

5η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα

Διεπιπέραν, ο χώρος του περιοδικού διν επιπρέπει να παρουσιάσουμε μάλις τις λύσεις που έβωσαν οι μαθητές που πήραν μέρος στην 5η Ε.Μ.Ο. και που μερικές από τις σχέσεις ήταν πάρα πολύ καλές. Οι λύσεις είναι της επιπροπής, ενώ όπου υπάρχει ένδειξη μαθητών είναι από τα καλύτερα γραπτά του διαγωνισμού.

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θ₁: Έστω Α το άθροισμα τριών διαδοχικών ακεραίων και Β το άθροισμα των αρέσιων επομένων τριών διαδοχικών. Είναι δυνατόν να έχουμε $AB = 33333$;

► Οχι, γιατί αν $v - 1, v, v + 1$ οι αριθμοί και $v + 2, v + 3, v + 4$ οι επόμενοι τους τότε

$$A = 3v, \quad B = 3v + 9$$

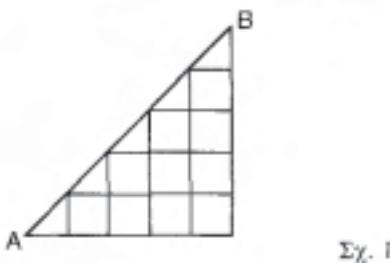
οπότε $A \cdot B = 9v(v+3)$ άρπιος $\neq 33333$.

(μαθητών)

$$A \cdot B = 9v(v+3).$$

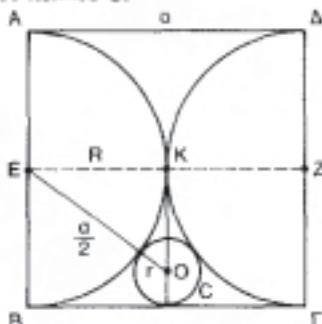
Οι αριθμοί $A \cdot B$ είναι πολ. 9 ενώ ο 33333 δχ.

Θ₂: Πόσοι δρόμοι υπάρχουν από το Α στο Β τέτοιοι ώστε να αποτελούνται από 5 οριζόντια τρίμματα και 5 κατωφράκτικα τρίμματα μήκους 1 το καθένα; (βλ. Σχ. 1).



► Απάντηση: 42.

Θ₃: Σ' ένα τετράγωνο $ABΓΔ$ πλευράς α θεωρούμε τον κύκλο C που εφάπτεται της πλευράς $ΒΓ$ και των δύο ημικυκλίων AB και $ΓΔ$. Να υπολογιστεί η απέντια του κύκλου C .



► Από το πιθανότερο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΚΟ βρίσκουμε $r = \frac{a}{8}$

Θ₄: Ν' απλοποιήσουμε οι παραστάσεις:

$$(a): \quad 1 + \frac{\frac{2}{a} + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{a}} \quad (\beta): \quad \frac{\frac{3\beta + \frac{3}{\beta} + \frac{3}{\beta^2}}{\beta + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}}}{\beta^2 \beta}$$

$$(\gamma): \quad \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{a\beta} \right) a^6 \beta^2 - a^6 - a^5 \beta}{a^4 \beta}$$

► (a) 3, (β) 3, (γ) β

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ₁: Αν $a, b, γ, δ, x, y, z, w$ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$ax - by - γz - δw = 0$$

$$βx + ay - bz + γw = 0$$

$$γx + bz + az - βw = 0$$

$$δx - γy + bz + aw = 0$$

να δειχτεί ότι $a = β = γ = δ = 0$
ή $x = y = z = w = 0$

► (μαθητών) 'Έστω ότι

$$(a, β, γ, δ) \neq (0, 0, 0, 0).$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την 1η με a , τη 2η $β$, την 3η με $γ$ την 4η με $δ$ και προσθέτουμε. Παίρνουμε

$$(a^2 + β^2 + γ^2 + δ^2)x = 0.$$

Τότε $x = 0$ και δριώσα $y = z = w = 0$.

'Άλλη λέση μαθητών

Υψώνω τις σχέσεις στο τετράγωνο και μετά προσθέτω κατά μέλη. Θα πάρω

$$(a^2 + β^2 + γ^2 + δ^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = 0,$$

οπότε $a = β = γ = δ = 0$

είπε $z = y = z = w = 0$

Θ₂: Μία αυλογή διηγημάτων του Α. Παπαδιαμάντη περιέχει 70 διηγήματα, ένα μιας σελίδας, ένα δύο σελίδων... ένα 70 σελίδων και όχι αναγκαστικά με αυτή τη σειρά. Κάθε διήγημα αρχίζει από κανονόργια σελίδα και η αριθμηση των σελίδων του βιβλίου αρχίζει από την πρώτη σελίδα. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός διηγημάτων που αρχίζουν από σελίδα με περιπτώση αριθμό;

► (μαθητών) Από τα 70 διηγήματα τα μισά έχουν περιπτώ αριθμό σελίδων και τα 35 θα έχουν άρτο. Το 1ο θα αρχίζει από την σελ. 1. Τα επόμενα θα αρχίζουν από σελίδα με περιπτώ αριθμό, μέχρις όπου φτάσει το πρώτο διήγημα με περιπτώ αριθμό σελίδων. Το επόμενο θα αρχίζει από σελίδα με άρτιο αριθμό (αφού περιπτώς + περιπτώς = άρτος), όπως και δισ θα το ακολουθήσουν μέχρι να φτάσουμε σε διήγημα με περιπτώ αριθμό σελίδων, απότο το επόμενο του θα φτάσει σε σελίδα περιπτώ αριθμού.

Έτσι από σελίδα άρτου αριθμού θα αρχίζουν τα διηγήματα που ακολουθούν το 1ο, το 3ο, ..., το 33ο, το 35ο. Άμα τουλάχιστον 17 διηγήματα θα αρχίζουν από σελίδα άρτου αριθμού.

Αν τα πρώτα 35 διηγήματα είναι αυτά με τον άρτιο αριθμό σελίδων, θα αρχίζουν από περιπτή σελίδα. Από τα υπόλοιπα 17 θα αρχίζουν από άρτιο σελίδα και τα 18 από περιπτή σελίδα.

Άρα συνολικά $53 = 35 + 18$ θα αρχίζουν από περιπτή σελίδα.

Θ₃ Από σημείο Α εκτός ευθείας, ε φέρουμε την κόβετο ΑΒ επί της ε και τριες πλάγιες ΑΓ, ΑΔ και ΑΕ που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ΑΒ και έτσι ώστε $(\text{ΑΔ}) > \frac{1}{2}((\text{ΑΓ}) + (\text{ΑΕ}))$. Ν' αποδειχτεί ότι $(\Gamma\Delta) > (\Delta E)$. (Τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε κεντρίζονται επί της ευθείας ε).

► Έστω Μ το μέσο του ΓΕ. Είναι γνωστό ότι

$$(\text{ΑΜ}) < \frac{1}{2}((\text{ΑΓ}) + (\text{ΑΕ})).$$

Άρα $(\text{ΑΔ}) > (\text{ΑΜ})$

και συνεπώς $(\text{ΒΔ}) > (\text{BM})$ δηλ. $(\Gamma\Delta) > (\Delta E)$

Θ₄ Να λυθεί η εξίσωση $2|3 - 2x| - |x - 2| = x$ ($x \in \mathbb{R}$)

► $x = 1, \quad x = 2.$

ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ₁ Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάποιο $a > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x + a)$$

Αν η f είναι άρτια και η g περιπτή συνάρτηση, να δειχτεί ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι περιοδικές.

► (μαθητών) Είναι

$$\begin{aligned} g(x + 4a) - g(-x - 4a) &= \\ -f(-x - 3a) - -f(x + 3a) &= -g(x + 2a) = \\ f(-x - 2a) - f(-x - a) &= f(x + a) = g(x) \end{aligned}$$

Όμως με την f .

Θ₂ Έστω Μ ένα σημείο επί της πλευράς $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και έστω N ένα σημείο επί της προέκτασης της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $(\text{AM})^2 + (\text{AN})^2 = 2(\text{AB})^2$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου N όταν το σημείο M κινείται πάνω

στην πλευρά $B\Gamma$.

► Είναι $\text{AM}^2 = \text{AB}^2 - \text{BM} \cdot \text{MG}$

και $\text{AN}^2 = \text{AG}^2 + \text{BN} \cdot \text{NG}$.

Θα πρέπει λοιπόν

$\text{BM} \cdot \text{MG} = \text{GM} \cdot \text{GN}$,

Αν θέσουμε $\text{BG} = a$,

$\text{BM} = x, \quad \text{GM} = y$

Θα έχουμε

$$x(a - x) = y(a + y)$$

$$\text{ή } a(x - y) = x^2 + y^2 \geq 0$$

Άρα $x \geq y$. Για $x = 0, \quad y = 0$.

$$\text{Για } x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

Βηλ. ο γεωμετρικός τόπος είναι τα τμήματα BA, GK

$$\text{όπου } BA = GK = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

Θ₃ Αν $a \geq 0$ να δειχτεί ότι

$$a^4 + a^3 - 10a^2 + 9a + 4 > 0$$

► Είναι $a^4 + 4 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 4} = 4a^2$

$$a^3 + 9a \geq 2\sqrt{9a^2} = 6a^2$$

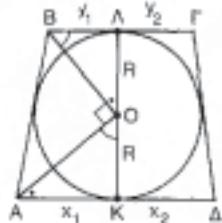
Άρα $a^4 + a^3 + 9a + 4 > 10a^2$

Θ₄ Ένα τραπέζιο με βάσεις a και b και ύψος v είναι περιγεγραμμένο σε κόκλο. Ν' αποδειχτεί ότι $v^2 \leq ab$.

► (μαθητών) Τα τριγώνα AKO, OLB είναι προφανής ίδια. Άρα

$$\frac{R}{x_1} = \frac{y_1}{R} \Rightarrow R^2 = x_1 y_1$$

$$\text{Όμως } R^2 = x_1^2 y_1^2$$



$$\text{Οπότε } v^2 = 4R^2 = 4R \cdot R = 4\sqrt{x_1 y_1} \cdot \sqrt{x_2 y_2} = 4\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{y_1 y_2} \leq (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = ab$$

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θ₁ Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις του συστήματος

$$\sqrt{9 + x_1} + \sqrt{9 + x_2} + \dots + \sqrt{9 + x_{100}} = 100\sqrt{10}$$

$$\sqrt{16 - x_1} + \sqrt{16 - x_2} + \dots + \sqrt{16 - x_{100}} = 100\sqrt{15}$$

► Θεωρούμε τα διανόμετρα

$$\vec{o}_j = (\sqrt{y + x_j}, \sqrt{16 - x_j}), \quad j = 1, 2, \dots, 100$$

$$\text{και } \vec{o} = 100(\sqrt{10}, \sqrt{15}).$$

Τότε $\sum_{j=1}^{100} \vec{a}_j = \vec{a}$

και θα είναι $\left| \sum_{j=1}^{100} \vec{a}_j \right| = |\vec{a}| = 500$

Αλλά $|\vec{a}| = 5$ και $\sum_{j=1}^{100} |\vec{a}_j| = 500$,

δηλ. $\left| \sum_{j=1}^{100} \vec{a}_j \right| = \sum_{j=1}^{100} |\vec{a}_j|$

Άρα $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \dots = \vec{a}_{100}$, δηλ. $x_1 = x_2 = \dots = x_{100}$

Τότε $\sqrt{y+x_i} = \sqrt{10}$ δηλ. $x_i = 1 = x_j$.

Θ. Στο επίπεδο θεωρούμε 70 σημεία A_1, A_2, \dots, A_{70} με ακέραιες συντεταγμένες. Υποθέτουμε ότι κάθε σημείο έχει βάρος 1 μονάδας και ότι τα κέντρα βάρους των τριάδων $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_{68}A_{69}A_{70}, A_{69}A_{70}A_1, A_{70}A_1A_2$ έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Ν' αποδειχτεί ότι το κέντρο βάρους σημειώσεων τριάδας $A_1A_2A_3$ έχει ακέραιες συντεταγμένες.

► (μαθητών) Κέντρο βάρους των σημείων A_i, A_j, A_k είναι το σημείο

$$\frac{1}{3} (x_i + x_{i+1} + x_{i+2}) = y_i + y_{i+1} + y_{i+2} = 0 \text{ mod } 3,$$

$$i = 1, 2, \dots, 70$$

και αι δείκτες παίρνουνται mod 70.

Άριστε να δουλέψουμε με τις τετμημένες.

'Εστω $S = \sum_{j=1}^{70} x_j$ Τότε

$$S - x_i = 0 \text{ mod } 3 \text{ (γιατί } 70 - 1 = 69 = 0 \text{ mod } 3)$$

και αι προσθέταισι μπορούν να ομοδοποιήσουν ανά 3 διαδοχικαδς).

Τώρα $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} =$

$$3S - (S - x_i) - (S - x_{i+1}) - (S - x_{i+2}) = 0 \text{ mod } 3.$$

Θ. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας (x_n) που ορίζεται από την αναδρομική σχέση.

$$x_{n+2} = \frac{1}{12} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

για αποτελέση προηγκές τιμές x_0, x_1 .

► (μαθητών) Είναι $x_{n+2} = \frac{1}{12} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + 1 \Leftrightarrow$

$$x_{n+2} - \frac{12}{5} = \frac{1}{12} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n - \frac{7}{5} =$$

$$- \frac{1}{12} \left(x_{n+1} - \frac{12}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{12}{5} \right)$$

Θέτω $y_n = \frac{12}{5}$

και η παραπάνω σχέση γράφεται

$$y_{n+2} = \frac{1}{12} y_{n+1} + y_n \quad (1)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (1) είναι η

$$r^2 - \frac{1}{12} r - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 12r^2 - r - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4r - 3)(3r + 2) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad r = -\frac{2}{3}$$

και έχει συνεπώς 2 πραγματικές, δυνατές λύσεις. Προκύπτει, ως γνωστόν, ότι υπάρχουν σταθερές λ και μ (που εξαρτώνται από τους y_0, y_1) ώστε

$$y_n = \lambda \left(\frac{3}{4} \right)^n + \mu \left(-\frac{2}{3} \right)^n$$

Επειδή προφανώς $\lim \left(\frac{3}{4} \right)^n = \lim \left(-\frac{2}{3} \right)^n = 0$

έχουμε $\lim y_n = 0$, άρα και $\lim x_n = 0 + \frac{12}{5} = \frac{12}{5}$.

Θ. Σε μια σαράντα G έχουμε δύο στοιχεία κ και γ τέτοια ώστε $x^n = e$, $y^n = e$, $xy = x^{-1}$ ($n \geq 1$).

N' αποδειχτεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $(x^k y)^2 = e$.

► (μαθητών) Για $K = 0$ γίνεται $(ey)^2 = e \Leftrightarrow y^2 = e$ αληθής είναι

$$y^2 = e \Leftrightarrow y = y^{-1} \text{ και } y \times y = x^{-1} \Leftrightarrow$$

$$x(y \times y) y^{-1} = xx^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow (xy)(yy^{-1}) =$$

$$ey^{-1} \Leftrightarrow xy = y^{-1} \Leftrightarrow xy = y \quad (1)$$

'Εστω ότι αποδεικτέα σχέση ισχύει για ταν $k \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(x^{k+1}y)^2 = x^{k+1}yx^{k+1}y = x^k(xy)x^ky \stackrel{(1)}{=} x^k y x^k y = (x^k y)^2 = e$$

(από την υπόθεση της επαγγής). Συνεπώς ισχύει και για ταν $k+1$, άρα και για κάθε $k \in \mathbb{N}$).

Παρατηρήσεις: Στο 3ο θέμα εάν δε θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε θεωρία σχετική με την $x^{n+2} = \kappa x^{n+1} + \kappa_1 x_n$ (όπως έγινε παραπάνω), προσδιορίζουμε τους λ και μ από το σύστημα $y_0 = \lambda + \mu$, $y_1 = \rho_1 \lambda + \rho_2 \mu$ (που έχει μόναδική λύση, αφού $\rho_1 = \rho_2$) και αποδεικνύουμε ότι $y_n = \lambda \rho_1^n + \mu \rho_2^n$ ως είχες; για $n = 0, 1$ ισχύει. Εάν ισχύει για τους $n, n+1$, τότε

$$y_{n+2} = \frac{1}{12} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n =$$

$$\frac{1}{12} (\lambda \rho_1^{n+1} + \mu \rho_2^{n+1}) + \frac{1}{2} (\lambda \rho_1^n + \mu \rho_2^n) =$$

$$\lambda \left(\frac{1}{12} \rho_1^{n+1} + \frac{1}{2} \rho_1^n \right) + \mu \left(\frac{1}{12} \rho_2^{n+1} + \frac{1}{2} \rho_2^n \right) =$$

$$\lambda \rho_1^{n+2} + \mu \rho_2^{n+2},$$

οπότε $\rho_1^n = \frac{1}{12} \rho_1 + \frac{1}{2}$,

επομένως ισχύει και για $n+2$, δηλ. για κάθε n .