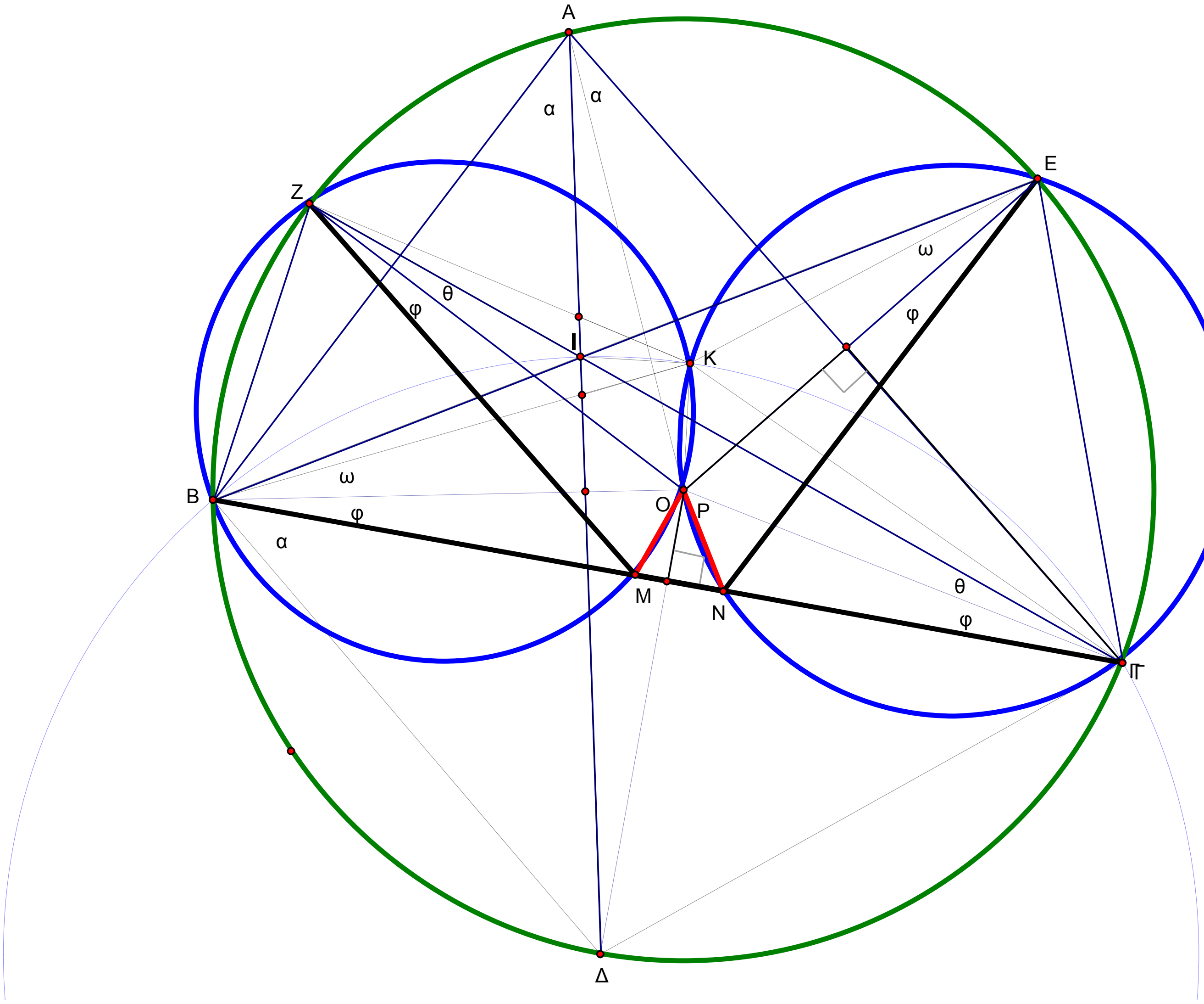
ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ «ΘΑΛΗΣ» 2011

α) Καθώς ΟΒ = ΟΓ = R θα είναι $\mathrm{O B\Gamma} = \mathrm{O\Gamma B} = \varphi$. Επειδή ΖΜ // ΑΓ θα είναι $\mathrm{MZ\Gamma} = \mathrm{Z\Gamma A} = \frac{\mathrm{B}}{2} = \mathrm{Z\Gamma M}$.

Αλλά ΟΖ = ΟΓ = R άρα $\mathrm{OZ\Gamma} = \mathrm{O\Gamma Z} = \theta$. Έτσι, $\mathrm{O\Gamma M} = \mathrm{MZO} = \varphi$. Τελικά $\mathrm{MZO} = \mathrm{MBO} = \varphi \Rightarrow$ ΜΟΖΒ εγγράψιμο.

Ανάλογα (εντελώς!) για το εγγράψιμο ΟΝΓΕ .



β) ΒΖΚΟ εγγράψιμο , άρα $\mathrm{BKO} = \mathrm{BZO}$ και ΒΖΟΜ εγγράψιμο , άρα $\mathrm{OMN} = \mathrm{BZO}$. Έτσι $\mathrm{ZMO} = \mathrm{ZBO}$

Ανάλογα : ΟΚΕΓ εγγράψιμο, άρα $\mathrm{OK\Gamma} = \mathrm{OE\Gamma}$ και ΟΝΓΕ εγγράψιμο, άρα $\mathrm{ONM} = \mathrm{O\Gamma E}$.

Άρα $\mathrm{BK\Gamma} = \mathrm{BKO} + \mathrm{OK\Gamma} = \mathrm{OMN} + \mathrm{ONM}$

$$ZMO + ONE = ZBO + O\Gamma E = (ZBA + ABO) + (A\Gamma E + O\Gamma A) =$$

Επίσης $$\left(\frac{\Gamma}{2} + BAO\right) + \left(\frac{B}{2} + OA\Gamma\right) = \frac{B+\Gamma}{2} + BA\Gamma = 90^0 + \frac{A}{2}$$

Τελικά

$$BK\Gamma = OMN + ONM = (180^0 - ZMB - ZMO) + (180^0 - EN\Gamma - ONE)$$

$$= (180^0 - A\Gamma B - ZMO) + (180^0 - AB\Gamma - ONE) = 360^0 - (\Gamma + B) - (ZMO + ONE) = \ldots = 90 + \frac{A}{2}$$

Είναι γνωστό όμως (εύκολη η απόδειξη για όσους δεν το θυμούνται) ότι $B\hat{I}\Gamma = 90^0 + \dfrac{A}{2}$.

Άρα $B\hat{I}\Gamma = BK\Gamma$. **(1)**

$$IB\Gamma = \frac{B}{2} + \Delta B\Gamma = \frac{B+A}{2}$$

Επίσης $$B\hat{I}\Gamma = \frac{AE + B\Delta}{2} = \frac{2(B/2) + 2(A/2)}{2} = \frac{B+A}{2}$$

Έτσι, ΔΒ = ΔΙ και όμοια δείχνουμε ότι ΔΙ = ΔΓ. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Β, Ι, Γ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο Δ και ακτίνα ΔΙ. Αλλά η σχέση (1) αποδεικνύει ότι στον κύκλο αυτό ανήκει και το σημείο Κ.

Σ. ΣΚΟΤΙΔΑΣ