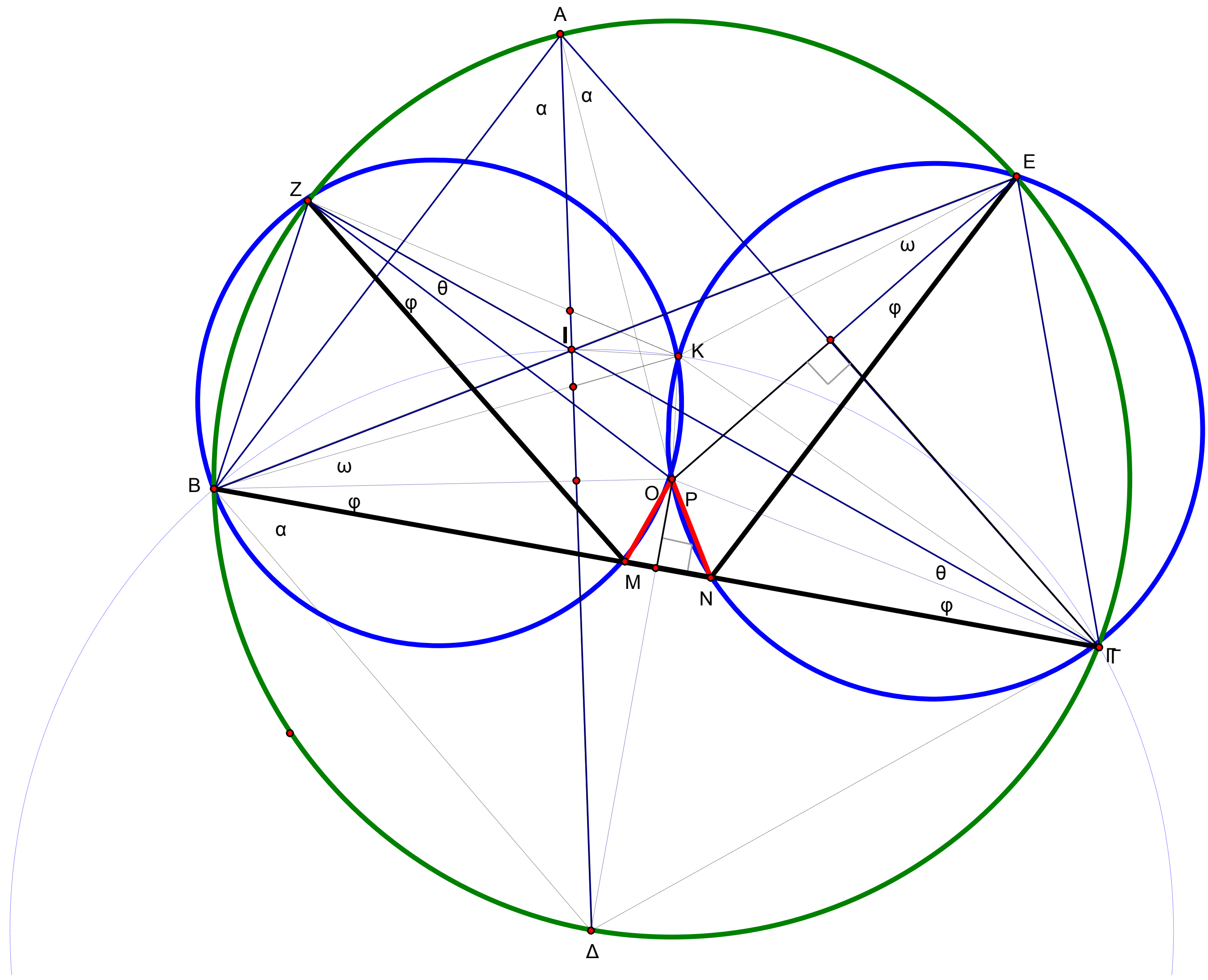
ΛΥΣΗ 4^{ου} ΘΕΜΑΤΟΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «ΘΑΛΗΣ» 2011

α) Καθώς ΟΒ = ΟΓ = R θα είναι $\mathrm{O B \Gamma} = \mathrm{O \Gamma B} = \varphi$. Επειδή ΖΜ // ΑΓ θα είναι $\mathrm{M Z \Gamma} = \mathrm{Z \Gamma A} = \dfrac{\mathrm{B}}{2} = \mathrm{Z \Gamma M}$.

Αλλά ΟΖ = ΟΓ = R άρα $\mathrm{O Z \Gamma} = \mathrm{O \Gamma Z} = \theta$. Έτσι, $\mathrm{O \Gamma M} = \mathrm{M Z O} = \varphi$. Τελικά $\mathrm{M Z O} = \mathrm{M B O} = \varphi \Rightarrow$ ΜΟΖΒ εγγράψιμο.

Ανάλογα (εντελώς!) για το εγγράψιμο ΟΝΓΕ .



β) ΒΖΚΟ εγγράψιμο , άρα $\mathrm{BKO} = \mathrm{BZO}$ και ΒΖΟΜ εγγράψιμο , άρα $\mathrm{OMN} = \mathrm{BZO}$. Έτσι $\mathrm{ZMO} = \mathrm{ZBO}$

Ανάλογα : ΟΚΕΓ εγγράψιμο, άρα $\mathrm{OK\Gamma} = \mathrm{OE\Gamma}$ και ΟΝΓΕ εγγράψιμο, άρα $\mathrm{ONM} = \mathrm{O\Gamma E}$.

Άρα $\mathrm{BK\Gamma} = \mathrm{BKO} + \mathrm{OK\Gamma} = \mathrm{OMN} + \mathrm{ONM}$

$$\mathrm{ZMO+ONE=ZBO+O\Gamma E=(ZBA+ABO)+(A\Gamma E+O\Gamma A)=}$$

Επίσης $\left(\dfrac{\Gamma}{2}+\mathrm{BAO}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{B}}{2}+\mathrm{OA\Gamma}\right)=\dfrac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}+\mathrm{BA\Gamma}=90^0+\dfrac{\mathrm{A}}{2}$

Τελικά

$$\mathrm{BK\Gamma=OMN+ONM=(180^0-ZMB-ZMO)+(180^0-EN\Gamma-ONE)}$$

$$\mathrm{=(180^0-A\Gamma B-ZMO)+(180^0-AB\Gamma-ONE)=360^0-(\Gamma+B)-(ZMO+ONE)=\ldots=90+\frac{A}{2}}$$

Είναι γνωστό όμως (εύκολη η απόδειξη για όσους δεν το θυμούνται) ότι $\mathrm{B\hat{I}\Gamma}=90^0+\dfrac{\mathrm{A}}{2}$.

Άρα $\mathrm{B\hat{I}\Gamma=BK\Gamma}$. **(1)**

$$\mathrm{IB\Delta}=\frac{\mathrm{B}}{2}+\mathrm{\Delta B\Gamma}=\frac{\mathrm{B+A}}{2}$$

Επίσης

$$\mathrm{B\hat{I}\Delta}=\frac{\mathrm{AE+B\Delta}}{2}=\frac{2(\mathrm{B}/2)+2(\mathrm{A}/2)}{2}=\frac{\mathrm{B+A}}{2}$$

Έτσι, ΔB = ΔI και όμοια δείχνουμε ότι ΔI = ΔΓ. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία B , I , Γ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Δ και ακτίνα ΔI. Αλλά η σχέση (1) αποδεικνύει ότι στον κύκλο αυτό ανήκει και το σημείο K.

Σ. ΣΚΟΤΙΔΑΣ