Στατιστική

Συλλογή 30 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 9/12/2011 – 20/12/2012

Πηγή – Απαντήσεις

Στατιστική :–Μια συλλογή 30 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=21166

Έλυσαν οι:

Αποστόλης Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιώργος Απόκης
Δημήτρης Κατσίποδας
Ηλίας Καμπελής
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Τσιφάκης
Χρήστος Κανάβης

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 31

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω $\mathbf{CV^2 = 0,04}$ και $\mathbf{s = 0,2}$,όπου **CV** ο συντελεστής μεταβολής και **s** η τυπική απόκλιση ενός δείγματος που έχει την ίδια μέση τιμή με το δείγμα **A,** με παρατηρήσεις τις $\mathbf{1,3,-2,\alpha,-1}$, με $\mathbf{\alpha \in Z}$.

Ε1. Αν η διάμεσος $\boldsymbol{\delta}$ του δείγματος **Α** είναι αρνητική, να βρεθεί το εύρος **R** του δείγματος.

Ε2. **α.** Να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα **Α** προσθέτοντας σε κάθε παρατήρηση τον αριθμό $\bar{\mathbf{x}}$ και ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος που προκύπτει από το αρχικό δείγμα πολλαπλασιάζοντας κάθε παρατήρηση με τον αριθμό $\bar{\mathbf{x}}$, όπου $\bar{\mathbf{x}}$ η μέση τιμή του αρχικού δείγματος για την περίπτωση που $\bar{\mathbf{x}} < \mathbf{0}$.

β. Ποιό από τα δύο αυτά δείγματα είναι περισσότερο ομοιογενές;

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Έχουμε $\mathbf{CV = \dfrac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow CV^2 = \dfrac{s^2}{(\bar{x})^2} \Leftrightarrow 0,04 = \dfrac{0,2^2}{(\bar{x})^2} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 1 \Rightarrow \bar{x} = \pm 1.}$

Ε1. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος περιττού πλήθους παρατηρήσεων, διαταγμένες σε αύξουσα σειρά, ισούται με την μεσαία παρατήρηση. Στην άσκησή μας, επειδή έχουμε ότι η διάμεσος είναι αρνητικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

1η περίπτωση:

Αν $\mathbf{\bar{x} = 1,}$ τότε $\mathbf{\bar{x} = \dfrac{-1+3-2+\alpha+1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{1+\alpha}{5} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{1+\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 4,}$ **άτοπο,** διότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

2η περίπτωση:

Αν $\mathbf{\bar{x} = -1}$ τότε $\mathbf{\bar{x} = \dfrac{-1+3-2+\alpha+1}{5} \Leftrightarrow \bar{x} = \dfrac{1+\alpha}{5} \Leftrightarrow}$

$\mathbf{1+\alpha = -5 \Leftrightarrow \alpha = -6,}$ **δεκτή,** διότι $\mathbf{\alpha < 0}$.

Επομένως $\mathbf{\alpha = -6}$ και τότε το εύρος είναι $\mathbf{R = 3-(-6) = 9.}$

Ε2. **α.** Γνωρίζουμε ότι αν σε όλες τις παρατηρήσεις προσθέσουμε μια σταθερά, η νέα μέση τιμή είναι η προηγούμενη προσαυξημένη κατά την σταθερά, ενώ η τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια.(Εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99).

Οπότε $\mathbf{\bar{y} = \bar{x} + \bar{x} = 2\bar{x} = -2}$ και $\mathbf{s_\psi = s_x = 0,2.}$

Επομένως $\mathbf{CV_y = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{s_x}{|2\bar{x}|} = \dfrac{1}{2}s_x = 0,1.}$

Ακόμα, αν όλες οι παρατηρήσεις πολλαπλασιαστούν με μια σταθερά, η νέα μέση τιμή είναι η προηγούμενη πολλαπλασιασμένη με τη σταθερά, ενώ η νέα τυπική απόκλιση είναι η προηγούμενη πολλαπλασιασμένη με την απόλυτη τιμή της σταθεράς. (Εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99).

Οπότε και $s_z = |\bar{x}| s_x = s_x = 0,2.$

Τότε $CV_z = \frac{s_z}{|\bar{z}|} = \frac{s_x}{(\bar{x})^2} = s_x = 0,2.$ $\bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{x} = (\bar{x})^2 = 1$

β. Επειδή $CV_y < CV_z$,έχουμε ότι το δείγμα που προκύπτει από το αρχικό δείγμα προσθέτοντας σε κάθε παρατήρηση τον αριθμό $\bar{x}$ είναι πιο ομοιογενές από το δείγμα που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας κάθε παρατήρηση με τον αριθμό $\bar{x}$.

ΘΕΜΑ 32

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Στον διπλανό ελλιπή πίνακα, παρουσιάζεται η κατανομή συχνοτήτων (απόλυτων, σχετικών κ.τ.λ) των τιμών της θερμοκρασίας σε C^o , ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους, που σημειώθηκαν κατά την χειμερινή περίοδο σε **ν** το πλήθος ημέρες στην πόλη της Αθήνας . Να βρείτε:

I	Θερμοκρασία σε C^o	v_i	f_i	$F_i\%$
1	$[...,4)$	v_1		
2	$[...,...)$	v_2	25	
3	$[...,...)$	$4v_1$		75
4	$[...,...)$	v_4		90
5	$[...,20)$	v_1		
Σύνολα		4V	100	

Ε1. Τα άκρα των κλάσεων.

Ε2. Τις σχετικές συχνότητες $f_i\%$ καθώς και τις σχετικές αθροιστικές συχνότητες $F_i\%$.

Ε3. Αν $v_1 = f(x_0)$, όπου x_0 η θέση του ολικού μεγίστου της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 8x - 4, x \in R$ τότε να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα των (απόλυτων) συχνοτήτων.

Ε4. Για την τιμή v_1 που βρήκατε, αν θεωρήσετε ότι οι τιμές της θερμοκρασίας κατανέμονται ομοιόμορφα, να υπολογίσετε:
α. Το πλήθος των ημερών της χειμερινής περιόδου που σημειώθηκαν θερμοκρασίες από $9^0 C$ έως $12^0 C$.
β. Το ποσοστό των ημερών της χειμερινής περιόδου, που σημειώθηκαν θερμοκρασίες πάνω από $11^0 C$.

Λύση:

Ε1. Έστω το κάτω άκρο της πρώτης κλάσης και **c** το πλάτος κάθε κλάσης, τότε έχουμε ότι οι κλάσεις είναι οι εξής:
$[\alpha, \alpha+c), [\alpha+c, \alpha+2c), [\alpha+2c, \alpha+3c), [\alpha+3c, \alpha+4c), [\alpha+4c, \alpha+5c)$

Οπότε $\begin{cases} \alpha + c = 4 \\ \alpha + 5c = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ c = 4 \end{cases}$

Ε2. Από τον πίνακα έχουμε ότι $F_3 = 75\%$ και $F_4 = 90\%$,οπότε $f_4 = F_4 - F_3 = 15\%$. Επίσης $F_5 = 100\%$, οπότε $f_5 = F_5 - F_4 = 10\%$.

Έχουμε ότι $\mathbf{v_1 = v_5}$ άρα και $\mathbf{f_1 = f_5 = 10\%}$. Επειδή $\mathbf{f_2 = 25\%}$, έχουμε $\mathbf{F_2 = 35\%}$ και $\mathbf{F_3 = f_1 + f_2 = 35\%}$. Τέλος, $\mathbf{f_3 = F_3 - F_2 = 40\%}$.

Ε3. $\mathbf{f(x) = -2x^2 + 8x - 4, x \in R}$. Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f'(x) = -4x + 8, x \in R}$.

Έχουμε $\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2}$ και $\mathbf{f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 2}$.

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	Ο.Μ	↘

Έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(-\infty, 2]}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[2, +\infty)}$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\mathbf{x_0 = 2}$ με τιμή $\mathbf{f(2) = 4}$.

Έχουμε $\mathbf{v_1 = f(2) = 4}$ και

$$\mathbf{f_1 = \frac{v_1}{4v} \Leftrightarrow 0,1 = \frac{4}{4v} \Leftrightarrow v = 10.}$$

Έτσι έχουμε

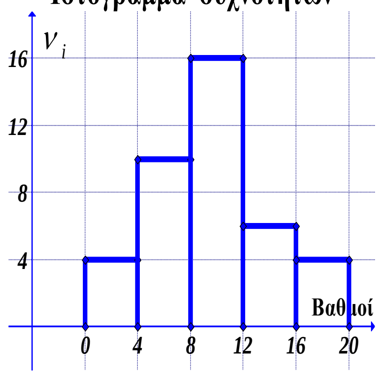
$$\mathbf{f_2 = \frac{v_2}{4v} \Leftrightarrow 0,25 = \frac{v_2}{40} \Leftrightarrow v_2 = 10}$$, έτσι

συμπληρώνουμε το διπλανό πίνακα.

I	Θερμοκρασία σε C°	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[0 – 4)	4	10	10
2	[4 – 8)	10	25	35
3	[8 – 12)	16	40	75
4	[12 – 16)	6	15	90
5	[16– 20)	4	10	100
	Σύνολα	40	100	

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων είναι το

Ιστόγραμμα συχνοτήτων



Ε4. **α.** Θεωρώντας ότι οι τιμές των θερμοκρασιών κατανέμονται ομοιόμορφα, έχουμε ότι στο διάστημα βρίσκονται **16** παρατηρήσεις, οπότε στο διάστημα θα βρίσκονται **12** παρατηρήσεις.

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathbf{\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

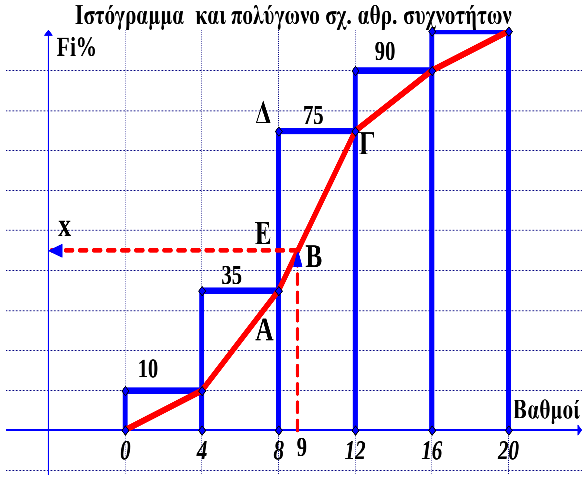
$$\mathbf{\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{9-8}{12-8} = \frac{x-35}{75-35} \Leftrightarrow}$$

$\mathbf{40 = 4x - 140 \Leftrightarrow 4x = 180 \Leftrightarrow x = 45\%}$.

Επομένως στο διάστημα $\mathbf{[9,12)}$ βρίσκονται

$$\mathbf{\frac{75-45}{100}40 = \frac{30}{10}4 = 12}$$ παρατηρήσεις.

Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχ. αθρ. συχνοτήτων



β. Το ποσοστό των ημερών που έχουν θερμοκρασία $[8,12)$ είναι 40%. Οπότε το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι $[11,12)$ είναι 10%.
Επομένως το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι πάνω από 11^0C είναι $10\%+15\%+10\%=35\%$.

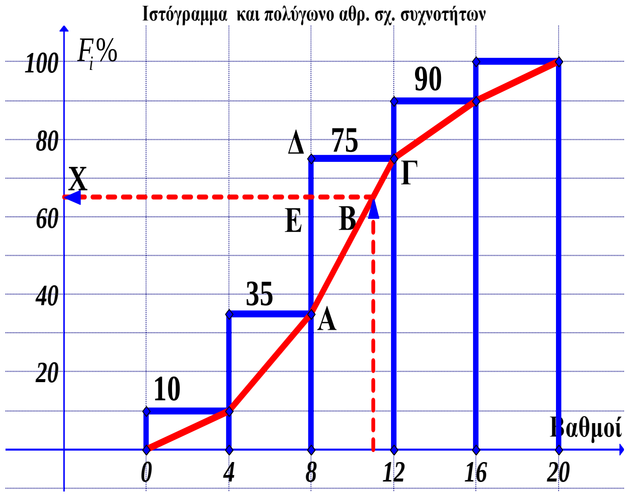
Β΄ τρόπος: $(75-65)\%=10\%..$

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων

$\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma}=\frac{EA}{A\Delta} \Leftrightarrow \frac{11-8}{12-8}=\frac{x-35}{75-35} \Leftrightarrow$$

$$120=4x-140 \Leftrightarrow 4x=260 \Leftrightarrow x=65\%.$$



Συνεπώς στο διάστημα $[9,12)$ βρίσκεται το $(75-65)\%=10\%$

Επομένως το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία είναι πάνω από 11^0C είναι $10\%+15\%+10\%=35\%.$

ΘΕΜΑ 33

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\cdot s\cdot x^2-2\cdot\bar{x}\cdot x+13, x\in R$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους ν. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2009$, τότε:

Ε1. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Ε2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Ε3. Αν η f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:
α. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.
β. Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια;
γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=8sx-2\bar{x}$. Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2009$, δηλαδή είναι παράλληλη στον $x'x$, όποτε $f'(1)=0 \Leftrightarrow 8s-2\bar{x}=0 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{8} \Leftrightarrow CV=0,25>0,10.$
Συνεπώς, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε2. Ισχύει $\overline{x}=4s$ άρα $A.\ f(x)=4sx^2-8sx+13$ και $f'(x)=8sx-8s$.
Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 8sx-8s=0 \Leftrightarrow x=1$.
Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με τιμή $f(1)$.

Ε3. **α.** Είναι $f(1)=1 \Leftrightarrow 4s-8s+13=1 \Leftrightarrow s=3$ και $\overline{x}=4s=12$.
β. Έστω $c>0$ η αύξηση. Τότε η νέα μέση τιμή είναι $\overline{y}=\overline{x}+c=12+c$ και η νέα τυπική απόκλιση είναι $s_y=s=3$.
Το δείγμα είναι ομοιογενές, άρα

$$CV_y \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\overline{y}} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{3}{12+c} \le 0,1 \Leftrightarrow 3 \le 1,2+0,1c \Leftrightarrow c \ge 18 .$$

Το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια, είναι 18 μονάδες.
γ. Η εφαπτομένη στο A είναι παράλληλη στον $x'x$ και διέρχεται από το $A(1,1)$, άρα είναι η $(\varepsilon): y=1$.

ΘΕΜΑ 34

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3\alpha}{2}x^2+2\alpha^2x+3\alpha, x\in R, \alpha>0$.
x_1,x_2 Αν οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία x_1,x_2 είναι παράλληλες στον $x'x$, τότε : CV'

Ε1. Να βρείτε τα x_1,x_2.

Ε2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των αριθμών και $f''(x_2)$.

Ε3. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των $f(0), f''(x_1)$ και $f''(x_2)$ και ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από αυτούς τους όρους κατά 2, να βρείτε την τιμή του $\alpha>0$ ώστε $3CV'=CV$ καθώς και για την τιμή του α που βρήκατε να κρίνετε ποιό δείγμα είναι πιο ομοιογενές.

Πηγή: Δημήτρης Γεωργακίλας (εκδόσεις Τομή)

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=x^2-3\alpha x+2\alpha^2$.
Για να είναι οι εφαπτόμενες παράλληλες στον $x'x$ πρέπει:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0 \Leftrightarrow (x-2\alpha)(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow x=2\alpha \text{ ή } x=\alpha.$$

Έτσι $x_1=2\alpha$ και $x_2=\alpha$.

Ε2. Έχουμε ότι $f(0)=3\alpha$.
Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f''(x)=2x-3\alpha$, οπότε: $f''(x_1)=f''(2\alpha)=\alpha$ και $f''(x_2)=f''(\alpha)=-\alpha$.

Η μέση τιμή τους είναι: $\bar{x}=\frac{3\alpha+\alpha-\alpha}{3}=\alpha$.

Ε3. Αν s είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $f(0), f''(x_1)$ και $f''(x_2)$, τότε η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων είναι $\bar{x}'=\bar{x}+2=\alpha+2$ και η τυπική απόκλιση τους $s'=s$.

$$3CV'=CV \Leftrightarrow 3\frac{s'}{\bar{x}'}=\frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{3s}{\alpha+2}=\frac{s}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha+2=3\alpha \Leftrightarrow \alpha=1.$$

Για $\alpha=1$ έχουμε $CV=\frac{s}{\bar{x}}=s$ και $CV'=\frac{s'}{\bar{x}'}=\frac{s}{1+2}=\frac{s}{3}$.

Έτσι έχουμε ότι $CV'<CV$, οπότε το δεύτερο δείγμα είναι πιο ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 35

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ο βαθμός πρόσβασης του απολυτηρίου **50** μαθητών της Γ΄ Λυκείου αναγράφεται στο διπλανό ελλιπή πίνακα. Αν είναι γνωστό ότι στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο που αντιστοιχεί στην τρίτη κλάση είναι 144^{o} και $v_2=4v_5$, τότε:

I	Κλάσεις	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[10,...)	5		
2	[...,...)			
3	[...,...)			
4	[...,...)		20	
5	[...,20)			
Σύνολα		50		

Ε1. Να βρείτε το πλάτος κάθε κλάσης.

Ε2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Ε3. Να βρείτε τη διάμεσο.

Ε4. Αν από τους παραπάνω μαθητές, οι ανώτατες σχολές πάρουν μόνο το 36%, να βρείτε τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $R=20-10=10$ και $c=\frac{R}{k}=\frac{10}{5}=2$.

Ε2.

Είναι

$\alpha_3=144^{o} \Leftrightarrow 360^{o}\cdot f_3=144^{o} \Leftrightarrow f_3=0,4$

άρα $v_3=50\cdot f_3=20$.

Επίσης, $f_4\%=20 \Rightarrow f_4=0,2 \Rightarrow v_4=10$.

Τέλος, $v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=v \Leftrightarrow$

$5+4v_5+2+10+v_5=50 \Leftrightarrow v_5=3$.

Επομένως $v_2=4v_5=12$. Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες ισχύει

$F_1\%=f_1\%, F_i\%=F_{i-1}\%+f_i\%, i=2,...,5$.

Οπότε

$F_1=0,1, F_2=0,34, F_3=0,74, F_4=0,94$,

$F_5=1$. Έτσι σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα.

I	Κλάσεις	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[10, 12)	5	10	10
2	[12 ,14)	12	24	34
3	[14 , 16)	20	40	74
4	[16 , 18)	10	20	94
5	[18 , 20)	3	6	100
Σύνολα		50	10	

Ε3. Ψάχνουμε το βαθμό κάτω από τον οποίο έχει γράψει το 50% των μαθητών. Αφού $50\% = f_1\% + f_2\% + 16\%$, χρειαζόμαστε ένα διάστημα από

την κλάση $[14,16)$ ίσο με τα $\frac{16}{f_3\%} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ αυτής. Άρα, $\delta = 14 + \frac{2}{5}(16-14) = 14{,}8.$

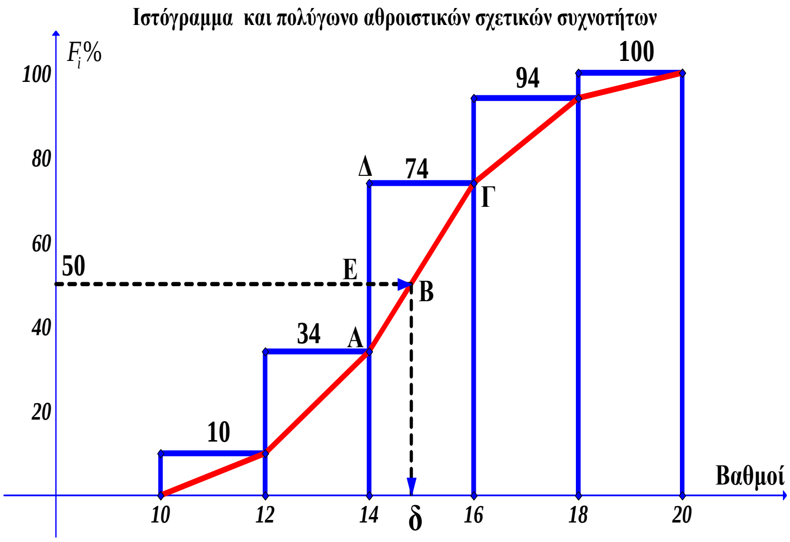
Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{AB}E \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma}\Delta$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{\delta-14}{16-14} = \frac{50-34}{74-34} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta-14}{2} = \frac{16}{30} \Leftrightarrow \delta - 14 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta = 14 + \frac{4}{5}$$



Ε4. Έχουμε $36\% = f_5\% + f_4\% + 10\%$, άρα χρειαζόμαστε ένα διάστημα από

την κλάση $[14,16)$ ίσο με τα $\frac{10}{f_3\%} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ αυτής. Άρα στο διάστημα $[15.5,16)$ βρίσκεται το 10% των παρατηρήσεων της κλάσης $[14,16)$. Τελικά, ο βαθμός που πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί είναι τουλάχιστον $15{,}5$.

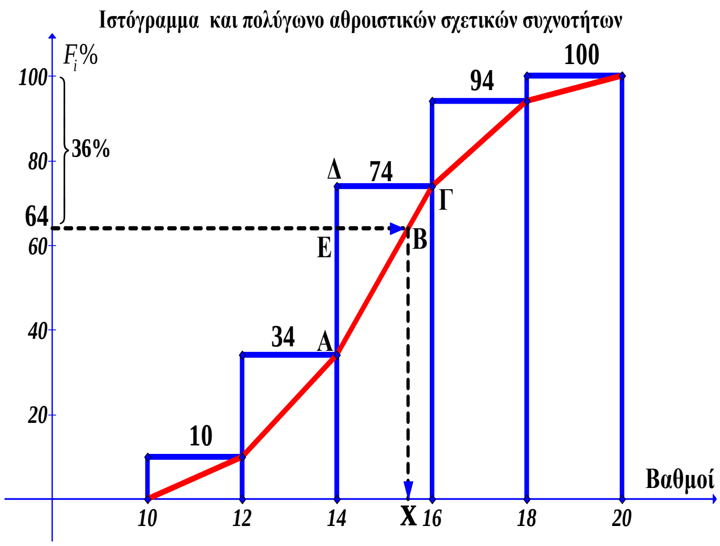
Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{AB}E \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma}\Delta$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Delta\Gamma} = \frac{EA}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \frac{x-14}{16-14} = \frac{64-34}{74-34} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-14}{2} = \frac{30}{40} \Leftrightarrow x - 14 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 14 + \frac{6}{4}$$



Επομένως ο βαθμός που πρέπει να έχει ένας μαθητής για να επιλεγεί είναι τουλάχιστον $15{,}5$.

ΘΕΜΑ 36 — Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\bar{x}}{3}\cdot x^3-12\cdot s\cdot x^2+\bar{x}\cdot x+s$, $x\in\mathbb{R}$ και $\bar{x}$, s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα ενός δείγματος 2ν θετικών παρατηρήσεων με $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Ε1. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν παρουσιάζει ακρότατα, να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Ε2. Αν η εφαπτομένη στο σημείο $A(1,5)$ της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

Ε3. Αν $\bar{x}=12$ και $s=1$ τότε:

α. Να βρεθεί μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, x_3^2, ..., x_{2\nu}^2$, όπου $x_1, x_2, x_3, ..., x_{2\nu}$ οι παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος.

β. Αν στις μισές παρατηρήσεις προσθέσουμε το 4, να βρεθεί η μέση τιμή του νέου δείγματος.

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\bar{x}x^2-24sx+\bar{x}$.

Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα πρέπει

$\Delta\le 0\Rightarrow 576s^2-4\bar{x}^2\le 0\Rightarrow \frac{s}{\bar{x}}\le\frac{1}{12}<\frac{1}{10}\Rightarrow CV<\frac{1}{10}$, έτσι το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε2. Έχουμε $f(1)=5$ άρα $\frac{\bar{x}}{3}-12s+\bar{x}+s=5\Rightarrow 4\bar{x}-33s=15.\ (1)$

Ακόμη πρέπει $f'(1)=0\Rightarrow\bar{x}-12s=0.\ (2)$

Λύνουμε το σύστημα των $(1),(2)$

$$\begin{cases}4\bar{x}-33s=15\\ \bar{x}-12s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\bar{x}-33s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}48s-33s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}15s=15\\ \bar{x}=12s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=1\\ \bar{x}=12\end{cases}$$

Οπότε $\bar{x}=12$ και $s=1$.

Ε3. **α.** Είναι,

$$s^2=\frac{1}{2\nu}\left[\sum_{i=1}^{2\nu}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{2\nu}x_i)^2}{2\nu}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{2\nu}x_i^2}{2\nu}-(\bar{x})^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2\Rightarrow 1+12^2=\overline{x^2}\Rightarrow\overline{x^2}=145.$$

β. Για τις ν παρατηρήσεις είναι $x_{i'} = x_i + 4$, άρα έχουμε

$$(\bar{x})' = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_{i'} + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i+4) + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i + \sum_{i=\nu+1}^{2\nu} x_i + \sum_{i=1}^{\nu} 4}{2\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{2\nu} x_i + 4\nu}{2\nu} \Rightarrow$$

$$(\bar{x})' = \frac{\sum_{i=1}^{2\nu} x_i}{2\nu} + \frac{4\nu}{2\nu} = \bar{x} + 2 = 12 + 2 = 14.$$

ΘΕΜΑ 37

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Οι δείκτες νοημοσύνης των μαθητών ενός λυκείου ακολουθούν την κανονική κατανομή ή περίπου την κανονική κατανομή. Ο ελάχιστος δείκτης του **16%** των «εξυπνότερων μαθητών» είναι **108** και ο μέγιστος δείκτης του **16%** των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι **84**.

Ε1. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

Ε2. Να βρείτε το εύρος και την διάμεσο του δείγματος.

Ε3. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον **132.**

Ε4. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και αν όχι, να βρεθεί η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή του c κατά την οποία πρέπει να αυξηθεί ο δείκτης νοημοσύνης κάθε μαθητή , ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Ε5. Αν **163** μαθητές έχουν δείκτη μεταξύ **72** και **108**, να βρεθεί πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Λύση:

Ε1. Επειδή ο μέγιστος δείκτης του **16%** των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι **84** έχουμε ότι $\bar{x} - s = 84$,**(1).** Επειδή ο ελάχιστος δείκτης του **16%** των «εξυπνότερων μαθητών» είναι **108,** έχουμε ότι $\bar{x} + s = 108$ **,(2).**

Λύνουμε το σύστημα των **(1)** και **(2)** και έχουμε ότι

$$\begin{cases} \bar{x} - s = 84 \\ \bar{x} + s = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\bar{x} = 192 \\ \bar{x} + s = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 96 \\ s = 12 \end{cases}$$

Συνεπώς, $\bar{x} = 96$ και $s = 12$.

Ε2. Επειδή η κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική, γνωρίζουμε ότι το εύρος είναι $R \cong 6s = 72$ και η διάμεσος δ είναι $\delta = \bar{x} = 96$.

Ε3. Το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνης τουλάχιστον **132,** δηλαδή πάνω από $\bar{x} + 3s = 96 + 36 = 132$, όπως φαίνεται από την καμπύλη συχνοτήτων είναι **0,15%.**

Ε4. Έχουμε,

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8} > \frac{1}{10},$$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν ο δείκτης νοημοσύνης αυξηθεί κατά $\mathbf{c}$ τότε η νέα μέση τιμή είναι $\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c} = \mathbf{96} + \mathbf{c}$ και η νέα τυπική απόκλιση $\mathbf{s_1 = s = 12}$.

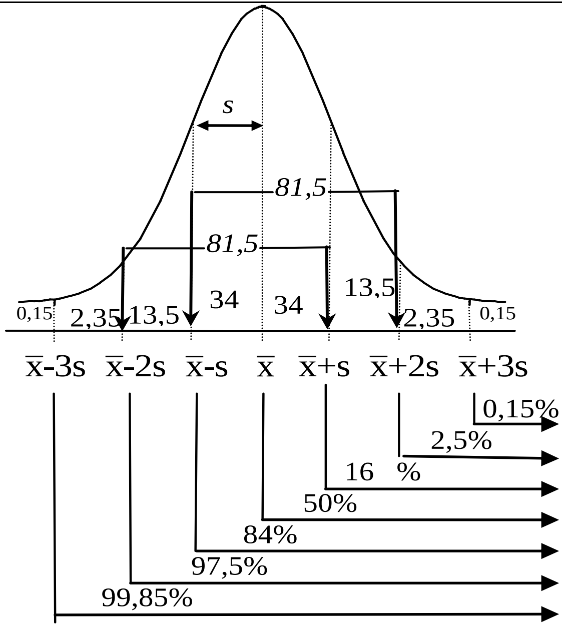
Ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι

$$\mathbf{CV_1} = \frac{\mathbf{s_1}}{|\bar{\mathbf{x}}_1|} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{96+c}}.$$

Για να είναι ομοιογενές πρέπει

$$\mathbf{CV_1} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{96+c}} \le \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{96+c \ge 120} \Leftrightarrow \mathbf{c \ge 24}.$$



Άρα η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές είναι $\mathbf{c = 24}$.

Ε5. Το ποσοστό των μαθητών με δείκτη μεταξύ $\mathbf{72}$ και $\mathbf{108}$, δηλαδή από $\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{2s} = \mathbf{96 - 24 = 72}$ έως $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{s} = \mathbf{96 + 12 = 108}$ είναι $\mathbf{81,5\%}$.

Έτσι έχουμε ότι $\mathbf{163} = \frac{\mathbf{81,5}}{\mathbf{100}} \cdot \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v = 200}$ μαθητές.

ΘΕΜΑ 38

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Οι $\mathbf{10}$ μαθητές ενός τμήματος της Γ' λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών Γενικής, πήραν τις παρακάτω βαθμολογίες: $\mathbf{12,18,16,14,15,18,13,14,17,13}$.

Ε1. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία και τη μεταβλητότητα των βαθμών.

Ε2. Εξετάστε αν τα γραπτά παρουσιάζουν ομοιογένεια στη βαθμολογία.

Ε3. Ο καθηγητής αποφάσισε να "βοηθήσει" τους μαθητές γι' αυτό σκέφτηκε τα εξής:

α. Να αυξήσει όλες τις βαθμολογίες κατά $\mathbf{2}$ μονάδες στο κάθε ένα γραπτό ή

β. Να αυξήσει τη βαθμολογία του κάθε γραπτού κατά $\mathbf{10\%}$

Πως θα επηρεάσουν τα πιο πάνω σκεπτικά **α** ή **β** τη μέση βαθμολογία;

Δίνεται $\sqrt{\mathbf{4,2}} \approx \mathbf{2,05}$

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{12+18+16+14+15+18+13+14+17+13}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{150}}{\mathbf{10}} = \mathbf{15}$ και

$$\mathbf{s^2} = \frac{\mathbf{(12-15)^2 + 2(13-15)^2 + 2(14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (17-15)^2 + 2(18-15)^2}}{\mathbf{10}}$$

$$\mathbf{s^2} = \frac{\mathbf{9+8+2+0+1+4+18}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{10}} = \mathbf{4,2}.$$

Οπότε $\mathbf{CV} = \frac{\mathbf{s}}{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\sqrt{\mathbf{4,2}}}{\mathbf{15}}$.

Ε2. Έστω $CV \le 0,1$. Τότε $CV = \frac{\sqrt{4,2}}{15} \le 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{4,2} \le 1,5 \Leftrightarrow 4,2 \le 2,25$. ΑΤΟΠΟ και συνεπώς $CV > 0,1$ που σημαίνει ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε3. **α.** Αν αυξήσει σε όλους τους μαθητές τη βαθμολογία τους κατά 2 μονάδες, (εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99), έχουμε $\bar{y} = \bar{x} + 2 = 15 + 2 = 17$ και $s_y = s_x = \sqrt{4,2}$. Οπότε $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\sqrt{4,2}}{17} \approx 0,12.$

β. Αν αυξήσει τη βαθμολογία σε όλα τα γραπτά κατά 10%,(εφαρμογή σχολικού βιβλίου σελ 99), θα έχουμε $\bar{z} = 1,1\bar{x} = 1,1 \cdot 15 = 16,5$ και $s_z = 1,1 s_x = 1,1\sqrt{4,2}$ οπότε $CV_z = \frac{s_z}{\bar{z}} = \frac{1,1\sqrt{4,2}}{1,1 \cdot 15} = CV_x$.

ΘΕΜΑ 39 — Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής X των ετήσιων μισθών (σε εκατοντάδες Ευρώ) ενός δείγματος εργαζομένων, ομαδοποιημένης σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία:

$A(20,0), B(40,5), \Gamma(60,10), \Delta(80,20), E(100,30), Z(120,\nu_5), H(140,10), \Theta(160,0)$.

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $x = 100$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\nu_5 = 25$.

Ε2. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής.

Ε3. Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της κατανομής.

Ε4. Αν σαν «όριο φτώχιας» θεωρήσουμε τον μισθό των 7.200 ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστό επί τοις $\%$ των φτωχών του δείγματος.

Λύση:

Ε1. Έστω α το άκρο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος κάθε κλάσης. Γνωρίζουμε ότι στο πολύγωνο συχνοτήτων θεωρούμε αριστερά και δεξιά δύο υποτιθέμενες κλάσεις με μηδενικές συχνότητες και συνδέουμε τα μέσα των άνω βάσεων του ορθογωνίου. Οπότε, η τετμημένη της πρώτης κλάσης είναι $\alpha - \frac{c}{2}$ και η τετμημένη της τελευταίας κλάσης είναι $\alpha + \frac{13c}{2}$. Επομένως έχουμε $\alpha - \frac{c}{2} = 20$ και $\alpha + \frac{13c}{2} = 160.$

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε $\begin{cases} \alpha + \frac{13c}{2} = 160 \\ \alpha - \frac{c}{2} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 20 \\ \alpha = 30 \end{cases}$

Έτσι οι κλάσεις είναι $[30,50), [50,70), [70,90), [90,110), [110,130), [130,150)$.

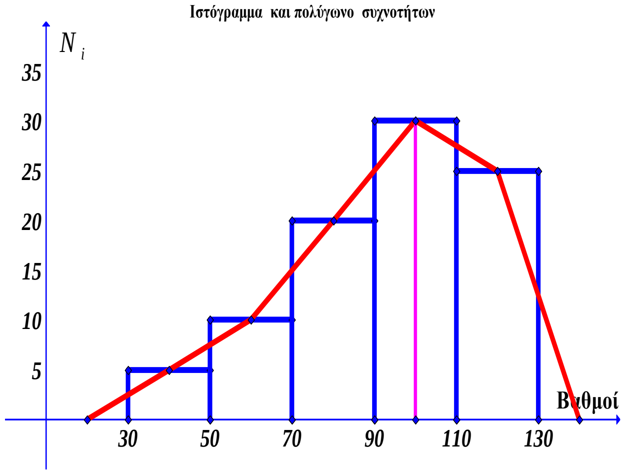
Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον οριζόντιο άξονα και το πολύγωνο συχνοτήτων, ισούται με το μέγεθος του δείγματος.

Έχουμε $\mathbf{v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 20, v_4 = 30, v_6 = 10}$.

Επειδή η $\mathbf{x = 100}$ χωρίζει το χωρίο σε δυο ισοδύναμα χωρία έχουμε ότι

$$\mathbf{v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_4}{2} = \frac{v_4}{2} + v_5 + v_6 \Leftrightarrow 5 + 10 + 20 = v_5 + 10 \Leftrightarrow v_5 = 25.}$$

Ε2. Έτσι σχηματίζεται το ακόλουθο πολύγωνο συχνοτήτων



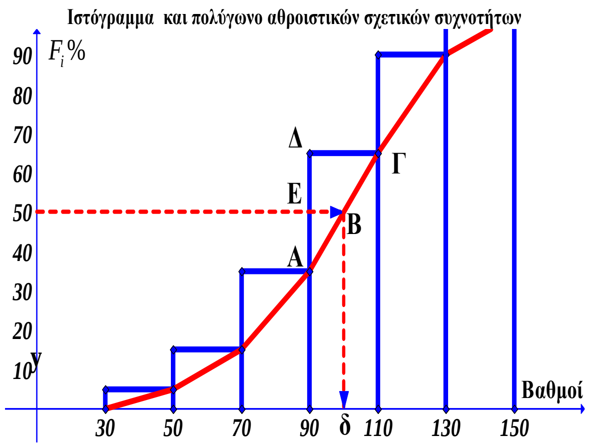
Ε3. Αφού η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση $\mathbf{x = 100}$ διαιρεί το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία, έχουμε ότι η διάμεσος είναι το **100.**

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathbf{\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

$$\mathbf{\frac{BE}{\Gamma\Delta} = \frac{EA}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{110 - 90} = \frac{50 - 35}{65 - 35} \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow \frac{\delta - 90}{20} = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \delta - 90 = 10 \Leftrightarrow \delta = 100}$$



Σχηματίζουμε τον πίνακα

Ι	**Κλάσεις**	**Κέντρο κλάσης**	$\mathbf{v_i}$	$\mathbf{F_i}$ **%**	$\mathbf{v_i\, x_i}$
1	**[30, 50)**	**40**	**5**	**5**	**200**
2	**[50 ,70)**	**60**	**10**	**15**	**600**
3	**[70 , 90)**	**80**	**20**	**35**	**1600**
4	**[90 , 110)**	**100**	**30**	**65**	**3000**
5	**[110 , 130)**	**120**	**25**	**90**	**3000**
6	**[130,150)**	**140**	**10**	**100**	**1400**
Σύνολα		**100**			**9800**

Οπότε $\mathbf{\bar{x} = \frac{9800}{100} = 98.}$

Ε4. Ψάχνουμε να βρούμε το ποσοστό των ατόμων, που παίρνουν κάτω από

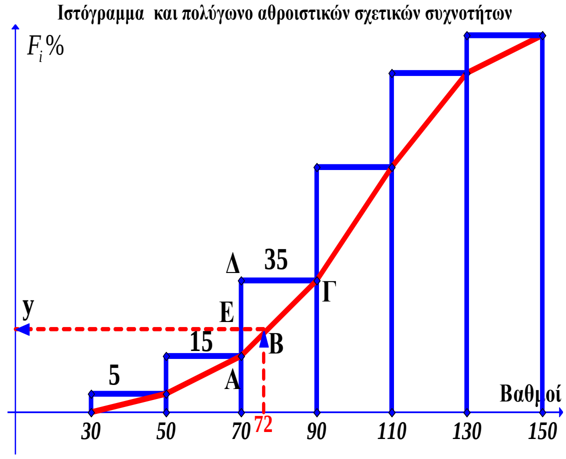
7.200€. Στο διάστημα $[70,90)$ βρίσκεται το 20% οπότε θεωρώντας ότι κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα $[70,72)$ θα βρίσκεται το 2%. Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι $5\%+10\%+2\%=17\%$.

Β΄ τρόπος:

Φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων $\overset{\Delta}{ABE} \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ έχουμε

$$\frac{BE}{\Gamma\Delta}=\frac{EA}{\Delta A} \Leftrightarrow \frac{72-70}{90-70}=\frac{y-15}{35-15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{20}=\frac{y-15}{20} \Leftrightarrow y=17$$



Επομένως το συνολικό ποσοστό που ζει κάτω από το όριο της φτώχειας είναι **17%.**

ΘΕΜΑ 40

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Μελετούμε τους **80** μαθητές της Γ΄ τάξης ενός λυκείου ως προς το βάρος τους, έτσι

- Ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις σε τέσσερις ίσες κλάσεις.
- Η κεντρική τιμή της πρώτης κλάσης είναι **60** κιλά και το δεξιό άκρο της τρίτης κλάσης είναι **80** κιλά.
- Οι συχνότητες της πρώτης και της τέταρτης κλάσης είναι ίσες και έχουν άθροισμα την συχνότητα της τρίτης κλάσης.
- Η συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι διπλάσια της συχνότητας της τρίτης κλάσης.

Ε1. Να βρείτε τις κλάσεις.

Ε2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Ε3. Να βρείτε την μέση τιμή.

Ε4. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Ε5. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Ε6. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βάρος τουλάχιστον **72.**

Ε7. Αν κατά την διάρκεια των χριστουγεννιάτικων διακοπών, κάθε ένα από τα **32** αγόρια πάρει **1,5** κιλό και κάθε κορίτσι **1** κιλό, ποιά θα είναι η νέα μέση τιμή.

Λύση:

Ε1. Έστω α το κάτω άκρο της $1^{ης}$ κλάσης και c το πλάτος κάθε κλάσης. Τότε έχουμε $\dfrac{\alpha+\alpha+c}{2}=60$ και $\alpha+3c=80.$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha+3c=80 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha-6c=-160 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5c=40 \\ 2\alpha+c=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=8 \\ \alpha=56 \end{cases}$

Επομένως οι κλάσεις είναι οι $[56,64),[64,72),[72,80),[80,88)$.

Ε2. Γνωρίζουμε $\nu_1=\nu_4$, ακόμα $\nu_1+\nu_4=\nu_3$ και $\nu_2=2\nu_3$.

Όμως, $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Leftrightarrow (\nu_1+\nu_4)+\nu_2+\nu_3=80 \Leftrightarrow$

$\nu_3+2\nu_3+\nu_3=80 \Leftrightarrow 4\nu_3=80 \Leftrightarrow \nu_3=20.$

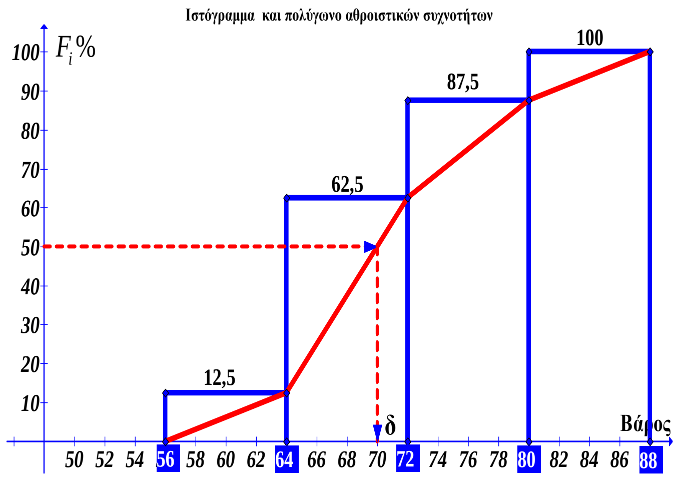
Οπότε $\nu_1=10, \nu_2=40, \nu_3=20, \nu_4=10.$ Έτσι σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

I	Κλάσεις [-)	Κέντρο κλάσης x_i	ν_i	N_i	$\nu_i x_i$	$f_i\%$	$F_i\%$
1	[56, 64)	60	10	10	600	12,5	12,5
2	[64 ,72)	68	40	50	2720	50	62,5
3	[72 , 80)	76	20	70	1520	25	87,5
4	[80 , 88)	84	10	80	840	12,5	100
Σύνολα			80		5680	100	

Ε3. $$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{80} x_i\nu_i}{\nu}=\frac{5680}{80}=71.$$

Ε4.

Όταν έχουμε ομαδοποιημένες τιμές η διάμεσος βρίσκεται γραφικά.

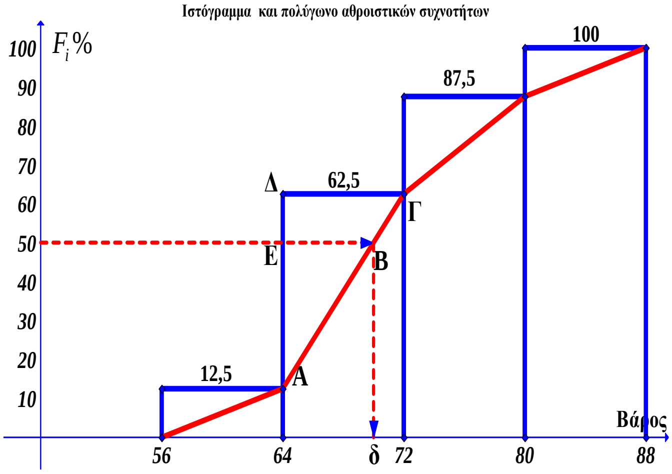


- Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Στον κάθετο άξονα φέρνουμε από το $F_i\%=50\%$ (ή 0,5) παράλληλη ευθεία στον οριζόντιο άξονα.
- Στο σημείο όπου τέμνει το πολύγωνο φέρνουμε κάθετη ευθεία στον άξονα των **τιμών** x_i.
- Στο σημείο όπου τέμνει τον άξονα της μεταβλητής είναι η τιμή της διαμέσου.

Επομένως από το διπλανό σχήμα είναι $\delta \approx 70$.

Εάν όμως θέλουμε να υπολογίσουμε με ακρίβεια τη διάμεσο, ένα τρόπος είναι και ο παρακάτω.

Έχουμε το διπλανό πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, φτιάχνοντας το ιστόγραμμα και το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, από την ομοιότητα των τριγώνων



$\overset{\Delta}{\mathrm{ABE}} \simeq \overset{\Delta}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$ έχουμε

$$\frac{\mathrm{BE}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{EA}}{\Delta\mathrm{A}} \Leftrightarrow \frac{\delta-64}{72-64}=\frac{50-12{,}5}{62{,}5-12{,}5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta-64}{8}=\frac{37{,}5}{50} \Leftrightarrow \delta-64=6 \Leftrightarrow \delta=70$$

Ε5. Το ποσοστό των μαθητών που έχει βάρος τουλάχιστον 72 κιλά είναι $100\%-62{,}5\%=37{,}5\%$.

Ε6. Αν κάθε ένα από τα 32 αγόρια πάρει $1{,}5$ κιλό και κάθε κορίτσι 1 κιλό έχουμε $\bar{y}=\dfrac{5680+32\cdot1{,}5+48\cdot1}{80}=\dfrac{5680+48+48}{80}=\dfrac{5776}{80}=72{,}2.$

ΘΕΜΑ 41

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Ε1. Αν $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ είναι οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ, να αποδείξετε ότι $S^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2$.

Ε2. Σε μια πόλη κατά τις απολυτήριες εξετάσεις στο μάθημα της ιστορίας η βαθμολογία $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ των μαθητών ήταν περίπου κανονική κατανομή. Ο μέσος όρος των τετραγώνων των βαθμών ήταν 148 και ο συντελεστής μεταβλητότητας $\frac{1}{6}$.

α) Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο.

β) Αν 10 μαθητές είχαν βαθμολογία πάνω από 16, να βρείτε πόσοι μαθητές συμμετείχαν στις εξετάσεις.

Λύση:

Ε1. Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2.$$

Οπότε ισχύει $s^2=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\bar{x}\right)^2$.

Ε2. **α).** Επειδή εξετάζουμε τους μαθητές ως προς τη βαθμολογία, έχουμε μόνο μη αρνητικές τιμές. Οπότε ισχύει $\bar{x} \geq 0$.

Έχουμε $\overline{(x^2)} = 148$ και $CV = \frac{1}{6}$, οπότε

$$(CV)^2 = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{s^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \frac{\overline{(x^2)} - (\bar{x})^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow$$

$$\frac{148 - (\bar{x})^2}{(\bar{x})^2} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 148 \cdot 36 - 36(\bar{x})^2 \Leftrightarrow 37(\bar{x})^2 = 148 \cdot 36 \Leftrightarrow$$

$$(\bar{x})^2 = \frac{148 \cdot 36}{37} \Leftrightarrow (\bar{x})^2 = 4 \cdot 36 \overset{\bar{x} \geq 0}{\Rightarrow} \bar{x} = 12.$$

$$s^2 = \overline{(x^2)} - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = 148 - 144 \Leftrightarrow s^2 = 4.$$

Η τυπική απόκλιση ισούται με τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. Επομένως είναι $s = 2$. Επειδή οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή η διάμεσος ισούται με τη μέση τιμή. Συνεπώς $\delta = \bar{x} = 12$.

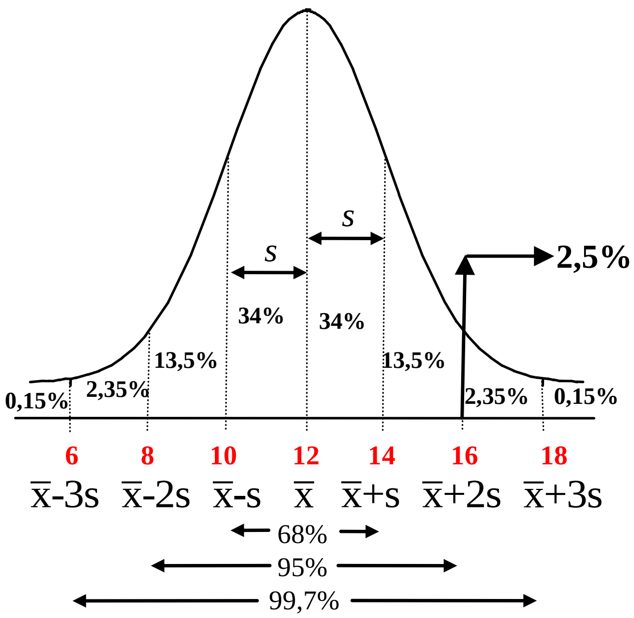
β). Οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή οπότε έχουμε την διπλανή καμπύλη.

Συνεπώς πάνω από 16 βρίσκεται το $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ των παρατηρήσεων. Άρα οι 10 μαθητές με βαθμό πάνω από 16 είναι το $2,5\%$ όλων των μαθητών.

Έστω ν το σύνολο όλων των μαθητών. Τότε αφού 10 μαθητές αποτελούν το $2,5\%$ όλων των μαθητών θα είναι

$$\frac{2,5}{100} \cdot \nu = 10 \Leftrightarrow \nu = \frac{1000}{2,5} \Leftrightarrow \nu = 400$$

μαθητές.



ΘΕΜΑ 42

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται το δείγμα $\mathbf{5,6,7,\alpha,\beta}$ με $\mathbf{\alpha<\beta}$. Αν ισχύουν $\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{6}$ και $\mathbf{CV}=\dfrac{\mathbf{50\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}\%$,

Ε1. Να βρείτε την τυπική απόκλιση του δείγματος.

Ε2. Να δείξετε ότι $\mathbf{\alpha+\beta=12}$.

Ε3. Να βρείτε τους $\mathbf{\alpha,\beta}$.

Ε4. Για $\mathbf{\alpha=4,\beta=8}$, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος που προκύπτει αν διαιρέσουμε κάθε τιμή του δείγματος με το $\sqrt{\mathbf{2}}$.

Ε5.

Λύση:

Ε1. Έχουμε για το συντελεστή μεταβλητότητας :

$$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}\Leftrightarrow s=CV\cdot\bar{x}\Leftrightarrow s=6\cdot\frac{\frac{50\sqrt{2}}{3}}{100}\%\Leftrightarrow s=6\cdot\frac{50\sqrt{2}}{300}\Leftrightarrow s=\sqrt{2}.$$

Ε2. Από τη μέση τιμή έχουμε

$$\bar{x}=6\Leftrightarrow\frac{\sum_{i=1}^{5}t_i}{5}=6\Leftrightarrow\frac{5+6+7+\alpha+\beta}{5}=6\Leftrightarrow 18+\alpha+\beta=30\Leftrightarrow\alpha+\beta=12.$$

Ε3. Από τη διακύμανση έχουμε

$$s^2=2\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{x}\right)^2\Leftrightarrow\frac{(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(\alpha-6)^2+(\beta-6)^2}{5}=2$$

$$\Leftrightarrow 1+0+1+(\alpha-6)^2+(12-\alpha-6)^2=10$$

$$\Leftrightarrow(\alpha-6)^2+(6-\alpha)^2=8\Leftrightarrow 2(\alpha-6)^2=8\Leftrightarrow(\alpha-6)^2=4\Leftrightarrow|\alpha-6|=2\Leftrightarrow\alpha-6=2$$ ή

$\mathbf{\alpha-6=-2}$. Άρα $\mathbf{\alpha=8}$ ή $\mathbf{\alpha=4}$

Αν $\mathbf{\alpha=8}$ τότε από τη σχέση $\mathbf{\alpha+\beta=12}$ είναι $\mathbf{\beta=4}$. **Αδύνατο,** διότι $\mathbf{\alpha<\beta}$.

Αν $\mathbf{\alpha=4}$ τότε από τη σχέση $\mathbf{\alpha+\beta=12}$ είναι $\mathbf{\beta=8}$. **Δεκτή,** άρα $\mathbf{\alpha=4}$ και $\mathbf{\beta=8}$.

Ε4. Αν $\mathbf{x_i}$ οι αρχικές παρατηρήσεις και $\mathbf{y_i}$ οι παρατηρήσεις που προκύπτουν διαιρώντας τις $\mathbf{x_i}$ με $\sqrt{2}$, τότε έχουμε $\mathbf{y_i}=\dfrac{\mathbf{x_i}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{x_i}$, $\mathbf{i=1,2,\ldots,5}$

Γνωρίζουμε (από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ 99) για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων $\mathbf{y_i}$, ότι θα προκύψουν από τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των $\mathbf{x_i}$, ως εξής: $\bar{y}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\bar{x}$ και $s_y=\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|\cdot s_x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot s_x$.

Οπότε $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot s_x}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = CV_x$. Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV_y = \frac{50\sqrt{2}}{3}\%$.

ΘΕΜΑ 43

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Εξετάσαμε ένα δείγμα μαθητών ως προς το βαθμό που πήραν στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας στις Πανελλήνιες Εξετάσεις και διαπιστώσαμε ότι :

- Κάτω από 20 πήραν 5 μαθητές.
- Κάτω από 40 πήραν 13 μαθητές.
- Από 40 και πάνω πήρε το 48% των μαθητών.
- Κάτω από 60 πήρε το 76% των μαθητών.
- Τέλος από 80 και πάνω πήρε το 8% των μαθητών.

Βαθμοί	**Κέντρο κλάσης** x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i v_i$	$v_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
[0,20)							
[20,40)							
[40,60)							
[60,80)							
[80,100)							
Σύνολα							

Ε1. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Ε2. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό από **50** μέχρι και **70**.

Ε3. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών και την τυπική απόκλιση.

Ε4. Είναι ομοιογενές το δείγμα;

Λύση:

Ε1. Από τα δεδομένα έχουμε:

- Επειδή κάτω από **20** πήραν **5** μαθητές έχουμε $v_1 = 5$.
- Κάτω από **40** πήραν **13** μαθητές, έτσι $v_1 + v_2 = 13 \Rightarrow v_2 = 8$.
- Αφού από **40** και πάνω πήρε το **48%** των μαθητών, το υπόλοιπο **52%** πήρε κάτω από **40**, το οποίο είναι **13** μαθητές.

Έτσι $13 = \frac{52}{100} v \Rightarrow v = 25$ είναι το πλήθος των μαθητών.

- Επειδή από 80 και πάνω πήρε το 8% των μαθητών, έχουμε $v_5 = \frac{8}{100} \cdot 25 \Rightarrow v_5 = 2$.
- Το 76% των μαθητών που πήραν κάτω από 60 είναι $\frac{76}{100} \cdot 25 = 19$ μαθητές.

Οπότε $v_3 = 19 - v_1 - v_2 \Rightarrow v_3 = 6$ και $v_4 = 25 - v_1 - v_2 - v_3 - v_5 = 4$.

Ο πίνακας γίνεται :

Βαθμοί	Κέντρο κλάσης x_i	v_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i v_i$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
[0,20)	10	5	5	20	20	50	5120
[20,40)	30	8	13	32	52	240	1152
[40,60)	50	6	19	24	76	300	384
[60,80)	70	4	23	16	92	280	3136
[80,100)	90	2	25	8	100	180	4608
Σύνολα		25		100		1050	14400

Ε2. Βαθμό από 50 έως 70, θεωρώντας ότι τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα μέσα στις κλάσεις, πήραν οι μισοί μαθητές της $3^{ης}$ και οι μισοί μαθητές της $4^{ης}$ κλάσης. Άρα το $\frac{24}{2}\% + \frac{16}{2}\% = 20\%$ των μαθητών.

Ε3. Για τη μέση τιμή έχουμε $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} = \frac{1050}{25} = 42$, ενώ για την τυπική απόκλιση $s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5} v_i (x_1 - \bar{x})^2 \Rightarrow s^2 = \frac{14400}{25} \Rightarrow s = \frac{120}{5} \Rightarrow s = 24.$

Αφού ως τυπική απόκλιση s ορίζουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης.

Ε4. Θα υπολογίσουμε το συντελεστή μεταβλητότητας προκειμένου να αποφανθούμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές ή όχι.

Έχουμε λοιπόν $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Rightarrow CV = \frac{24}{42} \Rightarrow CV = \frac{4}{7} > \frac{1}{10}$ και συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού ο συντελεστής μεταβλητότητας ξεπερνάει το 10%.

ΘΕΜΑ 44

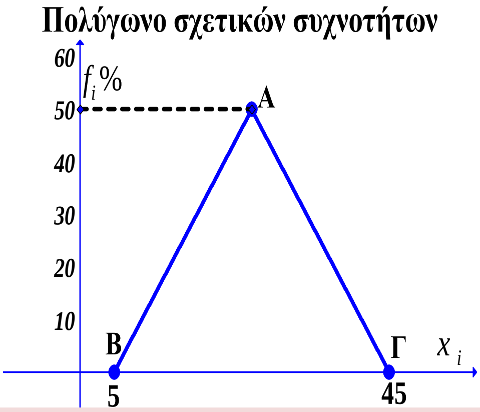
Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε $\mathbf{\kappa}$ κλάσεις, ίσου πλάτους $\mathbf{c}$. Δίνεται το πολύγωνο $\mathbf{f_i\%}$ το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.

Ε1. Να εκφράσετε το $\mathbf{c}$ συναρτήσει του $\mathbf{\kappa}$.

Ε2. Να βρείτε τα $\mathbf{c}$ και $\mathbf{\kappa}$.

Ε3. Αν $\mathbf{f_1\% = 25\%}$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα $\mathbf{f_i\%}$.



Λύση:

Ε1. Οι κορυφές **Β** και **Γ** του τριγώνου είναι τα μέσα των δύο υποθετικών κλάσεων που θεωρούμε (μία κλάση στην αρχή και μία στο τέλος, με το ίδιο πλάτος και μηδενική συχνότητα) προκειμένου να κατασκευάσουμε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. Οι τετμημένες λοιπόν **5** και **45** αυτών των σημείων, είναι οι κεντρικές τιμές των υποθετικών κλάσεων. Ανάμεσα τους υπάρχουν οι κεντρικές τιμές $\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_\kappa}$. Τότε, δοθέντος ότι τα κέντρα των κλάσεων απέχουν όσο το πλάτος των κλάσεων, έχουμε:

$$\begin{cases} x_1 = 5 + c \\ x_2 = x_1 + c \\ x_3 = x_2 + c \\ \ldots \\ x_\kappa = x_{\kappa-1} + c \\ 45 = x_\kappa + c \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε: $\mathbf{45 = 5 + (\kappa+1)c \Leftrightarrow c = \dfrac{40}{\kappa+1}}$ **(1)**.

Ε2. Στον υπολογισμό του εμβαδού, θεωρούμε ως μονάδα μέτρησης του μήκους , στον οριζόντιο άξονα, το πλάτος της κλάσης, δηλαδή το $\mathbf{c}$.

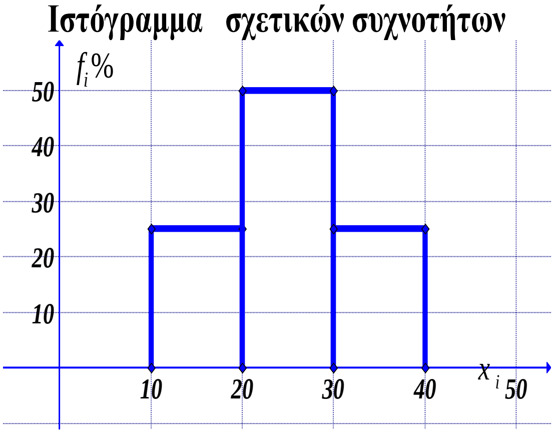
Άρα, η βάση του τριγώνου έχει μήκος $\mathbf{\beta = \dfrac{1}{2} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\kappa\ \text{φορές}} + \dfrac{1}{2} = \kappa + 1}$ **(2)** δηλαδή

έχει μήκος $\mathbf{(\kappa+1)c}$ (Π.χ όπως λέμε 5 **μέτρα** εδώ λέμε θα λέμε 5 $\mathbf{c}$).

Το εμβαδόν που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με **100**, και αφού έχει σχήμα τριγώνου θα ισχύει:

$\mathbf{E = 100 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\beta \cdot 50 = 100 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{2}(\kappa+1)\cdot 50 = 100 \Leftrightarrow \kappa = 3}$ και από την (1): $\mathbf{c = 10.}$

Ε3. Αφού $\mathbf{\kappa = 3}$, από το πολύγωνο έχουμε $\mathbf{f_2\% = 50}$, άρα $\mathbf{f_3\% = 100\% - (25\% + 50\%) = 25\%}$ και έτσι προκύπτει στο διπλανό πίνακα το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



ΘΕΜΑ 45

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ρωτήθηκε ένα δείγμα $\mathbf{\nu}$ οικογενειών σχετικά με τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Από τις απαντήσεις τους συντάχθηκε ο διπλανός πίνακας των αθροιστικών συχνοτήτων.

Αριθμός παιδιών $\mathbf{x_i}$	Αριθμός οικογενειών $\mathbf{\nu_i}$	$\mathbf{N_i}$
1	$\mathbf{\nu_1}$	$\mathbf{x}$
2	$\mathbf{\nu_2}$	$\mathbf{3x-5}$
3	$\mathbf{\nu_3}$	$\mathbf{3x+8}$
4	$\mathbf{\nu_4}$	$\mathbf{4x+7}$
5	$\mathbf{\nu_5}$	$\mathbf{5x}$

Ε1. Να εκφράσετε συναρτήσει του $\mathbf{x}$ τις συχνότητες $\mathbf{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5}$.

Αν οι αθροιστικές συχνότητες $\mathbf{N_i}$ έχουν μέση τιμή $\mathbf{\bar{y} = 34}$, να βρείτε:

Ε2. Την τιμή του $\mathbf{x}$.

Ε3. Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ τρία παιδία και πόσες έχουν τουλάχιστον δύο παιδιά.

Ε4. Τη μέση τιμή $\mathbf{\bar{x}}$ και την διάμεσο $\mathbf{\delta}$ του αριθμού των παιδιών των οικογενειών.

Πηγή:Λ.Κανάκης - Γ. Μαυρίδης (Εκδόσεις Μαυρίδη)

Λύση:

Ε1. Για τις συχνότητες $\mathbf{\nu_i, i = 1,2,...,5}$ έχουμε:

$$\mathbf{\nu_1 = N_1 = x,\ \nu_2 = N_2 - N_1 = 3x - 5 - x = 2x - 5,\ \nu_3 = N_3 - N_2 = 3x + 8 - 3x + 5 = 13}$$

$$\mathbf{\nu_4 = N_4 - N_3 = 4x + 7 - 3x - 8 = x - 1,\ \nu_5 = N_5 - N_4 = 5x - 4x - 7 = x - 7}$$

Ε2. Η μέση τιμή των αθροιστικών συχνοτήτων $\mathbf{N_i}$ είναι **34.**

Οπότε $\mathbf{\bar{y} = 34 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} N_i}{5} = 34 \Rightarrow 16x + 10 = 170 \Rightarrow x = 10}$.

Ε3. Για $\mathbf{x = 10}$ έχουμε $\mathbf{\nu_1 = 10,\ \nu_2 = 15,\ \nu_3 = 13,\ \nu_4 = 9}$ και $\mathbf{\nu_5 = 3}$.

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων γίνεται:

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i	N_i	$x_i v_i$
1	**10**	**10**	**10**
2	**15**	**25**	**30**
3	**13**	**38**	**39**
4	**9**	**47**	**36**
5	**3**	**50**	**15**
Σύνολα	**50**		**130**

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το πολύ τρία παιδιά έχουν $N_3 = 38$ οικογένειες και τουλάχιστον δύο παιδιά έχουν $v - v_1 = 50 - 10 = 40$ οικογένειες.

Ε4. Για τη μέση τιμή έχουμε: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_1 \cdot v_i}{v} = \dfrac{130}{50} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}6$ παιδιά.

Για τη διάμεσο έχουμε: Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο $v = 50$ και επιπλέον οι παρατηρήσεις είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, η διάμεσος είναι η μέση τιμή (το ημιάθροισμα) της $25^{ης}$ και $26^{ης}$ παρατήρησης.

Από τον πίνακα της αθροιστικής συχνότητας φαίνεται ότι η $25^{η}$ παρατήρηση είναι η $x_2 = 2$ και η $26^{η}$ είναι η $x_3 = 3$, οπότε $\delta = \dfrac{2+3}{2} \Rightarrow \delta = 2{,}5$ παιδιά.

ΘΕΜΑ 46

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω μεταβλητή X με παρατηρήσεις $t_1, t_2, \cdots, t_v$, μέση τιμή $\bar{x} \neq 0$, $\alpha \in R$ και η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot (t_1 + t_2 + \cdots + t_v) - 2\bar{x}v}{x^2 - 4}, & 0 < x \neq 2 \\ \dfrac{\alpha \bar{x} v}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

Ε1. Αν η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ε2. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(3, 20)$, να αποδείξετε ότι $\sum_{i=1}^{v} t_i = 100$.

Ε3. Αν $\sum_{i=1}^{v} t_i \cdot f_i = 1$, όπου f_i οι σχετικές συχνότητες των παρατηρήσεων, να βρεθεί το μέγεθος v του δείγματος.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + \ldots + t_v}{v} \Leftrightarrow t_1 + t_2 + \ldots + t_v = v\bar{x}$ **(1)**

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}, x\neq 2\\ \dfrac{\alpha\nu\overline{x}}{2}, x=2\end{cases}$$

Τότε

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x(t_1+t_2+...+t_\nu)-2\nu\overline{x}}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x\nu\overline{x}-2\nu\overline{x}}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\nu\overline{x}(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\nu\overline{x}}{(x+2)}=\frac{\nu\overline{x}}{4}$$

και $g(2)=\dfrac{\alpha\nu\overline{x}}{2}$. Όμως η g συνεχής στο $x_0=2$, οπότε

$$\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)\Leftrightarrow\frac{\nu\overline{x}}{4}=\frac{\alpha\nu\overline{x}}{2}\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{2}.$$

Ε2. Επειδή το σημείο $A(3,20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της g έχουμε: $A(3,20)\in C_g\Leftrightarrow g(3)=20\Leftrightarrow\dfrac{3\nu\overline{x}-2\nu\overline{x}}{3^2-4}=20\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\nu\overline{x}=100\overset{(1)}{\Leftrightarrow}t_1+t_2+...+t_\nu=100\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}t_i=100.$$

Ε3. Επειδή κάθε παρατήρηση εμφανίζεται μία φορά, η συχνότητα καθεμίας από αυτές είναι ίση με **1**, οπότε :

$$\sum_{i=1}^{\nu}t_if_i=1\Leftrightarrow t_1f_1+t_2f_2+...+t_\nu f_\nu=1\Leftrightarrow t_1\frac{\nu_1}{\nu}+t_2\frac{\nu_2}{\nu}+...+t_2\frac{\nu_\nu}{\nu}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_1\nu_1+...+t_\nu\nu_\nu=\nu\Leftrightarrow t_1+t_2+...+t_\nu=\nu\Leftrightarrow\nu=100.$$

ΘΕΜΑ 47 — Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Οι σημερινές ηλικίες των καθηγητών του Μαθηματικού τμήματος Ιωαννίνων έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1=0,08$, ενώ πριν **25** χρόνια ο συντελεστής μεταβολής των ηλικιών τους ήταν $CV_2=0,16$.

Θεωρώντας ότι στο πέρασμα των ετών δεν υπήρχαν μεταβολές στο διδακτικό προσωπικό:

Ε1. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της σημερινής τους ηλικίας.

Ε2. Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των καθηγητών είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια;

Ε3. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών είναι **75480**, να βρεθεί πόσοι είναι οι καθηγητές του τμήματος.

Ε4. Αν συνταξιοδοτηθεί ένας εκ των καθηγητών και στη θέση του προσληφθεί ένας καθηγητής **30** χρόνια νεότερος, τότε:

α) Να βρεθεί η νέα μέση τιμή των ηλικιών.

β) Να βρεθεί το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών μετά την πρόσληψη του καθηγητή, αν η διακύμανση που προκύπτει είναι **37.**

γ) Με δεδομένο το προηγούμενο ερώτημα, να εξετάσετε το νέο δείγμα που προκύπτει ως προς την ομοιογένεια.

Λύση:

Ε1. Έστω $\bar{x}, s_x$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που έχουν οι καθηγητές του τμήματος σήμερα.

Έστω $\bar{y}, s_y$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που είχαν οι καθηγητές πριν 25 χρόνια. Από εφαρμογή του σχολικού, σελ 99, γνωρίζουμε ότι $\bar{y}=\bar{x}-25$ και $s_y=s_x$.

Επομένως , $CV_1=\frac{s_x}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0,08=\frac{s_x}{\bar{x}} \Leftrightarrow s_x=0,08\cdot\bar{x}$.

Και $CV_2=\frac{s_y}{\bar{y}} \Leftrightarrow 0,16=\frac{s_x}{\bar{x}-25} \Leftrightarrow s_x=0,16\cdot(\bar{x}-25)$.

Λύνουμε το σύστημα και έχουμε

$0,16\cdot(\bar{x}-25)=0,08\cdot\bar{x} \Leftrightarrow 0,16\cdot\bar{x}-4=0,08\cdot\bar{x} \Leftrightarrow 0,08\cdot\bar{x}=4 \Leftrightarrow \bar{x}=50$.

Οπότε $s_x=0,08\cdot\bar{x}=0,08\cdot 50=4.$

Ε2. Έστω $\bar{z}, s_z$ η μέση ηλικία και η τυπική απόκλιση που είχαν οι καθηγητές όταν το δείγμα έγινε για πρώτη φορά ομοιογενές, πριν από α χρόνια.

Έχουμε ότι $\bar{z}=\bar{x}-\alpha=50-\alpha, \alpha\in(0,50)$ και $s_z=s_x=4$.

$$CV_z \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{s_z}{\bar{z}} \le 0,1 \Leftrightarrow 0,1\cdot\bar{z} \ge s_z \Leftrightarrow 0,1(50-\alpha)\ge 4 \Leftrightarrow 5-0,1\cdot\alpha \ge 4 \Leftrightarrow \alpha \le 10$$

Άρα πριν από 10 χρόνια , το δείγμα έγινε για πρώτη φορά ομοιογενές.

Ε3. Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε:

$$s_x^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right\}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu^2}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2}{\nu}-\left(\bar{x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^2=\frac{75480}{\nu}-50^2 \Leftrightarrow \frac{75480}{\nu}=2516 \Leftrightarrow \nu=\frac{75480}{2516}=30 .$$

Επομένως το μαθηματικό τμήμα έχει 30 καθηγητές.

Ε4. **α)** $\bar{x}=50 \Leftrightarrow \frac{x_1+...+x_{30}}{30}=50 \Leftrightarrow x_1+...+x_{30}=1500 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30}x_i=1500$.

Οπότε το συνολικό άθροισμα των ηλικιών των καθηγητών του τμήματος, είναι **1500.**

Αποχωρεί ένας καθηγητής και στη θέση του προσλαμβάνεται ένας καθηγητής 30 χρόνια μικρότερος, οπότε αν κ_i, $i=1,2,...,30$ οι τιμές του νέου δείγματος, τότε

$$\bar{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i - 30}{30} = \frac{1500-30}{30} = 49 .$$

β) Η διακύμανση των τιμών κ_i, $i=1,2,...,30$ είναι $s_\kappa^2 = 37$. Οπότε έχουμε:

$$s_\kappa^2 = \frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{\nu} - (\bar{\kappa})^2 \Leftrightarrow 37 = \frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{30} - 49^2 \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2}{30} = 2438 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{30}\kappa_i^2 = 73140 .$$

γ) Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος είναι $CV_\kappa = \frac{s_\kappa}{\bar{\kappa}} = \frac{\sqrt{37}}{49}$. Έστω ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Δηλαδή $CV_\kappa \le 0,1$.

Τότε $CV_\kappa \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{37}}{49} \le 0,1 \Leftrightarrow \sqrt{37} \le 4,9 \Leftrightarrow \left(\sqrt{37}\right)^2 \le (4,9)^2 \Leftrightarrow 37 \le 24,01$.

Άτοποκαι συνεπώς $CV_\kappa > 0,1$ που σημαίνει ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 48

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Οι χρόνοι σε min που χρειάζονται οι μαθητές μιας γειτονιάς για να πάνε στο σχολείο τους έχουν ομαδοποιηθεί σε **4** κλάσεις ίσου πλάτους με αντίστοιχες συχνότητες **6,10,7,7**.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6(x_1 - x)^2 + 10(x_2 - x)^2 + 7(x_3 - x)^2 + 7(x_4 - x)^2$, όπου x_1, x_2, x_3, x_4 τα κέντρα των αντίστοιχων κλάσεων.

Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 7$ με τιμή $f(7) = 134$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = 2$.

Ε2. Να βρείτε τις συχνότητες f_i.

Ε3. Να βρείτε την τυπική απόκλιση.

Ε4. Να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

Πηγή: Φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Ε1. Αν α είναι το αριστερό άκρο της πρώτης κλάσης και c το πλάτος των κλάσεων, τότε οι κλάσεις είναι οι $[\alpha, \alpha+c), [\alpha+c, \alpha+2c), [\alpha+2c, \alpha+3c), [\alpha+3c, \alpha+4c)$ και τα αντίστοιχα κέντρα τους είναι : $x_1 = \alpha + \frac{c}{2}$, $x_2 = \alpha + \frac{3c}{2}$, $x_3 = \alpha + \frac{5c}{2}$ και $x_4 = \alpha + \frac{7c}{2}$

Επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ,ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -12(x_1 - x) - 20(x_2 - x) - 14(x_3 - x) - 14(x_4 - x)$.

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 7$ έχουμε:

$$f'(7) = 0 \Leftrightarrow -12(x_1 - 7) - 20(x_2 - 7) - 14(x_3 - 7) - 14(x_4 - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$6(x_1 - 7) + 10(x_2 - 7) + 7(x_3 - 7) + 7(x_4 - 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$$6x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 210$$

Με αντικατάσταση των x_1, x_2, x_3, x_4 παίρνουμε: $6x_1+10x_2+7x_3+7x_4=210 \Leftrightarrow$

$$6\left(\alpha+\frac{c}{2}\right)+10\left(\alpha+\frac{3c}{2}\right)+7\left(\alpha+\frac{5c}{2}\right)+7\left(\alpha+\frac{7c}{2}\right)=210 \Leftrightarrow$$

$$30\alpha+60c=210 \Leftrightarrow \alpha+2c=7 \Leftrightarrow \alpha=7-2c$$

Έτσι τα x_i συναρτήσει μόνο του c, είναι:

$$x_1=7-\frac{3c}{2},\ x_2=7-\frac{c}{2},\ x_3=7+\frac{c}{2} \text{ και } x_1=7+\frac{3c}{2}$$

Η τιμή του ελαχίστου είναι

$f(7)=134$ οπότε:

$$f(7)=134 \Leftrightarrow$$

$$6(x_1-7)^2+10(x_2-7)^2+7(x_3-7)^2+7(x_4-7)^2=134 \Leftrightarrow$$

$$6\left(-\frac{3c}{2}\right)^2+10\left(-\frac{c}{2}\right)^2+7\left(\frac{c}{2}\right)^2+7\left(\frac{3c}{2}\right)^2=134 \Leftrightarrow$$

$$54c^2+10c^2+7c^2+63c^2=536 \Leftrightarrow c^2=4 \Leftrightarrow c=2 .$$

Ε2. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι: $v=6+10+7+7=30$, έτσι:

- $f_1=\dfrac{v_1}{v}=\dfrac{6}{30}$
- $f_2=\dfrac{v_2}{v}=\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$
- $f_3=\dfrac{v_3}{v}=\dfrac{7}{30}$
- $f_4=\dfrac{v_4}{v}=\dfrac{7}{30}$

Ε3. Με $c=2$ είναι $x_1=4$, $x_2=6$, $x_3=8$ και $x_4=10$.

Η μέση τιμή του δείγματος είναι:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i}{v}=\frac{4\cdot6+6\cdot10+8\cdot7+10\cdot7}{30}=\frac{210}{30}=7\text{min}.$$

Η διακύμανση είναι:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{4}v_i(x_i-\bar{x})^2}{v}=\frac{6(x_1-7)^2+10(x_2-7)^2+7(x_3-7)^2+7(x_4-7)^2}{30}=\frac{f(7)}{30}=\frac{134}{30}$$

Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{134}{30}}\simeq 2{,}11\text{min}$.

Ε4. Ο συντελεστής μεταβλητότητας του δείγματος είναι

$CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2{,}11}{7}\simeq 0{,}3>0{,}1$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 49 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Ένα εργοστάσιο έχει ν στελέχη και 4ν εργάτες με μισθούς $x_i, i=1,2,...,5\nu$ σε εκατοντάδες ευρώ, όπου ν θετικός φυσικός. Ο μηνιαίος μισθός κάθε εργάτη είναι 750 ευρώ και κάθε στελέχους 1100 ευρώ.

Ε1. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό όλων των υπαλλήλων.

Υποθέτουμε ότι η τυπική απόκλιση όλων των μισθών είναι 140 ευρώ και

$\sum_{i=1}^{5\nu} t_1^2 = 34.600.000$ ευρώ.

Ε2. Να αποδείξετε ότι το εργοστάσιο απασχολεί 50 εργαζόμενους.

Ε3. Το εργοστάσιο αποφασίζει να αυξήσει τις μηνιαίες αποδοχές των εργατών κατά α ευρώ και να μειώσει τις μηνιαίες αποδοχές των στελεχών κατά β ευρώ, ώστε το μέσο μισθολόγιο να μην υπερβαίνει τα 840 ευρώ. Να αποδείξετε ότι $4\alpha-\beta\le 100$.

Πηγή: Β.Γατσινάρης (εκδόσεις Πατάκης)

Λύση:

Ε1. Έστω $\bar{x}_E$ και $\bar{x}_\Sigma$ ο μέσος μηνιαίος μισθός για τους εργάτες και τα στελέχη και $x_i, x_{i'}$ οι μισθοί εργατών και στελεχών αντίστοιχα . Τότε:

$$\bar{x}_E = 750 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4\nu}\frac{x_i}{4\nu} = 750 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4\nu} x_i = 3000\nu \text{ και}$$

$$\bar{x}_\Sigma = 1100 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu}\frac{x_{i'}}{\nu} = 1100 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_{i'} = 1100\nu$$

Έτσι: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4\nu} x_i + \sum_{i=1}^{\nu} x_{i'}}{5\nu} = \dfrac{3000\nu+1100\nu}{5\nu} = \dfrac{4100\nu}{5\nu} = 820$ ευρώ.

Ε2. Είναι $s^2 = \dfrac{1}{5\nu}\left(\sum_{i=1}^{5\nu} t_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{5\nu} t_i\right)^2}{5\nu}\right) \Rightarrow s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5\nu} t_i^2}{5\nu} - (\bar{x})^2 \Rightarrow$

$$\nu = \frac{\sum_{i=1}^{5\nu} t_i^2}{5\left(s^2+(\bar{x})^2\right)} = \frac{34600000}{5\left(140^2+820^2\right)} = \frac{34600000}{5\left(19600+672400\right)} = \frac{34600000}{3460000} = 10$$

Άρα το μέγεθος του δείγματος είναι $5\nu = 50$ εργαζόμενοι.

Ε3. Αν κάθε εργάτης πάρει μηνιαία αύξηση α ευρώ , τότε ο νέος μέσος μηνιαίος μισθός των εργατών θα είναι $\bar{x}_E{}' = \bar{x}_E + \alpha$. Αντίστοιχα, αν κάθε στέλεχος υποστεί μηνιαία μείωση κατά β ευρώ, τότε ο νέος μέσος μηνιαίος μισθός των στελεχών θα είναι $\bar{x}_\Sigma{}' = \bar{x}_\Sigma - \beta$. Πρέπει το μέσο μισθολόγιο να μην υπερβαίνει τα 840 ευρώ μηνιαίως. Δηλαδή $\bar{x} \le 840$

Είναι $\sum_{i=1}^{40} x_i = 30000 + 40\alpha$ και $\sum_{i=1}^{10} x_{i'} = 11000 - 10\beta$.

Έτσι $30000 + 40\alpha + 11000 - 10\beta \le 840 \cdot 50 \Rightarrow 40\alpha - 10\beta \le 1000 \Rightarrow 4\alpha - \beta \le 100$.

ΘΕΜΑ 50 — Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Δίνονται δέκα παρατηρήσεις, από τις οποίες οι πέντε είναι ίσες με 3 και οι υπόλοιπες είναι ίσες με 1 ή 6. Έστω κ το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι ίσες με 6.

Ε1. Να εκφράσετε τη μέση τιμή και τη διακύμανση των 10 παρατηρήσεων συναρτήσει του κ.

Ε2. Να βρείτε για ποια τιμή του κ η διακύμανση γίνεται μέγιστη.

Ε3. Έστω ότι $\kappa = 3$. Συμπληρώνουμε τις αρχικές 10 παρατηρήσεις με άλλες δύο θετικές και οι 12 παρατηρήσεις έχουν διακύμανση $s^2 = 16$ και συντελεστή μεταβολής $CV = 0,8$. Να βρείτε:

α) Τις δύο παρατηρήσεις που συμπληρώσαμε.

β) Τη μικρότερη τιμή του $c > 0$ που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις 12 παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψουν να είναι ομοιογενές.

Πηγή: Βασίλης Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε το δείγμα : $\underbrace{3,3,...,3}_{5\,\text{φορές}}, \underbrace{6,6,...,6}_{\kappa\ \text{φορές}}, \underbrace{1,1,...,1}_{(5-\kappa)\,\text{φορές}}$ άρα η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{5\cdot 3 + \kappa\cdot 6 + (5-\kappa)\cdot 1}{10} = \frac{20 + 5\kappa}{10} = 2 + \frac{\kappa}{2}$$ και η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{n} \nu_i (x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{10}\left(5\left(3 - 2 - \frac{\kappa}{2}\right)^2 + \kappa\left(6 - 2 - \frac{\kappa}{2}\right)^2 + (5-\kappa)\left(1 - 2 - \frac{\kappa}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5\left(1 - \frac{\kappa}{2}\right)^2 + \kappa\left(4 - \frac{\kappa}{2}\right)^2 + (5-\kappa)\left(-1 - \frac{\kappa}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5\left(1 - \kappa + \frac{\kappa^2}{4}\right) + \kappa\left(16 - 4\kappa + \frac{\kappa^2}{4}\right) + (5-\kappa)\left(1 + \kappa + \frac{\kappa^2}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(5 - 5\kappa + \frac{5\kappa^2}{4} + 16\kappa - 4\kappa^2 + \frac{\kappa^3}{4} + 5 + 5\kappa + \frac{5\kappa^2}{4} - \kappa - \kappa^2 - \frac{\kappa^3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(-\kappa^2 + 6\kappa + 4\right)$$

Ε2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\kappa) = s^2 = \frac{1}{4}(-\kappa^2 + 6\kappa + 4), \kappa \in [0,5]$ η οποία είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με $f'(\kappa) = \frac{1}{4}(-2\kappa + 6)$.

Επίσης, $f'(\kappa)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2\kappa+6)=0 \Leftrightarrow -2\kappa+6=0 \Leftrightarrow \kappa=3.$

Ακόμα, $f'(\kappa)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-2\kappa+6)>0 \Leftrightarrow -2\kappa+6>0 \Leftrightarrow \kappa<3.$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,5]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\kappa=3$.

κ	0	3	5
$f'(\kappa)$	+	0	-
$f(\kappa)$	↗	Ο.Μ	↘

Ε3. Το νέο δείγμα είναι: $3,3,3,3,3,6,6,6,1,1,\alpha,\beta$.

Έχουμε $s^2=16 \Leftrightarrow s=4$ και $CV=0{,}8 \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|}=0{,}8 \Leftrightarrow |\bar{x}|=5 \Leftrightarrow \bar{x}=5$.

Διότι $\bar{x}>0$, αφού α,β θετικές σταθερές.

Αφού $\bar{x}=5$, τότε έχουμε $\frac{5\cdot3+3\cdot6+2\cdot1+\alpha+\beta}{12}=5 \Leftrightarrow \alpha+\beta=25$ (1)

και $s^2=16 \Leftrightarrow \frac{1}{12}\left[5(3-5)^2+3(6-5)^2+2(1-5)^2+(\alpha-5)^2+(\beta-5)^2\right]=16$ (2)

και $20+3+32+(\alpha-5)^2+(\beta-5)^2=192$

$\Leftrightarrow (\alpha-5)^2+(\beta-5)^2=137 \Leftrightarrow (25-\beta-5)^2+(\beta-5)^2=137$

$\Leftrightarrow (20-\beta)^2+(\beta-5)^2=137 \Leftrightarrow \beta^2-40\beta+400+\beta^2-10\beta+25-137=0$

$\Leftrightarrow 2\beta^2-50\beta+288=0\ \beta^2-25\beta+144=0 \Leftrightarrow \beta=16$ ή $\beta=9$

Αν $\beta=16$ τότε $\alpha=9$, ενώ αν $\beta=9$ τότε $\alpha=16$. Άρα οι δύο νέες παρατηρήσεις είναι το 9 και το 16.

Έχουμε $\bar{x}=5, s=4$. Έστω ότι προσθέτουμε σε όλες τις παρατηρήσεις την ίδια θετική σταθερά c.

Τότε από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, σελ 99, έχουμε

$\bar{y}=5+c$ και $s_y=s_x=4$.

$CV_y \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{4}{5+c} \le 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}5+0{,}1c \ge 4 \Leftrightarrow 0{,}1c \ge 3{,}5 \Leftrightarrow c \ge 35$.

Επομένως η μικρότερη θετική σταθερά είναι η $c=35$.

ΘΕΜΑ 51

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1<x_2<x_3<\dots<x_k$. Για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει $N_i=\frac{3i^2+7i}{2}, i=1,\dots,k.$

Ε1. Να βρεθούν οι (απόλυτες) συχνότητες ν_i ως συνάρτηση του i.

Ε2. Αν το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu=55$, να βρείτε το k.

Ε3. Για $k=5$, να υπολογίσετε τις συχνότητες f_i, F_i, $i=1,\dots,k$.

Λύση:

Ε1. Είναι $v_i = N_i - N_{i-1} \Rightarrow v_i = \dfrac{3i^2+7i-3(i-1)^2-7(i-1)}{2} \Rightarrow$

$$v_i = \frac{3i^2+7i-3i^2+6i-3-7i+7}{2} \Rightarrow v_i = \frac{6i+4}{2} \Rightarrow v_i = 3i+2,\ i=1,2,...,k.$$

Ε2. Είναι $N_k = \dfrac{3k^2+7k}{2} \Rightarrow 55 = \dfrac{3k^2+7k}{2} \Rightarrow 3k^2+7k-110=0 \Rightarrow$

$k = -\dfrac{22}{3}$ **απορρίπτεται** διότι $k \in N^*$ ή $k=5$ **δεκτή.**

Ε3. Ισχύει $f_i = \dfrac{v_i}{v} = \dfrac{3i+2}{55}$.

Έτσι: $f_1 = \dfrac{3+2}{55} = \dfrac{5}{55} = \dfrac{1}{11}$, ομοίως $f_2 = \dfrac{8}{55}$, $f_3 = \dfrac{11}{55} = 0,2$, $f_4 = \dfrac{14}{55}$ και $f_5 = \dfrac{17}{55}$

$F_1 = f_1 = \dfrac{1}{11}$, $F_2 = (F_1 + f_2) = \dfrac{13}{55}$.

Ομοίως $F_3 = f_3 + F_2 = \dfrac{24}{55}$, $F_4 = f_4 + F_3 = \dfrac{48}{55}$ και $F_5 = 1$.

ΘΕΜΑ 52

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Τα κέρδη σε ευρώ μιας αλυσίδας καταστημάτων ειδών διατροφής ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι το **84%** των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από **1200** ευρώ, ενώ το **97,5%** των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από **600** ευρώ.

Ε1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

Ε2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

Ε3. Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της αλυσίδας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

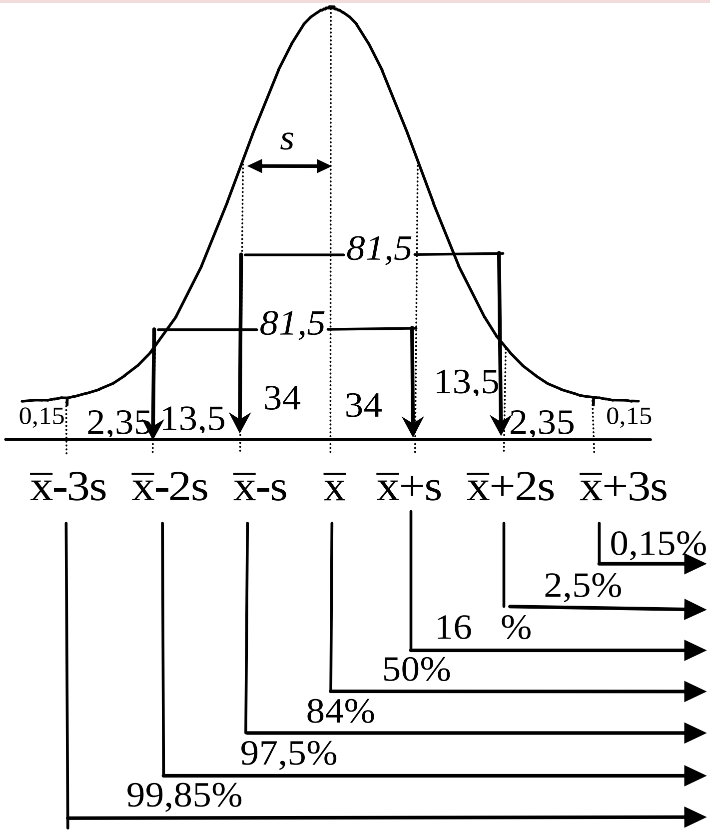
Ε4. Αν μια μέρα τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά **20%**, πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

Λύση:

Ε1. Επειδή το $\mathbf{84\%}$ των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από $\mathbf{1200}$ ευρώ ,έχουμε $\mathbf{\bar{x}+s=1200.}$ Ενώ επειδή το $\mathbf{97,5\%}$ των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από $\mathbf{600}$ ευρώ, έχουμε $\mathbf{\bar{x}-2s=600.}$ Λύνουμε το σύστημα και έχουμε

$$\begin{cases}\bar{x}-2s=600\\ \bar{x}+s=1200\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=200\\ \bar{x}=1000\end{cases}$$

Ακόμα, επειδή έχουμε κανονική κατανομή, $\mathbf{\delta=\bar{x}=1000.}$



Ε2. Είναι $\mathbf{s^2=40000}$ και $\mathbf{R\approx 6s=1200}$.

Ε3. Ισχύει $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{200}{1000}=0,2>0,1}$. Άρα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω ότι κατά $\mathbf{c>0}$ πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων, οπότε τα νέα κέρδη θα είναι $\mathbf{y_i=x_i+c}$. Τότε από γνωστή εφαρμογή , έχουμε $\mathbf{\bar{y}=\bar{x}+c=1000+c,\ \ c>0}$ και $\mathbf{s_y=s_x=200}$ και ο νέος συντελεστής μεταβολής για να είναι ομοιογενές πρέπει να είναι

$$\mathbf{CV'\le 0,1\Leftrightarrow\frac{s_y}{\bar{y}}\le 0,1\Leftrightarrow\frac{200}{1000+c}\le 0,1\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{\Leftrightarrow 100+0,1c\ge 200\Leftrightarrow 0,1c\ge 100\Leftrightarrow c\ge 1000}$$

Επομένως για να συμβαίνει αυτό η μικρότερη τιμή της σταθεράς είναι η $\mathbf{c=1000}$.

Ε4. Επειδή τα κέρδη θα μειωθούν κατά $\mathbf{20\%}$, τα νέα κέρδη θα είναι $\mathbf{z_i=x_i-0,2x_i=0,8x_i}$. Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου, έχουμε $\mathbf{\bar{z}=0,8\bar{x}}$ και $\mathbf{s_z=0,8s_x}$. Οπότε $\mathbf{CV_z=\frac{s_z}{\bar{z}}=\frac{0,8s_x}{0,8\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}=CV=0,2.}$

ΘΕΜΑ 53

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Τα ψυγεία μιας εταιρείας συντήρησης τροφίμων είναι κατανεμημένα σε $\mathbf{4}$ κλάσεις σύμφωνα με την θερμοκρασία τους $\mathbf{X}$ (σε $^\circ\mathbf{C}$) η οποία κυμαίνεται από $\mathbf{-4^\circ C}$ έως $\mathbf{4^\circ C}$. Αν δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης τότε:

Ε1. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων και να δειχθεί ότι η μέση της θερμοκρασίας των ψυγείων είναι $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{1^\circ C}$.

Ε2. Έστω ότι η τρίτη κλάση έχει ίδιο αριθμό ψυγείων με την πρώτη.

α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο θερμοκρασία.

β. Αν γνωρίζουμε ότι η θερμοκρασία $\mathbf{34}$ ψυγείων είναι μικρότερη των $\mathbf{0{,}5^\circ C}$, να βρεθεί ο αριθμός των ψυγείων που κατέχει η εταιρεία.

Λύση:

Ε1. Έστω $\mathbf{c}$ το πλάτος κάθε κλάσης, τότε $\mathbf{c} = \dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{\kappa}} = \dfrac{\mathbf{4-(-4)}}{\mathbf{4}} = \mathbf{2}$.

Έχουμε ότι η δεύτερη κλάση έχει 3πλάσιο αριθμό ψυγείων από την πρώτη και η τέταρτη 5πλάσιο της πρώτης , οπότε $\mathbf{\nu_2 = 3\nu_1}$ και $\mathbf{\nu_4 = 5\nu_1}$.Έτσι σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	$\nu_i x_i$
1	$[-4,-2)$	-3	ν_1	$-3\nu_1$
2	$[-2,0)$	-1	$3\nu_1$	$-3\nu_1$
3	$[0,\ 2)$	1	ν_3	ν_3
4	$[2,\ 4)$	3	$5\nu_1$	$15\nu_1$
Σύνολα			$9\nu_1+\nu_3$	$9\nu_1+\nu_3$

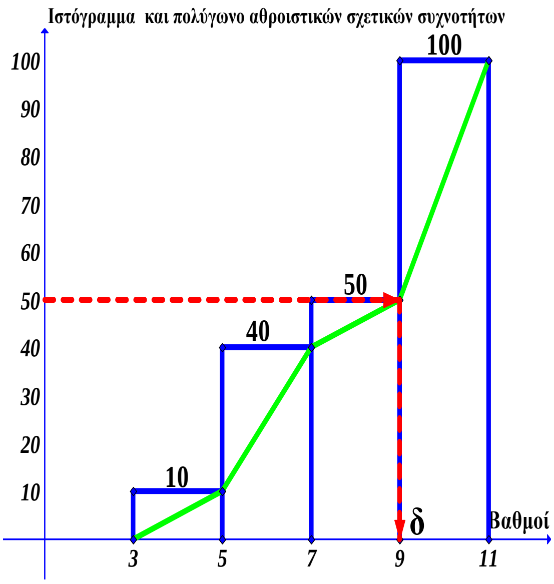
Έχουμε $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{9\nu_1+\nu_3}}{\mathbf{9\nu_1+\nu_3}} = \mathbf{1^o C}$

Ε2. **α).** Αν $\mathbf{\nu_1 = \nu_3}$ ο πίνακας γίνεται

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	$\nu_i x_i$	f_i	$F_i\%$
1	$[-4,-2)$	-3	ν_1	$-3\nu_1$	0,1	10
2	$[-2,0)$	-1	$3\nu_1$	$-3\nu_1$	0,3	40
3	$[0,\ 2)$	1	ν_1	ν_1	0,1	50
4	$[2,\ 4)$	3	$5\nu_1$	$15\nu_1$	0,5	100
Σύνολα			$10\nu_1$	$10\nu_1$	1	

Όταν έχουμε ομαδοποιημένες τιμές η διάμεσος βρίσκεται γραφικά.

- Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
- Στον κάθετο άξονα φέρνουμε από το $F_i\% = 50\%$ (ή 0,5) παράλληλη ευθεία στον οριζόντιο άξονα.
- Στο σημείο όπου τέμνει το πολύγωνο φέρνουμε κάθετη ευθεία στον άξονα των τιμών x_i.



- Στο σημείο όπου τέμνει τον άξονα της μεταβλητής είναι η τιμή της διαμέσου. (ακριβής προσδιορισμός με όμοια τρίγωνα)

Άρα έχουμε $\delta = 2$.

β) Στο $[0, 2)$ βρίσκεται το 10% των ψυγείων, οπότε θεωρώντας ότι τα ψυγεία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις κλάσεις, στο $[0,\ 0.5]$ θα βρίσκεται το $2,5\%$ των ψυγείων. Επομένως στο $[-4,\ 0,5)$ βρίσκεται το $42,5\%$ των ψυγείων.

Έχουμε ότι το $42,5\%$ των ψυγείων είναι 34. Οπότε τα συνολικά ψυγεία είναι

$$34\frac{100}{42,5} = 80.$$

ΘΕΜΑ 54

Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη

Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ θετικές παρατηρήσεις ενός δείγματος με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \nu x^2 - 2(\sum_{i=1}^{\nu} x_i)x + \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$ η οποία έχει ελάχιστο το 25ν.

Ε1. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \bar{x}$.

Ε2. Να βρείτε τη τυπική απόκλιση s.

Ε3. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $\omega_i = f'(x_i),\quad i = 1, 2, ..., \nu$.

Ε4. Θεωρούμε τις παρατηρήσεις $y_i = 3x_i + 100$, με $i = 1, 2, ..., \nu$ οι οποίες έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_y = 0,06$ και για τις οποίες ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\nu} (y_i - 250)^2 = 22500.$$

α. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι ομοιογενές.

β. Να βρείτε το πλήθος $\mathbf{v}$ των παρατηρήσεων.
γ. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ με τον $\mathbf{y'y}$.

Πηγή: Βασίλης Παπαδάκης. (Εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $\mathbf{f(x)=vx^2-2\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)x+\left(\sum_{i=1}^{v}x_i^2\right)}$ και η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, ως πολυωνυμική με $\mathbf{f'(x)=2vx-2\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)}$ και

$$\mathbf{f'(x)=0\Leftrightarrow 2vx-2\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)=0\Leftrightarrow vx=\sum_{i=1}^{v}x_i\Leftrightarrow x=\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i}{v}=\bar{x}}\quad \text{και}$$

$$\mathbf{f'(x)>0\Leftrightarrow 2vx-2\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)>0\Leftrightarrow vx>\sum_{i=1}^{v}x_i\overset{v>0}{\Leftrightarrow}x>\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i}{v}=\bar{x}}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(-\infty,\ \bar{x}]}$ και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[\bar{x},\ +\infty)}$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=\bar{x}}$, με τιμή $\mathbf{f(\bar{x})=25v}$.

x	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Ε2. Από $\mathbf{f(\bar{x})=25v\Leftrightarrow v(\bar{x})^2-2\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)\bar{x}+\left(\sum_{i=1}^{v}x_i^2\right)=25v\Leftrightarrow}$

$$\mathbf{(\bar{x})^2-2\frac{1}{v}\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i}{v}+\frac{1}{v}\left(\sum_{i=1}^{v}x_i^2\right)=25v\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{(\bar{x})^2-2\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}x_i\right)^2}{v^2}+\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}x_i^2\right)}{v}=25v\Leftrightarrow(\bar{x})^2-2\left(\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i}{v}\right)^2+\frac{\left(\sum_{i=1}^{v}x_i^2\right)}{v}=25v\Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{(\bar{x})^2-2(\bar{x})^2+\left(\overline{x^2}\right)=25\Leftrightarrow\left(\overline{x^2}\right)-(\bar{x})^2=25,\ \ (1)}$$

Και επειδή

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu}\right\}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}t_i\right)^2}{\nu^2}=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{t_i^2}{\nu}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}\right)^2=\left(\overline{x^2}\right)-\left(\overline{x}\right)^2 \text{ από}$$

(1) έχουμε $s^2=25\overset{s>0}{\Rightarrow}s=5.$

Ε3. Έχουμε $f'(x)=2\nu x-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$. Τότε $\omega_i=f'(x_i)=2\nu x_i-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$.

Θέτουμε $2\nu x_i=z_i$. Τότε $\omega_i=z_i-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i$.

Από γνωστή εφαρμογή έχουμε $\overline{z}=2\nu\overline{x}$. Επιπλέον

$$\overline{\omega}=\overline{z}-2\sum_{i=1}^{\nu}x_i=2\nu\overline{x}-2\nu\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}=2\nu\overline{x}-2\nu\overline{x}=0\,.$$

Ε4. **α)** Έχουμε $y_i=3x_i+100$. Τότε από γνωστή εφαρμογή έχουμε ότι $\overline{y}=3\overline{x}+100$ και $S_y=3S_x=15$. Άρα

$CV_y=0{,}06\Leftrightarrow\frac{S_y}{\overline{y}}=0{,}06\Leftrightarrow\frac{3S_x}{3\overline{x}+100}=0{,}06\Leftrightarrow\overline{x}=50$. Οπότε $CV_x=\frac{S_x}{\overline{x}}=0{,}1$ και συνεπώς το δείγμα είναι ομοιογενές.

β) Έχουμε $\overline{y}=3\overline{x}+100=250$. Άρα

$$S_y^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-\overline{y})^2\Leftrightarrow15^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(y_i-250)^2\Leftrightarrow\nu=100$$

γ) Είναι $s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2-(\overline{x})^2\Leftrightarrow25=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2-50^2\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i^2=2525\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{100}x_i^2=252.500\,.$$

Επίσης $f(0)=\sum_{i=1}^{100}x_i^2=252.500$. Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $M(0,\ 252.500)$.

ΘΕΜΑ 55

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω $t_1,t_2,\ldots,t_\nu$ με $\nu\in\mathbb{N}^*$ οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος με διασπορά $s^2=64$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}[(t_1-x)^3+(t_2-x)^3+\ldots+(t_\nu-x)^3]$.

Ε1. Αν $f'(\overline{x})=6400$ να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Ε2. Αν $f''(2\overline{x})=16000$ να βρείτε την μέση τιμή του δείγματος.

Ε3. Να δειχθεί ότι καμία από τις παρατηρήσεις του δείγματος $t_1, t_2, ..., t_\nu$ δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

Λύση:

Ε4. Αρχικά έχουμε $\bar{x} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_\nu}{\nu}$ και

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + ... + (t_\nu - \bar{x})^2}{\nu}$$

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + ... + (t_\nu - x)^2$$

Έχουμε $f'(\bar{x}) = 6400 \Leftrightarrow (t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + ... + (t_\nu - \bar{x})^2 = 6400 \Leftrightarrow$

$$\nu s^2 = 6400 \Leftrightarrow 64\nu = 6400 \Leftrightarrow \nu = 100$$

Ε1. Η f' παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$f''(x) = -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) - ... - (t_{100} - x)$ και
$f''(2\bar{x}) = 16000 \Leftrightarrow -2(t_1 - 2\bar{x}) - 2(t_2 - 2\bar{x}) - ... - (t_{100} - 2\bar{x}) = 16000 \Leftrightarrow$

$$-2(t_1 + t_2 + ... + t_{100}) + 400\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow$$

$$-2 \cdot 100\bar{x} + 400\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow 200\bar{x} = 16000 \Leftrightarrow \bar{x} = 80$$

Ε2. $s^2 = \dfrac{(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2}{100} \Leftrightarrow$

$$(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2 = 6400$$

Έστω ότι υπάρχει μια τουλάχιστον παρατήρηση αρνητική, για παράδειγμα $t_1 = -\alpha, \alpha > 0$, τότε $(t_1 - 80)^2 = (-\alpha - 80)^2 = (\alpha + 80)^2 > 6400$. Οπότε $(t_1 - 80)^2 + (t_2 - 80)^2 + ... + (t_{100} - 80)^2 > 6400$, άτοπο άρα καμία από τις παρατηρήσεις του δείγματος $t_1, t_2, ..., t_\nu$ δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

ΘΕΜΑ 56

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Έστω το δείγμα $x_1, x_2, ..., x_\nu$ με μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και συντελεστή μεταβολής $CV = 25\ \%$.

Να αποδειχθεί ότι:

Ε1. Η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι $s = 1$.

Ε2. Το κλάσμα $A = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_\nu^2}{x_1 + x_2 + ... + x_\nu}$ είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος ν του δείγματος.

Ε3. Υπάρχει παρατήρηση x_k που βρίσκεται μεταξύ του 3 και 5;

Λύση:

Ε1. Έχουμε: $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\frac{s}{4}\Leftrightarrow s=1}$.

Ε2. Από τον τύπο της διακύμανσης για μεμονωμένες παρατηρήσεις έχουμε

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right]=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\right)^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\left(\bar{x}\right)^2$$

Οπότε $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-16\overset{s=1}{\Leftrightarrow}\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=17\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=17\nu$.

Επίσης $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i=\nu\bar{x}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i=4\nu$. Άρα $A=\frac{17\nu}{4\nu}=\frac{17}{4}$.

Ε3. Έχουμε ότι $s^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\overset{s=1}{\Leftrightarrow}\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\nu$.

Αν υποθέσουμε ότι όλες οι παρατηρήσεις x_i είναι $x_i<3$ ή $x_i>5$, τότε έχουμε

$x_i<3\Leftrightarrow x_i-\bar{x}<-1\Rightarrow\left(x_i-\bar{x}\right)^2>1$ και $x_i>5\Leftrightarrow x_i-\bar{x}>1\Rightarrow\left(x_i-\bar{x}\right)^2>1$.

Οπότε $\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\bar{x}\right)^2>\nu$, **άτοπο.** Άρα υπάρχει παρατήρηση x_k με $3\le x_k\le 5$.

ΘΕΜΑ 57

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας, στον οποίο οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους.

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	ν_i	f_i	N_i	$F_i\%$	$\nu_i x_i$	$\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
1	[...,...)		12					
2	[5, ...)			0,18				
3	[...,...)		15					
4	[...,...)		10		55			
5	[...,...)	12				75		
6	[...,...)				83			
7	[...,...)							
Σύνολα			$9\nu_1+\nu_3$					

Ε1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με **2.**

Ε2. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

Ε3. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε4. Να βρείτε τη διάμεσο.

Ε5. Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή τουλάχιστον ίση με **12.**

Ε6. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή απο **6** έως **12.**

Λύση:

Ε1. Έστω α το κατώτερο όριο της $1^{ης}$ κλάσης και c το κοινό πλάτος των κλάσεων, επειδή τα αριστερά άκρα των κλάσεων διαφέρουν κατά c όπως και οι κεντρικές τιμές θα ισχύουν:

$$\begin{cases}\alpha+c=5\\ \dfrac{(\alpha+4c)+(\alpha+c+4c)}{2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+c=5\\ \dfrac{2\alpha+9c}{2}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+c=5\\ 2\alpha+9c=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+c=5\\ 7c=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ c=2\end{cases}$$

Έχουμε διαδοχικά τα παρακάτω:

$N_1=v_1=12$, $N_3=N_4-v_4=45$, $N_2=N_3-v_3=30$, $v_2=N_2-N_1=18$

$v_2=vf_2\Rightarrow v=100$. Άρα $N_i=F_i\%$ τότε $f_1=0{,}2$, $f_3=0{,}5$, $f_4=0{,}1$.

Και $F_1\%=12$, $F_2\%=30$, $F_4\%=55$, $F_5\%=75$.

Οπότε $N_5=75\Rightarrow v_5=20$, $N_6=83\Rightarrow v_6=8\Rightarrow v_7=17$.

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

I	Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	v_i	f_i	N_i	$F_i\%$	$v_i x_i$	$v_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
1	[3,5)	4	12	0,12	12	12	48	432
2	[5, 7)	6	18	0,18	30	30	108	288
3	[7,9)	8	15	0,15	45	45	120	60
4	[9,11)	10	10	0,10	55	55	100	0
5	[11,13)	12	20	0,20	75	75	240	80
6	[13,15)	14	8	0,08	83	83	112	128
7	[15,17)	16	17	0,17	100	100	272	612
Σύνολα			100				1000	1600

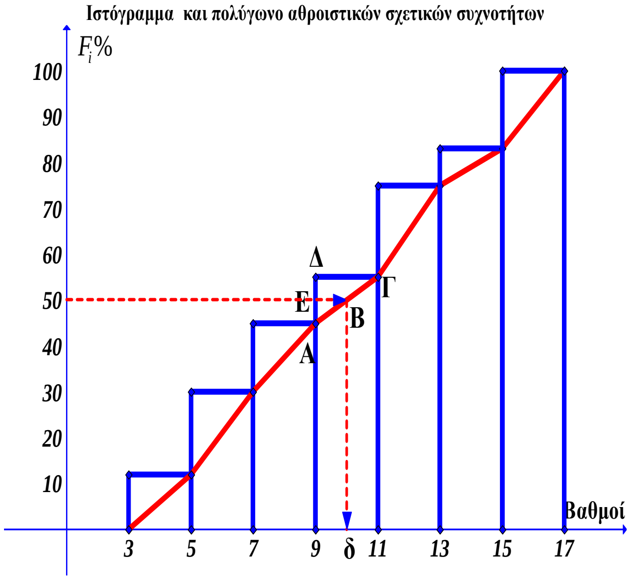
Ε2. Είναι $\bar{x}=\dfrac{1000}{100}=10$ και $s^2=\dfrac{1600}{100}=16$.

Οπότε $\mathbf{s=4}$. Άρα $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{4}{10}=0{,}4>0{,}1}$.

Δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Ε3. Αναζητούμε την τετμημένη $\boldsymbol{\delta}$ του σημείου **Β.** Από την ομοιότητα των τριγώνων $\mathbf{\overset{\Delta}{AB}E \simeq \overset{\Delta}{A\Gamma}\Delta}$ έχουμε:

$$\mathbf{\frac{BE}{\Gamma\Delta}=\frac{EA}{\Delta A}\Rightarrow\frac{\delta-9}{2}=\frac{50-45}{55-45}\Rightarrow\delta=10}$$



Επειδή $\mathbf{12}$ είναι η κεντρική τιμή της $\mathbf{5^{ης}}$ κλάσης, τιμή τουλάχιστον $\mathbf{12}$ έχουν οι μισές παρατηρήσεις της κλάσης $\mathbf{[11,\ 13)}$,θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις.

Ε5. Μαζί με τις παρατηρήσεις των κλάσεων $\mathbf{[13,\ 15)}$ και $\mathbf{[15,\ 17)}$

Συνολικά $\mathbf{\frac{\nu_5}{2}+\nu_6+\nu_7=\frac{20}{2}+8+17=35}$

Ε6. Επειδή η τιμή $\mathbf{6}$ είναι η κεντρική τιμή της $\mathbf{2^{ης}}$ κλάσης και το $\mathbf{12}$ της $\mathbf{5^{ης}}$ κλάσης, το ποσοστό των παρατηρήσεων με τιμή στο διάστημα $\mathbf{[6,\ 12)}$ είναι

$\mathbf{\frac{f_2\%}{2}+f_3\%+f_4\%+\frac{f_5\%}{2}=\left(9+15+10+10\right)\%=44\%}$, θεωρώντας ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στις κλάσεις.

ΘΕΜΑ 58

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Έστω $\mathbf{4,-3,-x,-2,x^2,2}$ με $\mathbf{x\in(0,1)}$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή του δείγματος γίνεται ελάχιστη, όταν και η διάμεσος γίνεται ελάχιστη.

Ε2. Για την τιμή $\mathbf{x=x_0}$ όπου $\mathbf{x_0}$ το σημείο που η μέση τιμή γίνεται ελάχιστη, να βρείτε:

α). Τις παρατηρήσεις του δείγματος.

β). Τη μέση τιμή και τη διάμεσο του δείγματος.

γ). Την τυπική απόκλιση.

(Γ. & Μ. Λασκαρίδης, Α. Μουνδρέας, Μ. Πατρινός)

Λύση:

Ε1. Επειδή $x \in (0,1)$, οι παρατηρήσεις διατάσσονται σε αύξουσα σειρά ως εξής

$-3 < -2 < -x < x^2 < 2 < 4$.

Οπότε $\bar{x} = \dfrac{-3-2-x+x^2+2+4}{6} = \dfrac{x^2-x+1}{6}$ και $\delta = \dfrac{x^2-x}{2}$

Θεωρούμε $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{6}, x \in (0,1)$. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγισίμων με $f'(x) = \dfrac{2x-1}{6}, x \in (0,1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{6} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2},1)$.

x	0	½	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε $g(x) = \dfrac{x^2-x}{2}, x \in (0,1)$.

Η g παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \frac{2x-1}{2}, x \in (0,1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Σχηματίζουμε το διπλανό πίνακα. Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2},1)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = \frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Επομένως η f και η g παρουσιάζουν ελάχιστο στην ίδια θέση $x_0 = \frac{1}{2}$.

Ε2. **α)** Για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε τις εξής παρατηρήσεις $-3, -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2, 4$

β) Οι παρατηρήσεις βρίσκονται σε αύξουσα σειρά και επειδή το πλήθος τους είναι άρτιο, η διάμεσος θα ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων t_3, t_4. Επομένως είναι $\delta = \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{-\frac{1}{4}}{2} = -\dfrac{1}{8}$

και $\bar{x} = \dfrac{-3-2-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+2+4}{6} = \dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}{6} = \dfrac{\frac{3}{4}}{6} = \dfrac{1}{8}$.

γ)
Η διακύμανση υπολογίζεται από το τύπο

$$s^2 = \frac{(-3-\frac{1}{8})^2+(-2-\frac{1}{8})^2+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{8})^2+(\frac{1}{4}-\frac{1}{8})^2+(2-\frac{1}{8})^2+(4-\frac{1}{8})^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{(-\frac{25}{8})^2+(-\frac{17}{8})^2+(-\frac{5}{8})^2+(\frac{1}{8})^2+(\frac{15}{8})^2+(\frac{31}{8})^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\frac{625+289+25+1+225+961}{64}}{6} = \frac{2126}{64\cdot 6} = \frac{1063}{192} \text{ άρα } s = \sqrt{\frac{1063}{192}} \approx 2,35 .$$

ΘΕΜΑ 59

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Σε **10** καταστήματα στην επαρχία συναντήσαμε τις παρακάτω τιμές πώλησης ενός προϊόντος (σε λεπτά) **74,78,76,70,80,74,76,78,72,72 .**

Ε1. Να βρείτε τα παρακάτω μέτρα για το παραπάνω δείγμα:

α) Μέση τιμή **β)** Διάμεσο **γ)** Εύρος

δ) Διακύμανση **ε)** Να κρίνετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

Αν για τα ίδια προϊόντα, από έρευνα σε **15** καταστήματα της Αθήνας, οι τιμές πώλησης (σε λεπτά) βρέθηκε ότι έχουν μέση τιμή **70 .**Να βρείτε

Ε2. Τη μέση τιμή πώλησης του προϊόντος για όλα τα καταστήματα της Αθήνας και της επαρχίας.

Ε3. Ποιά πρέπει να είναι η μεγαλύτερη τιμή της τυπικής απόκλισης για την τιμή πώλησης του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα, ώστε το συνολικό δείγμα να παραμένει ομοιογενές;

Λύση:

Ε1. **α)** Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{750}{10} = 75$

β) Σε αύξουσα σειρά οι παρατηρήσεις είναι $70,72,72,74,74,76,76,78,78,80$.
Το πλήθος τους είναι άρτιο και συνεπώς η διάμεσός τους είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta = \frac{74+76}{2} = 75$.

γ) $R = 80 - 70 = 10$.

δ) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε τον παρακάτω πίνακα

I	x_i	v_i	$v_i x_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
1	70	1	70	25	25
2	72	2	144	9	18
3	74	2	144	1	2
4	76	2	152	1	2
5	78	2	156	9	18
6	80	1	80	25	25
Σύνολα		10	750		90

Οπότε $S^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 v_i = 9$.

ε) Έχουμε $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{3}{75} = 0,04 \le 0,1$ και συνεπώς το δείγμα είναι ομοιογενές.

Ε2. Αν x_i οι τιμές στα προϊόντα της επαρχίας και y_i οι τιμές στα προϊόντα της Αθήνας, τότε η μέση τιμή πώλησης είναι

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{15} y_i}{10+15} = \frac{10\bar{x} + 15\bar{y}}{25} = 72$$

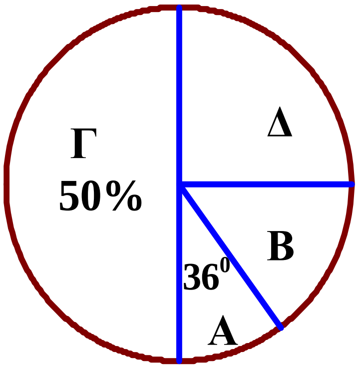
Ε3. Για να είναι ομοιογενές το δείγμα πρέπει

$CV \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{S_z}{\bar{z}} \le 0,1 \Leftrightarrow \frac{S_z}{72} \le 0,1 \Leftrightarrow S_z \le 7,2$. Άρα $S_{max} = 7,2$.

ΘΕΜΑ 60

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Σε μια γραπτή εξέταση αγγλικών οι βαθμοί επιτυχίας είναι **Α,Β,Γ** ενώ **Δ** ο βαθμός αποτυχίας. Τα αποτελέσματα ενός δείγματος **500** μαθητών που εξετάστηκαν γραπτά δίνονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα:



Ε1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί:

Ι	Βαθμός εξέτασης	Αριθμός μαθητών	f_i	α_i	F_i
1	Α				
2	Β		0,15		
3	Γ				
4	Δ				
Σύνολα					

Ε2. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

Ε3. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν επιτύχει στις εξετάσεις.

Ε4. Να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των μαθητών που έχουν αποτύχει στις εξετάσεις.

Ε5. Να βρεθεί ο αριθμός των μαθητών και το ποσοστό που έχει πάρει βαθμό **Β** ή **Γ.**

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu = 500$

Από τα δεδομένα του κυκλικού διαγράμματος και του πίνακα συχνοτήτων έχουμε

<u>1η Γραμμή</u>

Είναι $\alpha_1 = 360^0 \cdot f_1 \Leftrightarrow f_1 = \dfrac{\alpha_1}{360^0} \Leftrightarrow f_1 = \dfrac{36^0}{360^0} \Leftrightarrow f_1 = 0{,}1$. Άρα

$\nu_1 = \nu \cdot f_1 = 500 \cdot 0{,}1 = 50$

<u>2η Γραμμή</u>

Είναι $f_2 = 0{,}15$ άρα $v_2 = v \cdot f_2 = 500 \cdot 0{,}15 = 75$ και $\alpha_2 = 360^0 \cdot f_2 = 360^0 \cdot 0{,}15 = 54^0$

3η Γραμμή

Είναι $f_3 = 50\% = 0{,}5$ άρα $v_3 = v \cdot f_3 = 500 \cdot 0{,}5 = 250$ και

$\alpha_2 = 360^0 \cdot f_3 = 360^0 \cdot 0{,}5 = 180^0$

4η Γραμμή

Είναι $\alpha_4 = 360^0 - 180^0 - 54^0 - 36^0 = 90$, $v_3 = 500 - 250 - 75 - 50 = 125$ και

$f_4 = 1 - 0{,}5 - 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}25$

Τέλος για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_i ισχύουν,

$F_1 = f_1 = 0{,}1$, $F_2 = F_1 + f_2 = 0{,}10 + 0{,}15 = 0{,}25$,

$F_3 = F_2 + f_3 = 0{,}25 + 0{,}50 = 0{,}75$, $F_4 = F_3 + f_4 = 0{,}75 + 0{,}25 = 1$

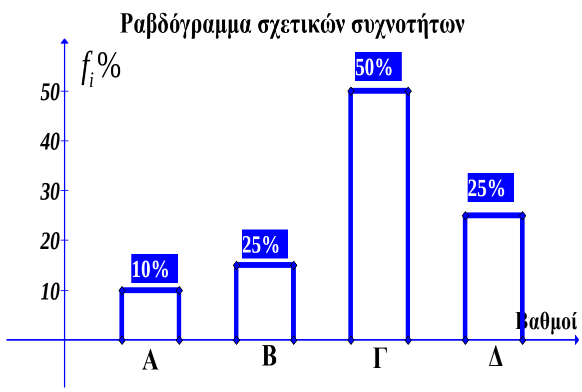
Σύμφωνα με τα παραπάνω στοιχεία ο πίνακας συχνοτήτων έχει ως εξής

I	Βαθμός εξέτασης	Αριθμός μαθητών	f_i	α_i	F_i
1	Α	50	0,10	36^0	0,10
2	Β	75	0,15	54^0	0,25
3	Γ	250	0,50	180^0	0,75
4	Δ	125	0,25	90^0	1
Σύνολα		500	1	360^0	

Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το **25%** των μαθητών, δηλαδή $\frac{25}{100} \cdot 500 = 125$ μαθητές.

Το **65%** των μαθητών έχει πάρει βαθμό **Β, ή C**, δηλαδή $\frac{65}{100} \cdot 500 = 325$ μαθητές.

Ε2. Έτσι σχηματίζουμε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων



Ε3. Στις εξετάσεις έχει πετύχει το **75%** των μαθητών, δηλαδή $\frac{75}{100} \cdot 500 = 375$ μαθητές.

Ε4. Στις εξετάσεις έχει αποτύχει το **25%** των μαθητών, δηλαδή $\frac{25}{100} \cdot 500 = 125$ μαθητές.

Ε5. Το **65%** των μαθητών έχει πάρει βαθμό **Β, ή C**, δηλαδή $\frac{65}{100} \cdot 500 = 325$ μαθητές.