ΠΑΡΑΝΟΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παρανόηση 1η

Για να έχει μια συνάρτηση όριο στο x_0 πρέπει η συνάρτηση να ορίζεται στο x_0

Το αν ορίζεται ή όχι η συνάρτηση στο x_0 δεν παίζει κανένα ρόλο στη μελέτη των ορίων. Σημαντική είναι μόνο η συμπεριφορά της f σε σύνολα της μορφής $U(x_0,a)=(x_0-a,x_0)\cup(x_0,x_0+a)$ ή (x_0-a,x_0) ή (x_0,x_0+a) δηλαδή η συνάρτηση να ορίζεται όσο κοντά θέλουμε στο x_0 .

Έτσι , δεν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης σε ένα *μεμονωμένο* σημείο του πεδίου ορισμού της. (Ένα σημείο x_0 ενός συνόλου X λέγεται μεμονωμένο όταν υπάρχει διάστημα της μορφής $\Delta = (x_0-\delta , x_0+\delta)$ τέτοιο ώστε $\Delta \cap X = \{x_0\}$). Πρέπει δηλαδή το x_0 να είναι *σημείο συσσώρευσης* του πεδίου ορισμού A της f και αυτό σημαίνει ότι *σε κάθε* διάστημα της μορφής $\Delta = (x_0-\delta , x_0+\delta)$ να υπάρχουν στοιχεία του A.

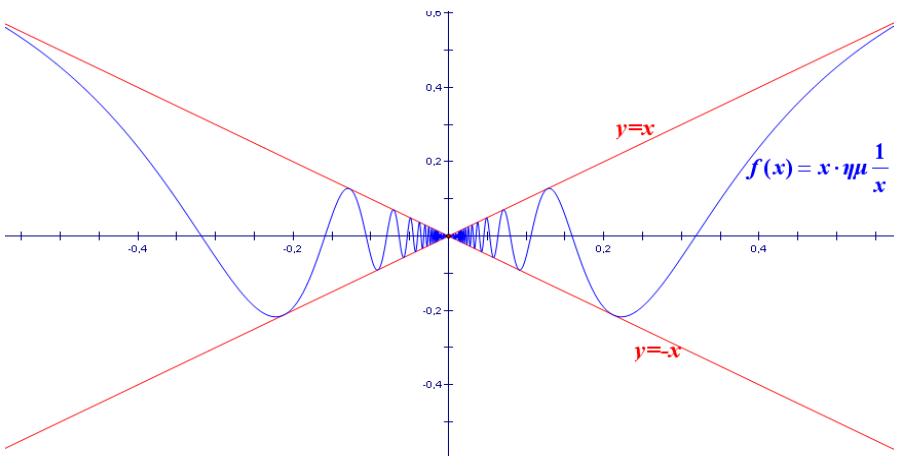
Έτσι, δεν έχει νόημα το σύμβολο $\lim\limits_{X\to 2} g(x)$ όπου $g(x)=\begin{cases} x^2-4\ , & x\le 1 \\ 5\ , & x=2 \end{cases}$. Επίσης δεν έχει νόημα το σύμβολο $\lim\limits_{\nu\to 5}\left(2\nu^3+8\right)\ ,\quad \nu\in N^*$

Παρανόηση 2η

Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in R$, τότε η f παίρνει την τιμή l για τιμές του x κοντά στο x_0 . Παράδειγμα : για την $f(x)=\begin{cases} x^2\ , & x\neq 0 \\ 2\ , & x=0 \end{cases}$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, αλλά προφανώς $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

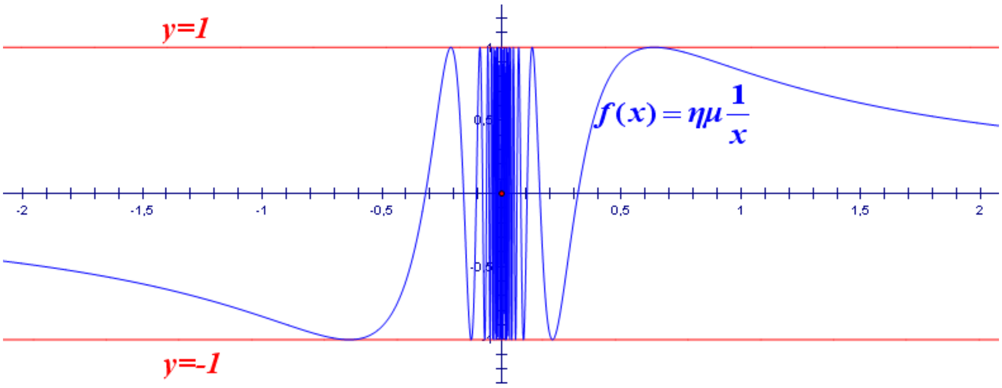
Παρανόηση 3η

Η ύπαρξη του ορίου στο x_0 συνεπάγεται μονοτονία της f σε διάστημα γύρω από το x_0 , ή τοπική μονοτονία , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του x_0 και σε ένα διάστημα δεξιά του x_0 . Παράδειγμα για την συνάρτηση $f(x)=x\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$, είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ αλλά η f δεν είναι μονότονη σε κανένα διάστημα γύρω από το μηδέν , αφού θεωρώντας τις ακολουθίες $x_\nu=\frac{1}{2\nu\pi+\pi/2}$, $y_\nu=\frac{1}{2\nu\pi+3\pi/2}$, $w_\nu=\frac{1}{2\pi\nu} > x_\nu > y_\nu$ που τείνουν στο μηδέν, παρατηρούμε ότι $g(x_\nu) = x_\nu>0$, $g(y_\nu) = -y_\nu<0$, $g(w_\nu) = 0 < g(x_\nu)$ και $g(x_\nu) > g(y_\nu)$ δηλαδή η g έχει όριο στο μηδέν χωρίς να είναι μονότονη σε κανένα διάστημα γύρω από το μηδέν. (Επίσης παρατηρούμε ότι για αρκετά μεγάλα ν δεν υπάρχει διάστημα $(-\delta , \delta)$ στο οποίο η g(x) να διατηρεί σταθερό πρόσημο.)



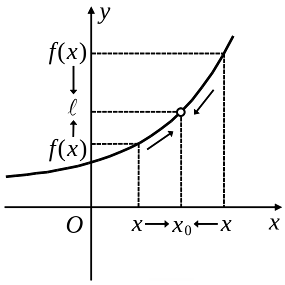
Παρανόηση 4η

Αν ΔΕΝ υπάρχει το όριο της f(x) όταν το x τείνει στο x_0, τότε αναγκαστικά είναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ δηλαδή τότε τα πλευρικά όρια υπάρχουν , αλλά απλώς είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Για παράδειγμα , η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ έχουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$ (γραφική πληροφορία) και για τις ακολουθίες $x_\nu=\frac{1}{2\pi\nu}$, $y_\nu=\frac{1}{2\pi\nu+\pi/2}$ με $x_\nu, y_\nu \to 0^+$ όταν $\nu\to+\infty$, είναι $f(x_\nu)=0\to 0$, $f(y_\nu)=1\to 1$.



Παρανόηση 5η

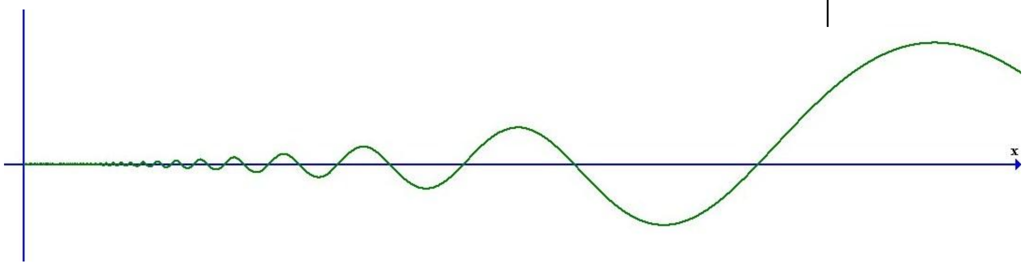
Η ύπαρξη του ορίου στο x_0 συνεπάγεται ύπαρξη τοπικών ακροτάτων της f σε διάστημα γύρω από το x_0 , ή ακρότατα σε ένα διάστημα μόνο αριστερά του x_0 ή σε ένα διάστημα μόνο δεξιά του x_0. Στο διπλανό σχήμα η f έχει όριο στο x_0 τον αριθμό l, αλλά δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 ή κάπου αλλού για τα x που ανήκουν σε διάστημα της μορφής $U(x_0,a)=(x_0-a,x_0)\cup(x_0,x_0+a)$ ή (x_0-a,x_0) ή (x_0,x_0+a).



Επίσης, η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\left(1/x\right), & x\neq 0 \\ 0 & , x=0\end{cases}$$

έχει $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, αλλά δεν έχει ακρότατο στο μηδέν, αφού για τις



ακολουθίες $x_\nu=\frac{1}{2\pi\nu+\pi/2}$, $y_\nu=\frac{1}{2\pi\nu+3\pi/2}$ είναι $x_\nu>0, y_\nu>0, x_\nu\to 0, y_\nu\to 0$, $f(x_\nu)=x_\nu^{\ 2}>0,\ f(y_\nu)=-y_\nu^{\ 2}<0$, δηλαδή οσοδήποτε κοντά στο μηδέν [σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής (0 , ε)] έχουμε και θετικές και αρνητικές τιμές , άρα ΔΕΝ έχουμε ακρότατο στο μηδέν.