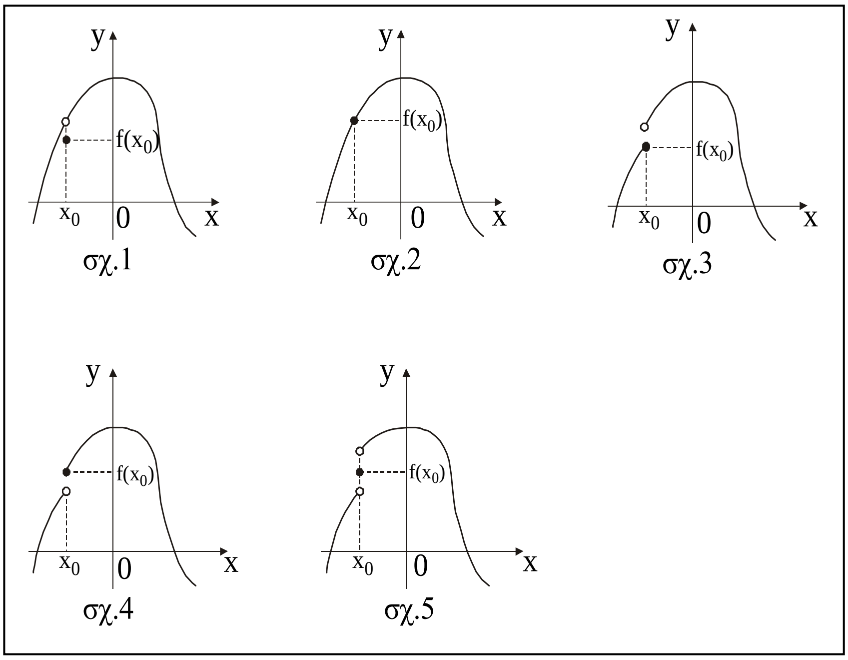
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Δραστηριότητες – Θέματα Εξάσκησης

1. Στα διπλανά σχήματα παρουσιάζονται πέντε γραφικές παραστάσεις ισάριθμων συναρτήσεων. Στη θέση x_0 είναι συνεχής η συνάρτηση του σχήματος ……
Γράψτε αναλυτικά τι ισχύει στο κάθε σχήμα.



Σχ. 3 : $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

Σχ. 1 :

Σχ. 2 :

Σχ. 4 :

Σχ. 5 :

2. Έστω f , g συναρτήσεις ορισμένες σε περιοχή του x_0 . Να απαντήσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

(α) Αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 τότε $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

(β) Αν η συνάρτηση $c \cdot f$ $(c \neq 0)$ είναι συνεχής στο x_0 , τότε και η f είναι συνεχής στο x_0 .

(γ) Αν οι f , g είναι ασυνεχείς στο x_0 , τότε και η $f \cdot g$ είναι ασυνεχής στο x_0 .

(δ) Αν οι f , g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε και η $\dfrac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0 .

3. Έστω $f : (0, +\infty) \to R$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση η οποία για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $(f(x) - f(y)) \cdot (xf(y) - yf(x)) \geq 0$. Αποδείξτε ότι f συνεχής στο $(0, +\infty)$. (***Gazeta Matematica)***

4. Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2e^x$.

(α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

(β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in R$.

(γ) Να υπολογιστεί το σύνολο τιμών της f

(δ) Υπολογίστε το f(0)

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+5} + ax + b}{x-2} , & |x| \neq 2 \\ a + \dfrac{2}{3} , & x = 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) , & x = -2 \end{cases}$$

Αν η f είναι συνεχής στο 2 , αποδείξτε ότι είναι ασυνεχής στο -2 .

Σ. Σκοτίδας

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 -8x+16 & , \ 0<x<5 \\ (\alpha^2 +\beta^2)\cdot \ln(x-5+e) + 2(\alpha+1)\cdot e^{5-x} & , \ x\geq 5 \end{cases}$

(α) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

(β) Να βρεθούν τα α , β $\in$ R ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

(γ) Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος (α) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ***(Θέμα Πανελληνίων εξετάσεων, 2000)***

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}$ και $g(x)=\begin{cases} 2x+1 , & x \geq -1 \\ 4x-5 , & x < -1 \end{cases}$. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση gof στο $x_0 = -1$.

8. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x+\beta), & x \geq -1 \end{cases}$

να είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

9. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε x , y $\in R^*$. Αποδείξτε ότι :
αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, τότε η f είναι συνεχής στο R^* .

10. Βρείτε τον τύπο συνεχούς συνάρτησης $f:R\to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση
$f(x) \cdot f(ax) = e^x$ για κάθε $x \in R$, όπου $a\in (0 , 1)$ σταθερός αριθμός και $f(0) = 1$.
[Gazeta Matematica, Δεκέμβριος 1997]

(υπόδειξη: αποδείξτε ότι f(x)>0 για κάθε x και έπειτα λογαριθμήστε (ln) την δοθείσα σχέση)