<u>ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1</u>

Μετά τις πράξεις , $K(x)=\dfrac{2x^3+x^2-4x-2}{x^2-2}$ και μετά την εκτέλεση της ευκλείδειας διαίρεσης πολυωνύμων, παίρνουμε $K(x) = 2x + 1$.

Παρατηρούμε ότι $A = K(2010) = 2 \cdot 2010 + 1 = 4021$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2</u>

Αν $a = b$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = a + 2c^2$

Αν $a \neq b$, μετά τις πράξεις η εξίσωση γράφεται $f(x) = x^2-(a+b+2c^2)x+[ab+c^2(a+b)]=0$ **(1)**

με διακρίνουσα:

$$\Delta= (a+b+2c^2)^2 - 4[ab+c^2(a+b)]=(a+b)^2 + 4c^4 +2c^2(a+b) - 4ab - 4c^2(a+b) = (a-b)^2 + 4c^4 > 0 \quad (c\neq 0)$$

Καθώς $f(a) = c^2(b - a) = - f(b) \neq 0$ η **(1)** είναι ισοδύναμη με την αρχική .

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3</u>

Η 1η εξίσωση γράφεται $y - 1 = x^3 - 1 + 2x - 2 \Rightarrow y - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2(x - 1)$, οπότε

$y - 1 = (x - 1) (x^2 + x + 3)$ **(1)** Ανάλογα παίρνουμε $z - 1 = (y - 1) (y^2 + y + 3)$ **(2)** , $x - 1 = (z - 1) (z^2 + z + 3)$ **(3)**

Υποθέτουμε $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \neq 0$. Τότε πολλαπλασιάζοντας τις **(1) , (2) , (3)** παίρνουμε:

$1= (x^2 + x + 3) (y^2 + y + 3) (z^2 + z + 3) = f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$ ΑΤΟΠΟ , διότι $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\geq\dfrac{11}{4}$

Άρα τουλάχιστον ένας παράγοντας του γινομένου $(x - 1)(y - 1)(z - 1)$ είναι μηδέν. Εύκολα τότε προκύπτει ότι μοναδική λύση είναι η $(x , y , z) = (1 , 1 , 1)$.

Σ. ΣΚΟΤΙΔΑΣ