκλείδειας, της Προβολικής και των Μη Ευκλείδειων Γεωμετριών κάτω από ένα κοινό πλαίσιο.
- Παρά την αλλαγή αυτή η απόδειξη παραμένει κεντρικό στοιχείο της ΓΜ. Η θεωρητική προσέγγιση Erlangen αποτελεί **έναν από τους σημαντικότερους σταθμούς στην ιστορία των Μαθηματικών**, εξακολουθεί να διαμορφώνει την έρευνα σε διάφορους τομείς και να επηρεάζει τη μαθηματική εκπαίδευση ακόμα και σήμερα (Meserve, 1955; Birkhoff & Bennett, 1988; Willson, 1977).

Οι ΓΜ των ισομετριών στο Γυμνάσιο μπορούν να προσεγγιστούν με δύο τρόπους:

- **Ως κίνηση γεωμετρικών σχημάτων**: Το ίδιο σχήμα μετακινείται και αλλάζει θέση στο επίπεδο ως ενιαίο όλον. Το αρχικό σχήμα και η εικόνα του είναι το ίδιο σχήμα σε άλλη θέση. Συμπλέει με τη διαίσθησή μας.
- **Ως αντιστοίχιση**: Σε κάθε σημείο ενός αρχικού σχήματος στο επίπεδο αντιστοιχίζεται ένα μοναδικό σημείο ενός άλλου σχήματος το οποίο ονομάζεται εικόνα του. Μπορεί να υποστηρίξει συνδέσεις και γενικεύσεις αλγεβρικής μορφής.
- Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί μέχρι το τέλος του Γυμνασίου έχουν βαρύνουσα σημασία στην ανάπτυξη προχωρημένων μαθηματικών εννοιών όπως **Αναλυτική Γεωμετρία, άλγεβρα πινάκων, ομάδες και συναρτήσεις** (Guven, 2012; Hollebrands, 2003).
- Σε πιο αυστηρό πλαίσιο ο ΓΜ ισομετρίας μπορεί να οριστεί **ως συνάρτηση ένα προς ένα και επί η οποία απεικονίζει σημεία του επιπέδου στο επίπεδο.**

Οι ισομετρικοί ΓΜ έχουν βαρύνουσα σημασία στη διδασκαλία και τη μάθηση της Γεωμετρίας

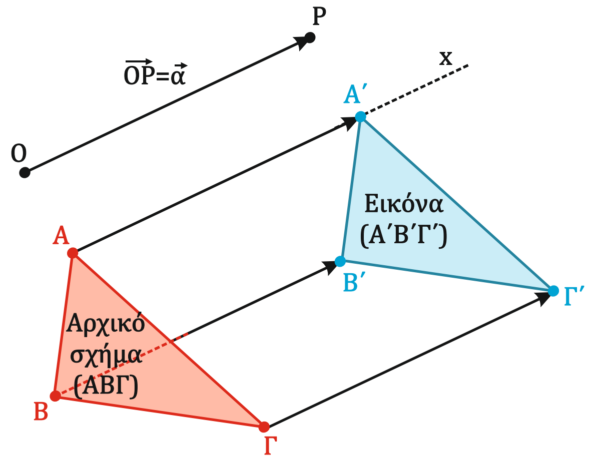
- Υποστηρίζουν τη χωρική **οπτικοποίηση, τη χωρική ικανότητα και τον χωρικό συλλογισμό** (Battista, 2007).
- Παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να σκέπτονται μαθηματικές έννοιες όπως **ισότητα, συμμετρία και συναρτήσεις**, να επιχειρηματολογούν πάνω σε αυτές, να αιτιολογούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, να αλληλοσυνδέουν πολλαπλές αναπαραστάσεις και να αναπτύσσουν ικανότητες υψηλής γνωστικής βαρύτητας (Hollebrands, 2003).

Η μεταφορά στα ΠΜΑ του νέου ΠΣ Μαθηματικών Γυμνασίου

- *Να αναγνωρίζουν μετασχηματισμούς μεταφοράς και να καθορίζουν τα στοιχεία και τα χαρακτηριστικά τους.*
- *Να διερευνούν και να εντοπίζουν τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτα από έναν μετασχηματισμό μεταφοράς.*
- *Να αξιοποιούν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφοράς κατά διάνυσμα στον σχεδιασμό σχημάτων και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων τους.*
- *Να σχεδιάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ενός σχήματος κατά διάνυσμα χρησιμοποιώντας μία ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.*

Μεταφορά είναι αλλαγή θέσης: προσδιορίζεται από την κατεύθυνση και την απόσταση

- **Ορισμός:** Η παράλληλη μεταφορά, ή απλώς μεταφορά είναι ένας ΓΜ που μετατοπίζει ένα αρχικό σχήμα **σε άλλη θέση, σε ορισμένη απόσταση και κατεύθυνση από την αρχική του θέση**, τα οποία είναι τα συστατικά στοιχεία του διανύσματος.
- **Ιδιότητες:** Η μεταφορά διατηρεί τη μορφή και το μέγεθος του αρχικού σχήματος. Οι αποστάσεις και οι γωνίες παραμένουν ίδιες.



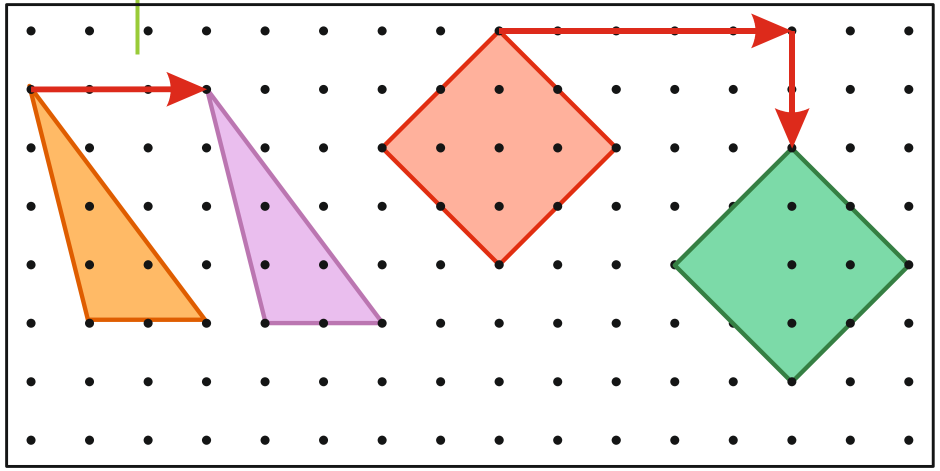
Η κατανόηση της γεωμετρικής μεταφοράς στο Γυμνάσιο

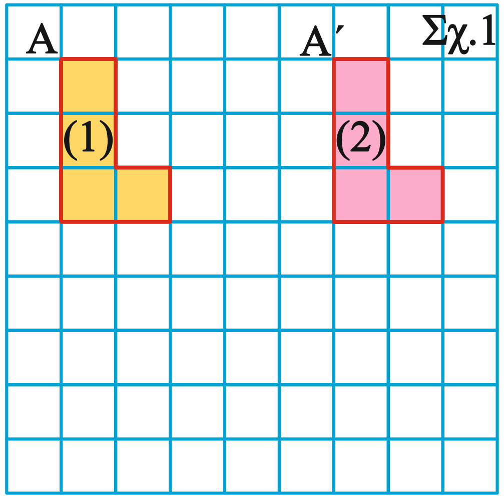
- Σύμφωνα με τα ευρήματα οι μαθητές αντιλαμβάνονται **τη μεταφορά ως κίνηση και την περιγράφουν συχνά ως ενέργεια ολίσθησης.** Η αρχική αντίληψη των μαθητών βασίζεται στη φυσική μεταφορική κίνηση ενός γεωμετρικού σχήματος που μετατοπίζεται σε νέες θέσεις παρά ως αντιστοίχιση σημείων (π.χ. συνάρτηση, μετασχηματισμός ισομετρίας) (Hollebrands, 2003; Flores & Yanik, 2016).
- Σύμφωνα με την έρευνα οι πρότερες νοητικές παραστάσεις που έχουν οι μαθητές για τον ΓΜ της μεταφοράς **διαφέρουν από τον επίσημο ορισμό.** Επιπλέον, η έλλειψη κατάλληλων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε παρανοήσεις που εμποδίζουν την εννοιολογική κατανόηση (Tall & Vinner, 1981; Yanik, 2011).

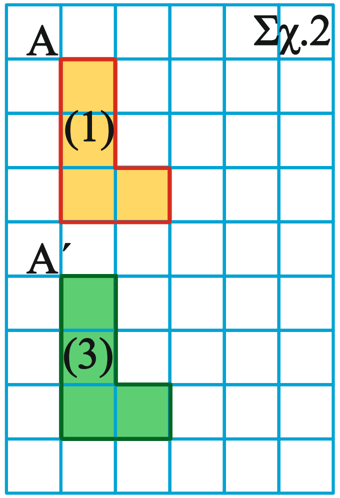
Τρία στάδια σκέψης για τη μεταφορά ως κίνηση

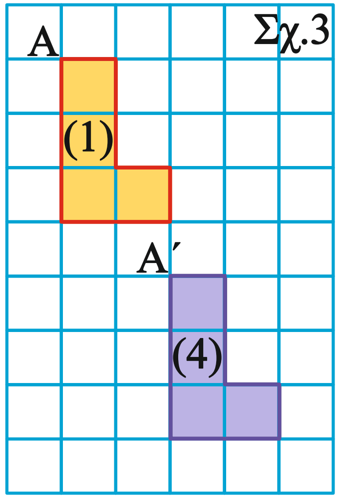
- **Στο πρώτο στάδιο** οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη μεταφορά **ως κίνηση φυσικών αντικειμένων** (π. χ. μετακίνηση ενός μολυβιού ή ενός τραπεζιού) χωρίς να προσδιορίζουν την κατεύθυνση της κίνησης και την απόσταση.
- **Στο δεύτερο στάδιο**, οι μαθητές σκέφτονται την κίνηση και προσδιορίζουν **μία από τις δύο παραμέτρους**, είτε την κατεύθυνση είτε την απόσταση, αλλά όχι και τις δύο.
- **Στο τρίτο στάδιο** οι μαθητές σκέφτονται την κίνηση **τόσο ως προς την κατεύθυνση όσο και ως προς την απόσταση.** Σε αυτό το επίπεδο, οι μεταφορές περιγράφονται μέσω **διανυσμάτων** (Yanik, 2014; Hollebrands, 2003).

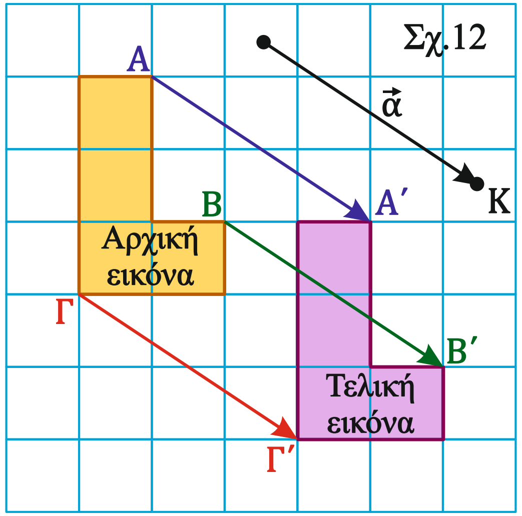
Δυσκολίες στις μετακινήσεις

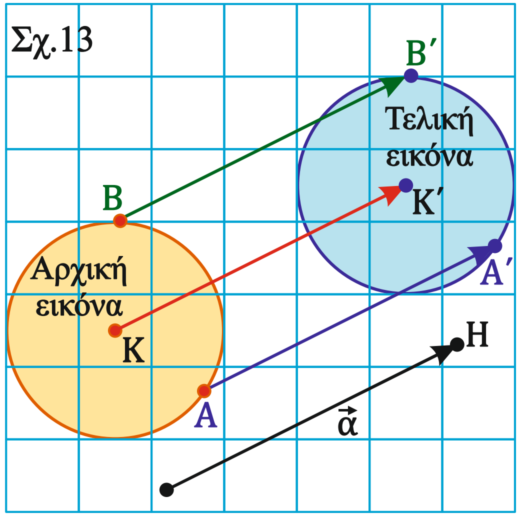












- Προβαίνουν ευκολότερα σε οριζόντιες και κατακόρυφες μεταφορές παρά σε πλάγιες.
- Οι κυκλικές μετακινήσεις έχουν δυσκολίες στην κατασκευή τους.

Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας (ΛΔΓ)

- **Ορισμός Δυναμικής Γεωμετρίας (ΛΔΓ):** Χρήση ΛΔΓ στη διαδραστική κατασκευή και τον μετασχηματισμό γεωμετρικών σχημάτων.
- **Παραδείγματα λογισμικών:** GeoGebra, Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad.
- **Οφέλη για την εκμάθηση των ΛΔΓ:** Προσφέρει δυνατότητες άμεσης οπτικοποίησης και επεξεργασίας σχημάτων.

Το (ΛΔΓ) παρέχει ένα αλληλεπιδραστικό μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές μπορούν να κατασκευάζουν γεωμετρικά σχήματα, να ανακαλύπτουν σχήματα με αναλλοίωτες ιδιότητες της γεωμετρικής μεταφοράς, να διατυπώνουν και να ελέγχουν εικασίες και να κάνουν γενικεύσεις. Σύμφωνα με τους ερευνητές, ένα περιβάλλον με δυναμικές αναπαραστάσεις παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές **να διερευνήσουν ιδιότητες και σχέσεις και να αναπτύξουν πιο δομική κατανόηση της γεωμετρικής μεταφοράς που βασίζεται στις αντιστοιχίσεις στο επίπεδο** (Hollebrands, 2003; Flores & Yanik, 2016).

Μεταφορά με χειραπτικά και ψηφιακά μέσα

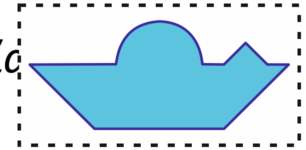
- Προτείνουμε ενδεικτικά έργα διερεύνησης. Η επιλογή αυτών βασίζεται στην έρευνα για την ανάπτυξη της κατανόησης των μαθητών σε τεχνολογικά και μη περιβάλλοντα (Hollebrands, 2003; Yanik, 2014).
- **Ενδεικτικά χειραπτικά μέσα:** πατρόν, διαφανές χαρτί, διάστικτος καμβάς, τετραγωνισμένο χαρτί, γεωμετρικά όργανα, καρτεσιανό σύστημα.
- Γνώμονας για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών στον ΓΜ της μεταφοράς είναι η **Θεωρία των διδακτικών καταστάσεων του Brousseau με έμφαση σε διαδικασίες δράσης** οι οποίες θα οδηγήσουν σε διαδικασίες διατύπωσης, επικύρωσης και της θεσμοποίησης (Brousseau, 1998; Back, et al, 2024).

Μαθηματικά Έργα δια διερεύνηση

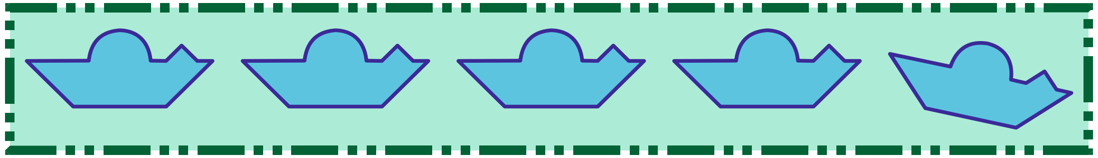
- Μαθηματικό έργο 1. Χειραπτική μετακίνηση εικόνων (αφόρμηση).
- Μαθηματικό έργο 2. Παραδείγματα και αντιπαραδείγματα μεταφοράς
- Μαθηματικό έργο 3. Ελεύθερη διερεύνηση με λογισμικό και χειραπτικό υλικό στον τετραγωνικό καμβά.
- Μαθηματικό έργο 4: Ελεύθερη κίνηση του σπιτιού
- Μαθηματικό έργο 5: Κίνηση του σπιτιού υπό προϋποθέσεις
- Μαθηματικό έργο 6: Δεσμευμένη κίνηση του σπιτιού
- Μαθηματικό έργο 7: Τρία σε ένα
- Μαθηματικό έργο 8: Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί
- Μαθηματικό έργο 9: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς στον κόσμο των ανακλάσεων.
- Μαθηματικό έργο 10: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς ως αντιστοίχιση
- Μαθηματικό έργο 11ο: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς ως μεταφορά του R^2 στο R^2
- Μαθηματικό έργο 12: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς ως εργαλείο πλακόστρωσης
- Μαθηματικό έργο 13: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς ως αποδεικτικό εργαλείο

ΜΕ 1. Χειραπτική μετακίνηση εικόνων

Α. *Να κόψετε σχήματα σύμφωνα με τα σημεία του περιγράμματος. Να τοποθετήσετε ίδιες εικόνες τη μία άλλη για να σχηματίσετε «στολίδια κορδέλας».*



α) *Να περιγράψετε τις διαδοχικές μετακινήσεις για το καραβάκι.*



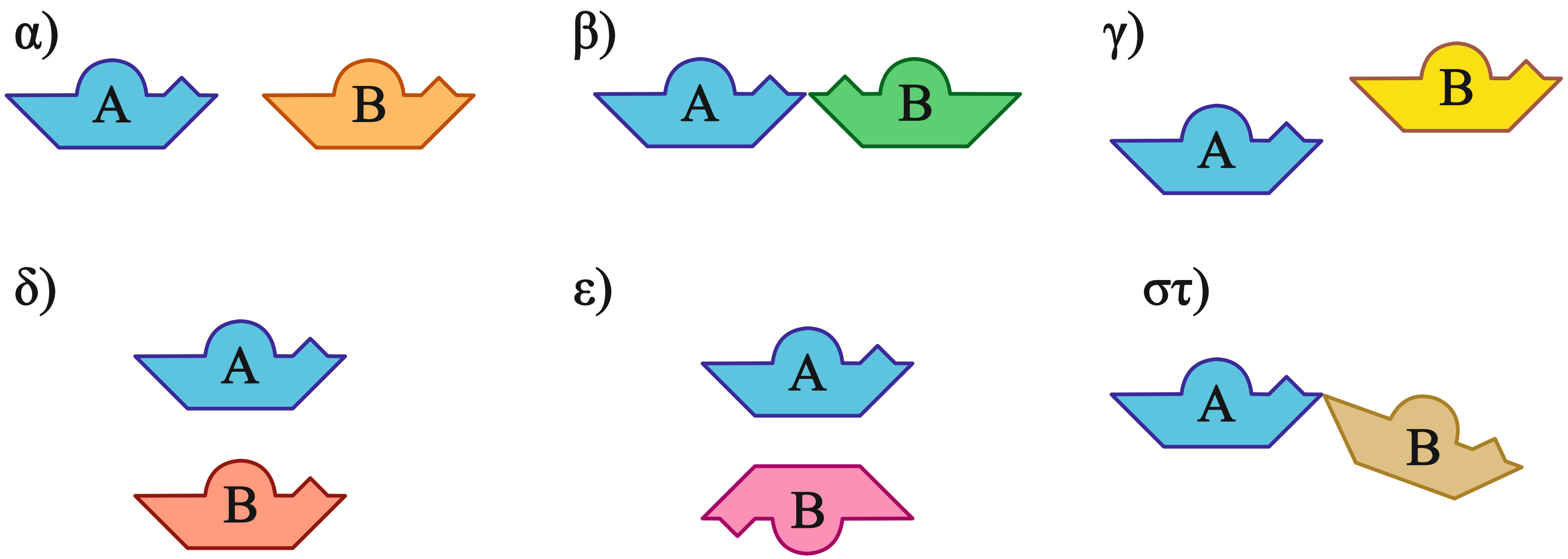
β) *Τι διαπιστώνετε για το τελευταίο καραβάκι δεξιά.*

γ) *Να δημιουργήσετε τα δικά σας «στολίδια κορδέλας» με μεταφορά.*

Για το πρώτο έργο οι μαθητές μπορούν να μιλήσουν για κίνηση πάνω στη διεύθυνση μιας ευθείας και με φορά προς τα δεξιά, για καραβάκια που ολισθαίνουν ή πλέουν σε ίσες αποστάσεις, για παράλληλη μεταφορά, για το τελευταίο καραβάκι δεξιά που έστριψε και είναι έτοιμο να βουλιάξει, κ.λπ. Μπορούν επίσης με «πατρόν» και χαρτοκοπτική να δημιουργήσουν δικά τους «στολίδια κορδέλας». Η διδακτική προσέγγιση περιλαμβάνει δράση των μαθητών (χειρισμός αντικειμένων), προφορική επικοινωνία (παρατηρήσεις, περιγραφή ενεργειών) και στοιχεία αφαίρεσης (συλλογισμός, επικύρωση).

ΜΕ 2. διάκριση μετασχηματισμών

Να εξηγήσετε ποια ζεύγη σχημάτων απεικονίζουν μεταφορά και ποια όχι.



Το έργο υλοποιείται χειραπτικά. Οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν άτυπη γλώσσα για να εξηγήσουν ποια ζεύγη σχημάτων απεικονίζουν μεταφορά και ποια όχι. Με βάση τις περιγραφές τους, ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν ακριβέστερη μαθηματική γλώσσα.

ΜΕ5: Κίνηση του σπιτιού υπό προϋποθέσεις

https://www.geogebra.org/m/qred7p2k

Ενεργοποιούμε τα ίχνη των σημείων και ζητούμε από τους μαθητές με τη χρήση του ποντικιού (κλικ στο εσωτερικό του σπιτιού και σύρσιμο) να μετακινήσουν το σπιτάκι σε διάφορες κατευθύνσεις οριζόντια, κάθετα, πλάγια,… και να συζητήσουν τι παρατηρούν. Στην εικόνα φαίνεται ένα στιγμιότυπο από την προσπάθεια κίνησης του σπιτιού οριζόντια.

Πιθανές απαντήσεις των μαθητών:

Μ1: Οι γραμμές πάνε ευθεία.

Μ2: Οι γραμμές φαίνεται να είναι παράλληλες

.

ΜΕ6: Δεσμευμένη κίνηση του σπιτιού

https://www.geogebra.org/m/bc7tm9sb

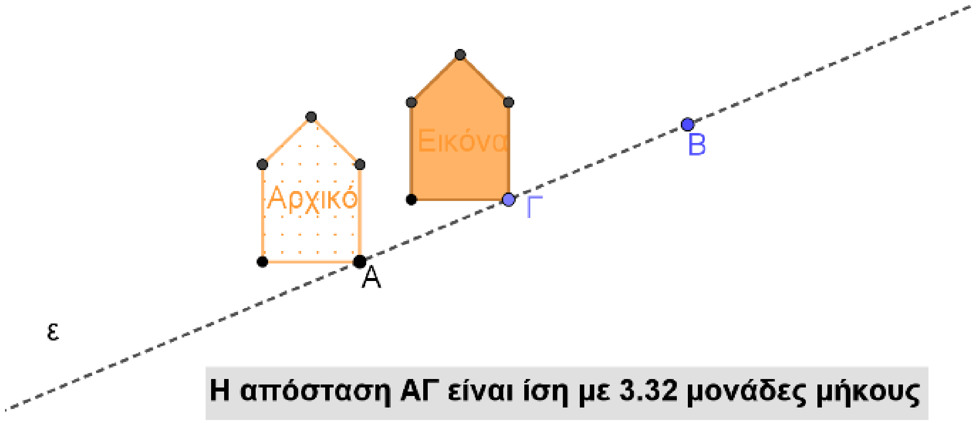
Οι μαθητές καλούνται με τη χρήση του ποντικιού (κλικ στο εσωτερικό του σπιτιού-Εικόνα και σύρσιμο) να μετακινήσουν το σπιτάκι με ολίσθηση πάνω στην ευθεία ΑΒ σε διάφορες κατευθύνσεις οριζόντια, κάθετα, πλάγια,…ώστε η απόσταση ΑΓ να είναι ίση με 4 μονάδες μέτρησης. Για παράδειγμα στην εικόνα φαίνεται ένα στιγμιότυπο από την προσπάθεια κίνησης του σπιτιού πλάγια με ΑΓ=3.32 μ.μ. Η μεταβολή της διεύθυνσης ολίσθησης πραγματοποιείται με την αλλαγή θέσης του σημείου Β.

Πιθανές απαντήσεις των μαθητών:

Μ1: Προς τα πού να κινήσουμε το σπίτι.

Μ2: Το βρήκα εδώ είναι.

Μ3: Δύο σπίτια απέχουν 4 μ.μ.



Αυτό το μαθηματικό έργο επιτρέπει να αναδειχθούν: ο άξονας μεταφορικής συμμετρίας (διεύθυνση), προς τα πού θα κινήσουμε την εικόνα (φορά) και πόσο μακριά θα απομακρυνθεί η εικόνα (μέτρο).

.

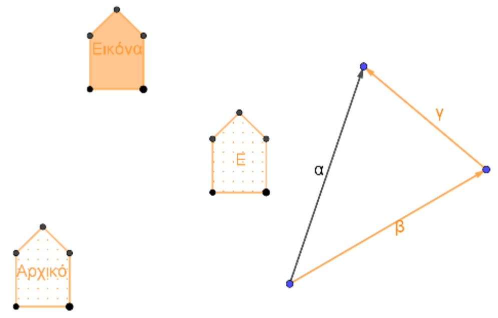
ΜΕ8: Ισοδύναμοι μετασχηματισμοί

https://www.geogebra.org/m/zegnxtkd

Οι μαθητές καλούνται να επινοήσουν δύο διανύσματα **β** και **γ** ώστε αν εφαρμόσουν έναν μετασχηματισμό μεταφοράς στο αρχικό σχήμα με διάνυσμα **β** και μετασχηματισμό μεταφοράς στην εικόνα **Ε** του προηγούμενου μετασχηματισμού κατά διάνυσμα **γ** και να προκύψει η εικόνα του μετασχηματισμού μεταφοράς του αρχικού σχήματος κατά διάνυσμα **α**. Ένα στιγμιότυπο φαίνεται στην εικόνα.

Το περιβάλλον αυτό επιτρέπει να θέσουμε ερωτήσεις του τύπου:

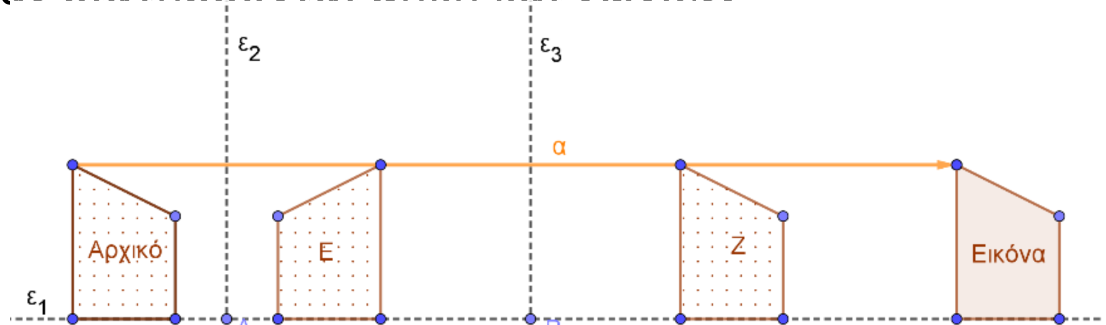
- Να επινοήσετε δύο διανύσματα **β** και **γ** κάθετα μεταξύ τους.
- Να επινοήσετε δύο διανύσματα ώστε με τον πρώτο μετασχηματισμό να μετακινηθεί το αρχικό σπιτάκι κατά διάνυσμα **β** με οριζόντια διεύθυνση και στη συνέχεια το σπιτάκι **Ε** κατά διάνυσμα **γ** με κατακόρυφη διεύθυνση έτσι ώστε: **Τ(α)= Τ(β).Τ(γ)**.



Μαθηματικό έργο 9: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς στον κόσμο των ανακλάσεων.

https://www.geogebra.org/m/pjhcrfff

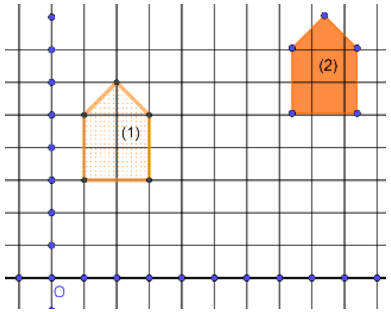
Το περιβάλλον αυτό επιτρέπει στους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά νοήματα σε σχέση με τα γεωμετρικά στοιχεία που παραμένουν αναλλοίωτα κατά τον γεωμετρικό μετασχηματισμό της μεταφοράς στο αρχικό σχήμα και στην εικόνα του-*Ιδιότητες του Μετασχηματισμού μεταφοράς*. Για τον σκοπό αυτό δημιουργήθηκε ψηφιακό αρχείο μετασχηματισμού μεταφοράς του αρχικού σχήματος κατά διάνυσμα **α** καθώς και δύο ανακλάσεων με άξονες συμμετρίας $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ αντίστοιχα. Οι μαθητές καλούνται να μετακινήσουν κατάλληλα με τα σημεία Α και Β τους άξονες $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ αντίστοιχα ώστε $\mathbf{T(\alpha)=T(\varepsilon_1)\circ T(\varepsilon_2)}$, δηλαδή το σχήμα Ζ να ταυτιστεί με το σχήμα *Εικόνα*. Γνωρίζοντας από την Πρώτη Τάξη ότι το αρχικό σχήμα και η εικόνα του κατά τη διαδικασία ανάκλασης διατηρούν να μήκη τους καθώς και τις γωνίες τους μπορούν αν συμπεράνουν αντίστοιχα ότι κατά τον μετασχηματισμό μεταφοράς διατηρούνται μήκη και γωνίες.



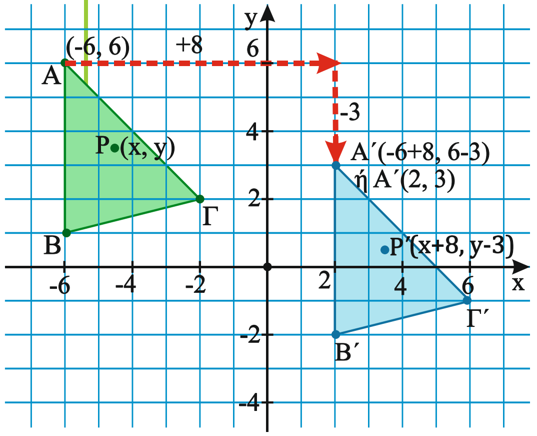
ΜΕ 11ο: Ο μετασχηματισμός μεταφοράς ως μεταφορά του R^2 στο R^2

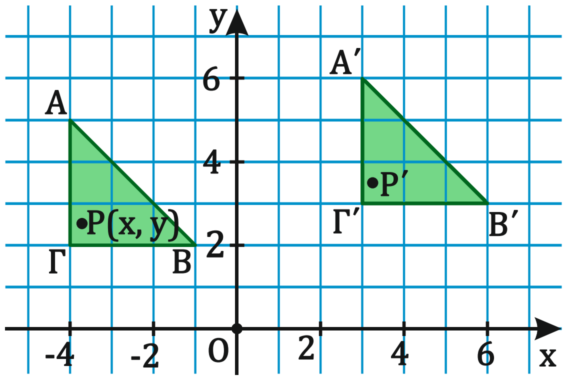
https://www.geogebra.org/m/ndvruuea

Μπορούμε να αντιληφθούμε τον μετασχηματισμό μεταφοράς ως μετακίνηση ολόκληρου του επιπέδου. Μετακινώντας κατάλληλα το σημείο Ο μετακινείται ολόκληρο το επίπεδο με σκοπό το σχήμα (1) να ταυτιστεί με το σχήμα 2.



Η μεταφορά στο Καρτεσιανό επίπεδο





Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(–6, 6), Β(–6, 1) και Γ(–2, 2). Θέλουμε να κάνουμε παράλληλη μεταφορά του τριγώνου ΑΒΓ **κατά 8 μονάδες οριζόντια δεξιά και κατά 3 μονάδες κατακόρυφα κάτω**. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η μετατόπιση της κορυφής Α(–6, 6) στην Α΄(2, 3). Με τον ίδιο τρόπο γίνεται η μεταφορά των κορυφών Β και Γ. Ανάλογα, όλα τα σημεία του ΑΒΓ μπορούν να μετατοπιστούν κατά 8 μονάδες δεξιά και 3 μονάδες κάτω και να σχηματίσουν την τελική εικόνα Α΄Β΄Γ΄. Η εικόνα ενός τυχόντος σημείου P(x, y) του τριγώνου είναι **P΄(x + 8, y – 3).** Διαβάζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών της εικόνας από το σχήμα: Α΄(2, 3), Β΄(2, –2) και Γ΄(6, –1). Το τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσο με το ΑΒΓ. Οι αντίστοιχες πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες, δηλαδή:

$$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'},\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B'\Gamma'},\ \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{A'\Gamma'}\ \text{και}\qquad \hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{A}}',\ \hat{\mathrm{B}}=\hat{\mathrm{B}}',\ \hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$$

Στον μετασχηματισμό μεταφοράς στο καρτεσιανό επίπεδο αν το αρχικό σημείο P(x, y) μεταφέρεται κατά **α** μονάδες οριζόντια και κατά **β** μονάδες κάθετα, τότε η εικόνα του είναι το σημείο $\mathrm{P}'(x+\alpha,\ y+\beta)$.

Πώς λειτουργεί η μεταφορά στο περιβάλλον Δυναμικής Γεωμετρίας

Βήματα μεταφοράς ενός σχήματος:

- Επιλογή του σχήματος.
- Προσδιορισμός κατεύθυνσης και απόστασης (διανύσματος).
- Εφαρμογή της μεταφοράς με χρήση εργαλείων του λογισμικού.
- *Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (GeoGebra), μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αυξήσουν το επίπεδο της προσοχής, να ενισχύσουν τα κίνητρα συμμετοχής και να κατανοήσουν καλύτερα την έννοια της μεταφοράς μέσω αλληλεπίδρασης με τα γεωμετρικά σχήματα, καθώς και να διαμορφώσει και να αναδιαμορφώσει τη μαθηματική γνώση.*

Οφέλη της μεταφοράς στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

- Οπτικοποίηση και κατανόηση εννοιών.
- Ανάπτυξη κριτικής σκέψης και μαθηματικού συλλογισμού.
- Ενεργός συμμετοχή και αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών μέσω διερεύνησης των γεωμετρικών εννοιών και πειραματισμού.
- Ενίσχυση της φαντασίας και της δημιουργικότητας.

Συζήτηση-συμπεράσματα

- Η προσέγγιση της έννοιας της γεωμετρικής μεταφοράς γίνεται με κίνηση και αντιστοίχιση ή συνάρτηση. Η ολιστική μετατόπιση ενός σχήματος καθιστά προφανή την ισότητα του αρχικού σχήματος και της εικόνας του. Δεν συμβαίνει το ίδιο κατά τη γεωμετρική μετατόπιση της αντιστοιχίας σημείων του επιπέδου.
- Αυτή η **διπλή προσέγγιση** είναι μία ενδιαφέρουσα πηγή συζήτησης που επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν ιδιότητες των ΓΜ χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις εμπλουτίζοντας την κατανόηση των μαθητών. **Η σύνδεση των δύο προσεγγίσεων είναι πρόκληση για του μαθητές.**
- Η δράση πάνω στο ψηφιακό και χειραπτικό υλικό, η προφορική επικοινωνία, η διατύπωση καθώς και η επικύρωση της γνώσης ήταν οι βασικές διαστάσεις της διαχείρισης.
- Στη συνέχεια εστιάσαμε στο μετασχηματισμό μεταφοράς ως εργαλείο έκφρασης καθώς και ως αποδεικτικό εργαλείο.

Ο ρόλος του εκπαιδευτικού αλλάζει

- Τα μαθηματικά έργα που σχολιάσαμε είναι ενδεικτικά για την προσέγγιση του γεωμετρικού μετασχηματισμού της μεταφοράς. Δεν αποτελούν ετοιμοπαράδοτο υλικό για τη διδακτική πρακτική. Είναι αρχικό υλικό που επιτρέπει **την τροποποίηση και την προσαρμογή σύμφωνα με τις διδακτικές ανάγκες.**
- Αλληλεπιδρά με τους εκπαιδευόμενους, προωθώντας την απόκτηση της γνώσης και την εφαρμογή της. Συνεργάζεται με τους συναδέλφους του σε κοινότητες που προωθούν τη μάθηση και την πρακτική.
- Επιλέγει πρόσφορα ψηφιακά μέσα και εργαλεία, προσαρμόζει και δημιουργεί μεθόδους και υλικό και δημιουργεί ευκαιρίες, διερεύνησης και πειραματισμού, αιτιολόγησης και ανταλλαγής επιχειρημάτων.

Βιβλιογραφία

Back, A., Bontems, A., Erdrich, N. Wach, N. (2024). Activités pour enseigner les translations au collège, *Repères IREM*, *134*, 33-54.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Information Age Publishing.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.

Flores, A., & Yanik, H. B. (2016). Geometric Translations: An Interactive Approach Based on Students' Concept Images. *North American GeoGebra Journal*, *5*(1).

Guven, B. (2012). Using dynamic geometry software to improve eight grade students' understanding of transformation geometry. *Australasian Journal of Educational Technology*, *28*(2).

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(1), 55-72.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151-169.

Yanik, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(2), 231–260.

Yanik, H. B. (2014). Middle-school student's concept images of geometric translations. *Journal of Mathematical Behavior*, *36*(1), 33-50.