ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ 2011 – 2012

1. Έστω οι μιγαδικοί a , b , c διαφορετικοί ανά δύο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ ώστε

$a + c - 2b = \lambda i(a + b - 2c)$. Αποδείξτε ότι $|b + c - 2a| = 3|b - c|$.

[G.M. 2/2011]

2. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς z με $|z|=1$. Αποδείξτε ότι $\sqrt{3} \le |1+z| + |1-z+z^2| \le \frac{13}{4}$.

[Διαγωνισμός «Alexandru Muller» Iasi , Romania 8/4/2010]

3. Έστω a, b , c $\in R^*$ και οι μιγαδικοί $z \in C \setminus R$ με $|z|=1$ που ικανοποιούν τη σχέση

$az^2 + b\bar{z} + c = 0$. Αποδείξτε ότι $\frac{c}{a} \in (-3,1)$ και $\frac{b}{a} \in (-2,2)$.

[G.M. 1/2011]

4. Θεωρούμε τους μιγαδικούς που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z_1^5 + z_2^5| \le 2$, $|z_1^3 + z_2^3| \le 2$, $|z_1 z_2| \le 1$.

Αποδείξτε ότι $|z_1 + z_2| \le 2$. [G.M. 1/2011]

[υπόδειξη: να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $(a+b)^5 = a^5 + b^5 + 5ab(a^3+b^3) + 10a^2b^2(a+b)$ *]*

5. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1 , z_2 με ίσα μέτρα και τον πραγματικό αριθμό $\alpha>1$. Αποδείξτε ότι

$(a+1)|z_1 + z_2| \le 2|az_1 + z_2|$ [G.M. 3/2011]

6. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1 , z_2 , z_3 που ικανοποιούν τις σχέσεις

$|2z_1 - z_2 - z_3| = |z_2 - z_3|$, $|2z_2 - z_1 - z_3| = |z_1 - z_3|$. Αποδείξτε ότι $z_1 = z_2$.

[G.M. 3/2011]

7. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν την σχέση $|z+1+i|=2$. Βρείτε τους μιγαδικούς z για τους οποίους η παράσταση $|z-2+5i|$ παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

[G.M. 6/2011]

8. Βρείτε όλες τις τριάδες μιγαδικών (a , b , c) που ικανοποιούν τις σχέσεις $|a|=|b|=|c|$ και $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=1$.

[Διαγωνισμός «Argument» Baia Mare, Romania 6/11/2010]

9. Θεωρούμε τους (μη μηδενικούς) z_1, z_2, z_3 διαφορετικούς ανά δύο μιγαδικούς με ίσα μέτρα και τέτοιους ώστε οι αριθμοί $z_1+z_2z_3$, $z_1z_2+z_3$, $z_2+z_1z_3$ να είναι πραγματικοί. Αποδείξτε ότι

$z_1z_2z_3=1$.

10. Για τους μιγαδικούς $z \in C$ ισχύουν οι σχέσεις $|1+z| \le 1$ και $|1+z^2| \le 1$. Αποδείξτε ότι $|z| \le 1$.

11. Ορίζουμε το σύνολο των μιγαδικών $A=\left\{z \in C / |z-1| \le 1, |z-\varepsilon| \le 1, |z-\varepsilon^2| \le 1\right\}$ όπου ε ρίζα της εξίσωσης $x^2+x+1=0$.

α) $|z| \le 1$

β) Βρείτε όλα τα στοιχεία του συνόλου A

12. Έστω a , b , c $\in$ R και $w=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Υπολογίστε $(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw)$

13. Έστω $z \in C^*$ ώστε $\left|z^3+\frac{1}{z^3}\right| \le 2$. Αποδείξτε ότι $\left|z+\frac{1}{z}\right| \le 2$.

14. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς z ώστε $4z^2+8|z|^2=8$.

15. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς z ώστε $|z|=1$ και $\left|z^2+\bar{z}^2\right|=1$

16. Έστω $z_1, z_2 \in C$ ώστε $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$ και $|z_1| = |z_2| = 1$. Υπολογίστε $|z_1 - z_2|$.

17. Έστω $z_1, z_2, z_3 \in C$ ώστε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Αποδείξτε ότι

a) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ b) $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$ c) $\left|1 - \frac{z_3}{z_1}\right| = \sqrt{3}$

18. Έστω $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n \in C$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \ldots\ldots = |z_n| = r > 0$. Αποδείξτε ότι

ο αριθμός $E = \dfrac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)\ldots..(z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \ldots\ldots z_n}$ είναι πραγματικός.

19. Θεωρούμε τους μιγαδικούς u, y, w, z ώστε $|u| < 1$, $|y| = 1$ και $w = \dfrac{y(u - z)}{\bar{u}z - 1}$.
Αποδείξτε ότι $|w| \le 1$ αν και μόνον αν $|z| \le 1$.

20. Θεωρούμε τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R > 0$. Αποδείξτε ότι

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| + |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_3| + |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_2| \le 9R^2 .$$

21. Θεωρούμε τους μιγαδικούς a, b, c ώστε $a|bc| + b|ac| + c|ab| = 0$. Αποδείξτε ότι

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \ge 3\sqrt{3}\,|abc| .$$

22. Επιλύστε στο C^* το σύστημα $x + y + z = 1 = xyz$ και $|x| = |y| = |z|$.

23. Έστω $z \in C$ με $|z| = 1$. Αποδείξτε ότι $\sqrt{2} \le |1-z| + |1+z^2| \le 4$.

24. Έστω $z_i \in C^*$ με $i \in \{1, 2, 3\}$ και $z_i \neq z_j$ για κάθε $i \neq j$. Αν είναι $z_1^2 = z_2 z_3$, $z_2^2 = z_1 z_3$ αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1 , z_2 , z_3 είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

25. Έστω w μιγαδική (μη πραγματική) ρίζα της εξίσωσης $x^3 = 1$.

$$|z-1|^2 + |z-w|^2 + |z-w^2|^2 = 3(1+|z|^2) \text{ για κάθε } z \in C.$$

26. Αν $a, b \in C$ αποδείξτε ότι $|1+ab| + |a+b| \ge \sqrt{|a^2-1| \cdot |b^2-1|}$.

27. Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $Re(z_1) \ge 0$, $Re(z_2) \ge 0$. Αποδείξτε ότι

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \ge 0$$

[G.M. 2/2003]

28. Έστω $z \in C$ ώστε $|z| = 1$ και $1 + z + z^n = 0$, $n \in N^*$. Αποδείξτε ότι :

a) $z^3 = 1$

b) $n = 3k + 2$

[G.M. 2/2003]

29. Έστω $n \geq 3$ ακέραιος και οι μιγαδικοί $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$ διαφορετικοί ανά δύο και με ίσα μέτρα. Αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $\dfrac{1}{z_1 - z_0}, \dfrac{1}{z_2 - z_0}, \dfrac{1}{z_3 - z_0}, \ldots\ldots, \dfrac{1}{z_n - z_0}$ είναι συνευθειακά σημεία. [G.M. 2/2003]

[Υπόδειξη : Αν $a \in C^*$ δεδομένος μιγαδικός και $\lambda \in R$, αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z που ικανοποιούν την σχέση $a\overline{z} + \overline{a}z = 2\lambda$ είναι συνευθειακά σημεία.]

30. Έστω οι μιγαδικοί $z_1, z_2, z_3 \in C$ ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ και $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $A\left(\dfrac{z_1+z_2}{z_3}\right), B\left(\dfrac{z_1+z_3}{z_2}\right), C\left(\dfrac{z_3+z_2}{z_1}\right)$

a) Βρείτε τον μιγαδικό του οποίου η εικόνα είναι το περίκεντρο του τριγώνου ABC

b) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $z_1z_2 + z_1z_3 + z_3z_2 = 0$ αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο.

[G.M. 3/2003]

31. Αν z, w τυχαίοι μη μηδενικοί μιγαδικοί και $\varepsilon = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{3}$ αποδείξτε την ανισότητα $|z - \varepsilon w| \leq |z| + |z - w|$. [G.M. 10/2003]

32. Αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό z ισχύει η σχέση $|1 + z| + |1 + z + z^2| \geq 1$.

[Διαγωνισμός «Victor Valcovici» Valcea , Romania 20/2/2004, το θέμα πρότεινε ο καθηγητής Laurentiu Panaitopol]

33. Έστω οι μιγαδικοί a , b , c , d , e . f τέτοιοι ώστε $|a|=|b|=|c|=r$, $|d|=|e|=|f|=R$, $0<r<R$
$a + b + c = d + e + f$, $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών a , b , c και d , e , f είναι ισόπλευρα.

[Διαγωνισμός «Cezar Ivanescu» Valcea , Romania 20/2/2004]

34. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς z_1 , z_2 που ικανοποιούν συγχρόνως τις παρακάτω ισότητες:

$$|1 + z_1 + z_2| = |1 + z_1| = 1 \quad , \quad |z_1 \cdot z_2 . (z_1 + z_2)| = 2(|z_1| + |z_2|)$$

[Προτεινόμενη για Εθνική Ολυμπιάδα Ρουμανίας 2004]

35. Τρεις μιγαδικοί αριθμοί a , b , c έχουν μέτρο 1 και ικανοποιούν την ισότητα $a + b + c = 1$. Αποδείξτε :

Α) $ab + bc + ac = abc$ Β) $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$ Γ) $\dfrac{1}{a^{2011}} + \dfrac{1}{b^{2011}} + \dfrac{1}{c^{2011}} = 1$

Δ) Αν οι a , b , c είναι διαφορετικοί ανά δύο, τότε το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a , b , c είναι ορθογώνιο.

36. Έστω οι μιγαδικοί a , b , c ώστε $a + b + c = 0 = a^2 + b^2 + c^2$. Αποδείξτε ότι :

Α) $ab + bc + ca = 0$ Β) $a^2 = bc$ Γ) $a \cdot b \cdot c \neq 0$ και $|a| = |b| = |c|$

Δ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των a, b, c είναι ισόπλευρο.