Βασικά Θέματα στην ενότητα «Συνάρτηση οριζόμενη με ολοκλήρωμα»

Α. Πεδίο ορισμού και παράγωγος συναρτήσεων που ορίζονται με ολοκλήρωμα και έχουν τύπους: $f(x)=\int_{\gamma}^{x} g(t)\,dt$ ή $f(x)=\int_{\gamma}^{h(x)} g(t)\,dt$ ή $f(x)=\int_{\phi(x)}^{h(x)} g(t)\,dt$

Μορφή Α «$f(x)=\int_{\gamma}^{x} g(t)\,dt$» (απλή συνάρτηση)

Μια τέτοια συνάρτηση είναι καλά ορισμένη όταν:
η συνάρτηση g είναι **συνεχής σε ένα διάστημα Δ** (**πρόσεξε!** όχι ένωση διαστημάτων)
και ταυτόχρονα ισχύουν οι σχέσεις $\gamma \in \Delta$ και $x \in \Delta$.

Αν καλέσουμε $G(x)$ μια αρχική της g, δηλαδή αν $G'(x)=g(x)$, έχουμε:

$$f(x)=\int_{\gamma}^{x} g(t)dt = G(x)-G(\gamma) \Rightarrow f'(x)=G'(x) \Rightarrow \boxed{\left(\int_{\gamma}^{x} g(t)dt\right)' = g(x), \text{ με } \gamma \in \Delta \text{ και για κάθε } x \in \Delta}.$$

Παρατήρηση: Το κάτω άκρο ολοκλήρωσης (δηλαδή το γ) καθορίζει τη σταθερά c της αρχικής!

Παράδειγμα 1ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{1}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η παράγωγός της.

Λύση Η συνάρτηση $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta_g=(0,\ +\infty)$, οπότε πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $1 \in \Delta$ και $x \in \Delta$, που ισχύουν, άρα $\Delta_f=(0,\ +\infty)$ και $f'(x)=g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι μια αρχική της g.

Σχόλιο: Στη περίπτωση που μπορούμε να ολοκληρώσουμε, όπως στη δοσμένη συνάρτηση, ολοκληρώνοντας έχουμε: $f(x)=\int_{1}^{x} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x}-2\sqrt{1}=2\sqrt{x}-2$, $x \in (0,\ +\infty)$. Άρα $f(x)=2\sqrt{x}-2$ και επειδή γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $y=2\sqrt{x}+c$, είναι μια αρχική της $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, παρατηρούμε ότι το κάτω άκρο ολοκλήρωσης καθορίζει τη σταθερά c της αρχικής!

Παράδειγμα 2ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{-1}^{x} \frac{1}{t}\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η παράγωγός της.

Λύση Η συνάρτηση $g(t)=\frac{1}{t}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta_g=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ (Πρόσεξε! Το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων).

Πρέπει λοιπόν να ισχύουν οι σχέσεις: (I) $\left\{\begin{matrix}-1\in(-\infty,\ 0)\\ \text{και}\\ x\in(-\infty,\ 0)\end{matrix}\right\}$ ή (II) $\left\{\begin{matrix}-1\in(0,\ +\infty)\\ \text{και}\\ x\in(0,\ +\infty)\end{matrix}\right\}$.

Το σύστημα (II) είναι αδύνατο, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\Delta_f=(-\infty,\ 0)$.

Επίσης ισχύει ότι $f'(x)=g(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(-\infty,\ 0)$.

Πρόσεξε ότι η συνάρτηση f δεν είναι μια αρχική της συνάρτησης g, γιατί μια αρχική της g είναι η $y=\ln|x|$ και η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

Σχόλιο: Η συνάρτηση $f(x)=\int_3^x\frac{1}{t}\,dt$, εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο, έχει πεδίο ορισμού το $(0,\ +\infty)$, οπότε μπορούμε να πούμε ότι μια αρχική της συνάρτησης g είναι η συνάρτηση:

$$G(x)=\begin{cases}\int_{-1}^x\frac{1}{t}\,dt, & x<0\\ \int_3^x\frac{1}{t}\,dt, & x>0\end{cases},\ \text{διότι } G'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ \frac{1}{x}, & x>0\end{cases}.$$

Μορφή Β « $f(x)=\int_\gamma^{h(x)}g(t)\,dt$ » (σύνθετη συνάρτηση)

Μια τέτοια συνάρτηση είναι καλά ορισμένη όταν:
η συνάρτηση g είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
και ταυτόχρονα ισχύουν οι σχέσεις: $x\in\Delta_h$, $\gamma\in\Delta$ και $h(x)\in\Delta$.

Αν καλέσουμε $G(x)$ μια αρχική της g, δηλαδή αν $G'(x)=g(x)$, έχουμε:

$$f(x)=\int_\gamma^{h(x)}g(t)dt=G(h(x))-G(\gamma)\Leftrightarrow f'(x)=G'(h(x))\cdot h'(x)\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left(\int_\gamma^{h(x)}g(t)dt\right)'=g(h(x))\cdot h'(x),\ \text{με } \gamma\in\Delta \text{ και για κάθε } x\in\Delta_h \text{ με } h(x)\in\Delta}.$$

Παράδειγμα 3ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{-2}^{\ln x}\frac{t^2+3}{t-1}\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η παράγωγός της.

Λύση Η συνάρτηση $g(t)=\frac{t^2+3}{t-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta_g=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$ (Πρόσεξε! το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων).

Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} x>0 \\ -2\in(-\infty,\ 1) \\ \ln x\in(-\infty,\ 1) \end{cases}$ (I) ή $\begin{cases} x>0 \\ -2\in(1,\ +\infty) \\ \ln x\in(1,\ +\infty) \end{cases}$ (II).

Το σύστημα (II) είναι αδύνατο, οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης βρίσκεται από τη σχέση (I):

$$\begin{Bmatrix} x>0 \\ -2\in(-\infty,\ 1) \\ \ln x<1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x>0 \\ \text{και} \\ \ln x<\ln e \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x>0 \\ \text{και} \\ x<e \end{Bmatrix}$$, άρα $\Delta_f=(0,\ e)$.

Επίσης ισχύει ότι $f'(x)=\dfrac{\ln^2 x+3}{\ln x-1}(\ln x)'=\dfrac{\ln^2 x+3}{x\cdot(\ln x-1)}$ για κάθε $x\in(0,\ e)$.

<u>Μορφή Γ</u> «$f(x)=\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)\,dt$» (διαφορά δύο σύνθετων συναρτήσεων)

Μια τέτοια συνάρτηση είναι καλά ορισμένη όταν:
η συνάρτηση g είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ
και ταυτόχρονα ισχύουν οι σχέσεις: $x\in\Delta_h$, $x\in\Delta_\varphi$, $\varphi(x)\in\Delta$ και $h(x)\in\Delta$.

Αν καλέσουμε $G(x)$ μια αρχική της g, δηλαδή αν $G'(x)=g(x)$, έχουμε:

$$f(x)=\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)dt=G(h(x))-G(\varphi(x))\Leftrightarrow f'(x)=G'(h(x))\cdot h'(x)-G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left(\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)dt\right)'=g(h(x))\cdot h'(x)-g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta_h\cap\Delta_\varphi \text{ με } \varphi(x)\in\Delta \text{ και } h(x)\in\Delta}.$$

Παράδειγμα 4ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{4-x^2}^{4+x^2}\dfrac{e^t}{t-5}dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η παράγωγός της.

Λύση Η συνάρτηση $g(t)=\dfrac{e^t}{t-5}$ έχει πεδίο ορισμού το $\Delta_g=(-\infty,\ 5)\cup(5,\ +\infty)$ (Πρόσεξε! το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων).

Επειδή οι συναρτήσεις $h(x)=4+x^2$ και $\varphi(x)=4-x^2$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις: $\begin{cases} 4+x^2<5 \\ \text{και} \\ 4-x^2<5 \end{cases}$ (I) ή $\begin{cases} 4+x^2>5 \\ \text{και} \\ 4-x^2>5 \end{cases}$ (II). Το σύστημα (I) είναι ισοδύναμο με το $\begin{Bmatrix} x^2<1 \\ \text{και} \\ -x^2<1 \end{Bmatrix}\Leftrightarrow -1<x<1$, ενώ το σύστημα (II) είναι ισοδύναμο με το $\begin{Bmatrix} x^2>1 \\ \text{και} \\ -x^2>1 \end{Bmatrix}$ που είναι αδύνατο.

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $\Delta_g=(-1,\ 1)$.

Επίσης ισχύει ότι: $f'(x)=\dfrac{e^{4+x^2}}{4+x^2-5}(4+x^2)'-\dfrac{e^{4-x^2}}{4-x^2-5}(4-x^2)' \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(e^{4+x^2}\right)}{-1+x^2}-\dfrac{2x\cdot\left(e^{4-x^2}\right)}{-1-x^2}$.

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 1 - 5

B. Στις συναρτήσεις που ορίζονται με ολοκλήρωμα και στις οποίες η μεταβλητή x της συνάρτησης βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα, θα πρέπει να εξαχθεί ως σταθερά εκτός ολοκληρώματος και μετά να παραγωγίσουμε

Η έξοδος της μεταβλητής από το ολοκλήρωμα επιτυγχάνεται είτε με πράξεις είτε με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης.

Μορφή Α «$f(x)=\int_{\gamma}^{x} h(x)\cdot g(t)\,dt$» (Η έξοδος της μεταβλητής επιτυγχάνεται με πράξεις)

Παράδειγμα 1ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x e^{t+x}\ln^2 t\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)+e^{2x}\ln^2 x$.

Λύση $f(x)=\int_1^x e^{t+x}\ln^2 t\,dt \Leftrightarrow f(x)=\int_1^x e^x\cdot e^t\ln^2 t\,dt \Leftrightarrow f(x)=e^x\cdot\int_1^x e^t\ln^2 t\,dt$.

Παρατήρησε ότι η συνάρτηση f είναι γινόμενο δυο συναρτήσεων, της $g(x)=e^x$ και της $h(x)=\int_1^x e^t\ln^2 t\,dt$. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g=\mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της h είναι εκείνο που προσδιορίζεται από τις σχέσεις: $\begin{cases} t\in(0,\ +\infty) \\ 1\in(0,\ +\infty) \\ x\in(0,\ +\infty)\end{cases} \Leftrightarrow A_h=(0,\ +\infty)$. Επομένως το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(0,\ +\infty)$.

$f(x)=e^x\cdot\int_1^x e^t\ln^2 t\,dt \Leftrightarrow \int_1^x e^t\ln^2 t\,dt=\dfrac{f(x)}{e^x} \Leftrightarrow e^x\ln^2 x=\dfrac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{e^{2x}} \Leftrightarrow e^x\ln^2 x=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x} \Leftrightarrow$

$e^x\cdot e^x\ln^2 x=f'(x)-f(x) \Leftrightarrow f'(x)=f(x)+e^{2x}\ln^2 x$.

Πρόσεξε! στις παραγωγίσεις αυτού του είδους, πρώτα να απομονώνεις τη συνάρτηση ολοκλήρωμα και μετά να παραγωγίζεις!

Μορφή Β «$f(x)=\int_{\gamma}^{x} g(x,t)\,dt$» (Η έξοδος της μεταβλητής επιτυγχάνεται με αντικατάσταση)

Παράδειγμα 2ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x t\cdot ημ(x-t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η παράγωγός της.

Λύση $f(x)=\int_0^x t\cdot ημ(x-t)\,dt$. Θέτουμε $x-t=u \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-u \\ dt=-du \\ \text{για } t=0 \text{ είναι } u=x \\ \text{για } t=x \text{ είναι } u=0 \end{cases}$,

οπότε έχουμε:

$$f(x)=\int_0^x t\cdot ημ(x-t)\,dt=\int_x^0 (x-u)ημu\,(-du)=\int_0^x (x-u)ημu\,du=\int_0^x (xημu-uημu)\,du \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\int_0^x xημu\,du-\int_0^x u\cdot ημu\,du \Leftrightarrow f(x)=x\cdot\int_0^x ημu\,du-\int_0^x u\cdot ημu\,du \Leftrightarrow f'(x)=\left(x\cdot\int_0^x ημu\,du-\int_0^x u\cdot ημu\,du\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=(x')\int_0^x ημu\,du+x\cdot\left(\int_0^x ημu\,du\right)'-\left(\int_0^x u\cdot ημu\,du\right)'=\int_0^x ημu\,du+xημx-xημx=\int_0^x ημu\,du \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=[-συνu]_0^x=(-συνx)-(-συν0)=-συνx+1.$$

Παράδειγμα 3ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x} x\cdot\ln(x\cdot t)\,dt$, $x>0$. Να βρεθεί η παράγωγός της.

Λύση $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x} x\cdot\ln(x\cdot t)\,dt$. Θέτουμε $x\cdot t=u \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{u}{x} \\ dt=\frac{1}{x}du \\ \text{για } t=\frac{1}{x} \text{ είναι } u=1 \\ \text{για } t=x \text{ είναι } u=x^2 \end{cases}$, οπότε έχουμε:

$$f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x} x\cdot\ln(x\cdot t)\,dt=\int_1^{x^2} x\cdot\ln u\,\frac{1}{x}du=\int_1^{x^2}\ln u\,du \Leftrightarrow f'(x)=\left(\int_1^{x^2}\ln u\,du\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\ln x^2\left(x^2\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=2x\ln x^2$$

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 6 - 10

Γ. Στις συναρτησιακές σχέσεις ισότητας που περιέχουν συναρτήσεις που ορίζονται με ολοκλήρωμα και αναζητάμε την εύρεση μιας συνάρτησης f, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Παραγωγίζουμε ως προς x και τα δύο μέλη της ισότητας.

2. Μετασχηματίζουμε την ισότητα που προκύπτει από την παραγώγιση ώστε να έχουμε τη μορφή μιας γνωστής διαφορικής εξίσωσης:

α. $(f(x))'=(g(x))' \Rightarrow f(x)=g(x)+c$, **β.** $(f(x))'=f(x)\Rightarrow f(x)=c\cdot e^{x}$, $(f(x))'=-f(x)\Rightarrow f(x)=c\cdot e^{-x}$.

γ. Το τέχνασμα του πολλαπλασιασμού με το $e^{G(x)}$, όπου $G'(x)=g(x)$, $G(x)$ αρχική της $g(x)$):

i. $f'(x)+g(x)f(x)=0\Rightarrow e^{G(x)}f'(x)+e^{G(x)}G'(x)f(x)=0\Rightarrow \left(f(x)e^{G(x)}\right)'=0\Rightarrow f(x)e^{G(x)}=c$,

ii. $g(x)\int_{\gamma}^{x} f(t)dt + f(x) = 0 \Rightarrow e^{G(x)}g(x)\int_{\gamma}^{x} f(t)dt + e^{G(x)}f(x) = 0 \Rightarrow e^{G(x)}g(x)\int_{\gamma}^{x} f(t)dt + e^{G(x)}\left(\int_{\gamma}^{x} f(t)dt\right)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(e^{G(x)}\int_{\gamma}^{x} f(t)dt\right)' = 0 \Rightarrow e^{G(x)}\int_{\gamma}^{x} f(t)dt = c \Rightarrow \int_{\gamma}^{x} f(t)dt = \dfrac{c}{e^{G(x)}}$.

δ. $(f(x))' \cdot f(x) = 0 \Rightarrow 2(f(x))' \cdot f(x) = 0 \Rightarrow \left(f^2(x)\right)' = 0 \Rightarrow f^2(x) = c$.

ε. $f(x)'' = f(x) \Rightarrow f(x)'' + f'(x) = f(x) + f'(x) \Rightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)' = f(x) + f'(x) \Rightarrow f(x) + f'(x) = c \cdot e^x$.

3. Βρίσκουμε τη σταθερά c θέτοντας κατάλληλη τιμή στο x.

4. Ελέγχουμε αν η f(x) επαληθεύει την αρχική σχέση.

Παράδειγμα 1ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + x = \int_1^x \dfrac{f(t)}{x}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση $f(x) + x = \int_0^x \dfrac{f(t)}{x}\,dt \Leftrightarrow f(x) + x = \dfrac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \Leftrightarrow xf(x) + x^2 = \int_1^x f(t)\,dt$ με $x \neq 0$.

Παραγωγίζουμε (εξηγείστε γιατί έχουμε το δικαίωμα) ως προς x και έχουμε:
$f(x) + xf'(x) + 2x = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) = -2x \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow$

Πρόσεξε τώρα το λεπτό σημείο! $f'(x) = (-2x)'$, $x \neq 0$, $\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + c_1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ -2x + c_2 & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$.

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = f(0)$, άρα τελικά $f(x) = -2x + c\,(1)$. Για $x = 1$ η δοσμένη σχέση γίνεται: $f(1) + 1 = \int_1^1 \dfrac{f(t)}{1}\,dt \Rightarrow f(1) = -1$, οπότε η σχέση (1) για $x = 1$ γίνεται $f(1) = -2 + c \Leftrightarrow -1 = -2 + c \Leftrightarrow c = 1$, άρα τελικά $f(x) = -2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Αν θέσουμε στη σχέση $xf(x) + x^2 = \int_1^x f(t)\,dt$, όπου $f(x) = -2x + 1$, έχουμε:

$x(-2x + 1) + x^2 = \int_1^x (-2x + 1)\,dt \Rightarrow -x^2 + x = \left[-2\dfrac{t^2}{2} + t\right]_1^x \Rightarrow -x^2 + x = -x^2 + x$, άρα επαληθεύεται.

Παράδειγμα 2ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = \dfrac{1}{2}$ και η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $1 + \dfrac{x}{2} + \int_0^x f(t)\,dt = e^x - \int_0^x \left(\int_0^y f(t)dt\right) dy$.

Λύση Παραγωγίζουμε ως προς x (εξηγείστε γιατί έχουμε το δικαίωμα) και έχουμε:

$\left(1 + \dfrac{x}{2} + \int_0^x f(t)\,dt\right)' = \left(e^x - \int_0^x \left(\int_0^y f(t)dt\right) dy\right)' \Rightarrow f(x) + \dfrac{1}{2} = e^x - \int_0^x f(t)dt$.

Παραγωγίζουμε για δεύτερη φορά (εξηγείστε γιατί έχουμε το δικαίωμα) και έχουμε:

$$\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)'=\left(e^x-\int_0^x f(t)dt\right)'\Rightarrow f'(x)=e^x-f(x)\Rightarrow f'(x)+f(x)=e^x.$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με το e^x και έχουμε:

$$f'(x)e^x+f(x)e^x=e^{2x}\Rightarrow\left(f(x)e^x\right)'=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\Rightarrow f(x)e^x=\frac{1}{2}e^{2x}+c.$$

Η τελευταία για $x=0$ δίνει $f(0)e^0=\frac{1}{2}e^0+c\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}+c$, όμως από την υπόθεση είναι $f(0)=\frac{1}{2}$, άρα τελικά $c=0$, οπότε η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x)e^x=\frac{1}{2}e^{2x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^x$.

Αν θέσουμε στη σχέση $1+\frac{x}{2}+\int_0^x f(t)\,dt=e^x-\int_0^x\left(\int_0^y f(t)dt\right)dy$, όπου $f(x)=\frac{1}{2}e^x$, έχουμε:

$$1+\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{1}{2}e^t\,dt=e^x-\int_0^x\left(\int_0^y\frac{1}{2}e^tdt\right)dy\Rightarrow 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^x=e^x-\frac{1}{2}\int_0^x\left[e^t\right]_0^y dy\Rightarrow$$

$$1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(e^x-1\right)=e^x-\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^y-1\right)dy\Rightarrow 1+\frac{x}{2}+\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}=e^x-\frac{1}{2}\left[e^y-y\right]_0^x\Rightarrow,$$

$$1+\frac{x}{2}+\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}=e^x-\frac{1}{2}\left(\left(e^x-x\right)-\left(e^0-0\right)\right)\Rightarrow 1+\frac{x}{2}+\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2}=1+\frac{x}{2}+\frac{e^x}{2}-\frac{1}{2},$$ άρα επαληθεύεται.

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 11 - 17

Δ.

Η ύπαρξη των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x)=0$ σε διάστημα Δ εξασφαλίζεται συνήθως με εφαρμογή ή του θεωρήματος του BOLZANO για την f ή θεωρήματος ROLLE σε μια αρχική συνάρτηση της f. Η μοναδικότητα της ρίζας εξασφαλίζεται συνήθως με τη μονοτονία της συνάρτησης στο Δ.

Μορφή Α   Χρήση του Θεωρήματος Bolzano

Παράδειγμα 1ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,\ 3]$ και για κάθε $x\in[2,\ 3]$ ισχύει $f(x)>7$. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(2,\ 3)$ υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\int_2^x f(t)\,dt=4x-5$.

Λύση Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $\int_2^x f(t)\,dt=4x-5\Leftrightarrow\int_2^x f(t)\,dt-4x+5=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_2^x f(t)\,dt-4x+5$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,\ 3]$.

Έχουμε $h(2)=\int_2^2 f(t)\,dt-8+5=-3$ και $h(3)=\int_2^3 f(t)\,dt-12+5=\int_2^3 f(t)\,dt-7$.

Επειδή $f(x)>7\Leftrightarrow\int_2^3 f(x)dx>\int_2^3 7dx\Rightarrow\int_2^3 f(x)dx>7[x]_2^3\Rightarrow\int_2^3 f(x)dx>7\Rightarrow\int_2^3 f(x)dx-7>0\Rightarrow h(3)>0$

Άρα $h(2)\cdot h(3)<0$, οπότε ισχύει το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση h στο [2, 3], άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,\ 3)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

Η συνάρτηση h έχει παράγωγο $h'(x) = f(t) - 4 > 7 - 4 > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 18 - 21

Μορφή Β Χρήση του Θεωρήματος Rolle

Παράδειγμα 2ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, e] και ισχύει $\int_1^e f(x)\,dx = e$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (1,\ e)$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = 1 + \ln x_0$.

Λύση Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 1 + \ln x \Leftrightarrow f(x) - 1 - \ln x = 0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - 1 - \ln x$ η οποία έχει μια αρχική την $H(x) = \int_1^x \left(f(t) - 1 - \ln t\right) dt \Rightarrow$

$$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x dt - \int_1^x \ln t dt = \int_1^x f(t)\,dt - [t]_1^x - [t\ln t - t]_1^x = \int_1^x f(t)\,dt - (x-1) - (x\ln x - x - 1\ln 1 + 1) \Rightarrow$$

$$H(x) = \int_1^x f(t)\,dt - x + 1 - x\ln x + x - 1 \Rightarrow H(x) = \int_1^x f(t)\,dt - x\ln x.$$

Η συνάρτηση $H(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [1, e].

$H(1) = 0$ και $H(e) = \int_1^e f(t)\,dt - e\ln e = e - e = 0$, άρα ισχύει για την H το θεώρημα του Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,\ e)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $H'(x_0) = 0 \Rightarrow h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = 1 + \ln x_0$.

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 22 – 24

E. **Σε ασκήσεις που έχουμε παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $\Delta = [\alpha,\ \beta]$ και μια ανισοϊσότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$ ισχύει για κάθε $x \in \Delta$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Fermat.**

Παράδειγμα 1ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^2 + \int_1^x f(t)\,dt \geq 1 + 2\ln x$. Να βρεθεί το $f(1)$.

Λύση $x^2 + \int_1^x f(t)\,dt \geq 1 + 2\ln x \Leftrightarrow x^2 + \int_1^x f(t)\,dt - 1 - 2\ln x \geq 0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = x^2 + \int_1^x f(t)\,dt - 1 - 2\ln x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x > 0$ ισχύει $h(x) \geq 0$. Είναι $h(1) = 1^2 + \int_1^1 f(t)\,dt - 1 - 2\ln 1 = 0$, επομένως ισχύει $h(x) \geq h(1)$, για κάθε $x > 0$, άρα το $h(1) = y_{min}$, οπότε ισχύει το Θ.Fermat και έχουμε $h'(1) = 0$.

Παραγωγίζουμε και έχουμε $h'(x)=\left(x^2+\int_1^x f(t)\,dt-1-2\ln x\right)' \Rightarrow h'(x)=2x+f(x)-\frac{2}{x}$.

$h'(1)=2+f(1)-2=f(1)$, και επειδή $h'(1)=0$ έχουμε τελικά ότι $f(1)=0$.

Παράδειγμα 2ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x>0$ ισχύει $x+\int_1^x f(t)\,dt \geq \sqrt{x}\cdot 2\ln x+1$. Να βρεθεί το $f(1)$.

Λύση $x+\int_1^x f(t)\,dt \geq \sqrt{x}\cdot \ln x+1 \Leftrightarrow x+\int_1^x f(t)\,dt-1-\sqrt{x}\ln x \geq 0$.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=x+\int_1^x f(t)\,dt-1-\sqrt{x}\ln x$, η οποία είναι παραγωγίσμη και για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)\geq 0$. Είναι $h(1)=1+\int_1^1 f(t)\,dt-1-\ln 1=0$, επομένως ισχύει $h(x)\geq h(1)$, για κάθε $x>0$, άρα το $h(1)=y_{min}$, οπότε ισχύει το Θ.Fermat και έχουμε $h'(1)=0$.

Παραγωγίζουμε και έχουμε $h'(x)=\left(x+\int_1^x f(t)\,dt-1-\sqrt{x}\ln x\right)' \Rightarrow h'(x)=1+f(x)-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{x}$.

$h'(1)=1+f(1)-0-1=f(1)$, και επειδή $h'(1)=0$ έχουμε τελικά ότι $f(1)=0$.

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 25 - 28

Στ. Συχνά συναντάμε θέματα στα οποία ζητείται η εύρεση ενός ορίου μιας συνάρτησης στην οποία κάποιος όρος περιέχει ολοκλήρωμα και η μεταβλητή του ορίου βρίσκεται στα άκρα ολοκλήρωσης.

Σε γενικές γραμμές τα θέματα αυτά αντιμετωπίζονται ως εξής:

Μορφή Α Σε όρια της μορφής $\lim_{x\to x_0}\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)dt$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού υπολογίζουμε το όριο ως εξής:

Αν καλέσουμε $f(x)=\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)dt$, τότε έχουμε ότι $f'(x)=g(h(x))\cdot h'(x)-g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$, οπότε αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής, άρα $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=\int_{\varphi(x_0)}^{h(x_0)} g(t)dt$.

Παράδειγμα 1ον Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2}\frac{\eta\mu t}{t}dt$.

Λύση

Αν $g(t)=\frac{\eta\mu t}{t}$, τότε το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g=(-\infty,\ 0)\cup(0,+\infty)$. Αν θέσουμε $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{\eta\mu t}{t}dt$, τότε το πεδίο ορισμού της f βρίσκεται από τις σχέσεις:

$\begin{Bmatrix} x<0 \\ \text{και} \\ x^2<0 \end{Bmatrix}$ ή $\begin{Bmatrix} x>0 \\ \text{και} \\ x^2>0 \end{Bmatrix}$, άρα $A_f=(0,\ +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{\eta\mu x^2}{x^2}(x^2)'-\frac{\eta\mu x}{x}(x)'=2x\cdot\frac{\eta\mu x^2}{x^2}-\frac{\eta\mu x}{x}=2\cdot\frac{\eta\mu x^2}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}$, άρα συνεχής οπότε συνεχής και στη θέση $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=\int_1^1\frac{\eta\mu t}{t}dt=0$.

Μορφή Β Αν μπορούμε να ολοκληρώσουμε, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο.

Παράδειγμα 2ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{x+1}\ln t\,dt$.

Λύση

$\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\int_x^{x+1}(t)'\ln t\,dt=[t\ln t]_x^{x+1}-\int_x^{x+1}t(\ln t)'\,dt=[t\ln t]_x^{x+1}-\int_x^{x+1}dt=$

$=[t\ln t]_x^{x+1}-[t]_x^{x+1}=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-(x+1-x)=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x-1$, άρα αναζητάμε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}((x+1)\ln(x+1)-x\ln x-1)$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^+}((x+1)\ln(x+1))=1\cdot\ln1=0$ και

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x)\overset{(0\cdot(-\infty))}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to0^+}x=0$$, άρα τελικά

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^{x+1}\ln t\,dt=\lim_{x\to0^+}((x+1)\ln(x+1)-x\ln x-1)=\lim_{x\to0^+}((x+1)\ln(x+1))-\lim_{x\to0^+}(x\ln x)-1=-1$$

Μορφή Γ Σε όρια που οδηγούν σε αοριστία $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ χρησιμοποιούμε τους κανόνες de L'Hospital.

Παράδειγμα 3ον Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^3}\int_0^x\eta\mu t^2dt$.

Λύση

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \eta\mu t^2 dt=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \eta\mu t^2 dt}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

Μορφή Δ Σε όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\varphi(x)}^{h(x)} g(t)dt$ χρησιμοποιούμε είτε το κριτήριο παρεμβολής είτε το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα. Μελέτησε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4ον Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt$.

Λύση

1ος Τρόπος Συνθετικός (Ειδικός)

$x\le t\le x+1\Rightarrow x^2\le t^2\le (x+1)^2\Rightarrow x^2+3\le t^2+3\le x^2+2x+4\Rightarrow$

$$\frac{1}{x^2+2x+4}\le\frac{1}{t^2+3}\le\frac{1}{x^2+3}\Rightarrow\Rightarrow\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}dt\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\int_x^{x+1}dt\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\int_x^{x+1}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}[t]_x^{x+1}\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}[t]_x^{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}[x+1-x]\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}[x+1-x]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt=0$.

2ος Τρόπος Με την ιδιότητα $m\cdot(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M\cdot(\beta-\alpha)$ και κριτήριο παρεμβολής (Γενικός)

Αν $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}$ τότε $f'(t)=-\frac{t}{(t^2+3)\sqrt{t^2+3}}<0$, $t>0$.

Στο διάστημα [x, x+1] η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα και έχει $m=f(x+1)$ και $M=f(x)$, οπότε εφαρμόζοντας το ότι «αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε $m\cdot(\beta-\alpha)\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M\cdot(\beta-\alpha)$ », έχουμε:

$$m\cdot(x+1-x)\le\int_x^{x+1}f(t)dt\le M\cdot(x+1-x)\Rightarrow f(x+1)\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}dt\le f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\le\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=0$.

3ος Τρόπος Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ

Αν η συνάρτηση $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}$ έχει μια αρχική, έστω την F, τότε έχουμε:

$\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=F(x+1)-F(x)$. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[x,\ x+1]$, οπότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,\ x+1]$, πάντα θα βρίσκουμε ένα ξ που θα εξαρτιέται από το x, δηλαδή θα υπάρχει $\xi(x)\in[x,\ x+1]$: $F'(\xi(x))=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f(\xi(x))=F(x+1)-F(x)$, οπότε έχουμε: $\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=f(\xi(x))(x+1-x)\Rightarrow\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2(x)+3}}$.

Είναι $x\le\xi(x)\le x+1$ και ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}x=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=+\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt=\lim\limits_{\xi(x)\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2(x)+3}}=0$.

Μορφή Ε Σε όρια της μορφής $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\varphi(x)}^{h(x)}g(t)dt$, όπου στον τύπο της συνάρτησης που ολοκληρώνουμε υπάρχουν ημ(t, x) και συν(t, x) (συναρτήσεις οι οποίες όταν το $x\to\pm\infty$ δεν έχουν όριο) χρησιμοποιούμε τη πρόταση $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$, αφού πρώτα την αποδείξουμε. Στις περιπτώσεις αυτές συνήθως το όριο είναι ίσο με μηδέν.

Θέμα Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ ισχύει ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $-|x|\le x\le|x|$, οπότε και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε αντίστοιχα ότι $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$. Αφού f συνεχής, συνεχείς είναι και οι $|f|,-|f|$, οπότε ολοκληρώνοντας στο $[\alpha,\beta]$ έχουμε: $-\int_\alpha^\beta|f(x)|dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$, και με βάση τη γνωστή ιδιότητα των απολύτων τιμών «$|x|\le\theta\Leftrightarrow-\theta\le x\le\theta$», συμπεραίνουμε ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\le\int_\alpha^\beta|f(x)|dx$.

Παράδειγμα 5ον Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^\pi\dfrac{\eta\mu(tx)}{t+x}\,dt=0$.

Λύση

Επειδή $x \to +\infty$, είναι $x > 0$ και $0 \le t \le \pi$ (1), οπότε και $t \ge 0$, άρα και $|t+x| > 0$ (2).

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu(tx)}{t+x}dt\right| \le \int_0^{\pi}\left|\frac{\eta\mu(tx)}{t+x}\right|dt \le \int_0^{\pi}\frac{|\eta\mu(tx)|}{|t+x|}dt \le \int_0^{\pi}\frac{1}{|t+x|}dt \le \int_0^{\pi}\frac{1}{t+x}dt \le \int_0^{\pi}\frac{1}{0+x}dt \le \frac{1}{x}\int_0^{\pi}dt = \frac{\pi}{x} \Rightarrow$$

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\eta\mu(tx)}{t+x}dt\right| \le \frac{\pi}{x} \Rightarrow 0 \le \int_0^{\pi}\frac{\eta\mu(tx)}{t+x}dt \le \frac{\pi}{x}, \text{ όμως } \lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu(tx)}{t+x}dt = 0.$$

Παράδειγμα 6ον Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to-\infty}\int_0^{x}\frac{(2t+x\eta\mu t))}{x^3}dt = 0$.

Λύση

Επειδή $x \to -\infty$, είναι $x < 0$ και $x \le t \le 0$ (1).

$$\left|\int_0^{x}\frac{(2t+x\eta\mu t))}{x^3}dt\right| = \left|-\int_x^{0}\frac{(2t+x\eta\mu t))}{x^3}dt\right| = \frac{1}{|x|^3}\int_x^0|2t+x\eta\mu t|dt \le \frac{1}{|x|^3}\int_x^0(2|t|+|x|)dt \le \frac{1}{|x|^3}\left(\int_x^0 2|t|dt + |x|\int_x^0 dt\right) \le$$

$$\frac{2}{|x|^3}\int_x^0 -t\,dt + \frac{|x|}{|x|^3}\int_x^0 dt \le \frac{2}{|x|^3}\left[-\frac{t^2}{2}\right]_x^0 + \frac{1}{|x|^3}[t]_x^0 = \frac{1}{(-x)^3}x^2 + \frac{1}{(-x)^3}(-x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x}{x^2} \Rightarrow$$

$$0 \le \left|\int_0^{x}\frac{(2t+x\eta\mu t))}{x^3}dt\right| \le \frac{1-x}{x^2}, \text{ όμως } \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x^2} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x\to-\infty}\int_0^{x}\frac{(2t+x\eta\mu t))}{x^3}dt = 0.$$

Για εξάσκηση να λυθούν τα θέματα 29 - 42

Προτεινόμενα θέματα

Θέμα 1ον Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_2^x \frac{4-t^2}{t-1}\,dt$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 2ον Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_{4-x^2}^{4+x^2} \frac{\ln t}{t-3}\,dt$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 3ον Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_1^{x^2-4x} \frac{1-e^t}{1+e^t}\,dt$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 4ον Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_2^x \ln(t^2-1)\,dt + \int_x^3 \ln(u+1)\,du$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 5ον Έστω η συνάρτηση $f(x) = \int_{e^{\sigma\upsilon\nu x}}^{e^{\eta\mu x}} 2\ln t\,dt$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 6ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \frac{xσυνt}{t^2}\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{f(x)+συνx}{x}$, $x>0$.

Θέμα 7ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x x^2 tημ(xt)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η παράγωγός της.

Θέμα 8ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_2^x \frac{xe^{t^2}}{t^2}\,dt$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και να αποδείξετε ότι $f'(x)=\frac{f(x)+e^{x^2}}{x}$.

Θέμα 9ον Έστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{2-ημ(x-t)}{2+ημ(x-t)}\,dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η παράγωγός της.

Θέμα 10ον Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετηθεί η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, με $x\in\mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία και τη καμπυλότητα.

Θέμα 11ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_2^x f(t)\,dt=(α-1)x^3-αx^2-α-1$. Επίσης να βρεθεί η τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Θέμα 12ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)-x=\int_0^x f(t)\,dt$.

Θέμα 13ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\int_α^x f(t)\,\ln\left(\frac{x}{t}\right)dt=x^2-3x+2$. Επίσης να βρεθεί η τιμή του $α\in\mathbb{R}$.

Θέμα 14ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=x^2-\int_1^x \frac{xf(t)}{t^2}\,dt$.

Θέμα 15ον Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(x)=(1+e^x)\left(1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+e^t}dt\right)$.

Θέμα 16ον Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)=(1+x^2)\left(1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η f.

Θέμα 17ον Έστω η συνεχής συνάρτηση f με την ιδιότητα $x\int_0^1 f(xt)dt=f(x)-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

Θέμα 18ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και για κάθε $x \in [0,\ 1]$ ισχύει $f(x) < 1$. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(0,\ 1)$ υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\int_1^x f(t)\,dt = 3x - 2$.

Θέμα 19ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$ και για κάθε $x \in [1,\ 2]$ ισχύει $f(x) < 1$. Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(1,\ 2)$ υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 3$.

Θέμα 20ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha,\ \beta]$ είναι $f(x) \neq 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε να ισχύει $\int_\alpha^\xi f(t)\,dt = \int_\xi^\beta f(t)\,dt$.

Θέμα 21ον Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς στο $[1,\ 2]$ και ισχύει $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,\ 2]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [1,\ 2]$ τέτοιο ώστε $\int_1^{x_0} f(t)dt = \int_2^{x_0} g(t)dt$.

Θέμα 22ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και ισχύει ότι $\int_0^1 f(x)\,dx = e$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\ 1)$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = e^\xi + 2\xi$.

Θέμα 23ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε να ισχύει $\int_\alpha^\xi f(t)dt = -f(\xi)$.

Θέμα 24ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ \pi]$ και ισχύει ότι $\int_0^\pi f(x)\,dx = 2 - \pi^2$. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\ \pi)$ ώστε να ισχύει $f(\xi) = \eta\mu\xi - 2\xi$.

Θέμα 25ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_1^x f(t)\,dt \geq e \cdot \ln x + 1$. Να βρεθεί το $f(1)$.

Θέμα 26ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x < 1$ ισχύει $e^x + \int_0^x f(t)\,dt \leq xe^x + 1$. Να βρεθεί το $f(0)$.

Θέμα 27ον Η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_1^x f(t)\,dt \leq x\ln x + 1$. Αν $\int_1^e f(t)\,dt = e + 1$, να βρεθεί το $f(e)$.

Θέμα 28ον Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_1^{x^2} f(t)dt \geq x^2-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(1)=1$.

Θέμα 29ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to e}\frac{1}{x^3}\int_1^x \ln t\, dt$.

Θέμα 30ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\eta\mu t\, dt}{x^2\eta\mu x}$.

Θέμα 31ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_{x+1}^{3x-1}\frac{dt}{1+t^2}}{x-1}$.

Θέμα 32ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\int_{x^3}^{x^3+1}\frac{t}{t^2+t+1}\, dt$.

Θέμα 33ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to -\infty}\int_{x+2}^{x+3}\sqrt{\frac{3-t}{t^2+t+1}}dt$.

Θέμα 34ον Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_{x}^{x+2}\frac{4t^2+1}{t^2+1}\, dt$.

Θέμα 35ον Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} x\int_0^x e^{t^2-x^2}dt$.

Θέμα 36ο Αν $f(0)=1$ και $f'(0)=1$, τότε να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x xf(t)\, dt}{x-\eta\mu x}$.

(Στις ασκήσεις 37-42 χρησιμοποίησε την ιδιότητα $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$)

Θέμα 37ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_x^{2x-2}\frac{x\eta\mu(t+1)-2\sigma\upsilon\nu t}{x^4+t+1}\, dt$.

Θέμα 38ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_0^5\frac{x-x\eta\mu\sqrt{t}}{x^4+tx+t^2}\, dt$.

Θέμα 39ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x^4+x+1}\int_0^x (2t-\sigma\upsilon\nu t^2)\, dt$.

Θέμα 40ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_0^3\frac{x\eta\mu\sqrt{t+1}-3\sigma\upsilon\nu t}{2x^2+3t}\, dt$.

Θέμα 41ον Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\int_0^x e^{-t^2}\sigma\upsilon\nu^4 t\, dt$.

Θέμα 42ον Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_{x^2+1}^{x^2+3}\frac{t\eta\mu t+2\sigma\upsilon\nu t+t^2}{t^2+t+1}\, dt$.

Ζ. Βασικές Έννοιες

Ερώτηση 1 Ποιος είναι ο συμβολισμός Leibniz για την παράγωγο;

Απάντηση

$f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ ή απλούστερα $y'=\dfrac{dy}{dx}$.

Σχόλιο: Το σύμβολο $\dfrac{dy}{dx}$ δεν είναι κλάσμα αλλά συμπεριφέρεται σαν κλάσμα.

Ερώτηση 2 Πως βρίσκουμε το διαφορικό μιας συνάρτησης f;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση $y=f(x)$ παραγωγίσιμη στο x. Το διαφορικό της f στη θέση x το συμβολίζουμε με $d(f(x))$ ή dy και είναι $d(f(x))=f'(x)dx$.

Ερώτηση 3 Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα [α,β] είναι ολοκληρώσιμη σε αυτό;

Απάντηση

Ναι, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε το ολοκλήρωμα της οποιαδήποτε συνεχούς συνάρτησης, όπως για παράδειγμα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{e^x}{x}\,dx$ με $0<\alpha<\beta$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{1}{\ln x}\,dx$ με $0<\alpha<\beta$.

Ερώτηση 4 Ποιες είναι οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις για μας;

Απάντηση

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις για μας είναι οι συνεχείς, με την έννοια ότι «αν δεν είναι συνεχής, δεν είναι ολοκληρώσιμη!»

Ερώτηση 5 Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ σαν έννοια τι είναι;

Απάντηση

Είναι ένας πραγματικός αριθμός είτε θετικός είτε αρνητικός είτε ακόμα και μηδέν.

Ερώτηση 6 Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ με τι ισούται;

Απάντηση

Αν F μια αρχική συνάρτηση της f, δηλαδή ισχύει ότι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$.

Ερώτηση 7 Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ από τι εξαρτάται;

Απάντηση

Εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f και το διάστημα $[\alpha,\beta]$. Για το λόγο αυτό τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$ παριστάνουν τον ίδιο αριθμό, οπότε έχουμε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(u)du$.

Ερώτηση 8 Αν $\alpha<\beta$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(x)>0$ ή $f(x)\geq 0$ ή $f(x)<0$ ή $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$ γνωρίζουμε το πρόσημο του $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$;

Απάντηση

Ναι, είναι αντίστοιχα σε κάθε περίπτωση $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq 0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx<0$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\leq 0$.

Η. Βασικές προτάσεις

Πρόταση 1 Αν f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\le g(x)$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Απόδειξη

Αφού $f(x)\le g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))\le 0 \Leftrightarrow$
$\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx\le 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Πρόταση 2 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $-|x|\le x\le |x|$, οπότε και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ έχουμε αντίστοιχα ότι $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$. Αφού f συνεχής τότε συνεχείς είναι και οι $|f|,-|f|$, οπότε οι συναρτήσεις $f,|f|,-|f|$ είναι ολοκληρώσιμες. Ολοκληρώνοντας στο $[\alpha,\beta]$ και με βάση το προηγούμενο έχουμε: $-\int_\alpha^\beta |f(x)|dx \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$ (1), οπότε με βάση τη γνωστή ιδιότητα των απολύτων τιμών: «$|x|\le\theta \Leftrightarrow -\theta\le x\le\theta$», από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

Πρόταση 3 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m\cdot(\beta-\alpha)\le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M\cdot(\beta-\alpha)$.

Απόδειξη

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν λοιπόν καλέσουμε $m=y_{min}$ και $M=y_{max}$ τότε για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει: $m\le f(x)\le M$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή έχουμε: $\int_\alpha^\beta m dx \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta M dx \Leftrightarrow m\int_\alpha^\beta dx \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M\int_\alpha^\beta dx \Leftrightarrow$
$m[x]_\alpha^\beta \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M[x]_\alpha^\beta \Leftrightarrow m\cdot(\beta-\alpha)\le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M\cdot(\beta-\alpha)$.

Πρόταση 4 Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ τότε «υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)>0$».

Απόδειξη

Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F μια αρχική συνάρτηση της f, οπότε $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Επειδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ και $\beta>\alpha \Leftrightarrow \beta-\alpha>0$, από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$ (2).

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ διότι $F'(x)=f(x)$ (3), άρα και συνεχής, οπότε γι' αυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ , άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $F'(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0)>0$.

Σχόλιο

Τον συλλογισμό μας μπορούσαμε να τον υποστηρίξουμε και με εις άτοπο απαγωγή, δηλαδή αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ίσχυε ότι $f(x)\le 0$ θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le 0$.

Πρόταση 5 Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$ τότε «υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)<0$».

Απόδειξη

Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F μια αρχική συνάρτηση της f, οπότε $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Επειδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$ και $\beta>\alpha\Leftrightarrow\beta-\alpha>0$, από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}<0$ (2).

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ διότι $F'(x)=f(x)$ (3), άρα και συνεχής, οπότε γι' αυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ , άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $F'(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0)<0$

Σχόλιο

Τον συλλογισμό μας μπορούσαμε να τον υποστηρίξουμε και με εις άτοπο απαγωγή, δηλαδή αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ίσχυε ότι $f(x)\ge 0$ θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$.

Πρόταση 6 Αν για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε «υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$».

Απόδειξη

Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F μια αρχική συνάρτηση της f, οπότε $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Επειδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και $\beta>\alpha\Leftrightarrow\beta-\alpha>0$, από την (1) συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$ (2).

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ διότι $F'(x)=f(x)$ (3), άρα και συνεχής, οπότε γι' αυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ , άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $F'(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} f(x_0)=\dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0)=0$.

Σχόλιο
Τον συλλογισμό μας μπορούσαμε να τον υποστηρίξουμε και με εις άτοπο απαγωγή, δηλαδή αν για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ίσχυε ότι $f(x) \neq 0$ μιας και η f είναι συνεχής θα διατηρούσε πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, οπότε θα ήταν:

ή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, άρα και $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ που είναι άτοπο,

ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, άρα και $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ που είναι άτοπο.

Πρόταση 7 Αν ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $\beta - \alpha = \delta - \gamma$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha,\beta)$ και τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\gamma,\delta)$, άρα $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Απόδειξη
Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$, όπου F μια αρχική συνάρτηση της f, οπότε $\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} = \dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (1). Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ διότι $F'(x) = f(x)$ (2), άρα και συνεχής, οπότε γι' αυτήν ισχύει το Θ.Μ.Τ , άρα υπάρχει $x_1 \in (\alpha,\beta)$ με $F'(x_1) = \dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_1) = \dfrac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f(x_1) = \dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx = f(x_1)(\beta-\alpha)$ (3) .

Είναι $\int_\gamma^\delta f(x)dx = F(\delta) - F(\gamma)$, όπου F μια αρχική συνάρτηση της f, οπότε $\dfrac{\int_\gamma^\delta f(x)dx}{\delta-\gamma} = \dfrac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma}$ (4). Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[\gamma,\delta]$ και εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (\gamma,\delta)$ με

$F'(x_2) = \dfrac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_2) = \dfrac{F(\delta)-F(\gamma)}{\delta-\gamma} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} f(x_2) = \dfrac{\int_\gamma^\delta f(x)dx}{\delta-\gamma}$

$\Leftrightarrow \int_\gamma^\delta f(x)dx = f(x_2)(\delta-\gamma)$ (4) .

Όμως $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ και από τις (3) και (4) έχουμε ότι $f(x_1)(\beta-\alpha) = f(x_2)(\delta-\gamma)$ και επειδή $\beta - \alpha = \delta - \gamma \neq 0 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Σημείωση: Αν γνωρίζουμε ότι η f είναι και παραγωγίσιμη τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2] \subseteq [\alpha,\delta]$, οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2) \subseteq (\alpha,\delta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Πρόταση 8 Αν ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ και $\int_\beta^\gamma f(x)dx < 0$ και με $\alpha < \beta < \gamma$ τότε οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Απόδειξη

Επειδή $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$, από τη πρόταση 4 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) > 0$.

Επειδή $\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx < 0$, από τη πρόταση 5 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) < 0$. Είναι $[x_1, x_2] \subseteq [\alpha,\beta]$.
Οπότε για την f ισχύουν στο διάστημα $[x_1, x_2]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Πρόταση 9 Αν $\alpha < \beta$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) > 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Απόδειξη
Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και για $x = \xi$ είναι $f(\xi) > 0$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) > 0$, οπότε για x κοντά στο ξ θα είναι $f(x) > 0$, δηλαδή θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\xi-\delta, \xi) \cup (\xi, \xi+\delta)$ να είναι $f(x) > 0$, οπότε θα είναι και $\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx > 0$ (I). Έχουμε λοιπόν τα εξής:

Για $x \in [\alpha, \xi\text{-}\delta]$, είναι $f(x) \geq 0$, οπότε $\int\limits_{\alpha}^{\xi-\delta} f(x)dx \geq 0$ (II).

Για $x \in [\xi+\delta, \beta]$, είναι $f(x) \geq 0$, οπότε $\int\limits_{\xi+\delta}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ (III).

Είναι: $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\xi-\delta} f(x)dx + \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)dx + \int\limits_{\xi+\delta}^{\beta} f(x)dx$ που λόγω των (I), (II) και (III) έχουμε τελικά ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.

Σχόλιο: Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα βγαίνει και αν $\xi \in [\alpha, \beta]$.

Πρόταση 10 Αν $\alpha < \beta$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και ισχύει $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) < 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < 0$.

Απόδειξη
Η απόδειξη της πρότασης είναι όμοια με την απόδειξη της πρότασης 9.

Σχόλιο: Το ίδιο ακριβώς συμπέρασμα βγαίνει και αν $\xi \in [\alpha, \beta]$.

Θ. Βασικά Θέματα

Θέμα 1 Μια **σημαντική αντικατάσταση** που διευκολύνει τον υπολογισμό ενός ορισμένου ολοκληρώματος $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι η $x=\alpha+\beta-y$. Στη περίπτωση αυτή μάλιστα ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$, διότι:

Αν $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (1) και θέσουμε $x=\alpha+\beta-y$ τότε $y=\alpha+\beta-x \Leftrightarrow dy=-dx$. Για $x=\alpha \Leftrightarrow u=\beta$ και για $x=\beta \Leftrightarrow u=\alpha$, οπότε η (1) παίρνει τη μορφή: $I=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\beta^\alpha f(\alpha+\beta-y)(-dy)=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-y)dy$,

οπότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$.

Στη περίπτωση που έχουμε άκρα που είναι αριθμοί **αντίθετοι**, δηλαδή αν έχουμε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ τότε προκύπτει η αντικατάσταση $x=-y$.

Εφαρμογή

Να αποδειχθεί ότι για τη συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο $[-\alpha,\ \alpha]$ με $\alpha<0$ ισχύει ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx$.

Απόδειξη

Έχουμε $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$. Θέτουμε $x=-\alpha+\alpha-y \Leftrightarrow x=-y$ και έχουμε: $dx=-dy$. Για $x=-\alpha$ είναι $y=\alpha$ και για $x=\alpha$ είναι $y=-\alpha$, οπότε $I=\int_{\alpha}^{-\alpha} f(-y)(-dy)=-\int_{\alpha}^{-\alpha} f(-y)dy=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-y)dy=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)dx$

Θέμα 2 Πρέπει να ξέρουμε να υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα της μορφής $A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+1}dx$ και $B=\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^2+1}dx$. Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται κάνοντας την αντικατάσταση $x=\varepsilon\phi y$.

Αν θέσουμε $x=\varepsilon\phi y \Leftrightarrow dx=(\varepsilon\phi y)'dy \Leftrightarrow dx=(1+\varepsilon\phi^2 y)dy$ και βρίσκοντας τα νέα άκρα ολοκλήρωσης, έστω γ και δ θα έχουμε:

$$A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{x^2+1}dx=\int_\gamma^\delta \frac{1}{\varepsilon\phi^2 y+1}(1+\varepsilon\phi^2 y)dy=\int_\gamma^\delta dy=[y]_\gamma^\delta=\delta-\gamma.$$

$$B=\int_\alpha^\beta \frac{x^2}{x^2+1}dx=\int_\gamma^\delta \frac{\varepsilon\phi^2 y}{\varepsilon\phi^2 y+1}(1+\varepsilon\phi^2 y)dy=\int_\gamma^\delta \varepsilon\phi^2 y\,dy \ (1).$$ Πρόσεξε τώρα!

Είναι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1+\varepsilon\phi^2 x$, οπότε $\varepsilon\phi^2 x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1$ και η (1) παίρνει τη μορφή:

$$B=\int_\gamma^\delta \left[\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 y}-1\right]dy=[\varepsilon\varphi y-y]_\gamma^\delta=(\varepsilon\varphi\delta-\delta)-(\varepsilon\varphi\gamma-\gamma).$$

Θέμα 3 **Αντίστροφη συνάρτηση και Ολοκλήρωμα**

Σε ολοκληρώματα που περιέχεται η αντίστροφη συνάρτηση θέτουμε $x=f(u)$ αν θα περάσουμε από την f^{-1} στην f ή $x=f^{-1}(u)$ αν θα περάσουμε από την f στην f^{-1} και κάνουμε αλλαγή της μεταβλητής. Μελέτησε τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1ον

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και «1-1» στο διάστημα [α, β], να δειχθεί ότι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$

Απόδειξη

Αν θέσουμε $x=f(u)$, έχουμε: $dx=f'(u)du$ και για $x=f(\alpha)\Leftrightarrow f(u)=f(\alpha)\overset{(f:1-1)}{\Leftrightarrow} u=\alpha$, ενώ για $x=f(\beta)\Leftrightarrow f(u)=f(\beta)\overset{(f:1-1)}{\Leftrightarrow} u=\beta$, οπότε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(u))f'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta} uf'(u)du=\int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx.$$

Παράδειγμα 2ον

Αν η συνάρτηση f είναι «1-1» και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x$ να βρεθεί το $I=\int_0^1 f(x)dx$

Λύση

Θέτουμε $x=f^{-1}(u)\Leftrightarrow dx=\left((f^{-1}(u)\right)'du\Leftrightarrow dx=\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}\right)du$.

Για $x=0\Leftrightarrow f^{-1}(u)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}u(u^2+1)=0\Leftrightarrow u=0$.

Για $x=1\Leftrightarrow f^{-1}(u)=1\Leftrightarrow \frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u=1\Leftrightarrow u^3+u=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u^3+u-2=0\Leftrightarrow (u-1)(u^2+u+2)=0\Leftrightarrow u=1$, οπότε έχουμε:

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(f^{-1}(u))\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}\right)du=\int_0^1 u\left(\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}\right)du=\int_0^1\left(\frac{3}{2}u^3+\frac{1}{2}u\right)du\Leftrightarrow$$

$$I=\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\left[\frac{3u^4}{8}+\frac{u^2}{4}\right]_0^1=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

Θέμα 4 **Ολοκλήρωση Άρτιας ή Περιττής συνάρτησης σε διάστημα [-α, α]**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και για κάθε $x\in A\Rightarrow -x\in A$ καλείται:

α. **Άρτια** όταν για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(-x)=f(x)$.

β. **Περιττή** όταν για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$

Ισχύει ότι: $\begin{cases} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx, & \text{αν f άρτια} \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0, & \text{αν f περιττή} \end{cases}$

Απόδειξη

α. $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$. Αν θέσουμε $I_1 = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ και $I_2 = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ θα δείξουμε ότι $I_1 = I_2$.

Κάνουμε αλλαγή στη μεταβλητή του ολοκληρώματος I_1 θέτοντας $x = -u$, οπότε $dx = -du$.

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ ενώ για $x = 0 \Rightarrow u = 0$, και επειδή f άρτια ισχύει $f(-u) = f(u)$, οπότε τελικά έχουμε:

$I_1 = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{\alpha} f(-u)du = \int_{0}^{\alpha} f(u)du = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx = I_2$, άρα $I = 2I_2 \Leftrightarrow$

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.

β. $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$. Αν θέσουμε $I_1 = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$ και $I_2 = \int_{0}^{\alpha} f(x)dx$ θα δείξουμε ότι $I_1 = -I_2$.

Κάνουμε αλλαγή στη μεταβλητή του ολοκληρώματος I_1 θέτοντας $x = -u$, οπότε $dx = -du$.

Για $x = -\alpha \Rightarrow u = \alpha$ ενώ για $x = 0 \Rightarrow u = 0$, και επειδή f περιττή ισχύει $f(-u) = -f(u)$, οπότε τελικά έχουμε: $I_1 = \int_{-\alpha}^{0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{\alpha} -f(u)du = -\int_{0}^{\alpha} f(x)dx = -I_2$, άρα

$I = -I_2 + I_2 \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

Παράδειγμα 1ον

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{3} x^{21}\text{συν}^{11}x dx$.

Απόδειξη

Αν θέσουμε $f(x) = x^{21}\text{συν}^{11}x dx$, έχουμε $f(-x) = (-x)^{21}\text{συν}^{11}(-x) = x^{21}\text{συν}^{11}x = f(x)$, άρα η συνάρτηση f είναι περιττή, οπότε $\int_{-3}^{3} x^{21}\text{συν}^{11}x dx = 0$.

Παράδειγμα 2ον

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} \frac{x\text{συν}x + e^{|x|}}{1 + e^{|x|}} dx$.

Απόδειξη

$I=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}dx+\int_{-1}^{1}\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx$. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}$ είναι περιττή γιατί $g(-x)=\frac{-x\sigma\upsilon\nu(-x)}{1+e^{|-x|}}=-\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{1+e^{|x|}}=-g(x)$, ενώ η συνάρτηση $h(x)=\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}$ είναι άρτια γιατί $h(-x)=\frac{e^{|-x|}}{1+e^{|-x|}}=\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}=h(x)$, οπότε $\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=0$ και $\int_{-1}^{1}\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=2\left[\ln(1+e^{|x|})\right]_0^1=2\ln(1+e^{|x|})(1-0)=2\ln(1+e^{|x|})$, άρα τελικά $I=\int_{-1}^{1}\frac{x\sigma\upsilon\nu x+e^{|x|}}{1+e^{|x|}}dx=2\ln(1+e^{|x|})$.

Θέμα 5 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\kappa}^{\lambda}\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}\,dx$, $\alpha,\beta\neq 0$

Σε ολοκληρώματα της μορφής αυτής εργαζόμαστε ως εξής:

$I=\int_{\kappa}^{\lambda}\sqrt{\alpha^2-\beta^2x^2}dx=\int_{\kappa}^{\lambda}\sqrt{\alpha^2\left(1-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}\right)}dx=|\alpha|\int_{\kappa}^{\lambda}\sqrt{1-\frac{\beta^2x^2}{\alpha^2}}dx=|\alpha|\int_{\kappa}^{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2}dx$. Επειδή είναι $1-\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow -1\leq\frac{\beta x}{\alpha}\leq 1$, μπορούμε να θέσουμε $\frac{\beta x}{\alpha}=\eta\mu\omega\Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{\beta}\eta\mu\omega$, οπότε κάνοντας αλλαγή στη μεταβλητή υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το $I=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$

Λύση

$$I=\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=\int_{0}^{2}\sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}dx=2\int_{0}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx.$$

Θέτουμε $\frac{x}{2}=\eta\mu\omega\Leftrightarrow x=2\eta\mu\omega\Leftrightarrow dx=2(\eta\mu\omega)'d\omega\Leftrightarrow dx=2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega$.

Για $x=0\Leftrightarrow\eta\mu\omega=0\Leftrightarrow\omega=0$, ενώ για $x=2\Leftrightarrow\eta\mu\omega=1\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε:

$$I=2\int_{0}^{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}\,2\sigma\upsilon\nu\omega d\omega=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,\sigma\upsilon\nu\omega d\omega=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sigma\upsilon\nu\omega|\,\sigma\upsilon\nu\omega d\omega.$$

Επειδή $0\leq\omega\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega\geq 0\Leftrightarrow|\sigma\upsilon\nu\omega|=\sigma\upsilon\nu\omega$, οπότε έχουμε:

$$I=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2\omega d\omega=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}d\omega=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sigma\upsilon\nu 2\omega)d\omega=2\left[\omega+\frac{\eta\mu 2\omega}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Ι. Έλεγχος Γνώσεων

Από τις ακόλουθες προτάσεις άλλες είναι σωστές και άλλες λάθος. Απαντήστε και εξηγήστε την απάντησή σας.

Σ - Λ **1.** Αν $f(x)>0$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι $\int_1^{-\ln\frac{1}{2}} f(x)dx>0$.

Σ - Λ **2.** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\int_{-2}^{x}\frac{e^t}{t^2-1}dt$ είναι το $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Σ – Λ **3.** Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\int_2^{\ln(5-x)}\sqrt{t}dt$ είναι το $A=(-\infty,4]$.

Σ - Λ **4.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση f, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι $\int_{-x}^{x} f(t)dt=0$ τότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

Σ - Λ **5.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(x)dx$ με $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και $\beta-\alpha=\delta-\gamma$, τότε υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\gamma,\delta)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=f(x_2)$.

Σ - Λ **6.** Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύουν: $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ και $\int_\beta^\gamma f(x)dx<0$ με $\alpha<\beta<\gamma$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Σ - Λ **7.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει η σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

8. Αν για τη παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x\in[0,1]$ ότι $f^{2005}(x)+2004f(x)=2005x$. Εξηγήστε τις ακόλουθες προτάσεις:

α. Ορίζεται η αντίστροφη της f.

β. Είναι $f(0)=0$ και $f(1)=1$.

γ. Είναι $f^{-1}(x)=\dfrac{x^{2005}+2004x}{2005}$.

δ. Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $x\in[0,1]$.

ε. Ισχύει $\int_0^1 f^{-1}(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$.

στ. Είναι $f(x)>x$, για κάθε πραγματικό αριθμό $x\in(0,1)$.

ζ. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι $\dfrac{1002}{1003\cdot 2005}$ τ.μ.

I. Ειδικές Ασκήσεις στα Ολοκληρώματα

Σε πολλές ασκήσεις χρησιμοποίησε τη σχέση: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

2. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι $f'(x)=f'(1-x)$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$, να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$.

4. Αν $\alpha>0$, $\beta>0$ και $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

α. $\int_\alpha^\beta \ln(\varepsilon\varphi x)dx = 0$,

β. $\int_\alpha^\beta \ln(\sigma\varphi x)dx = 0$.

5. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}$ (θέστε $x=\varepsilon\varphi y$)

6. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$.

7. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = 2-\frac{\pi}{2}$ (θέστε $x=\varepsilon\varphi y$).

8. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(e^x+1)(x^2+1)}dx$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $xf(x)-f(-x)=x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η συνάρτηση f.

β. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx = 1+\ln 2-\frac{\pi}{2}$.

10. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[0,\alpha]$ και $f(x)=f(\alpha-x)$, $g(x)+g(\alpha-x)=\beta$, για κάθε $x\in[0,\alpha]$, να αποδειχθεί ότι $\int_0^\alpha f(x)g(x)dx = \frac{\beta}{2}\int_0^\alpha f(x)dx$.

11. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$. (θέστε $x=\varepsilon\varphi y$)

12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2 \frac{1}{1+e^{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}}dx$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(\alpha+x)+f(\alpha-x)=\beta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{2\alpha} f(x)dx = \alpha\beta$.

14. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f'(x)=f'(\alpha+\beta-x)$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

15. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha)+f(\beta-x)}dx=\frac{\beta-\alpha}{2}$.

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι: $\int_0^{2\alpha}f(x)dx=\int_0^{\alpha}[f(x)+f(2\alpha-x)]dx$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι:

α. $\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(x)-f(-x)]dx=0$.

β. $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=\int_0^{\alpha}[f(x)+f(-x)]dx$.

18. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

19. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\varepsilon\varphi x)dx$.

20. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[-\alpha,\alpha]$, η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, να αποδειχθεί ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_0^{\alpha}f(x)dx$.

21. Αν $\alpha>1$ και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[-1,1]$, η f είναι άρτια και η g είναι περιττή, να αποδειχθεί ότι $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\alpha^{g(x)}+1}dx=\int_0^{1}f(x)dx$.

22. Να βρεθούν τα όρια: (με χρήση της ιδιότητας $\left|\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\right|\leq\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx$)

$$I_1=\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x-2}\frac{x\eta\mu(t+1)-2\sigma\upsilon\nu t}{x^4+t+1}\,dt,\qquad I_2=\lim_{x\to+\infty}\int_0^5\frac{x-x\eta\mu\sqrt{t}}{x^4+tx+t^2}\,dt,$$

$$I_3=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4+x+1}\int_0^x(2t-\sigma\upsilon\nu t^2)\,dt,\qquad I_4=\lim_{x\to+\infty}\int_0^3\frac{x\eta\mu\sqrt{t+1}-3\sigma\upsilon\nu t}{2x^2+3t}\,dt.$$

23. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx,\qquad I_2=\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{9-4x^2}dx.$$

24. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1=\int_0^1 x\eta\mu x\ln\frac{2+x}{2-x}dx,\qquad I_2=\int_0^1\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}dx.$$

ΣΤ. ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θέμα 1ο Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και για κάθε $x \in [0,\ 1]$ ισχύει ότι $0 < f(x) < 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση $1 + \int_0^x f(t)dt = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\ 1)$.

Θέμα 2ο Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+xe^{-x}}dx, \qquad I_2 = \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2+\ln x}dx, \qquad I_3 = \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx,$$

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx, \qquad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^7 x}{\eta\mu^7 x + \sigma\upsilon\nu^7 x}dx.$$

Θέμα 3ο Αν $f,\ g$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\ \beta]$ και ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\ \beta)$: $f(\xi) = g(\xi)$.

******Θέμα 4ο*** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) \geq f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 5ο Έστω ο πραγματικός αριθμός $\alpha \neq 0$ και δύο συνεχείς συναρτήσεις $f,\ g$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τιμές επίσης στο $\mathbb{R}$ με $\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha g(x)dx$ και για τις οποίες για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt$. Να αποδειχτεί ότι $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(0) = g(0)$.

******Θέμα 6ο*** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+$, με τιμές στο $\mathbb{R}$ και την οποία ισχύει ότι $f(1) = 2$ και για κάθε $x > 0$ είναι $2\int_0^1 f(xy)dy = f(x)$. Να δειχτεί ότι $f(x) = 2x,\ x \geq 0$.

Θέμα 7ο Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_4^8 f(3x)dx = \int_3^6 f(4x)dx$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

******Θέμα 8ο*** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τιμές στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $\int_0^x f(x-y)\eta\mu y\,dy = 0$. Να δείξετε ότι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 9ο Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $\int_1^{x^2} f(t)dt \geq x^2 - 1$. Να δειχτεί ότι $f(1) = 1$.

Θέμα 10ο Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < \beta$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\gamma) = 0$.

Θέμα 11ο Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$, τιμές στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $xf(x) = 2 - \int_1^x \frac{tf(t)}{x}dt$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 12ο Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$, με την ιδιότητα $x\int_0^1 f(xt)dt = f(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 13ο Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}^*$ με την ιδιότητα $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{f(x)}{f'(t)}dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

******Θέμα 14ο*** Αν η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f(x) - 2\int_0^x tf(t)dt = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχτεί ότι $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 15ο Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 7]$ και ισχύει $\int_1^3 f(x)dx = \int_5^7 f(x)dx$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 7)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Θέμα 16ο Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $0 \leq 2\int_0^x f(t)dt \leq 1 - \text{συν}2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Θέμα 17ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} \frac{x}{\sqrt{t^2+3}}dt$.

Θέμα 18ο Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ με $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και $\int_2^3 f(x)dx = 19$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 6\xi$.

***<u>*Θέμα 19ο*</u> Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή των συνεχών συναρτήσεων f, g με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$, οι οποίες παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}(m+M)$, να αποδειχτεί ότι $\int_0^1 f(x)g(x)dx \le \frac{1}{2}(m^2+M^2)$.

***<u>*Θέμα 20ο*</u> Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = g(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

<u>*Θέμα 21ο*</u> Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\gamma^\delta f(x)dx < 0$, να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \delta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

***<u>*Θέμα 22ο*</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{2}{3}$, να αποδειχτεί ότι $\int_0^1 f^2(x)dx \ge 1$.

<u>*Θέμα 23ο*</u> Αν η f συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(0) > \alpha$ και $\int_0^1 f(x)dx < \alpha$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\gamma \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(\gamma) = \alpha$.

***<u>*Θέμα 24ο*</u> Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 2]$, με $f(0) < 2$ και $\int_0^2 f(x)dx > 4$. Να δειχτεί ότι υπάρχει $\gamma \in (0, 2)$ τέτοιο $f(\gamma) = 2$.

<u>*Θέμα 25ο*</u> Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Να υπολογιστεί το $I = \int_0^1 f(x)dx$.

***<u>*Θέμα 26ο*</u> Έστω f παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$ και για κάθε $x \ne 0$ ισχύει ότι $f(x) = \int_0^1 t\cdot f(xt)dt$. Να δειχτεί ότι $f(x) = \frac{1}{x}, \ x \ne 0$.

***<u>*Θέμα 27ο*</u> Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν για το σταθερό αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $g(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ και $h(x) = \int_\alpha^x g(t)dt$, να αποδειχτεί ότι $h(x) = \int_\alpha^x (x-t)f(t)dt$.

***<u>*Θέμα 28ο*</u> Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και με τιμές στο [γ, δ] με γ+ δ≠ 0 και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{(\beta-\alpha)\gamma\delta}{\gamma+\delta}$, να αποδειχτεί ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

***<u>*Θέμα 29ο*</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, +∞), παίρνει τιμές στο ℝ και έχει f(0)= 2 και $f'(x) > 0$, να αποδειχτεί ότι $\lim\limits_{x\to 0} \int_{x}^{e\cdot x} \frac{f(t)}{t}dt = 2$.

<u>*Θέμα 30ο*</u> Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και «1-1» στο [α, β] με f(α)=α και f(β)=β. Να δειχτεί ότι ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} [2x - f(x)]dx$.

***<u>*Θέμα 31ο*</u> Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη, να δειχτεί ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$ =βf(β) - αf(α).

<u>*Θέμα 32ο*</u> Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f όταν ισχύουν οι σχέσεις: $f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(x) + (2x+1)f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$.

<u>*Θέμα 33ο*</u> Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{x^2+1}^{x^2+3} \frac{t\eta\mu t + 2\sigma\upsilon\nu t + t^2}{t^2+t+1} dt$.

<u>*Θέμα 34ο*</u> Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{x+2}^{x+3} \sqrt{\frac{3-t}{t^2+t+1}} dt$.

<u>*Θέμα 35ο*</u> Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 3], να αποδειχτεί ότι υπάρχουν $\alpha, \beta, \gamma \in [0,\ 3]$ τέτοια ώστε $\int_{0}^{3} f(x)dx = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)$.

<u>*Θέμα 36ο*</u> Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(\sigma\upsilon\nu(\beta x))} \cdot \int_{0}^{x} \alpha \cdot \varepsilon\varphi(\alpha t)dt$.

<u>*Θέμα 37ο*</u> Να βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,\ +\infty)$ και με τιμές στο ℝ αν ισχύει $f(x) > 0$ και $f(x) = x + \int_{x}^{f(x)} \frac{\eta\mu t}{2t} dt$, για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$.

<u>*Θέμα 38ο*</u> Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ και με τιμές στο ℝ για την οποία ισχύει: $f(x) = 1 + \int_{0}^{x} \frac{1 - f(t)\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t} dt$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Θέμα 39ο Αν η f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,\ 1]$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $\int_0^1 f(x)dx=1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ με $f'(x_0)=f(x_0)$.

Θέμα 40ο Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{4t^2+1}{t^2+1}dt$.

******Θέμα 41ο*** Αν f συνεχής στο $[0,\ 1]$ και τέτοια ώστε να ισχύουν: $f(x)=\int_0^x\frac{2}{3f^2(t)+1}dt$ και $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$, δείξτε ότι η f είναι «1-1» και βρείτε το $\int_0^1 f(x)dx$.

******Θέμα 42ο*** Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=x+x^{2004}\int_{-1}^1 f(x^2t^2)\eta\mu(xt)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 43ο Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-1,\ 1]$ και τιμές στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt\ge x$ για κάθε $x\in[-1,\ 1]$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0)=1$.

β. Υπάρχει $x_1\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{x_1} f(t)dt=\frac{1}{2}$.

γ. Υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

δ. Υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που σχηματίζει με τους άξονες ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

******Θέμα 44ο*** Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 και η συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\int_0^{2x}|z_1\cdot t+z_2|\,dt$ για την οποία ισχύει $f(x)\ge x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

α. $|z_2|=\frac{1}{2}$.

β. Η εξίσωση $f(x)=2020$ έχει ακριβώς μια λύση στο $(0,\ +\infty)$.

γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\int_0^x\left|z_1\cdot t+\frac{z_2}{2}\right|dt\ge\frac{x}{4}$.

******Θέμα 45ο*** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\ \beta]$. Αν καλέσουμε με m την ελάχιστη τιμή της, να αποδειχτεί ότι $\int_\alpha^\beta xf(x)dx\le\beta\int_\alpha^\beta f(x)dx-m\frac{(\alpha-\beta^2)}{2}$.

Θέμα 46ο Αν f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x+t)dt\ge\int_\alpha^\beta f(t)dt$, να αποδειχτεί ότι $f(\alpha)=f(\beta)$.

Θέμα 47ο Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$. Να αποδειχτεί ότι $\int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} f(x)dx = 2\int_{\alpha}^{\alpha+\beta} f(x)dx$.

Θέμα 48ο Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τη σχέση $f(x) = x^2 + \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Να αποδειχτεί ότι $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

******Θέμα 49ο*** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f, αφενός δεν είναι σταθερή και αφετέρου τα ακρότατά της που είναι αντίστοιχα $f_{min} = m$, $f_{max} = M$, παρουσιάζονται σε εσωτερικά σημεία του (α, β), να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β. Υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$: $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = m \cdot \int_\alpha^\gamma g(x)dx + M \cdot \int_\gamma^\beta g(x)dx$.

******Θέμα 50ο*** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 6x + 2$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $(0, f(0))$ και ορίσουμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, τότε:

α. Να βρεθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h.

β. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

γ. Να βρεθεί η $h'(x)$.

δ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h στο σημείο $(0, h(0))$.

******Θέμα 51ο*** Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, $f(0) = 0$ και $f'(1) > 0$, να αποδειχτεί ότι $\int_0^1 \frac{dx}{1+f^2(x)} \le \frac{f(1)}{f'(1)}$.

******Θέμα 52ο***

α. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \ge x + 1$.

β. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $2f''(x) + e^{f(x)} = 1$, να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 53ο Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $e^x - e^{f(x)} = e^{x+f(x)}$.

α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $|f(\beta) - f(\alpha)| < \beta - \alpha$.

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 e^{f(x)-x}dx$.

<u>Θέμα 54ο</u> Να υπολογισθούν τα όρια:

$$K=\lim_{x\to+\infty}\int_{x+1}^{x+2}\left(2+\frac{t}{\sqrt{t^4+1}}\right)dt$$

$$M=\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}\frac{t}{e^t+1}dt.$$

<u>Θέμα 55ο</u> Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sigma\varphi x$ με $x\in(0,\ \pi)$ και $g(x)=\varepsilon\varphi x$ με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

α. Να δείξετε ότι ορίζονται στο $\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις f^{-1} και g^{-1}.

β. Να αποδείξετε ότι $\int_1^{\sqrt{3}} f^{-1}(x)dx=\int_1^{\sqrt{3}} g^{-1}(\frac{1}{x})dx$.

******<u>Θέμα 56ο</u>*** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,\ +\infty)$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(1)=0$, $f'(1)=1$ και για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύουν οι σχέσεις: $f'(x)>0$ και $f''(x)=-(f'(x))^2$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x)+f'(x)\ge 1$, για κάθε $x>0$.

β. $\int_1^{\alpha} f(x)dx\ge\frac{(\alpha-1)\cdot f(\alpha)}{2}$, με $\alpha>1$.

******<u>Θέμα 57ο</u>*** Έστω η συνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)+\ln f(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}.

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι $f''(x)=\frac{f(x)}{[1+f(x)]^3}$.

iii. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I_1=\int\frac{1-f(x)}{1+f(x)}dx$ και $I_2=\int\frac{e^x}{1+f(x)}dx$.

******<u>Θέμα 58ο</u>*** Έστω η συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει $e^{2f(x)}+2xe^{f(x)}=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τον τύπο της καθώς και το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $(0,\ f(0))$ και την ευθεία $x=1$.

γ. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}}dx=2$.

δ. Να βρείτε την f^{-1} και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

Θέμα 59 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+3x-1}{x^2}$.

α. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

δ. Να γίνει γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ε. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3+(1-\lambda)x^2+3x-1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

στ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την πλάγια ασύμπτωτή της και την ευθεία $x=1$.

Θέμα 60 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,\ 1]$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} f(x)dx=\dfrac{1}{2\xi}$.

Θέμα 61 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν για τη συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)=g(1)+\alpha\int_0^x e^{f(t)}dt$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

******Θέμα 62*** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τιμές στο $\mathbb{R}$ και με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\int_{5-x}^{1+x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g'(2+x)=g'(2-x)$.

β. Η εξίσωση $f(1+x)+f(5-x)=\dfrac{1}{x}\int_{1+x}^{5-x} f(t)dt$ έχει λύση στο διάστημα $(0,2)$.

γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ένα και μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο να βρεθεί.

******Θέμα 63*** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,\ 1]$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$. Αν $0<f(0)<f(1)$ να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει $x_0(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0)=f(0)\cdot f(1)$.

β. Η f στο $[0,\ 1]$ έχει μέγιστο το $f(1)$.

γ. Ισχύει $\int_0^1 f(x)dx\le\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$.

Θέμα 64 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$, με $x\in\mathbb{R}$, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

******Θέμα 65*** Αν m,M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha>0$, να αποδείξετε ότι $m\ln\dfrac{\beta}{\alpha}\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le M\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$.

******Θέμα 66*** Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(x)=(1+e^x)\left(1+\int_0^x \dfrac{f(t)}{1+e^t}dt\right)$.

Θέμα 67 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(x)\ge 3x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

β. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Θέμα 68 Να βρεθούν οι συνεχείς συναρτήσεις f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τη σχέση $f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$.

Θέμα 69 Οι συναρτήσεις f,g,h είναι συνεχείς στο $[0,\ 1]$ με $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{2}$, $\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{1}{3}$ και $\int_0^1 h(x)dx=\dfrac{1}{6}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)+g(\gamma)+h(\gamma)=3\gamma^2$.

Θέμα 70 Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, της οποίας μια αρχική είναι η F με $F(0)=0$ και για κάθε $x\ge 0$ ισχύει η σχέση $f(x)=e^{-F(x)}$.

Θέμα 71 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $f(1-x)+f(1+x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

α. Η συνάρτηση f είναι άρτια,

β. $\int_{-\alpha}^0 f(x)dx=\int_0^\alpha f(x)dx$, για κάθε $\alpha\ne 0$,

γ. $\int_{1995}^{1996} f(x)dx=\int_0^{1997} f(x)dx$.

Θέμα 72 Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $g(x)\ne 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)$ και $\int_\alpha^x \dfrac{f(t)}{g(t)}dt=f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $f(x)=0$.

Θέμα 73 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(x)=3xe^{x^3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $f(1)=e$. Να υπολογισθεί το $\int_0^1 f(x)dx$.

Θέμα 74 Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο σταθερός αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, η g συνεχής και άρτια και η f' είναι επίσης άρτια, να δειχθεί ότι:

α. $f(x)+f(-x)=2f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x)g(-x)dx$.

γ. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)dx=2f(0)\int_{0}^{\alpha} g(x)dx$.

Θέμα 75 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=(1+x^2)\left(1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η f.

Θέμα 76 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\int_2^6 f(2x)dx=\int_1^3 f(4x)dx$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\gamma\in[4,\ 12]$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=0$.

Θέμα 77 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\int_x^{x+y} f(t)dt=\int_{x-y}^{x} f(t)dt$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Θέμα 78 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(xt)dt\ge\int_2^3 f(t)dt$ για κάθε $x>0$. Αν $f(3)=2$ και $f(2)=1$, να αποδειχθεί ότι $\int_2^3 f(t)dt=4$.

Θέμα 79 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)-2\int_0^x tf(t)dt=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=e^{x^2}$.

Θέμα 80 Να υπολογισθεί το $I(\lambda)=\int_0^{\lambda} x^2e^{-x}dx,\ \lambda>0$ και το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$.

Θέμα 81 Να υπολογισθεί το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$, όπου $I(\lambda)=\int_1^{\lambda}|x-2|e^{-x}dx$.

Αν $0<\alpha<1$, να αποδειχθεί ότι $\int_0^{10}(1+x)^{\alpha}dx\le\int_0^{10}(1+\alpha x)dx$.

Θέμα 82 Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $2^{f(x)}f'(x)=2^{3x^2-5\alpha x}(6x-5\alpha)$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,\ 0)$, τότε:

α. Να βρεθεί η $f(x)$.

β. Να βρεθεί το $\alpha\in\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(2,\ f(2))$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης α.

Θέμα 83 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)$. Αν $f(\alpha)>\alpha^2$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi^2$.

Θέμα 84 Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $[0,\ +\infty)$ με $f'(x)\neq 0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 85 Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\ \beta]$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$. Να βρεθεί $x_0\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο ώστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των ευθειών $x=\alpha$, $x=\beta$, του διαγράμματος της f και της ευθείας $y=f(x_0)$, να είναι ελάχιστο.

Θέμα 86 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[3,\ 4]$ και ισχύει $f'(x)>0$, με f' συνεχή στο $[3,\ 4]$. Να αποδειχθεί ότι $\int_3^4 f(x)dx+\int_{f(3)}^{f(4)} f^{-1}(x)dx=4f(4)-3f(3)$.

Θέμα 87 Οι συναρτήσεις f(x) και g(x) είναι συνεχείς στο $[1,\ 2]$ και ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in[1,\ 2]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in[1,\ 2]$ τέτοιο ώστε $\int_1^{x_0} f(t)dt=\int_2^{x_0} g(t)dt$.

Θέμα 88 Οι συναρτήσεις f(x) και h(x) είναι συνεχείς στο $[0,\ 1]$ και ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\in[0,\ 1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\alpha\in[0,\ 1]$ τέτοιο ώστε $\int_0^1 f(x)h(x)dx=f(\alpha)\int_0^1 h(x)dx$.

Θέμα 89 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^{\ln x} e^t \eta\mu(\pi t^2)dt$.

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},\ e\right]$.

β. Να αποδειχθεί ότι η f'' έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο $\mathbb{R}_+^*$.

Θέμα 90 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύει $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\eta\mu x dx=0$. Αν $f(\pi)=2$, να βρεθεί το $f(0)$.

Θέμα 91 Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\kappa,\ \lambda]$. Αν ισχύει $f(\kappa)=f(\lambda)$ και $\frac{f'(\kappa)}{f'(\lambda)}=\frac{\lambda}{\kappa}$, να αποδειχθεί ότι $\int_\kappa^\lambda xf''(x)dx=0$.

Θέμα 92 Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ και g(x) γνήσια φθίνουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 93 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$I_1=\int \frac{dx}{x\ln x[\ln(\ln x)]}$ και $I_2=\int_2^x \frac{2t\ln t}{(t^2-1)^2}dt$, $x>2$.

Στη συνέχεια να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} I_2(x)$.

Θέμα 94 **α.** Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$

β. Έστω $f:[0,\ 1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με $f(1)=1$. Αν υπάρχει $\gamma\in(0,\ 1)$ ώστε $f(\gamma)=2$, να αποδειχθεί ότι:

i. $\int_0^1 f(x)dx \geq 1$, **ii.** $\int_0^1 e^{f(x)}dx \geq 2$.

Θέμα 95 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\ 5]$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\ 5)$. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^5 f(x)dx < 5\int_0^1 f(x)dx$.

Θέμα 96 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ και $2\int_\alpha^\beta f(x)dx < \beta^2-\alpha^2$. Αν $f(\alpha)>\alpha$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\ \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Θέμα 97 Έστω ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 1$, όπου f(x) συνεχής συνάρτηση στο $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\text{συν}x_0$.

Θέμα 98 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,\ 1]$ με $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 g^2(x)dx = 1$ και $\int_0^1 f(x)[g(x)+1]dx = 2$. Να αποδειχθούν τα εξής:

α. $\int_0^1 f(x)dx = 1$

β. $f(x)=g(x)=1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Θέμα 99 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $xf(x)+(1-x)f(-x)=x+1$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$.

Θέμα 100 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα Δ και $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\in\Delta$. Να αποδειχθεί ότι $\int_\alpha^\gamma f(x)dx\cdot\int_\beta^\delta f(x)dx + \int_\alpha^\delta f(x)dx\cdot\int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\gamma^\delta f(x)dx$.

Θέμα 101 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(1)+\int_1^3 f(x)dx \leq f(1)+f(2)+f(3) \leq \int_1^4 f(x)dx$.

Θέμα 102 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=[\alpha,\ \beta]$ για την οποία ισχύει $2\int_\alpha^\beta f(x)dx = \beta^2-\alpha^2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in\Delta$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi$.

Θέμα 103 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=[0,\ 3]$ για την οποία ισχύει $\int_0^3 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in[0,\ 2]$ τέτοια ώστε $f(\kappa)+f(\lambda)=0$.

Θέμα 104 Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $\Delta=[0,\ 1]$ για την οποία ισχύει $6\int_0^1 f(x)dx=2\alpha+3\beta+6\gamma$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi\in[0,\ 1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\alpha\xi^2+\beta\xi+\gamma$.

Θέμα 105 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β] με $\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta g(x)dx$ και $f(\alpha)>g(\alpha)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

Θέμα 106 Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα και η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1. Αν $\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 g(t)dt$, δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0,2)$.

2. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt+\int_2^{2-x} g(t)dt\ge x^2-2x$, αποδείξτε ότι $f(0)+f(2)=g(0)+g(2)$.

3. **α.** Δείξτε ότι υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=g(2-x_1)$.

β. Δείξτε ότι υπάρχει $x_2\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2)+g'(2-x_2)=2$.

Θέμα 107 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει ότι $f'(x)>0$, να αποδειχθεί ότι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\frac{f^{-1}(x)}{x}dx+\int_\alpha^\beta \ln f(x)dx=\ln\frac{[f(\beta)]^\beta}{[f(\alpha)]^\alpha}$.

Θέμα 108 Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών **R**, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=1-2x^2\int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω η g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$

β. Δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

δ. Βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$.

***<u>*Θέμα 109*</u> Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g στο $[2002,\alpha]$ με $\alpha>2002$ ισχύουν οι σχέσεις: $f(2002)=g(2002)=1$ και $f(x)+g(x)=\int_{2002}^{\alpha}f(t)\cdot g(t)dt$ για κάθε $x\in[2002,\alpha]$, τότε:

1. Δείξτε ότι $g(x)=2-f(x)$.

2. Δείξτε ότι $\int_{2002}^{\alpha}(f(t)-1)^2dt=\alpha-2004$.

3. Δείξτε ότι $\alpha\geq 2004$.

4. Αν $h(x)=\int_{2002}^{x}(f(t)-1)^2dt$, δείξτε ότι:

α. Υπάρχει $x_0\in(2002,2004)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

5. Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[2002,\alpha]$, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

***<u>*Θέμα 110*</u> Μια συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x,y>0$ τη σχέση $\int_x^y f(t)dt=(y-x)f(\sqrt{xy})$. Αν $f(1)=1$ και $f'(1)=-2$, τότε:

α. Δείξτε ότι $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x>0$.

β. Δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει ασύμπτωτες οι οποίες να βρεθούν.

γ. Δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη η οποία και να βρεθεί.

<u>*Θέμα 111*</u> Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $e^xf(x)+e^xf'(x)=-f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f(1)=1. Να δειχθεί ότι $\int_0^1 f(x)dx=1+e-(1+e)\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

<u>*Θέμα 112*</u> Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια περιττή και παραγωγίσιμη συνάρτηση και η $f(x)=\int_0^x g(t)dt$.

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

2. Αν $f(-1)=-1$ και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

<u>*Θέμα 113*</u> Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια περιττή και παραγωγίσιμη συνάρτηση και η $f(x)=\int_0^x g(t)dt$.

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

2. Αν $f(-1)=-1$ και $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

<u>*Θέμα 114*</u> Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x\cdot e^{x-2005}$ και $g(x)=\kappa\cdot x\cdot e^{x-2005}-\lambda\cdot e^{x-2005}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

1. Αν g μια αρχική της f να βρεθούν οι $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $3^{x^2-4x}-3^{-x+4}=-(x^2-4x)^3+(-x+4)^3$.

3. Αν x_1,x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $x_1<x_2$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=x_1+2$ και $x=x_2+2001$.

******Θέμα 115*** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^{\pi}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{(x-\sigma\upsilon\nu t)^2+\eta\mu^2 t}}dt$ με $x\in\mathbb{R}$.

1. Να βρεθεί η συνάρτηση f.
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
3. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

******Θέμα 116*** Μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ τη σχέση $f((\nu+1)x)-f((\nu-1)x)=2f(\nu x)$. Αν $f(0)=0$ και θέσουμε $I_\nu=\int_\alpha^\beta\frac{f(\nu x)-f(\nu y)}{f(x)-f(y)}dx$, να αποδειχθεί ότι:

α. Δείξτε ότι $f(2x)=2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, **β.** $I_{\nu+1}+I_{\nu-1}=2I_\nu$, για κάθε $\nu\geq 2$.
γ. $I_\nu=\nu(\beta-\alpha)$, για κάθε $\nu\geq 2$.

******Θέμα 117*** Αν $\kappa\in\mathbb{Z}$, να δείξετε ότι $I=\int_0^{2\pi}\eta\mu(\eta\mu(\eta\mu(\eta\mu x+\kappa x)))dx=0$.

Θέμα 118 Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{2x+\eta\mu x}$, $x\geq 0$.

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
3. Δείξτε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} της οποίας το πεδίο ορισμού της αλλά και το σύνολο τιμών της είναι το $[0,+\infty)$.
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\sqrt{\pi}}x\cdot f^{-1}(x)dx$.

Θέμα 119 Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με $f(x)=\sqrt{x^2-9}+\frac{1}{x^2-25}$ και $g(x)=\ln\frac{1}{5-x}$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f,g.
β. Ορίστε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.
γ. Έστω η συνάρτηση $W(x)=\int_{-10}^{g(x)}\left(\sqrt{t^2-9}+\frac{1}{t^2-25}\right)dt$.
1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτηση W.
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση W είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την $W'(x)$ καθώς και το πεδίο ορισμού της.

******Θέμα 120*** Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ η οποία έχει την ιδιότητα $2xf(y)\leq xf(x)+yf(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$.

α. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.
β. Αν η f είναι επιπλέον και 1-1 τότε:
  1. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
  2. Αν 0<α<β να αποδειχθεί ότι

$$\int_\alpha^\beta\sqrt{\frac{f(x)}{x}}dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}\sqrt{\frac{f^{-1}(x)}{x}}dx=2\left[\sqrt{\beta\cdot f(\beta)}-\sqrt{\alpha\cdot f(\alpha)}\right].$$