

## Iσα Αθροίσματα Κύβων

$$\mathbf{a^3 + b^3 = c^3 + d^3}$$

$$6^3 + 8^3 = 9^3 + (-1)^3 = 728$$

$$9^3 + 10^3 = 12^3 + 1^3 = 1729$$

$$2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$$

$$2^3 + 34^3 = 15^3 + 33^3$$

$$9^3 + 34^3 = 16^3 + 33^3$$

$$10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$$

$$135^3 + 138^3 = 172^3 + (-1)^3$$

$$791^3 + 812^3 = 1010^3 + (-1)^3$$

$$11161^3 + 11468^3 = 14258^3 + 1^3$$

$$65601^3 + 67402^3 = 83802^3 + 1^3$$

$$\mathbf{a^3 + b^3 = c^3 + d^3 = e^3 + f^3}$$

$$4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 = 18^3 + (-12)^3$$

$$3242197 = 76^3 + 141^3 = 85^3 + 138^3 = 202^3 + (-171)^3$$

$$87539319 = 167^3 + 436^3 = 228^3 + 423^3 = 255 + 414^3$$

### Προτεινόμενες

1.

**Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι  $x, y, z, w$  έτσι ώστε**

$$x^3 + y^3 + z^3 = w^3$$

2.

**Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι  $x, y, z, w, m$  έτσι ώστε**

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = m^2$$

3.

**Να βρεθεί μια απειρία λύσεων από θετικούς ακέραιους  $x, y$  για την εξίσωση**

$$x^2 + xy - y^2 = 1$$

### Λύση 1

$x = k^3 + 1$  ,  $y = 2k^3 - 1$  ,  $z = k(k^3 - 2)$  ,  $w = k(k^3 + 1)$  όπου  $k$  τυχαίος θετικός ακέραιος

### Λύση 2

$x = 2n$  ,  $y = 2n + 1$  ,  $z = 2n + 2$  ,  $w = 6n^2 + 6n + 2$  ,  $m = 6n^2 + 6n + 3$  όπου  $n$  τυχαίος θετικός ακέραιος

### Λύση 3

Αν  $x = F_{2v-1}$  ,  $y = F_{2v}$   $x^2 + xy - y^2 = F_{2v-1} (F_{2v-1} + F_{2v}) - F_{2v}^2 = F_{2v-1} F_{2v+1} - F_{2v}^2 = 1$  ( $F_n$  η ακολουθία Fibonacci).