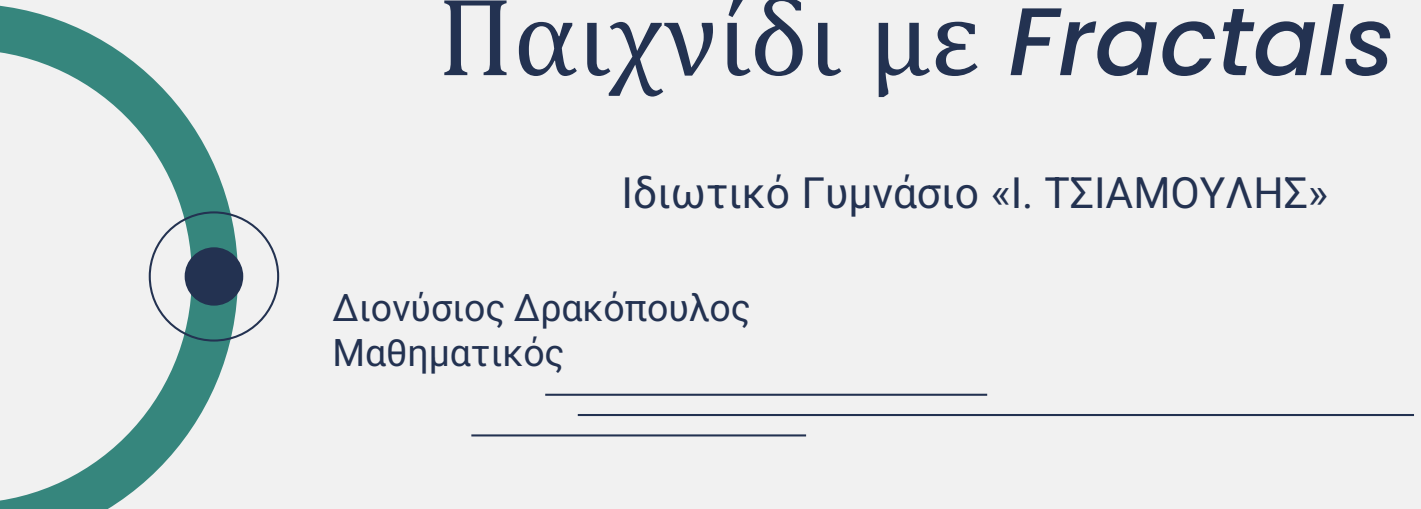




ΌΜΙΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

Παιχνίδι με *Fractals*

Ιδιωτικό Γυμνάσιο «Ι. ΤΣΙΑΜΟΥΛΗΣ»



Διονύσιος Δρακόπουλος
Μαθηματικός



ΟΜΙΛΟΣ 2023-2024

Γνωστικά Πεδία ανακάλυψης

Μορφοκλάσματα

Τρίγωνο Sierpinski
Σύνολο Mandelbrot

Μοτίβα Μοντελοποίηση

Τρίγωνο Pascal
Ακολουθία Fibonacci
Τετράγωνοι αριθμοί

Μαθηματικά & Τέχνη

Προβολική Γεωμετρία
Προοπτική
Σημείο Φυγής

Διακριτά Μαθηματικά

Θεωρία Γράφων

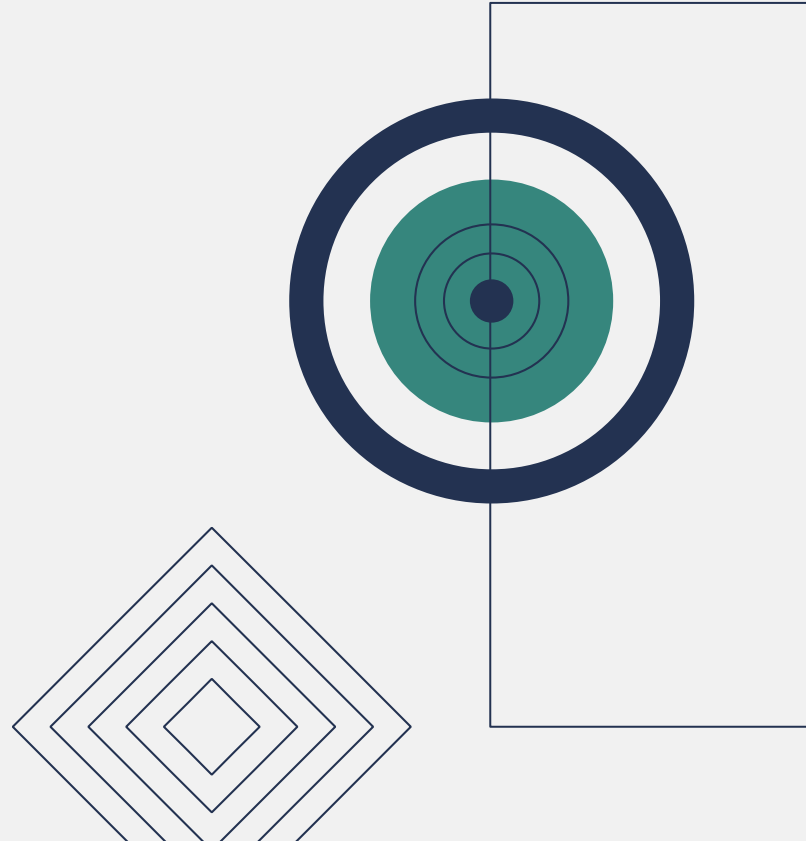


Εισαγωγή στα *Fractals* και τη διάστασή τους

Φράκταλ (fractal) ή μορφόκλασμα: ως έννοια καλύπτει ένα ευρύ φάσμα γεωμετρικών μορφών με ποικίλες ιδιότητες. Με βάση τον ορισμό του Μπενουά Μάντελμπροτ φέρει ιδιότητες όπως η αυτοομοιότητα, κλασματική διάσταση και σύνθετη σε δομή σε οποιαδήποτε κλίμακα

Μορφοκλασματική Διάσταση

Ένδειξη του πως ένα φράκταλ μέσα από μεγέθυνση σε πιο λεπτομερείς κλίμακες καλύπτει τον χώρο



Διδακτικοί στόχοι

📍 Κατανόηση των **Fractals**

Εισαγωγή στην έννοια των *Fractals*
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, αυτοομοιότητα και συμμετρία

📍 Εφαρμογή της ΕΠανάληψης

Έννοια της επαναληπτικής διαδικασίας (iteration) και η σημασία της στα *Fractals*

📍 Διερεύνηση της Μορφοκλασματικής Διάστασης

Εισαγωγή στην έννοια της μορφοκλασματικής διάστασης και πώς αυτή διαφέρει από την ευκλείδεια διάσταση.

📍 Αλγόριθμοι, αναδρομικές σχέσεις

Αναδρομικές σχέσεις, Γεωμετρική πρόοδος $Z_n = Z_{n-1}^2$, $Z_n = Z_{n-1}^2 + C$, $E_n = \frac{3}{4}E_{n-1}$



Μαθησιακά Εργαλεία

- Τεχνολογικά Μέσα

- ✓ Υπολογιστές
- ✓ Τάμπλετ
- ✓ Διαδραστικός Πίνακας

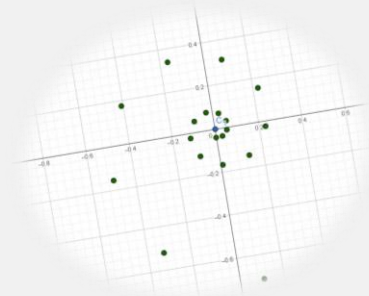
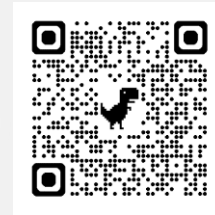
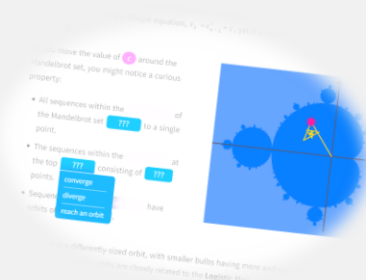
- Φύλλο εργασίας

- Χειραπτικά Μέσα

- ✓ Μαρκadόροι
- ✓ Μπουκάλια ανακύκλωσης, κόλλα
- ✓ Γεωμετρικά όργανα

- Διαδραστικές εφαρμογές

- ✓ Geogebra
- ✓ Mathigon (διαδραστικό ψηφιακό περιβάλλον)



<https://mathigon.org/course/fractals/mandelbrot>

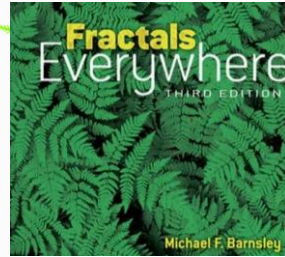


Δραστηριότητα 1

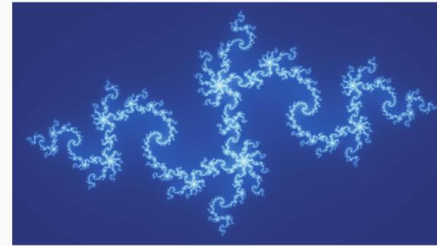


ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ FRACTALS

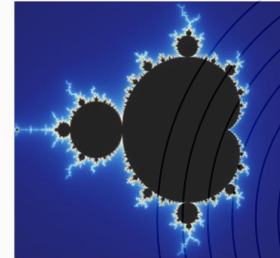
- Σύνδεση με Φύση-Βιολογία
- Παρατήρηση ιδιοτήτων
- ✓ Συμμετρίας και
- ✓ Αυτοομοιότητας
- ✓ Ανακάλυψη μοτίβων.



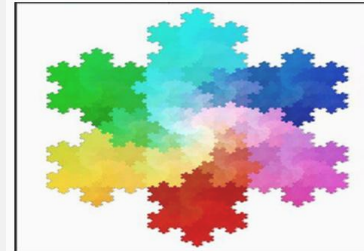
Julia set



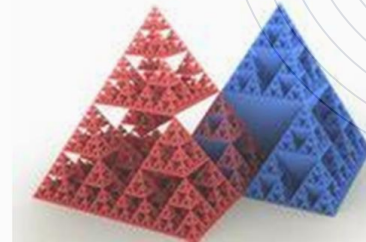
Mandelbrot set



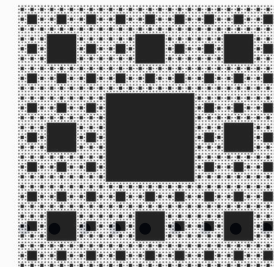
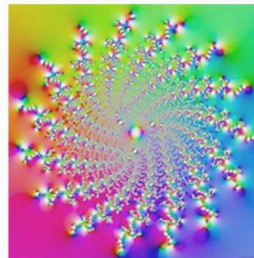
Τρίγωνο Sierpinski



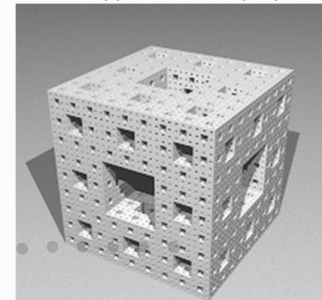
Τετράεδρο Sierpinski



Χαλί Sierpinski

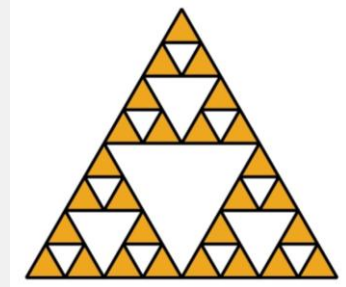
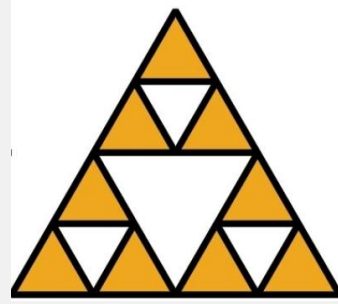
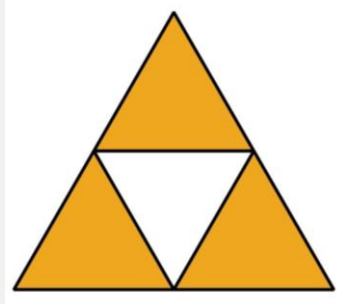
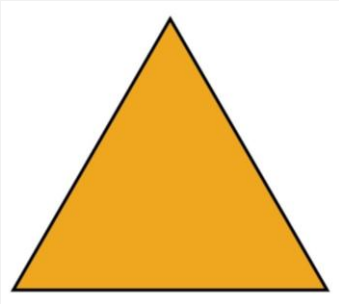


Σπόγγος του Μένγκερ



Δραστηριότητα 2

Ανακάλυψη διαδικασίας δημιουργίας τριγώνου Sierpinski



1^ο Βήμα

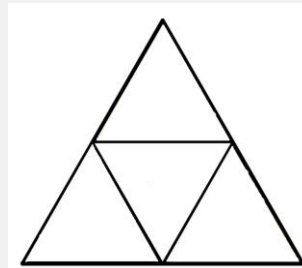
$$\frac{3}{4}E$$

2^ο Βήμα

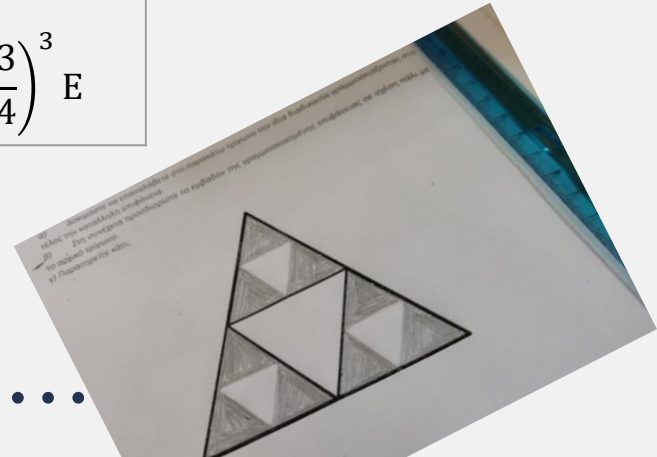
$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} E = \left(\frac{3}{4}\right)^2 E$$

3^ο Βήμα


$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} E = \left(\frac{3}{4}\right)^3 E$$




•••••



Δραστηριότητα 2




Επαναληπτική διαδικασία
αφαίρεσης τμημάτων από
ένα αρχικό τρίγωνο




Διασύνδεση- Γεωμετρική οπτικοποίηση

- ✓ Έννοια του κλάσματος
- ✓ Πολλαπλασιασμός κλασμάτων
- ✓ Δυνάμεις κλασμάτων.



Ανακάλυψη του μοτίβου αφαίρεσης

- ✓ Μείωση του εμβαδού
- ✓ Μείωση χωρίς να μηδενίζεται πλήρως



Αυτοομοιότητα

- ✓ Ανάλυση σχημάτων που διατηρούν την ίδια μορφή σε διάφορες κλίμακες



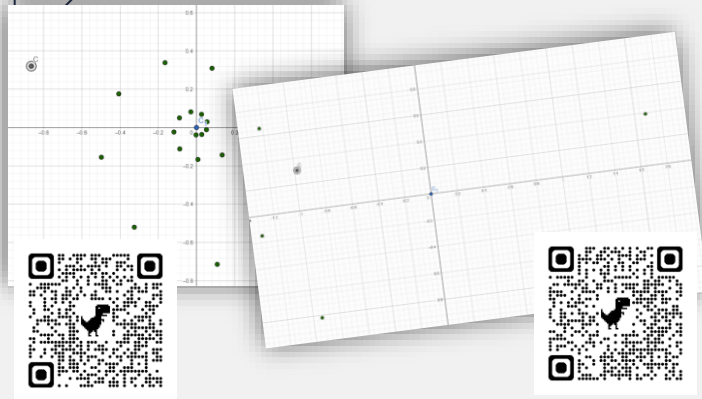
Κανονικότητες & Μοτίβα (Patterns)

- ✓ Αναδρομικές σχέσεις,
 - ✓ Ακολουθία
 - ✓ Γεωμετρική πρόοδος
 - ✓ Εκθετική συνάρτηση
 - ✓ Εκθετική Μεταβολή
-
-

Δραστηριότητα 3

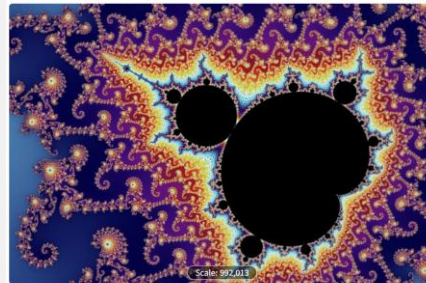
📍 ΣΥΝΟΛΟ MANDELBROT

Διαδοχική επανάληψη
Iterated Map



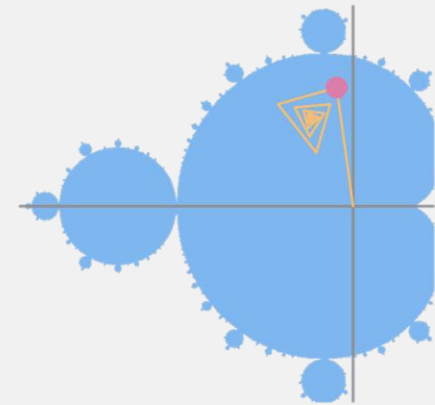
<https://www.geogebra.org/m/ez7yvr2>

<https://www.geogebra.org/m/dumq7ycx>



Mandelbrot Fractal Zoom (e1091) (4k 60fps)

https://youtu.be/pCpLWbHVNhk?si=E_Ia8Xj5zDmpVBLb



<https://mathigon.org/course/fractals/mandelbrot>



Δραστηριότητα 3



Διαδοχική επανάληψη
(iterations)



✓ Οπτικοποίηση
Χαρτογράφηση επιπέδου με συνθήκη



Σύγκλιση- Απόκλιση



✓ Αυτοομοιότητα
Ανάλυση σχημάτων σε διάφορες κλίμακες



Κανονικότητες & Μοτίβα

✓ $Z_k = Z_1^{2^k}$

✓ Αναδρομικές σχέσεις $Z_n = Z_{n-1}^2$, $Z_n = Z_{n-1}^2 + C$



Κατασκευή- Παραλλαγή τετραέδρου *Sierpinski*

- Δημιουργία δομικής μονάδας
- Γεωμετρική ανάπτυξη μέσα από επαναλαμβανόμενη διαδικασία
- Πρακτική εφαρμογή που οδηγεί σε βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της αυτοομοιότητας



Δραστηριότητα 4



Συζήτηση Επιλογή Υλικών

- ✓ Καλαμάκια
- ✓ Lego τουβλάκια
- ✓ Χαρτάκια
- ✓ Ξυλάκια



Κατασκευή Δομικής Μονάδας

- ✓ Δέκα μπουκάλια νερού
- ✓ Τριγωνική Μορφή (4+3+2+1)
- ✓ Αφαίρεση κεντρικού μπουκαλιού
- ✓ Η κάθε δομική μονάδα αποτελείται από 9 μπουκάλια



Ερέθισμα-Εισαγωγή στη διάσταση του Sierpinski fractal (μορφοκλασματική)

Παρατηρήσαμε ότι

Αν 2 πλασιάσουμε την ακμή του Φράκταλ απαιτούνται 3 δομικές μονάδες

Αν 4 πλασιάσουμε την ακμή του Φράκταλ απαιτούνται 9 δομικές μονάδες

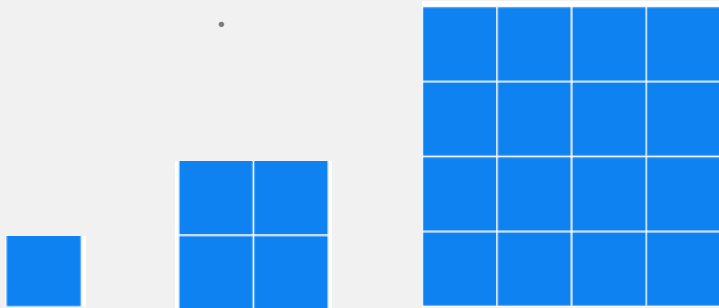
Αν 8 πλασιάσουμε την ακμή του Φράκταλ απαιτούνται 27 δομικές μονάδες

$$\frac{\log 3}{\log 2} = \log_2 3 = \log_4 9 = \log_8 27 = 1,5849$$

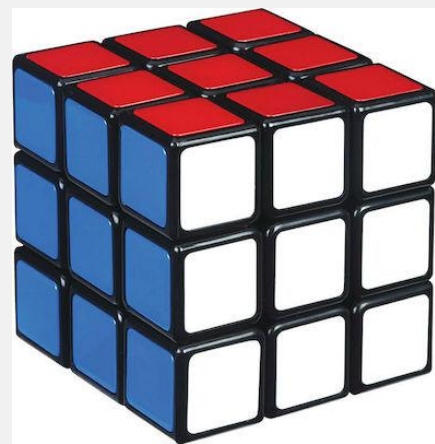
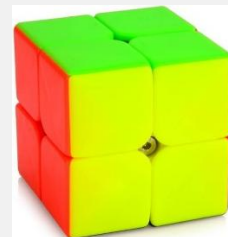
Δραστηριότητα 5



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ



- ✓ Αν 2 πλασιάσουμε την πλευρά του τετραγώνου θα χρειαστούμε τέσσερα (4) τετράγωνα όπως το αρχικό για να δημιουργήσουμε το νέο τετράγωνο
- ✓ Αν 4 πλασιάσουμε την πλευρά του τετραγώνου θα χρειαστούμε δεκαέξι (16) τετράγωνα όπως το αρχικό για να δημιουργήσουμε νέο τετράγωνο
- Διάσταση του τετραγώνου είναι ο εκθέτης που πρέπει να υψώσουμε το 2 ώστε να γίνει 4 ή αντίστοιχα το 4 για να γίνει 16 δηλαδή το 2



- ✓ Αν 2 πλασιάσουμε την ακμή του κύβου τότε πόσα αρχικά κυβάκια θα χρειαστούν για να δημιουργήσουμε τον νέο κύβου; (8)
- ✓ Αν 3 πλασιάσουμε την ακμή του κύβου τότε πόσα αρχικά κυβάκια θα χρειαστούν για να δημιουργήσουμε τον νέο κύβου; (27)
- Διάσταση του κύβου είναι ο εκθέτης που πρέπει να υψώσουμε το 2 ώστε να γίνει 8 ή αντίστοιχα το 3 για να γίνει 27 δηλαδή το 3

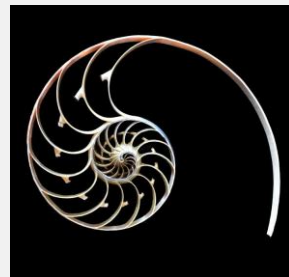


ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

📍 Διασύνδεση- Γενίκευση- Επέκταση

✓ Ύπαρξη διαφορετικών Μοντέλων με αναδρομή

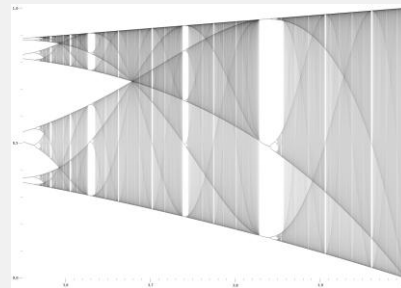
Fibonacci Sequence $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$



✓ Logistic Map-Chaos

Logistic map $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

Χαρτογράφηση περιοχών με χαοτική συμπεριφορά





ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ

ΗΜΕΡΗΣΙΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ
«Ι.ΤΣΙΑΜΟΥΛΗΣ»

Δρακόπουλος Διονύσιος



ΠΗΓΕΣ

B.B.Mandelbrot. “The Fractal Geometry of Nature” W.H.Freeman and Co., New York, 1983.

Μπούντης Αναστάσιος “Δυναμικά Συστήματα και Χάος” Τόμοι Α' και Β'. Εκδόσεις Βούλαρη

<https://mathigon.org/course/fractals/mandelbrot>

