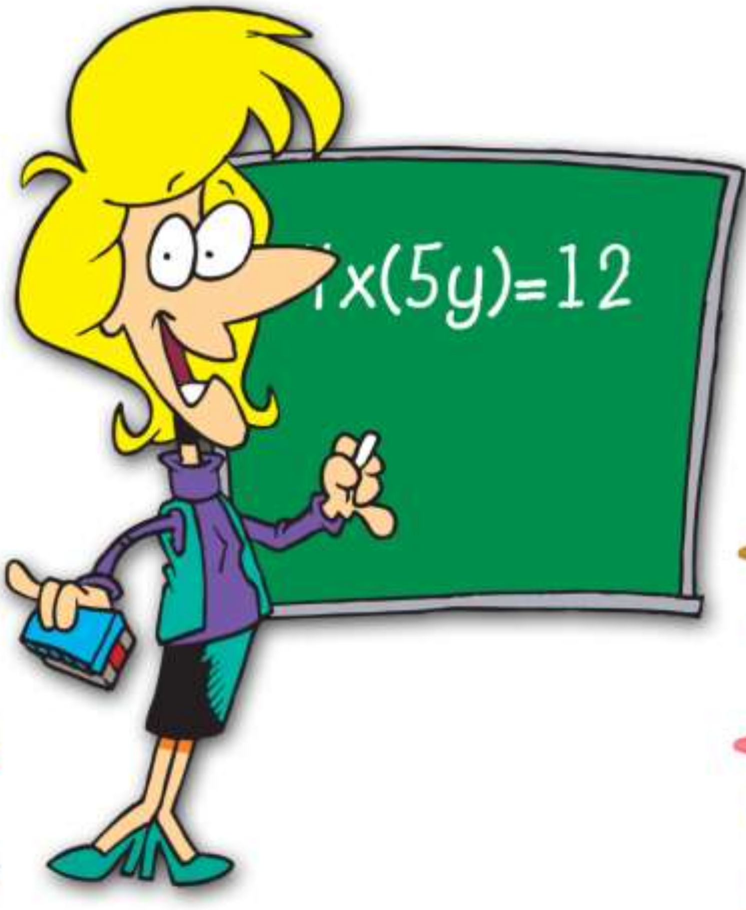
Μαθηματικά Γ Λυκείου

Μια συλλογή ασκήσεων στα μαθηματικά γενικής παιδείας



www.mathematica.gr

Α' Έκδοση: Πρώτη δημοσίευση .

<u>Η ομάδα εργασίας</u> <u>αποτελείται</u> **<u>από τους :</u>**

- ☑ Απόκη Γιώργο (Γιώργος Απόκης)
- ☑ Κακαβά Βασίλη (KAKABASBASILEIOS)
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη (ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΚΑΤΣΙΠΟΔΑΣ)
- ☑ Κανάβη Χρήστο (pana1333)
- ☑ Παντούλα Περικλή (perpant)
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα (Τηλέγραφος Κώστας)
- ☑ Τσιφάκη Χρήστο (xr.tsif)
- ☑ Χατζόπουλο Μάκη (Μάκης Χατζόπουλος)

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τι πιο όμορφο, από την συνεργασία ανθρώπων που πολλοί από αυτούς ούτε καν γνωρίζονται μεταξύ τους αλλά έχουν ένα κοινό χαρακτηριστκό, την αγάπη για τα μαθηματικά. Μια τέτοια λοιπόν συνεργασία από τα μέλη του **mathematica.gr** που με τον τρόπο αυτό παίρνει σάρκα και οστά είναι και η παρούσα συλλογή.

Η συλλογή αυτή είναι στην ουσία μια επιλογή ασκήσεων στα πλαίσια της ύλης των πανελλήνιων εξετάσεων για τα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου και συγκεκριμένα για τα κεφάλαια της Ανάλυσης, της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων, κατάλληλες για την επανάληψη ενόψει των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Κάποιες από αυτές είναι πρωτότυπες, καρπός επίπονης αλλά ταυτόχρονα δημιουργικής πνευματικής υπερπροσπάθειας και κάποιες άλλες, βασισμένες σε ιδέες επιτυχημένων και έμπειρων συγγραφέων με σημαντική προσφορά στην ελληνική βιβλιογραφία.

Η ομάδα εργασίας που συγκροτήθηκε με πρωτοβουλία και συντονισμό του **Κώστα Τηλέγραφου,** αποτελείται από ενεργούς Μαθηματικούς που συνεργάστηκαν με σκοπό την επεξεργασία και τον έλεγχο όλων των ασκήσεων που προτάθηκαν για την συλλογή αυτή καθώς και την όσο το δυνατόν αναλυτικότερη επίλυση τους δημιουργώντας μια πλήρη συλλογή.

Με αυτή τη συλλογή δίνεται η δυνατότητα, στο νέο καθηγητή να δει ασκήσεις που προτείνουν και λύνουν πεπειραμένοι συνάδελφοι, στον παλιό καθηγητή να αφουγκραστεί τη νέα γενιά και στο μαθητή να ωφεληθεί από τους καρπούς της αρμονικής αυτής συνύπαρξης. Η παρούσα συλλογή δεν έχει κανένα εμπορικό χαρακτήρα και, παρόλο τον έλεγχο, σίγουρα κάποια λάθη θα υπάρχουν και πιστεύουμε ότι ο καλύτερος τρόπος εύρεσης των λαθών είναι η επίλυση των ασκήσεων στο πίνακα. Μπορείτε να στέλνετε μήνυμα στο email της παρέας silogiaskiseon@yahoo.com, με τις διορθώσεις σας και γιατί όχι με λύσεις διαφορετικές, έτσι ώστε η συλλογή αυτή να διορθωθεί και να εμπλουτιστεί σε μελλοντική έκδοση.

Μακάρι νέες συλλογές να δημιουργούνται κάθε χρόνο, με διαφορετικές ασκήσεις, με αυξανόμενη συμμετοχή από τα μέλη του **mathematica** και με πιο αναλυτικές λύσεις ώστε να γίνεται το έργο της παρέας του εκάστοτε φυλλαδίου ευκολότερο.

Την καλύτερη παρέα στους ασθενείς την κάνουν πάντοτε οι ομοιοπαθείς.
Και το συγκεκριμένο μικρόβιο δεν κρύβεται εύκολα.
Καλό ξεφύλλισμα.

<u>**Η ομάδα εργασίας αποτελείται από τους :**</u>

- ☑ Απόκη Γιώργο
- ☑ Κακαβά Βασίλη
- ☑ Κατσίποδα Δημήτρη
- ☑ Κανάβη Χρήστο
- ☑ Παντούλα Περικλή
- ☑ Τηλέγραφο Κώστα
- ☑ Τσιφάκη Χρήστο
- ☑ Χατζόπουλο Μάκη

Email επικοινωνίας με την ομάδα: silogiaskiseon@yahoo.com

Μέλη του mathematica.gr.

Εξώφυλλο: Μιχάλης Νάννος

Σχήματα: Τηλέγραφος Κώστας
Κατσίποδας Δημήτρης
Κανάβης Χρήστος

Περιεχόμενα.

Ανάλυση

Συλλογή 30 Ασκήσεων

ΕΠΙΛΟΓΗ + ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΥΛΛΟΓΗΣ: 01/12/2011 – 09/12/2011

Πηγή – Απαντήσεις

Ανάλυση :–Μια συλλογή 30 ασκήσεων.
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=20955

Έλυσαν οι:

Αποστόλης Τιντινίδης
Βασίλης Κακαβάς
Γιώργος Απόκης
Δημήτριος Κατσίποδας
Ηλίας Καμπελής
Κώστας Τηλέγραφος
Μάκης Χατζόπουλος
Μυρτώ Λιάπη
Περικλής Παντούλας
Χρήστος Τσιφάκης
Χρήστος Κανάβης
Parmenides51

Μέλη του mathematica.gr.

ΘΕΜΑ 1 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$ με $\alpha,\beta\in R$ και $g(x)=x^2-2x-15$.

Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $B(-1,2)$:

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Ε2. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in R$.

Για $\alpha=2$ και $\beta=-3$:

Ε3. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Ε4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Ε5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ε6. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(3-x)-g(2)}{f(x)-3}$.

Πηγή: Παπαδάκης Βασίλης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$ με $\alpha,\beta\in R$. Για να ορίζεται η συνάρτηση f ,πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $R-\{1\}$.

Ε2. Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $B(-1,2)$ τότε

$f(0)=3 \Leftrightarrow \dfrac{0^2+\alpha\cdot 0+\beta}{0-1}=3 \Leftrightarrow -\beta=3 \Leftrightarrow \beta=-3.$ Ακόμη επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $B(-1,2)$ έχουμε

$$f(-1)=2 \text{ άρα } \frac{1-\alpha+\beta}{-1-1}=2 \overset{\beta=-3}{\Leftrightarrow} \frac{1-\alpha-3}{-2}=2 \Leftrightarrow -\alpha-2=-4 \Leftrightarrow \alpha=2.$$

Ε3. Για $\alpha=2,\beta=-3$ ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3,\ x\neq 1.$$

Για $x\neq 1$ είναι : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$.

Ε4. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq 1$

Για να είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g πρέπει για $x\neq 1$ να ισχύει $f(x)>g(x)\Leftrightarrow$

$x+3>x^2-2x-15\Leftrightarrow x+3-x^2+2x+15>0\Leftrightarrow -x^2+3x+18>0$.

Άρα από τον διπλανό πίνακα και επειδή πρέπει $x\neq 1$ έχουμε πως $x\in(-3,1)\cup(1,6)$.

x	$-\infty$		-3		1		6		$+\infty$
$-x^2+3x+18$		-	0	+	‖	+	0	-	

Ε5. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq 1$ και $g(x)=x^2-2x-15$.

Για $x\neq 5$ και $x\neq -3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x-5)(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{1}{(x-5)}=-\frac{1}{8}$$

Ε6. Είναι $f(x)=x+3$ για $x\neq 1$ και $g(x)=x^2-2x-15$

συνεπώς $g(2)=4-4-15=-15$ και

$$g(3-x)=(3-x)^2-2(3-x)-15=9-6x+x^2-6+2x-15=x^2-4x-12$$

Για $x\neq 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(3-x)-g(2)}{f(x)-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x-12-(-15)}{x+3-3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x}=\frac{1-4+3}{1}=\frac{0}{1}=0.$$

ΘΕΜΑ 2

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Ε3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$rad.

Ε4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε5. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+\ln x}{x-1}=0$

β. $\lim_{x\to 3}\frac{f''(x)+2\ln x+x}{x^2-9}=\frac{1}{6}$

Ε6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ στο σημείο της $\mathbf{M(e,f(e))}$.

Λύση:

Ε1. Πρέπει $\mathbf{x \neq 0}$ και $\mathbf{\frac{1}{x} > 0}$ οι οποίες συναληθεύουν για κάθε $\mathbf{x > 0}$.

Άρα $\mathbf{x \in (0,+\infty)}$.

Ε2. Είναι $\mathbf{f(1) = 1^2 \ln\frac{1}{1} = 1\ln 1 = 1 \cdot 0 = 0}$

Άρα η γραφική παράσταση της $\mathbf{f}$ διέρχεται από το σημείο $\mathbf{A(1,0)}$.

Ε3. Είναι $\mathbf{f(x) = x^2 \ln\frac{1}{x} = x^2(\ln 1 - \ln x) = x^2(0 - \ln x) = -x^2 \ln x.}$

Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

παράγωγο $\mathbf{f'(x) = (-x^2)'\ln x - x^2(\ln x)' = -2x\ln x - x^2\frac{1}{x} = -2x\ln x - x.}$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{A(1,0)}$ σχηματίζει με τον άξονα $\mathbf{x'x}$ γωνία $\boldsymbol{\omega}$ με εφαπτομένη

$$\text{εφ}\omega = f'(1) \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = -2\ln 1 - 1 \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = -1 \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = \text{εφ}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \overset{0\le\omega<\pi}{\Leftrightarrow} \omega = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$$

Ε4. Είναι $\mathbf{f'(x) = -2x\ln x - x = -x(2\ln x + 1), x > 0}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x(2\ln x + 1) = 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	$-\infty$		0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
-x		+	0	-		-	
2lnx+1		-		-	0	+	
f΄(x)		-		+		-	
f(x)				↗	Ο.μ	↘	

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$2\ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2\ln x < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \ln e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2}}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = e^{-\frac{1}{2}}$ με τιμή

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-\frac{2}{2}} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{e}\left(-\frac{1}{2}\right)\ln e = \frac{1}{2e}\ .$$

Ε5. **α.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x^2\ln x+\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-\ln x(x^2-1)}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-\ln x(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}[-\ln x(x+1)] = -2\ln 1(1+1) = 0\ .$$

β. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = (-2x)'\ln x - 2x(\ln x)' - (x)' = -2\ln x - 2x\frac{1}{x} - 1 =$$

$$= -2\ln x - 2 - 1 = -2\ln x - 3$$

Επομένως το ζητούμενο όριο γίνεται,

$$\lim_{x\to 3}\frac{f''(x)+2\ln x+x}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{-2\ln x-3+2\ln x+x}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$$

$f(e) = -e^2\ln e = -e^2$ και $f'(e) = -2e\ln e - e = -2e - e = -3e$.

Ε6.

1ος Τρόπος

Έχουμε $f(e) = -e^2\ln e = -e^2$ και $f'(e) = -2e\ln e - e = -2e - e = -3e$.

Η εφαπτομένη στο σημείο $M(e, f(e))$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda, \beta \in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(e) = -3e$.

Συνεπώς

$$y = \lambda x + \beta \overset{\lambda=-3e}{\Rightarrow} y = -3ex + \beta$$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M(e, f(e)) = (e, -e^2)$

$$y = -3ex + \beta \overset{(x,y)=(e,-e^2)}{\Rightarrow} -e^2 = -3ee + \beta \Leftrightarrow -e^2 + 3e^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 2e^2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta=-2e^2}{\overset{\lambda=-3e}{\Rightarrow}} y = -3ex + 2e^2\ .$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\mathbf{M(e,f(e))}$ είναι η $\mathbf{y-f(e)=f'(e)(x-e)}$

$$\underset{f'(e)=-3e}{\overset{f(e)=-e^2}{\Rightarrow}} y-(-e^2)=-3e(x-e) \Leftrightarrow y+e^2=-3ex+3e^2 \Leftrightarrow y=-3ex+2e^2 .$$

ΘΕΜΑ 3 — Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ με τύπους $\mathbf{f(x)=\frac{e^x}{x}}$ και $\mathbf{g(x)=\frac{x^4}{x}}$.

Ε1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των $\mathbf{f,g}$.

Ε2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\mathbf{h=f\cdot g}$.

Διέρχεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής από την αρχή των αξόνων;

Ε3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{f(x)g(x)}$

β. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\big(f(x)-1\big)x$

γ. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-xf(x)}{x-1}$

Ε4. Δίνεται συνάρτηση $\mathbf{q}$ με τύπο $\mathbf{q(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xf(x)}-1}{e^x-1}, & x\in R^*\\ \ln\kappa+\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}}$, όπου $\mathbf{\kappa\in R}$

Να βρεθεί ο αριθμός $\mathbf{\kappa}$ ώστε η συνάρτηση $\mathbf{q}$ να είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$.

Είναι η συνάρτηση $\mathbf{q}$ συνεχής για $\mathbf{x\neq 0}$;

Ε5. Αν ισχύει ότι $\mathbf{\lim_{x\to 0}\big(f(x)-x^{-1}\big)=1}$ και $\mathbf{s(x)=\begin{cases}xf(x) & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}}$, να βρεθεί ο αριθμός $\mathbf{s'(0)}$.

Ε6. Να βρεθεί η πρώτη και δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{h}$.

Ε7. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $\mathbf{f\big(g(x)\big)}$.

Ε8. Να δείξετε ότι $\mathbf{f'(x)\big(\ln f(x)\big)'-\dfrac{(x+1)^2 e^x}{g(x)}=-4\dfrac{f(x)}{x}}$ για κάθε $\mathbf{x>0}$.

Ε9. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της $\mathbf{C_g}$ που είναι κάθετες στην ευθεία με εξίσωση $\mathbf{y=-\dfrac{x}{3}+1}$.

Ε10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο $f_1(x)=\frac{h(x)}{e^x}$ στο σημείο $(x_0,f_1(x_0))$ και το εμβαδόν $E(x_0)$ του τριγώνου OAB που σχηματίζεται από την ευθεία εφαπτομένης και τους άξονες $x'x,y'y$.

Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(x_0)$ του τριγώνου OAB για $x_0=2$.

Ε11. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση h, $x<0$.

Ε12. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(g(x))$, $x>0$.

Ε13. Δίνεται η συνάρτηση $f_2(x)=\frac{g(x)}{x}+\frac{2\alpha f(x)}{e^x}+\beta$, $x\in R^*$ και $\alpha,\beta\in R$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι παράλληλη στον άξονα των x και ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης $f_2(x)=0$, να αποδείξετε ότι $\alpha=8$ και $\beta=-17$.

Έπειτα για τις τιμές των α και β που βρήκατε να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. $f(x)=\frac{e^x}{x}$ και $g(x)=\frac{x^4}{x}$. Και για τις δύο συναρτήσεις πρέπει $x\neq 0$.

Οπότε $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Ε2. $h(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ με $x\in D_f\cap D_g$.

Άρα $h(x)=\frac{e^x}{x}\frac{x^4}{x}=e^x x^2$ με $x\neq 0$.

Αφού $x\neq 0$, η C_h δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Ε3. α. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x x^2}{e^x x^2}=1$

β. $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x}{x}x=\lim\limits_{x\to 0}(e^x-x)=1$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{h(x)-xf(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x x^2-e^x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x(x-1)(x+1)}{(x-1)}=2e$

Ε4. Για να είναι η $\mathbf{q}$ συνεχής στο $\mathbf{0}$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = q(0)$.

Για $x \neq 0$:

$$q(x) = \frac{\sqrt{xf(x)}-1}{e^x-1} = \frac{\sqrt{x\frac{e^x}{x}}-1}{e^x-1} = \frac{\sqrt{e^x}-1}{e^x-1} = \frac{\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{e^x}^2-1^2\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} = \frac{\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-1\right)\left(\sqrt{e^x}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{e^x}+1}$$

$$\lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{e^x}+1} = \frac{1}{\sqrt{e^0}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} q(x) = q(0) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln\kappa + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln\kappa = 0 \Leftrightarrow \ln\kappa = \ln 1 \Leftrightarrow \kappa = 1$.

Για $x \neq 0$:

Η συνάρτηση $\sqrt{e^x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $\sqrt{x}$ και e^x

οπότε η $q(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}+1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ε5. **1ος Τρόπος**

Ισχύει πως $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right) = 1$

Είναι $s(x) = \begin{cases} xf(x) = x\frac{e^x}{x} = e^x & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

Έχουμε $s'(0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{s(0+h)-s(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{s(h)-s(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

2ος Τρόπος

$$s(x) = \begin{cases} xf(x) & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x\frac{e^x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x & , x \neq 0 \\ e^0 & , x = 0 \end{cases} = e^x, x \in R$$

$s'(x) = \left(e^x\right)' = e^x \Rightarrow s'(0) = e^0 = 1$.

Ε6. $h(x) = x^2e^x$ για $x \neq 0$

$h'(x) = \left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x$ για $x \neq 0$

$h''(x) = (2x)'e^x + 2x\left(e^x\right)' + \left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2e^x$

Επομένως είναι,

$\mathbf{h''(x)=2e^x+4xe^x+x^2e^x}$ για $\mathbf{x\neq 0}$.

Ε7. **$1^{ος}$ Τρόπος**

$$\kappa(x)=f(g(x))\overset{g(x)=x^3}{=}f(x^3)\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}\ \text{για}\ x\neq 0$$

$2^{ος}$ Τρόπος

$$\kappa(x)=f(g(x))\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{g(x)}}{g(x)}\overset{g(x)=x^3}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}\ \text{για}\ x\neq 0$$

Κοινή συνέχεια

οπότε

$$\kappa'(x)=\left(\frac{e^{x^3}}{x^3}\right)'=\frac{\left(e^{x^3}\right)'x^3-e^{x^3}\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^2e^{x^3}x^3-e^{x^3}3x^2}{x^6}=\frac{3x^2e^{x^3}\left(x^3-1\right)}{x^6}$$

Επομένως είναι,

$$\kappa'(x)=\frac{3e^{x^3}\left(x^3-1\right)}{x^4}\ \text{για}\ x\neq 0$$

Ε8. $\mathbf{f(x)=\frac{e^x}{x}}$ για $\mathbf{x\neq 0}$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x\right)'x-e^x\left(x\right)'}{x^2}=\frac{e^xx-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2},x\neq 0\ .$$

Για $\mathbf{x>0}$ έχουμε $\mathbf{\ln(f(x))=\ln\left(\frac{e^x}{x}\right)=\ln e^x-\ln x=x-\ln x}$

$$\left(\ln f(x)\right)'=(x-\ln x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x}{x}-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$$f'(x)\cdot\left(\ln f(x)\right)'-\frac{(x+1)^2e^x}{g(x)}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\cdot\frac{x-1}{x}-\frac{(x+1)^2e^x}{x^3}=\frac{e^x(x-1)^2}{x^3}-\frac{(x+1)^2e^x}{x^3}=$$

$$=\frac{e^x(x^2-2x+1-x^2-2x-1)}{x^3}=\frac{-4xe^x}{x^3}=-\frac{4e^x}{x^2}=-\frac{4}{x}\frac{e^x}{x}-4\frac{f(x)}{x}\ .$$

Ε9. Η $\mathbf{g(x)=x^3}$ με $\mathbf{x\neq 0}$ είναι παραγωγίσιμη με $\mathbf{g'(x)=3x^2}$ για $\mathbf{x\neq 0}$.

Έστω $\mathbf{M(x_o,g(x_o))}$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης $\mathbf{(\varepsilon\varphi)}$ η οποία

έχει συντελεστή διεύθυνσης $\mathbf{\lambda_{\varepsilon\varphi}=g'(x_o)}$ και έστω $\mathbf{(\varepsilon)}$ η ευθεία $\mathbf{y=-\frac{x}{3}+1}$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{3}$. Τότε αφού οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες θα ισχύει πως

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\frac{-1}{3} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = 3 \Leftrightarrow g'(x_o) = 3 \Leftrightarrow 3x_o^2 = 3 \Leftrightarrow x_o^2 = 1 \Leftrightarrow x_o = \pm 1.$$

Άρα τα σημεία επαφής είναι $M_1(1,g(1)) = (1,1)$ και $M_2(-1,g(-1)) = (-1,-1)$.

1^{ος} Τρόπος

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_1(1,g(1)) = (1,1)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda,\beta \in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = g'(1) = 3\cdot 1^2 = 3$

συνεπώς $y = \lambda x + \beta \overset{\lambda=3}{\Rightarrow} y = 3x + \beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M_1(1,g(1)) = (1,1)$

$$y = 3x + \beta \overset{(x,y)=(1,1)}{\Rightarrow} 1 = 3\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1 - 3 = \beta \Leftrightarrow \beta = -2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta=-2}{\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}} y = 3x - 2.$$

Η εφαπτομένη στο σημείο $M_2(-1,g(-1)) = (-1,-1)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda,\beta \in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = g'(-1) = 3(-1)^2 = 3$

συνεπώς $y = \lambda x + \beta \overset{\lambda=3}{\Rightarrow} y = 3x + \beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $M_2(-1,g(-1)) = (-1,-1)$

$$y = 3x + \beta \overset{(x,y)=(-1,-1)}{\Rightarrow} -1 = 3(-1) + \beta \Leftrightarrow -1 = -3 + \beta \Leftrightarrow -1 + 3 = \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta=2}{\overset{\lambda=3}{\Rightarrow}} y = 3x + 2$$

2^{ος} Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M_1(1,g(1)) = (1,1)$ είναι η

$$y - g(1) = g'(1)(x-1) \underset{g'(1)=3}{\overset{g(1)=1}{\Rightarrow}} y - 1 = 3(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 3x - 3 \Leftrightarrow y = 3x - 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M_2(-1,g(-1)) = (-1,-1)$ είναι η

$$y - g(-1) = g'(-1)(x-(-1)) \underset{g'(1)=3}{\overset{g(-1)=-1}{\Rightarrow}} y - (-1) = 3(x+1) \Leftrightarrow y + 1 = 3x + 3 \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

Ε10. Για την f_1 έχουμε $f_1(x) = \frac{h(x)}{e^x} = \frac{e^x x^2}{e^x} = x^2$ με $x \neq 0$.

Η $f_1(x) = x^2$ με $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική για $x \neq 0$ με παράγωγο $f_1'(x) = 2x$.

1^{ος} Τρόπος

Η εφαπτομένη της C_{f_1} στο σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right) = \left(x_o, x_o^2\right)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda, \beta \in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f_1'(x_o) = 2x_o$

συνεπώς $y = \lambda x + \beta \overset{\lambda = 2x_o}{\Rightarrow} y = 2x_o x + \beta$

κι επειδή διέρχεται από το σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right) = \left(x_o, x_o^2\right)$

$$y = 2x_o x + \beta \overset{(x,y)=\left(x_o, x_o^2\right)}{\Rightarrow} x_o^2 = 2x_o \cdot x_o + \beta \Leftrightarrow x_o^2 - 2x_o^2 = \beta \Leftrightarrow \beta = -x_o^2$$

$$y = \lambda x + \beta \underset{\beta = -x_o^2}{\overset{\lambda = 2x_o}{\Rightarrow}} y = 2x_o x - x_o^2$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(x_o, f_1(x_o)\right)$ είναι η

$y - f_1(x_o) = f_1'(x_o)(x - x_o)$ οπότε αφού $f_1(x_o) = x_o^2$ και $f_1'(x_o) = 2x_o$ τότε

$y - x_o^2 = 2x_o(x - x_o) \Leftrightarrow y - x_o^2 = 2x_o x - 2x_o^2 \Leftrightarrow y = 2x_o x - x_o^2$.

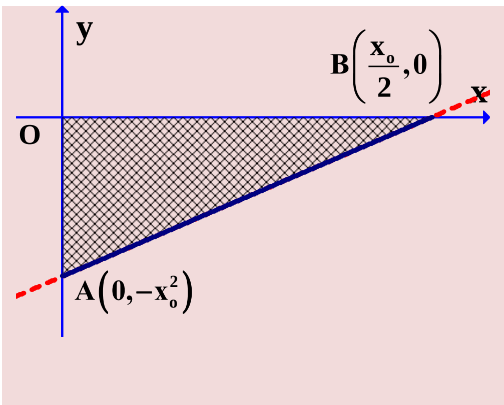
Κοινή συνέχεια

Τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους άξονες $y'y$ και $x'x$ προκύπτουν για $x = 0$ και $y = 0$ αντίστοιχα , οπότε έχουμε

$y = 2x_o x - x_o^2 \overset{x=0}{\Rightarrow} y = 2x_o \cdot 0 - x_o^2 = 0 - x_o^2 = -x_o^2$, το $A\left(0, -x_o^2\right)$ σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ και

$y = 2x_o x - x_o^2 \overset{y=0}{\Rightarrow} 0 = 2x_o x - x_o^2 \Leftrightarrow 2x_o x = x_o^2 \overset{x_o \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\cancel{2x_o} x}{\cancel{2x_o}} = \dfrac{x_o^{\cancel{2}}}{2\cancel{x_o}} \Leftrightarrow x = \dfrac{x_o}{2}$, το

$B\left(\dfrac{x_o}{2}, 0\right)$ σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.



Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$(OAB) = \dfrac{1}{2}(OA)(OB) = \dfrac{1}{2}\left|-x_o^2\right|\left|\dfrac{x_o}{2}\right| = \dfrac{1}{4}\left|x_o^3\right|$ τ.μ.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού για $x_o = 2$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης εμβαδού στην τιμή $x_o = 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = \dfrac{1}{4}x^3$ με $x > 0$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $E'(x) = \dfrac{3}{4}x^2$ για $x > 0$.

Οπότε ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής είναι $E'(2) = \dfrac{3}{4}2^2 = \dfrac{3}{4}4 = 3$.

Ε11. Η $h(x)=e^x x^2$ με $x<0$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x<0$ με παράγωγο

$$h'(x)=\left(e^x\right)'x^2+e^x\left(x^2\right)'=e^x x^2+e^x 2x=e^x\left(x^2+2x\right)=e^x x\left(x+2\right).$$

Είναι $h'(x)=0 \Leftrightarrow e^x x(x+2)=0 \Leftrightarrow \{x=0, x=-2\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της h' και μεταβολών της h.

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
e^x	+		+	‖	+
x	-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$h'(x)$	+	0	-	‖	+
$h(x)$	↗	Ο.μ	↘	‖	

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.
Η h παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_o=-2$ στο $(-\infty,0)$ με τιμή $h(-2)=e^{-2}(-2)^2=4e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$.

Ε12. Για $x>0$ θέτουμε

1ος Τρόπος

$$\omega(x)=f(g(x))\overset{g(x)=x^3}{=}f(x^3)\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}\text{ για } x>0$$

2ος Τρόπος

$$\omega(x)=f(g(x))\overset{f(x)=\frac{e^x}{x}}{=}\frac{e^{g(x)}}{g(x)}\overset{g(x)=x^3}{=}\frac{e^{x^3}}{x^3}\text{ για } x>0$$

Κοινή συνέχεια

Η $\omega(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με παράγωγο

$$\omega'(x)=\left(\frac{e^{x^3}}{x^3}\right)'=\frac{\left(e^{x^3}\right)'x^3-e^{x^3}\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\frac{3x^2e^{x^3}x^3-e^{x^3}3x^2}{x^6}=\frac{x^2\left(3x^3e^{x^3}-3e^{x^3}\right)}{x^6}$$

$$\omega'(x)=\frac{3x^3e^{x^3}-3e^{x^3}}{x^4}=\frac{3e^{x^3}(x^3-1)}{x^4}\text{ για } x>0.$$

Είναι $\omega'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{3e^{x^3}(x^3-1)}{x^4}=0 \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της ω' και μεταβολών της ω.

x	-∞	0	1	+∞
$3e^{x^3}$	+	+		+
x^3-1	-	-	0	+
x^4	+	0 +		+
$\omega'(x)$	-	-	0	+
$\omega(x)$		↘	Ο.ε	↗

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$x^3-1>0 \Leftrightarrow x^3>1 \Leftrightarrow x^3>1^3 \overset{x^3 \nearrow}{\Leftrightarrow} x>1$$

Επομένως η $\omega(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η $\omega(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ στο $(0,+\infty)$ με τιμή $\omega(1)=\dfrac{e^{1^3}}{1^3}=\dfrac{e}{1}=e$.

Ε13. $f_2(x)=\dfrac{g(x)}{x}+\dfrac{2\alpha f(x)}{e^x}+\beta=\dfrac{x^3}{x}+\dfrac{2\alpha\dfrac{e^x}{x}}{e^x}+\beta=x^2+\dfrac{2\alpha}{x}+\beta$ με $x\neq 0$

Η f_2 είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων για $x\neq 0$ με παράγωγο $f_2'(x)=2x-\dfrac{2\alpha}{x^2}$

$$f_2(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+\frac{2\alpha}{1}+\beta=0 \Leftrightarrow 1+2\alpha+\beta=0 \ (1)$$

$$f_2'(2)=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2-\frac{2\alpha}{2^2}=0 \Leftrightarrow 4-\frac{2\alpha}{4}=0 \Leftrightarrow \alpha=8 \ (2)$$

οπότε από την (1) έχουμε $\beta=-17$

Για $\alpha=8, \beta=17$:

$$f_2(x)=x^2+\frac{16}{x}-17 \text{ με } x\neq 0$$

$$f_2'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}=\frac{2\left(x^3-8\right)}{x^2} \text{ με } x\neq 0.$$

Είναι $f_2'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x^3=2^3 \Leftrightarrow x=2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f_2' και μεταβολών της f_2.

x	-∞	0	2	+∞
x^3-8	-	-	0	+
x^2	+	0 +		+
$f_2'(x)$	-	-	0	+
$f_2(x)$	↘	↘	Τ.ε	↗

Δικαιολόγηση προσήμων

Έστω

$$x^3-8>0 \Leftrightarrow x^3>8 \Leftrightarrow x^3>2^3 \overset{x^3 \nearrow}{\Leftrightarrow} x>2$$

Επομένως η f_2 είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,2]$. Η f_2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=2$ στο $(0,+\infty)$ με τιμή $f_2(2)=2^2+\frac{16}{2}-17=4+8-17=-5$.

ΘΕΜΑ 4

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ με $x>0$ και $g(x)=\begin{cases}(\sqrt{x+1}-1)f(x) & ,x>0\\ \alpha & ,x=0\end{cases}$.

Ε1. Να βρείτε το $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ε2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,1)$ είναι κάθετη στη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημορίου.

Ε3. Από τυχαίο σημείο $M(x,y)$ της C_f φέρνουμε παράλληλες ευθείες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ οι οποίες τους τέμνουν στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες του M για τις οποίες η απόσταση $B\Gamma$ γίνεται ελάχιστη.

Πηγή: Δ.Γεωργακίλας (εκδόσεις Τομή)

Λύση:

Ε1. Για να είναι η g συνεχής στο $x_o=0$ πρέπει $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$.

Για $x>0$:

$$g(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

οπότε $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

τελικά $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\alpha$.

Ε2. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι η παράγωγος της f στο $x_o=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με παράγωγο

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ για $x>0$.

Άρα $\lambda_{\varepsilon\phi}=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1$.

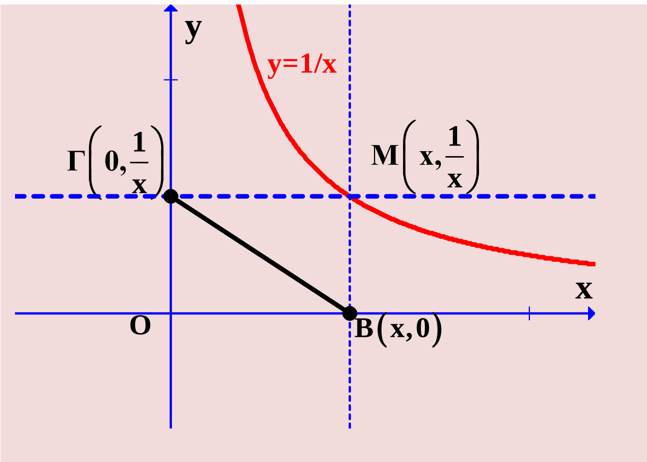
Επιπλέον η διχοτόμος του 1ου και 3ου τεταρτημορίου είναι η ευθεία $y=x$, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon}=1$.

Επειδή $\lambda_{\varepsilon\phi}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\cdot 1=-1$ έπεται ότι η εφαπτομένη είναι κάθετη στη διχοτόμο.

Ε3.

Αν $M(x,y)\in C_f$, τότε $M\left(x,\frac{1}{x}\right)$.

Οι παράλληλες από το $M\left(x,\frac{1}{x}\right)$ προς τους άξονες, τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $B(x,0)$ και $\Gamma\left(0,\frac{1}{x}\right)$ αντίστοιχα.



1ος Τρόπος

Το τρίγωνο $O B\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο O κι επειδή $OB=x>0$ και $O\Gamma=\frac{1}{x}>0$

από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $OB\Gamma$:

$$B\Gamma^2=OB^2+O\Gamma^2=x^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2} \text{ με } x>0$$

άρα $(B\Gamma)=\sqrt{(B\Gamma)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$ με $x>0$.

2ος Τρόπος

Από τον τύπο της απόστασης δυο σημείων :

$$(B\Gamma)=\sqrt{\left(x_\Gamma-x_B\right)^2+\left(y_\Gamma-y_B\right)^2}=\sqrt{(0-x)^2+\left(\frac{1}{x}-0\right)^2}=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \text{ με } x>0.$$

Κοινή συνέχεια

Η ποσότητα $(B\Gamma)=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$ με $x>0$ γίνεται ελάχιστη

όταν η ποσότητα $x^2+\frac{1}{x^2}$ με $x>0$ γίνεται ελάχιστη.

Θέτουμε $\mathbf{d(x)=x^2+\frac{1}{x^2}}$ με $\mathbf{x>0}$.

Η $\mathbf{d(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$\mathbf{d'(x)=\left(x^2+x^{-2}\right)'=2x-2x^{-3}=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}=\frac{2\left(x^4-1\right)}{x^3}=}$$

$$\mathbf{=\frac{2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{x^3}}.$$

Είναι

$$\mathbf{d'(x)=0\Leftrightarrow 2\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow\{x=1,x=-1\}}.$$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{d'}$ και μεταβολών της $\mathbf{d}$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	‖	-	0	+
x^2+1	+		+	‖	+		+
x^3	-		-	0	+		+
$d'(x)$	-	0	+	‖	-	0	+
$d(x)$				‖	↘	Ο.ε	↗

Επομένως η $\mathbf{d}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[1,+\infty)}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(0,1]}$. Η $\mathbf{d}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=1}$ στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ Άρα και η απόσταση $\mathbf{ΒΓ}$ δέχεται ελάχιστο για $\mathbf{x_0=1}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{M(1,1)}$.

ΘΕΜΑ 5

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha}$ όπου $\mathbf{\alpha\in R}$.

Να αποδείξετε ότι:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο.

Ε2. Το τοπικό ελάχιστο της $\mathbf{f}$ είναι μικρότερο από το τοπικό μέγιστο για κάθε τιμή του $\mathbf{\alpha\in R}$.

Ε3. Υπάρχει ακριβώς μια τιμή $\mathbf{x_0}$ για την οποία η εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο σημείο $\mathbf{M(x_0,f(x_0))}$, έχει το μεγαλύτερο συντελεστή διεύθυνσης.

Ε4. Να υπολογίσετε το $\mathbf{\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}}$.

Λύση:

Ε1. Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{f'(x)=-3x^2-6x+9}$.

Είναι $\mathbf{f'(x)=0\Leftrightarrow-3x^2-6x+9=0\Leftrightarrow\{x=1\ ή\ x=-3\}}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	-∞ -3 1 +∞
$f'(x)=-3x^2-6x+9$	- 0 + 0 -
f(x)	↘ τ.ε ↗ τ.μ ↘

Επομένως η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-3]$, $[1,+\infty)$.

Η **f** παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=-3$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2=1$ με τιμές

$f(-3)=-(-3)^3-3(-3)^2+9(-3)+\alpha^2-4\alpha=-(-27)-3\cdot 9+9(-3)+\alpha^2-4\alpha=$
$=27-27-27+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha-27$

και $f(1)=-1^3-3\cdot 1^2+9\cdot 1+\alpha^2-4\alpha=-1-3+9+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha+5$.

Ε2. Έστω ότι $f(-3)<f(1)\Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha-27<\alpha^2-4\alpha+5\Leftrightarrow -27<5$ που ισχύει για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ε3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $M(x,f(x))$ είναι ίσος με $f'(x)=-3x^2-6x+9$.

Θεωρούμε συνάρτηση $\delta(x)=-3x^2-6x+9$ (συντελεστής διεύθυνσης της f).
Η $\delta(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\delta'(x)=-6x-6$.
Είναι $\delta'(x)=0\Leftrightarrow -6x-6=0\Leftrightarrow x=-1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της δ' και μεταβολών της δ.

x	-∞ -1 +∞
δ΄(x)=-6x-6	+ 0 -
δ(x)	↗ Ο.μ ↘

Επομένως η δ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,+\infty)$. Η δ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=-1$.

Οπότε το σημείο με τη μέγιστη κλίση είναι το $M(-1,f(-1))$.

$f(-1)=-(-1)^3-3(-1)^2+9(-1)+\alpha^2-4\alpha=-(-1)-3\cdot 1+9(-1)+\alpha^2-4\alpha=$
$=1-3-9+\alpha^2-4\alpha=\alpha^2-4\alpha-11$ δηλαδή το $M(-1,\alpha^2-4\alpha-11)$.

Ε4. $f(x)=-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha$, $f(1)=\alpha^2-4\alpha+5$

$$\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-x^3-3x^2+9x+\alpha^2-4\alpha-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=$$

$$=\frac{-x^3-3x^2+9x+\cancel{\alpha^2}-\cancel{4\alpha}-\cancel{\alpha^2}+\cancel{4\alpha}-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-x^3-3x^2+9x-5}{\sqrt{x^2+3}-2}=$$

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho=-5$*).*

$$\frac{(x+5)(-x^2+2x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\frac{-(x+5)(x^2-2x+1)}{\sqrt{x^2+3}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\sqrt{x^2+3}^{\,2}-2^2}=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2+3-4}=$$

$$=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}=\frac{-(x-1)^2(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{-(x-1)(x+5)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x+1)}=\frac{-(x-1)^2(x+5)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

Συνεπώς

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+5)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x+1}=\frac{-(1-1)(1+5)(\sqrt{1^2+3}+2)}{1+1}=0\,.$$

ΘΕΜΑ 6 — Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Ένας βιομήχανος μπορεί να στείλει αμέσως σε πελάτες φορτίο **200** τόνων με κέρδος **30.000** ευρώ τον τόνο. Αν καθυστερήσει λίγο καιρό θα προσθέτει στο φορτίο **10** τόνους την εβδομάδα αλλά το κέρδος του θα μειώνεται κατά **1.000** ευρώ τον τόνο κάθε εβδομάδα από όλο το φορτίο. Πότε πρέπει να στείλει το φορτίο ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος;

Λύση:

- Αν στείλει τώρα το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $$200\cdot 30.000 \text{ ευρώ}$$

- Αν στείλει σε μία εβδομάδα το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $$(200+1\cdot10)\cdot(30.000-1.000\cdot1) \text{ ευρώ}$$

- Αν στείλει σε δύο εβδομάδες το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $$(200+2\cdot10)\cdot(30.000-1.000\cdot2) \text{ ευρώ}$$

- Άρα, αν στείλει σε x εβδομάδες το φορτίο, το κέρδος θα είναι:

  $$(200+x\cdot10)\cdot(30.000-1.000\cdot x) \text{ ευρώ.}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x)=(200+10x)(30.000-1.000x)=10(20+x)\cdot1000(30-x)$$

$$K(x)=10.000(-x^2+10x+600) \text{ με } x\geq0$$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$$K'(x)=10.000(-2x+10)$$

Είναι $K'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+10=0 \Leftrightarrow x=5$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της K' και μεταβολών της K.

x	0		5	$+\infty$
$K'(x)=10.000(-2x+10)$		$+$	0	$-$
$K(x)$		$\nearrow$	Ο.μ	$\searrow$

Επομένως η K είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5,+\infty)$.

Η K παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=5$.

Οπότε πρέπει να στείλει το φορτίο σε 5 εβδομάδες για να έχει το μέγιστο κέρδος.

ΘΕΜΑ 7

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ με $\alpha>0$

Ε1. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$.

Ε2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(0,f(0))$ να σχηματίζει γωνία 45^o με τον $x'x$.

Ε3. Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f.

Ε4. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ελάχιστο της f να πάρει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$

οπότε $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}=\frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha}$.

Η συνάρτηση $e^{\alpha x+\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων e^x και $\alpha x+\alpha$ με $\alpha>0$.

Η $f(x)=xe^{\alpha x+\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=(x)'e^{\alpha x+\alpha}+x\left(e^{\alpha x+\alpha}\right)'=e^{\alpha x+\alpha}+\alpha xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$.

Οπότε $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=e^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}+\alpha xe^{\alpha\frac{1}{\alpha}+\alpha}=e^{1+\alpha}+e^{1+\alpha}=2e^{1+\alpha}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha^2xe^{\alpha x+\alpha}=2\alpha e^{\alpha x+\alpha}+\alpha^2xe^{\alpha x+\alpha}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$. Οπότε $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\alpha e^{1+\alpha}+\alpha e^{1+\alpha}=3\alpha e^{1+\alpha}$.

Άρα $f''\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)-\alpha^2 f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=3\alpha e^{1+\alpha}-2\alpha e^{1+\alpha}-\alpha^2\frac{1}{\alpha}e^{1+\alpha}=$

$=3\alpha e^{1+\alpha}-2\alpha e^{1+\alpha}-\alpha e^{1+\alpha}=3\alpha e^{1+\alpha}-3\alpha e^{1+\alpha}=0$.

Ε2. Είναι $f'(0)=e^{\alpha\cdot 0+\alpha}+\alpha\cdot 0e^{\alpha\cdot 0+\alpha}=e^{\alpha}$.

Έστω ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^0, τότε $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^{o}=1\Leftrightarrow e^{\alpha}=1\Leftrightarrow e^{\alpha}=e^{0}\Leftrightarrow \alpha=0$ **άτοπο** διότι $\alpha>0$.

Ε3. Είναι $f'(x)=e^{\alpha x+\alpha}+\alpha x e^{\alpha x+\alpha}=e^{\alpha x+\alpha}(\alpha x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow \alpha x+1=0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x=-\dfrac{1}{\alpha}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{\alpha},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\alpha}\right]$.

x	$-\infty$		$-1/\alpha$		$+\infty$
$e^{\alpha x+\alpha}$		+	|	+	
$\alpha x+1$		-	0	+	
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	Ο.ε	↗	

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=-\dfrac{1}{\alpha}$ με τιμή

$$f\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha}=-\frac{1}{\alpha}e^{-1+\alpha}=-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}.$$

Ε4. Θέτουμε νέα συνάρτηση $g(\alpha)=-\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}$ με $\alpha>0$ την ελάχιστη τιμή της f. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(\alpha)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)'e^{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha-1}\right)'=\frac{1}{\alpha^2}e^{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-1}=e^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}\right)=e^{\alpha-1}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^2}\right).$$

Είναι $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{\alpha-1}\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha^2}\right)=0\Leftrightarrow \alpha=1$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με τιμή

$$g(1)=-\frac{1}{1}e^{1-1}=-e^{0}=-1.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^{\alpha-1}$		+	‖	+	|	+	
$1-\alpha$		+	‖	+	0	-	
α^2		+	0	+	|	+	
$g'(\alpha)$		+	‖	+	0	-	
$g(\alpha)$			‖	↗	Ο.μ	↘	

Οπότε το ελάχιστο της f παίρνει την μέγιστη τιμή του για $\alpha=1$.

ΘΕΜΑ 8

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha+\beta\sqrt{x}$ για κάθε $x>0$ με $\alpha,\beta\in R$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $f(4)=5$ και $f'(9)=\frac{1}{3}$.

Ε2. Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ να βρείτε

α. Το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-3}$.

β. Το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $A(3,1)$.

Πηγή: Λ.Κανάκης - Γ.Μαυρίδης (εκδόσεις Μαυρίδης)

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=\frac{\beta}{2\sqrt{x}}$.

$f'(9)=\frac{\beta}{2\sqrt{9}}=\frac{\beta}{2\cdot3}=\frac{\beta}{6}$ και επειδή $f'(9)=\frac{1}{3}$ έχουμε $\frac{\beta}{6}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow3\beta=6\Leftrightarrow\beta=2$

$f(4)=\alpha+\beta\sqrt{4}\overset{\beta=2}{=}\alpha+2\cdot2=\alpha+4$ κι επειδή $f(4)=5$ έχουμε $\alpha+4=5\Leftrightarrow\alpha=1$.

Ε2. **α.** Είναι $f(x)=1+2\sqrt{x}$ με $x>0$

$$\frac{x^2-1}{f(x)-3}=\frac{x^2-1^2}{1+2\sqrt{x}-3}=\frac{(x+1)(x-1)}{2\sqrt{x}-2}=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}=\frac{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2(x-1)}=\frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{2}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{f(x)-3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{2}=\frac{(1+1)\left(\sqrt{1}+1\right)}{2}=\frac{2\cdot2}{2}=2$.

β. Έστω $M(x,f(x))=\left(x,1+2\sqrt{x}\right)$ τυχαίο σημείο της C_f .

Η απόσταση του σημείου M από το $A(3,1)$ είναι

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}=\sqrt{(x-3)^2+\left(1+2\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$AM=\sqrt{x^2-2\cdot3x+3^2+2^2\sqrt{x}^2}=\sqrt{x^2-6x+9+4x}=\sqrt{x^2-2x+9}$ με $x>0$.

Η ποσότητα $(\mathbf{AM})=\sqrt{\mathbf{x^2-2x+9}}$ με $\mathbf{x>0}$ γίνεται ελάχιστη όταν η ποσότητα $\mathbf{x^2-2x+9}$ με $\mathbf{x>0}$ γίνεται ελάχιστη.

Θέτουμε $\mathbf{d(x)=x^2-2x+9}$ με $\mathbf{x>0}$.

Η $\mathbf{d(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\mathbf{0,+\infty})$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $\mathbf{d'(x)=2x-2}$.

Είναι $\mathbf{d'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{d'}$ και μεταβολών της $\mathbf{d}$.

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
d΄(x)=2x-2		‖	-	0	+	
d(x)		‖	↘	Ο.ε	↗	

Επομένως η $\mathbf{d}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[\mathbf{1,+\infty})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\mathbf{0,1}]$.

Η $\mathbf{d}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_0=1}$.

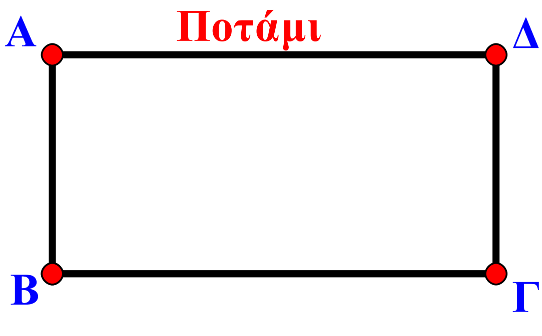
Άρα και η απόσταση $\mathbf{AM}$ δέχεται ελάχιστο για $\mathbf{x_0=1}$.

Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $\mathbf{M\left(x,1+2\sqrt{x}\right)=\left(1,1+2\sqrt{1}\right)=(1,1+2)=(1,3)}$

ΘΕΜΑ 9

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Η πλευρά $\mathbf{A\Delta}$ ορθογωνίου οικοπέδου $\mathbf{AB\Gamma\Delta}$ μεταβλητών διαστάσεων συνορεύει με ένα ποτάμι. Ο ιδιοκτήτης πρόκειται να περιφράξει τις πλευρές $\mathbf{AB,B\Gamma,\Gamma\Delta}$. Το κόστος για τις πλευρές $\mathbf{AB,\Delta\Gamma}$ είναι $\mathbf{3}$ ευρώ ανά μέτρο ενώ για την $\mathbf{B\Gamma}$ είναι $\mathbf{4}$ ευρώ ανά μέτρο. Πώς πρέπει να επιλεγούν οι διαστάσεις του οικοπέδου ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδόν, με δεδομένο ότι ο ιδιοκτήτης θα διαθέσει **120** ευρώ για την περίφραξη;



Λύση:

Έστω $\mathbf{x>0}$ το μήκος της $\mathbf{B\Gamma}$ και $\mathbf{y>0}$ το πλάτος των $\mathbf{AB,\Gamma\Delta}$.

Επειδή το κόστος για την περίφραξη της $\mathbf{B\Gamma}$ είναι **4€** ενώ για την περίφραξη των $\mathbf{AB,\Gamma\Delta}$ είναι **3€**, αφού θα διατεθούν **120** ευρώ για την περίφραξη έχουμε

$6y+4x=120 \Leftrightarrow \frac{6y}{2}+\frac{4x}{2}=\frac{120}{2} \Leftrightarrow 3y+2x=60 \Leftrightarrow 3y=60-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}}=\frac{60}{3}-\frac{2x}{3} \Leftrightarrow y=20-\frac{2}{3}x$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E=xy=x\left(20-\frac{2}{3}x\right)$ με $x,y>0$ ως διαστάσεις.

Επειδή $y>0$ πρέπει

$20-\frac{2}{3}x>0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x>-20 \Leftrightarrow \frac{-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}x}{-\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}<\frac{-20}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x<\frac{\frac{20}{1}}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x<\frac{20\cdot 3}{1\cdot 2} \Leftrightarrow x<30$.

Θέτουμε $E(x)=x\left(20-\frac{2}{3}x\right)=-\frac{2}{3}x^2+20x$ με $0<x<30$.

Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,30)$ ως πολυωνυμική με παράγωγο

$E'(x)=-\frac{4}{3}x+20$ με $0<x<30$.

Είναι $E'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x+20=0 \Leftrightarrow x=15$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

x	$-\infty$	0		15		30	$+\infty$
$E'(x)=-\frac{4}{3}x+20$			+	0	-		
$E(x)$			$\nearrow$	Ο.μ	$\searrow$		

Επομένως η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,15]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[15,+\infty)$

Η E παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=15$.

Οι διαστάσεις λοιπόν του ορθογωνίου ώστε να μεγιστοποιείται το εμβαδόν του είναι

$x=B\Gamma=15m$ και $y=AB=\Gamma\Delta=20-\frac{2}{3}x=20-\frac{2}{3}\cdot 15=20-\frac{30}{3}=20-10=10m$.

Και το μέγιστο εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $xy=15\cdot 10=150m^2$.

ΘΕΜΑ 10

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-2x+14$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-9x+10$ στο $x_0=-1$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές των α και β.

Ε2. Για $\alpha=1$ και $\beta=-2$

α. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στην ευθεία $y=-9x$.

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-x}$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{2x-1}-1}$.

Λύση:

Ε1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-9$.

Αφού η (ε) εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, το σημείο επαφής τους ανήκει και στην ευθεία εφαπτομένης και στη γραφική παράσταση της f, επομένως $f(-1)=-2(-1)+14=-\alpha+\beta+9+10 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-3$ (1).

Επίσης είναι $f'(-1)=-2 \Leftrightarrow 3\alpha-2\beta=7$ (2).

Λύνουμε το σύστημα των (1),(2). Συνεπώς είναι

$$\begin{cases}-\alpha+\beta=-3\\3\alpha-2\beta=7\end{cases}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\begin{cases}-2\alpha+2\beta=-6\\3\alpha-2\beta=7\end{cases}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha=1\\-\alpha+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-2\end{cases}$$

Έτσι προκύπτει $\alpha=1,\beta=-2$.

Ε2. **α)** Για $\alpha=1,\beta=-2$ ο τύπος της f γίνεται $f(x)=x^3-2x^2-9x+10$.

Έστω $(x_0,f(x_0))$ τα σημεία επαφής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τις εφαπτόμενες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon_1: y=-9x$.

Λόγω της παραλληλίας έχουμε

$f'(x_0)=-9 \Leftrightarrow 3x^2-4x-9=-9 \Leftrightarrow x(3x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\dfrac{4}{3}$.

Είναι $f(0)=10$ και $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{86}{27}$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(0,10)$ και $B\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{86}{27}\right)$.

β) Είναι $f'(x)=3x^2-4x-9$. Έστω $\rho(x)=3x^2-4x-9$ η συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x, η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με παράγωγο $\rho'(x)=6x-4$.

Είναι $\rho'(x)=0 \Leftrightarrow 6x-4=0 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}=\dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της ρ' και μεταβολών της ρ.

x	$-\infty$ 2/3 $+\infty$
$\rho'(x)=6x-4$	- 0 +
$\rho(x)$	↘ Ο.ε ↗

Επομένως η ρ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$.

Η ρ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=\frac{2}{3}$ με τιμή

$$\rho\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\left(\frac{2}{3}\right)-9=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}-\frac{9}{1}=-\frac{4}{3}-\frac{9}{1}=-\frac{4}{3}-\frac{27}{3}=-\frac{31}{3}.$$

γ) $f(x)=x^3-2x^2-9x+10=x^3-2x^2+x-x-9x+10$

$=x\left(x^2-2x+1\right)-10x+10=x(x-1)^2-10(x-1)=(x-1)\left(x^2-x-10\right)$.

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho=1$*).*

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-x-10\right)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-10}{x}=-10$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt{2x-1}-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2x-1-1}=$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2-x-10\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2(x-1)}=-10$

ΘΕΜΑ 11

Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x^2-2\alpha x+\alpha+2}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε το πεδίο ορισμού να είναι $A_f=\mathbb{R}$.

Ε2. Για τη μεγαλύτερη ακέραια από τις τιμές του α ώστε $A_f=\mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή του β ώστε το σημείο $K\left(3,\frac{1}{6}\right)$ να ανήκει στη C_f.

Ε3. Για $\alpha=1,\beta=-2$:

α. Να μελετήσετε τη μονοτονία, τις θέσεις και το είδος ακροτάτων της f.

β. Να βρεθούν τα σημεία M,N της C_f με τεταγμένη $-\frac{2}{3}$.

γ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία M,N καθώς και το σημείο τομής τους.

Λύση:

α	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$4\alpha^2-4\alpha-8$	+	0	-	0	+

Ε1 Για να ισχύει $\mathbf{A_f = R}$, πρέπει για κάθε $\mathbf{x \in R}$ να ισχύει $\mathbf{x^2 - 2\alpha x + \alpha + 2 \neq 0\ (1)}$

Η **(1)** δεν έχει λύσεις όταν $\mathbf{\Delta < 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha - 8 < 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-1, 2)}$.

Ε2 Η μεγαλύτερη ακέραιη τιμή του $\mathbf{\alpha}$ από το $\mathbf{(-1,2)}$ είναι το $\mathbf{\alpha = 1}$. Συνεπώς ο τύπος της συνάρτηση γίνεται $\mathbf{f(x) = \dfrac{x+\beta}{x^2-2x+3}}$ με $\mathbf{x^2 - 2x + 3 \neq 0}$ αφού $\mathbf{\Delta = -4 < 0}$.

Είναι $\mathbf{K\left(3, \frac{1}{6}\right) \in C_f \Leftrightarrow f(3) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3+\beta}{6} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta = -2}$.

Ε3 **α.** Για $\mathbf{\alpha = 1, \beta = -2}$, από τα παραπάνω ερωτήματα είναι $\mathbf{A_f = R}$ και $\mathbf{f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-2x+3}}$. Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως ρητή, με $\mathbf{f'(x) = \dfrac{-x^2+4x-1}{(x^2-2x+3)^2}}$

Είναι $\mathbf{f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left\{x = 2-\sqrt{3} \text{ ή } x = 2+\sqrt{3}\right\}}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+4x-1$		-	0	+	0	-	
$(x^2-2x+3)^2$		+		+		+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	τ.ε	↗	τ.μ	↘	

Έτσι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{\left[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right]}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{\left(-\infty, 2-\sqrt{3}\right]}$ και στο $\mathbf{\left[2+\sqrt{3}, +\infty\right)}$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $\mathbf{x_1 = 2-\sqrt{3}}$ το $\mathbf{f(2-\sqrt{3}) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}}$

και τοπικό μέγιστο για $\mathbf{x_2 = 2+\sqrt{3}}$ το $\mathbf{f(2+\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}}$.

β. Πρέπει $\mathbf{x_0 \in R}$ με

$$\mathbf{f(x_0) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x_0-2}{x_0^2-2x_0+3} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x_0 - 6 = -2x_0^2 + 4x_0 - 6 \Leftrightarrow}$$

$$\mathbf{2x_0^2 + 3x_0 - 4x_0 - 6 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow \left\{x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = \frac{1}{2}\right\}}.$$

Έτσι τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M\left(0,-\frac{2}{3}\right), N\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$.

γ. 1^{ος} Τρόπος

- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M\left(0,-\frac{2}{3}\right)$, είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

έχουμε $f(0)=-\frac{2}{3}$ και $f'(0)=-\frac{1}{9}$ άρα $y+\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}x \Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3}:(\varepsilon_1)$

- Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $N\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ είναι η $y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

έχουμε $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}$ και $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}$ άρα $y+\frac{2}{3}=\frac{4}{27}\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y=\frac{4}{27}x-\frac{20}{27}:(\varepsilon_2)$

Σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$:

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους, προκύπτει το $K\left(\frac{2}{7},\frac{-44}{63}\right)$.

2ος Τρόπος

- Η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με

$\lambda=f'(0)=\frac{1}{9}$ και επειδή το σημείο επαφής $M\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ είναι σημείο της ευθείας,

επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}\cdot 0+\beta \Rightarrow \beta=-\frac{2}{3}$, επομένως η ευθεία

εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y=-\frac{1}{9}x-\frac{2}{3} \Rightarrow 9y+6+x=0$.

- Η εξίσωση της ευθείας εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με

$\lambda=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}$ και επειδή το σημείο επαφής $N\left(\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right)$ είναι σημείο της ευθείας,

επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $-\frac{2}{3}=\frac{4}{27}\frac{1}{2}+\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{20}{27} \Leftrightarrow$, επομένως η

ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y=\frac{4}{27}x-\frac{20}{27} \Leftrightarrow 27y-4x+20=0$

Σημείο τομής των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$:

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους και προκύπτει το $K\left(\frac{2}{7},\frac{-44}{63}\right)$.

ΘΕΜΑ 12 — Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν, οι σχέσεις:

$f(x)+3xg(x)=19x^2-17x$ και $xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε1. Να βρείτε τους τύπους των f, g καθώς και τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

Ε2. Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x).$$

Ε3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{xf'(x)-3}{x^3+g(x)-1}$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε

$$\begin{cases} f(x)+3xg(x)=19x^2-17x \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \overset{\cdot(-x)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -xf(x)-3x^2g(x)=-19x^3+17x^2 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} -2g(x)-3x^2g(x)=-18x^3+18x^2-12x+12 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-2-3x^2\right)g(x)=-18x^2(x-1)-12(x-1) \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{6(3x^2+2)(x-1)}{2+3x^2} \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=6x-6 \\ xf(x)-2g(x)=x^3+x^2-12x+12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x)=6x-6 \\ f(x)=x^2+x \end{cases}$$

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων θα προκύψουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+x=6x-6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$ η οποία έχει ρίζες τις $x=2$ και $x=3$. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων είναι λοιπόν τα $M\big(2,f(2)\big)\equiv M(2,6)$ και $N\big(3,f(3)\big)\equiv N(3,12)$.

Ε2. Από τους τύπους $h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x)$, $f(x)=x^2+x$ και $g(x)=6x-6$ προκύπτει ότι ο τύπος της συνάρτησης h ισούται με $h(x)=xf(x)-\frac{1}{6}g(x)=x(x^2+x)-\frac{1}{6}(6x-6)=x^3+x^2-x+1$ με $x\in R$.

Ε3. Η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=3x^2+2x-1$.

Οι ρίζες της είναι: $h'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0\Leftrightarrow\left\{x_1=-1 \text{ και } x_2=\frac{1}{3}\right\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της h' και μεταβολών της h.

x	$-\infty$ -1 1/3 $+\infty$
$h'(x)=3x^2+2x-1$	+ 0 - 0 +
h(x)	↗ τ.μ ↘ τ.ε ↗

Η $h(x)$ είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$.

Επιπλέον παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $h(-1)=2$ και τοπικό ελάχιστο το $h\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$.

Ε4. Έχουμε $\lim\limits_{x\to1}\frac{xf'(x)-3}{x^3+g(x)-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x^2+x)'-3}{x^3+6x-6-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(2x+1)-3}{x^3+6x-7}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+x-3}{x^3+6x-7}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x^2+x+7)}=\lim_{x\to1}\frac{2x+3}{x^2+x+7}=\frac{5}{9}$$

<u>Δικαιολόγηση παραγοντοποίησης</u>

Είναι, $2x^2+x-3=2x^2-2x+3x-3=2x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(2x+3)$.

Διαφορετικά και με σχήμα Horner με ρ = 1.

Επίσης είναι,
$x^3+6x-7=x^3-x^2+x^2-x+7x-7=x^2(x-1)+x(x-1)+7(x-1)=$
$(x-1)(x^2+x+7)$

Διαφορετικά και με σχήμα Horner με ρ = 1.

ΘΕΜΑ 13

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -e^{-\alpha}x^{\alpha} + \frac{\alpha+1}{e}\ln(\alpha + e^x)$ με $\alpha > 0$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Ε2. Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{x^2-1}{x-1}-1\right)=1$, να βρεθεί ο αριθμός α.

Για $\alpha = 1$

Ε3. Να δείξετε ότι $f'(-x)+f'(x)=0$ για κάθε $x \in R$.

Ε4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Πρέπει $e^x + \alpha > 0$. Επειδή $\alpha > 0$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x > 0$ έχουμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x + \alpha > 0$. Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R.

Ε2. $1 = \lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{x^2-1}{x-1}-1\right) = \lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}-1\right) = \lim\limits_{x\to\alpha}(x+1-1) = \lim\limits_{x\to\alpha}(x) = \alpha$

Ε3. Για $\alpha = 1$ έχουμε $f(x) = -e^{-1}x + \frac{2}{e}\ln(e^x+1), x \in R$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = -e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}, x \in R.$$

Οπότε $f'(-x) = -e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = -e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} = -e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e^x+1}$.

Έχουμε $f'(x)+f'(-x) = -e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1} - e^{-1} + \frac{2}{e}\cdot\frac{1}{e^x+1} = -2e^{-1} + \frac{2e^x}{e(e^x+1)} + \frac{2}{e(e^x+1)}$

$$= -2e^{-1} + \frac{2(e^x+1)}{e(e^x+1)} = -\frac{2}{e} + \frac{2}{e} = 0.$$

Ε5. Για $\alpha = 1$ έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e}\cdot\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{2e^x}{e^x+1}-1\right) = \frac{1}{e}\cdot\frac{2e^x-e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{e}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}, x \in R.$$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1} = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	-	0	+
e^x+1	+		+
$1/e$	+		+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.ε	↗

Δικαιολόγηση προσήμου

Έστω

$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=\dfrac{2\ln 2}{e}$.

ΘΕΜΑ 14

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x^3-4x^2+3x-3$ και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, x\neq 1\\ \alpha+6, x=1\end{cases}$

Ε1. Να βρείτε το σημείο στο οποίο η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$.

Ε2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$.

Ε3. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Για $\alpha=1$:

Ε4. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g στο $x_0=1$.

Ε5. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$\mu^2 g'(-2)+\mu g'(2)+32>0$.

Πηγή: Μ.Αγιοπούλου & Ν.Πανουσάκης (Ε.Ο.Σ.Κ)

Λύση:

Ε1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι :

$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow 4x^2(x-1)+3(x-1)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(4x^2+3)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$.

Ε2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=12x^2-8x+3$.

1^ος Τρόπος

Είναι $f'(1)=12-8+3=7$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $A(1,0)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=7x-7\,.$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(1)=7$ και επειδή το σημείο επαφής $A(1,0)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της, δηλαδή $0=7\cdot 1+\beta\Rightarrow\beta=-7$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $y=7x-7$.

Ε3.

Ο τύπος της συνάρτησης g γίνεται $g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^3-4x^2+3x-3}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}\Rightarrow$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(4x^2+3)}{x-1}, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}4x^2+3, & x\neq 1\\ \alpha+6, & x=1\end{cases}.$$

Για να είναι συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}(4x^2+3)=\alpha+6\Rightarrow\alpha+6=7\Leftrightarrow\alpha=1\,.$$

Ε4. Ο τύπος της συνάρτησης g για $\alpha=1$ γίνεται $g(x)=\begin{cases}4x^2+3, & x\neq 1\\ 7, & x=1\end{cases}$.

Είναι $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(1+h)^2+3-7}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+8h+4h^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2+h)}{h}=8\,.$$

Άρα $g'(1)=8$ που είναι και ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης για $x=1$.

Ε5. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x)=\left\{\begin{matrix}8x, & x\neq 1\\ 8, & x=1\end{matrix}\right\}$ επομένως είναι $\mu^2 g'(-2)+\mu g'(2)+32>0\Leftrightarrow$

$$-16\mu^2+16\mu+32>0\overset{:(-16)}{\Leftrightarrow}\mu^2-\mu+2<0$$

και σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων που ακολουθεί

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$\mu^2-\mu-2$	+ 0 - 0 +

είναι $-1<\mu<2$.

ΘΕΜΑ 15 — Προτείνει ο Γιώργος Απόκης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+\alpha x^2-6\beta x+1, \alpha,\beta\in R$ η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις $x_1=-3, x_2=2$.

Ε1. Να βρεθούν οι τιμές των α,β

Ε2. Για $\alpha=3, \beta=6$:

α. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ο ελάχιστος.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(-5)}}{\sqrt{6}x+5\sqrt{6}}$.

Λύση:

Ε1. Η f παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=6x^2+2\alpha x-6\beta$.

Τότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+2\alpha x-6\beta=0 \Leftrightarrow 3x^2+\alpha x-3\beta=0$.

Αν το τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα, τότε η $f'(x)$ θα διατηρεί στο R το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου και συνεπώς η f θα είναι γνησίως μονότονη χωρίς ακρότατα. Άρα πρέπει $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2+36\beta\ge 0$.

Η f' έχει ρίζες τις $x_1=-3, x_2=2$ και σαν εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει πρόσημο θετικό στο $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ και αρνητικό στο $(-3,2)$.

Από τους τύπους του **Vieta** έχουμε

$$S=x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{-2\alpha}{6}=-3+2 \Leftrightarrow \frac{-\alpha}{3}=-1 \Leftrightarrow \alpha=3$$ και

$$P=x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{-6\beta}{6}=(-3)\cdot 2 \Leftrightarrow \beta=6.$$

Ε2. **α.** Για $\alpha=3$ και $\beta=6$ έχουμε $f'(x)=6x^2+6x-36, x\in R$.

Η f' παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x)=12x+6, x\in R$.

Είναι $f''(x)=0 \Leftrightarrow 12x+6=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f'' και μεταβολών της f'.

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f''(x)=12x+6$	-	0	+
$f'(x)$	↘	Ο.ε	↗

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0 = -\frac{1}{2}$ με τιμή

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 36 = \frac{3}{2} - 3 - 36 = \frac{3}{2} - 39 = -\frac{75}{2}.$$

β. Είναι $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1, x \in R$ και επομένως

$$f(-5) = 2(-5)^3 + 3(-5)^2 - 36(-5) + 1 = -250 + 75 + 180 + 1 = 6.$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to-5} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-5)}}{\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}} = \lim_{x\to-5} \frac{\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} - \sqrt{6}}{\sqrt{6}x + 5\sqrt{6}} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} - \sqrt{6})(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1 - 6}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 3x^2 - 36x - 5}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^3 + 10x^2 - 7x^2 - 35x - x - 5}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{2x^2(x+5) - 7x(x+5) - (x+5)}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

(Προκύπτει και με σχήμα Horner για $\rho = -5$*).*

$$\lim_{x\to-5} \frac{(x+5)(2x^2 - 7x - 1)}{\sqrt{6}(x+5)(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} =$$

$$\lim_{x\to-5} \frac{(2x^2 - 7x - 1)}{\sqrt{6}(\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 36x + 1} + \sqrt{6})} = \frac{50 + 35 - 1}{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{84}{12} = 7.$$

ΘΕΜΑ 16

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5, \quad x \in R, \quad \alpha, \beta \in R$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,7)$.

Ε1. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,7)$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = 1 - x$, να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$.

Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 1$

Ε2. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = 1, x \in R$.

Ε3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ε5. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-2e^x}{x^2-25}=-\dfrac{1}{10}$.

Απο φυλλάδιο των Δ. Αργυράκη & Γ. Κουτσανδρέα

Λύση:

Ε1. Αφού $A(0,7)\in C_f$ έχουμε $f(0)=7\Leftrightarrow \alpha+5=7\Leftrightarrow \alpha=2$ δηλαδή $f(x)=2e^x-\beta x+5$ με $f'(x)=2e^x-\beta$.

Οι ευθείες είναι κάθετες άρα $f'(0)\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow(2-\beta)\cdot(-1)=-1\Leftrightarrow 2-\beta=1\Leftrightarrow\beta=1$.

Ε2. Έχουμε $f(x)=2e^x-x+5$ και $f'(x)=2e^x-1, f''(x)=2e^x$ άρα $f''(x)-f'(x)=2e^x-(2e^x-1)=1$.

Ε3. Είναι $f'(x)=2e^x-1$. Λύνουμε την εξίσωση

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^x=1\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$ $-\ln 2$ $+\infty$
$f'(x)=2e^x-1$	$-$ 0 $+$
f(x)	$\searrow$ Ο.ε. $\nearrow$

Δικαιολόγηση προσήμου

$2e^x-1>0\Leftrightarrow 2e^x>1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\ln 2$

Επομένως η f γνησίως φθίνουσα στο $[-\infty,-\ln 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\ln 2,+\infty]$. Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-\ln 2)=1+\ln 2+5=6+\ln 2$.

Ε4. Από το **Ε3** έχουμε ότι $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\ln 2$ άρα στο σημείο $M(-\ln 2, 6+\ln 2)$ υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη.

Ε5. Είναι $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-2e^x}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2e^x-x+5-2e^x}{x^2-25}=$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-1}{x+5}=-\dfrac{1}{10}$.

ΘΕΜΑ 17

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x^2+\beta x}, x\in\mathbb{R}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,e^3)$ και $B(-1,e)$.

Ε1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ε2. Να βρεθεί το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

Ε3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο παραπάνω σημείο καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει αυτή με τους άξονες.

Ε4. Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f'(x)\cdot(4x+1)^2 + 4f(x)$.

Ε5. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x = 2$.

Πηγή: Φυλλάδιο Μ.Παπαγρηγοράκη

Λύση:

Ε1. Αφού η C_f διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

$f(1) = e^3 \Leftrightarrow e^{\alpha+\beta} = e^3 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 3\,(1)$ και $f(-1) = e \Leftrightarrow e^{\alpha-\beta} = e \Leftrightarrow \alpha-\beta = 1\,(2)$.

Από $(1)+(2) \Rightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Από $(1) \overset{\alpha=2}{\Rightarrow} \beta = 1$. Έτσι $f(x) = e^{2x^2+x}$ με $x \in R$.

Ε2. Με $x = 0$ είναι $f(0) = e^0 = 1$.

Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$.

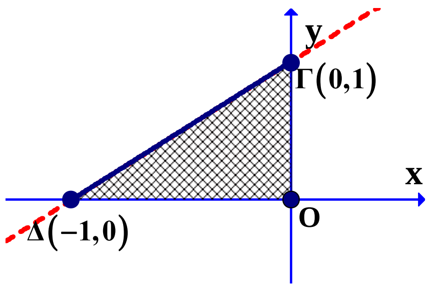
Ε3.

Είναι $f'(x) = (4x+1)e^{2x^2+x}$ για $x \in R$.

1ος Τρόπος

Η εφαπτομένη στο Γ είναι η:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x+1$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-1,0)$.



Επομένως σύμφωνα με το σχήμα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E_{O\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

2ος Τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0,1)$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(0) = 1$. Επειδή το σημείο αυτό είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1 = 0\cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1$. Επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y = x+1$ η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,1)$ και τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-1,0)$. Επομένως σύμφωνα και με το σχήμα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_{O\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}(O\Gamma)(O\Delta) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}\ \tau.\mu.$

Ε4. $f''(x)=4e^{2x^2+x}+(4x+1)\cdot(4x+1)e^{2x^2+x}=4f(x)+(4x+1)f'(x)$.

Ε5. Ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης για $x=2$ είναι $f''(2)=4e^{10}+(4\cdot 2+1)^2e^{10}=85e^{10}$.

ΘΕΜΑ 18

Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in R$. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Ε1. Αν $f'(1)+f(2)=5$ και $f'\left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}\right)=0$, να βρείτε τις τιμές των α,β .

Ε2. Για $\alpha=12$ και $\beta=1$ να βρείτε:

α. το πρόσημο της f' .

β. την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\kappa,\lambda)$ όπου κ,λ είναι στοιχεία του συνόλου $\{-1,0,1\}$.

Πηγή: Φυλλάδιο Μ.Παπαγρηγοράκη

Λύση:

Ε1. Είναι $f(x)=2x^3-9x^2+\alpha x+\beta, x\in R$ $\alpha,\beta\in R$.

Η f παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=6x^2-18x+\alpha, x\in R$.

Έχουμε $f(2)=16-36+2\alpha+\beta=2\alpha+\beta-20$ και $f'(1)=6-18+\alpha=-12+\alpha$.

Οπότε $f'(1)+f(2)=5\Leftrightarrow -12+\alpha+2\alpha+\beta-20=5\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=37\ (1)$.

Ακόμα $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{x-2}=2$.

Επομένως $f'\left(\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}\right)=0\Leftrightarrow f'(2)=0\Leftrightarrow 2\alpha-36+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=12\ (2)$.

Οπότε από (1) έχουμε $\beta=1$.

Ε2. **α.** Έχουμε $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1, x\in R$ και $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)$

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f'(x)=6x^2-18x+12$	+ 0 - 0 +

Συνεπώς για $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ έχουμε $f'(x)>0$

Ενώ για $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0$.

β. $f(-1)=-22\notin\{-1,0,1\}$, $f(0)=1\in\{-1,0,1\}$ και $f(1)=6\notin\{-1,0,1\}$.

Επομένως $\kappa=0$ και $\lambda=1$.

1^{ος} Τρόπος

Η εφαπτομένη στο σημείο $A(0,1)$ είναι μια ευθεία της μορφής $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda,\beta\in R$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(0)=12$ συνεπώς $y=\lambda x+\beta \overset{\lambda=12}{\Rightarrow} y=12x+\beta$ κι επειδή διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ $y=12x+\beta \overset{(x,y)=(0,1)}{\Rightarrow} 1=12\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι η $y=\lambda x+\beta \underset{\beta=1}{\overset{\lambda=12}{\Rightarrow}} y=12x+1$

2^{ος} Τρόπος

Έχουμε $f'(0)=12$,οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,1)$ είναι η

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=12x\Leftrightarrow y=12x+1$

ΘΕΜΑ 19

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Έστω $f(x)=x^2+(3-\alpha)x-(\alpha+5)$ με $\alpha\in R$. Για ποια τιμή του α το άθροισμα τετραγώνων των ριζών της **f** είναι ελάχιστο και ποια η τιμή του ελαχίστου;

Λύση:

Αρχικά πρέπει η δευτεροβάθμια να έχει δύο ρίζες, οπότε

$$\Delta>0\Leftrightarrow(3-\alpha)^2+4(\alpha+5)>0\Leftrightarrow 9-6\alpha+\alpha^2+4\alpha+20>0\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+29>0\overset{\Delta'<0}{\Leftrightarrow}\alpha\in R$$

Έστω x_1,x_2 οι ρίζες τις δευτεροβάθμιας. Από τους τύπους Vieta, έχουμε $S=\alpha-3$ και $P=-(\alpha+5)$.

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P=(\alpha-3)^2+2(\alpha+5)$$
$$=\alpha^2-6\alpha+9+2\alpha+10=\alpha^2-4\alpha+19$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha)=\alpha^2-4\alpha+19, \alpha\in R$.

Η **g** είναι παραγωγίσιμη στο **R** ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(\alpha)=2\alpha-4, \alpha\in R$.

Είναι $g'(\alpha)=0\Leftrightarrow 2\alpha-4=0\Leftrightarrow \alpha=2$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

x	-∞ 2 +∞
$g'(\alpha)=2\alpha-4$	- 0 +
$g'(x)$	↘ Ο.ε ↗

Οπότε η **g** είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $\alpha=2$ με τιμή $g(2)=4-8+19=15$.

ΘΕΜΑ 20 — Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\kappa(x-1)}-x, x\in R, \kappa\in R$.

Ε1. Να βρεθούν f' και f''.

Ε2. Να βρείτε την τιμή του $\kappa\in R$, ώστε να ισχύει $f''(x)-2f'(x)+e^{\kappa(x-1)}=2$ για κάθε $x\in R$.

Ε3. Αν $\kappa=1$, τότε

α. να δείξετε ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται στην καμπύλη της f στο σημείο $M(1,f(1))$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^{x-1}\geq x$ για κάθε $x\in R$.

Πηγή: Μ.Τουμάσης- Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\kappa e^{\kappa(x-1)}-1$ και $f''(x)=\kappa^2 e^{\kappa(x-1)}$.

Ε2. $f''(x)-2f'(x)+e^{\kappa(x-1)}=2 \Leftrightarrow \kappa^2 e^{\kappa(x-1)}-2\kappa e^{\kappa(x-1)}+2+e^{\kappa(x-1)}=2$
$\Leftrightarrow (\kappa^2-2\kappa+1)e^{\kappa(x-1)}=0 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1=0 \Leftrightarrow \kappa=1$ αφού $e^{\kappa(x-1)}\neq 0$ για κάθε $x\in R$

Ε3. Για $k=1$ έχουμε $f(x)=e^{x-1}-x$ με $f'(x)=e^{x-1}-1$.

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο M είναι $\lambda=f'(1)=0$.
Δηλαδή η εφαπτομένη στο M είναι οριζόντια. Επιπλέον $M(1,f(1))=(1,0)\in(x'x)$ και συνεπώς η εφαπτομένη στο M είναι ο άξονας $x'x$.

β. Η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^{x-1}-1$.

Λύνουμε την εξίσωση
$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x-1}-1=0 \Leftrightarrow e^{x-1}=1 \Leftrightarrow \ln e^{x-1}=\ln 1 \Leftrightarrow (x-1)\ln e=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$
Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)=e^{x-1}-1$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.ε	↗

Δικαιολόγηση προσήμου
$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-1}>1 \Leftrightarrow e^{x-1}>e^0 \Leftrightarrow$
$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Η συνάρτηση f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.

γ. Από το β) έχουμε λόγω του ελαχίστου της f, για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow e^{x-1}-x\geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1}\geq x$.

ΘΕΜΑ 21

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln(x^2+1), x\in R$.

Ε1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε2. Αν $\alpha>\beta>1$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}>\ln\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-x+\lambda, x\in R, \lambda\in R$.

Ε3. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

Ε4. Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της g.

Ε5. Να βρείτε το $\lambda\in R$ ώστε το τοπικό μέγιστο της g να είναι διπλάσιο από το τοπικό ελάχιστο της g.

Πηγή: Β.Παπαδάκης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με $f'(x)=x-\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \{x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=-1\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-		-	0	+
x	-		-	0	+		+
x^2+1	+		+		+		+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	Τ.ε	↗	Τ.μ	↘	Τ.ε	↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1,0],[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,1],[0,1]$.
Για $x=-1$ και $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=f(1)=\frac{1}{2}-\ln 2$ και για $x=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0)=0$

Ε2. Για κάθε $\alpha>\beta>1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε

$$f(\alpha)>f(\beta)\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2}-\ln\left(\alpha^2+1\right)>\frac{\beta^2}{2}-\ln\left(\beta^2+1\right)\Rightarrow \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}>\ln\left(\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\right)$$

Ε3. Είναι $g(x)=f'(x)-x+\lambda=\lambda-\dfrac{2x}{x^2+1}$ οπότε $g'(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

Είναι $g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow \{x=-1 \text{ ή } x=1\}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της g' και μεταβολών της g.

x	$-\infty$ -1 1 $+\infty$
x^2-1	+ 0 - 0 +
$(x^2+1)^2$	+ + +
$g'(x)$	+ 0 - 0 +
$g(x)$	↗ Τ.μ ↘ Τ.ε ↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$ και γνήσια φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Ε4. Για $x=-1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $g(-1)=\lambda+1$ και για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $g(1)=\lambda-1$.

Ε5. Έχουμε $g_{max}=2g_{min} \Leftrightarrow \lambda+1=2(\lambda-1) \Leftrightarrow \lambda=3$.

ΘΕΜΑ 22

Προτείνει ο Χρήστος Τσιφάκης

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ,f,g με $f(1)=f'(1)=1$ και $\varphi(x)=f(g(x))$ με $g(x)=\ln x+x$ με $x>0$.

Ε1. Να δείξετε ότι: $g(1)=\varphi(1)=1$ και $g'(1)=\varphi'(1)=2$.

Ε2. Να εξετάσετε αν η $g(x)$ έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Ε3. Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}$.

Ε4. **α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους $A(1,\varphi(1))$ και $B(1,f(1))$ αντίστοιχα.

β. Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $g(1)=\ln 1+1=1$ και $\varphi(1)=f(g(1))=f(1)=1$ άρα $g(1)=\varphi(1)=1$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ οπότε $g'(1)=2$ ακόμη

$\varphi'(x)=[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$ επομένως έχουμε ότι

$\varphi'(1)=f'(g(1))g'(1) \Rightarrow \varphi'(1)=f'(1)g'(1) \Rightarrow \varphi'(1)=2$. Άρα $\varphi'(1)=g'(1)=2$.

Ε2. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα δεν έχει ακρότατα.

Ε3. $$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=g'(1)=1 .$$

Ε4. **α. 1^{ος} Τρόπος**

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_φ είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=\varphi'(1)=2$ και επειδή το σημείο επαφής $M(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1=2\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=-1$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_1): y=2x-1$

Κατά τον ίδιο τρόπο, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f είναι της μορφής $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda=f'(1)=1$ και επειδή το σημείο επαφής $M(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας, επαληθεύει την εξίσωση της δηλαδή, $1=1\cdot 1+\beta \Rightarrow \beta=0$, επομένως η ευθεία εφαπτομένης έχει εξίσωση $(\varepsilon_2): y=x$

2^{ος} τρόπος

$$(\varepsilon_1): y-\varphi(1)=\varphi'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$$
$$(\varepsilon_2): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x .$$

β. Ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε_2) είναι: $\lambda=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta=1\Leftrightarrow \theta=45^\circ$

ΘΕΜΑ 23

Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης

Έστω $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2$.

Ε1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Ε2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

Ε3. Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης καθώς και την τιμή του ελάχιστου συντελεστή διεύθυνσης·

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+5x-2, x\in R$.

Η $\mathbf{f}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f'(x)=x^2-6x+5, x\in R}$.

$\mathbf{f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow x=1}$ ή $\mathbf{x=5}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της $\mathbf{f'}$ και μεταβολών της $\mathbf{f}$.

x	-∞ 1 5 +∞
$f'(x)=x^2-6x+5$	+ 0 - 0 +
f(x)	↗ Τ.μ ↘ Τ.ε ↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{(-\infty,1]}$ καθώς και στο $\mathbf{[5,+\infty)}$ και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{[1,5]}$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $\mathbf{x_1=1}$ με τιμή $\mathbf{f(1)=\frac{1}{3}-3+5-2=\frac{1}{3}}$ και

τοπικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x_2=5}$ με τιμή

$$\mathbf{f(5)=\frac{125}{3}-75+25-2=-52+\frac{125}{3}=\frac{-156+125}{3}=\frac{-31}{3}}.$$

Ε2. Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι θετικός αριθμός, οπότε θέλουμε $\mathbf{f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)}$.

Ε3. Η $\mathbf{f'}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\mathbf{f''(x)=2x-6, x\in R}$.

$\mathbf{f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3}$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της . και μεταβολών της $\mathbf{f'}$.

x	-∞ 3 +∞
$f''(x)=2x-6$	- 0 +
f΄(x)	↘ Ο.ε ↗

Η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{(-\infty,3]}$ και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{[3,+\infty)}$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $\mathbf{x=3}$ με τιμή $\mathbf{f'(3)=9-18+5=-4}$.

ΘΕΜΑ 24

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}}$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $\mathbf{f}$, την $\mathbf{f'}$ και την $\mathbf{f''}$.

Ε2. Να βρείτε τη μονοτονία της $\mathbf{f'}$.

Ε3. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της $\mathbf{C_f}$ στην αρχή των αξόνων.

Ε4. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της $\mathbf{f'}$.

Ε5. Να μελετήσετε την $\mathbf{f}$ ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ έχει ολικό ελάχιστο το οποίο και να βρείτε.

Ε6. Να αποδείξετε ότι $x\ln(x+1)-x+\ln(1+x)\geq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$ για κάθε $x>-1$.

Ε7. Να λύσετε την εξίσωση $x\ln(x+1)-x+\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3$.

Πηγή:Στεργίου-Νάκης(εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(x)=x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$

Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$. Άρα $x\in(-1,+\infty)$.

Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-1+\frac{1}{x+1}-x+\frac{x^2}{2}=\ln(x+1)+\frac{x+1}{x+1}-1-x+\frac{x^2}{2}$$

$$=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2},x>-1.$$

Η f' παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{1-x-1+x^2+x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}\geq 0 \text{ για κάθε } x\in(-1,+\infty).$$

Ε2. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,\,0)\cup(0,\,+\infty)$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο 0 έχουμε πως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Ε3. Έχουμε $f'(0)=0$.

Ε4. Έχουμε $f'(0)=0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Επομένως για $x>0$ θα ισχύει $f'(x)>f'(0)=0$ και για $-1<x<0$ θα ισχύει $f'(x)<f'(0)=0$.

Ε5. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	-∞	-1	0	+∞
f΄(x)		‖ -	0	+
f(x)		‖ ↘	Ο.ε	↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$.

Ε6. Επειδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=0$ με τιμή $f(0)=0$ έχουμε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει:

$$f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\ge \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}.$$

Ε7. Για $x>-1$ έχουμε $x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\Leftrightarrow$

$$x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\Leftrightarrow x=0$$

Η λύση $x=0$ είναι και μοναδική διότι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ 25

Προτείνει ο Περικλής Παντούλας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3e^{2\alpha x}+7$.

Ε1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες ισχύει $f'(x)-f''(x)=0$ για κάθε $x\in R$.

Ε2. Να βρεθεί συναρτήσει του α, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

Ε3. Για $\alpha>0$ να βρείτε τα σημεία τομής A και B της εφαπτομένης ευθείας με τους άξονες συντεταγμένων.

Ε4. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB, που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες για $\alpha=\frac{1}{3}$.

Λύση:

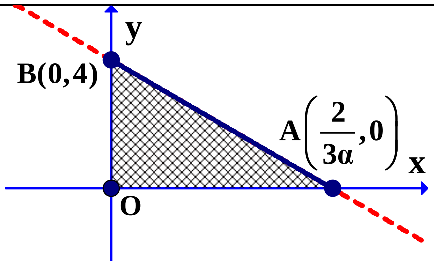
Ε1. Η f έχει πεδίο ορισμού το R και είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-6\alpha e^{2\alpha x}$ και η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=-12\alpha^2e^{2\alpha x}$. Έχουμε

$$f'(x)-f''(x)=0\Leftrightarrow -6\alpha e^{2\alpha x}+12\alpha^2e^{2\alpha x}=0\Leftrightarrow -6\alpha+12\alpha^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6\alpha(1-2\alpha)=0 \text{ άρα } \alpha=0 \text{ ή } \alpha=\frac{1}{2}.$$

Ε2. Έχουμε $f(0)=-3e^0+7=4$ και $\lambda=f'(0)=-6\alpha e^0=-6\alpha$.
Έστω ότι η εφαπτομένη είναι $(\varepsilon):y=\lambda x+\beta\Leftrightarrow y=-6\alpha x+\beta$.
Αφού διέρχεται από το $(0,4)$ έχουμε $\beta=4$ άρα $(\varepsilon):y=-6\alpha x+4$.

Ε3. Με $y=0$ για τον άξονα $x'x: 0=-6\alpha x+4 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3\alpha}$, προκύπτει το σημείο $A\left(\dfrac{2}{3\alpha},0\right)$ και με $x=0$



αντίστοιχα για τον άξονα $y'y$ προκύπτει το σημείο $B(0,4)$.

Ε4. Το εμβαδόν του AOB είναι $E(\alpha)=\dfrac{1}{2}(OA)\cdot(OB)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{3\alpha}\right|4\overset{\alpha>0}{=}\dfrac{4}{3\alpha}$ με ρυθμό μεταβολής $E'(\alpha)=-\dfrac{4}{3\alpha^2}$ και για $\alpha=\dfrac{1}{3}$, $E'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{3\cdot\frac{1}{9}}=-12$.

ΘΕΜΑ 26

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Η θέση ενός υλικού σημείου το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3+\kappa t^2+\lambda t, t\in[0,10], \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ όπου το t μετριέται σε **sec** και το x σε μέτρα (m).

Ε1. Αν τη χρονική στιγμή $t=1sec$ η ταχύτητα είναι $u(1)=9m/s$ και η επιτάχυνση $\alpha(1)=-12m/s^2$, να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

Για $\kappa=-9$ και $\lambda=24$ να βρείτε:

Ε2. Πότε το μέτρο της ταχύτητας του υλικού σημείου είναι $9m/s$;

Ε3. Πότε το σημείο μένει ακίνητο;

Ε4. Τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σημείο κινείται κατά τη θετική ή αρνητική κατεύθυνση.

Ε5. Ποίο το ολικό διάστημα που διένυσε το σημείο στα πρώτα 10 δευτερόλεπτα της κίνησης του;

Ε6. Ποιά η μετατόπιση του από την αρχική θέση;

Πηγη: Μ.Τουμάσης- Γ.Τσαπακίδης (εκδόσεις Σαββάλας)

Λύση:

Ε1. Είναι $u(t)=x'(t)=3t^2+2\kappa t+\lambda$, και $\alpha(t)=u'(t)=6t+2\kappa$. Ισχύει η σχέση $\alpha(1)=-12\Leftrightarrow 6+2\kappa=-12\Leftrightarrow \kappa=-9$. Επίσης,

$u(1)=9\Leftrightarrow 3+2\kappa+\lambda=9\overset{\kappa=-9}{\Leftrightarrow}-18+\lambda=6\Leftrightarrow\lambda=24$. Και σύμφωνα με τις τιμές αυτές θα είναι $x(t)=t^3-9t^2+24t,\quad u(t)=3t^2+-18t+24,\quad \alpha(t)=6t-18$.

Ε2. Είναι $|u(t)|=9\Leftrightarrow u(t)=\pm 9$.

Η εξίσωση $3t^2-18t+24=-9\Leftrightarrow 3t^2-18t+33=0$ είναι αδύνατη γιατί έχει $\Delta<0$ και από $3t^2-18t+24=9\Leftrightarrow 3t^2-18t+15=0\Leftrightarrow t^2-6t+5=0\Leftrightarrow$
$t=1s$ ή $t=5s$.

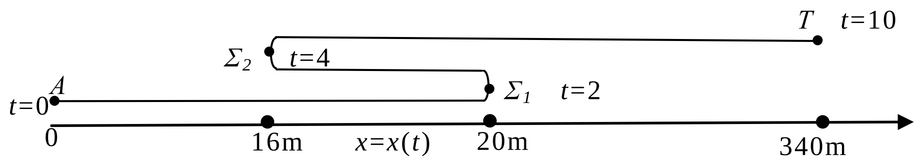
Ε3. Είναι ακίνητο για $u(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2-18t+24=0$ άρα $t=2s$ ή $t=4s$.

Ε4. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

t	0	2	4	10
$u(t)=3t^2-18t+24$	+	0 -	0 +	
Κατεύθυνση	Δεξιά	Αριστερα	Δεξία	

Άρα κινείται προς τα δεξιά για $t\in[0,2)\cup(4,10]$ και αριστερά για $t\in(2,4)$.

Ε5. Η αλλαγή στη φορά της κίνησης γίνεται τις χρονικές στιγμές $2s$ και $4s$. Είναι $x(0)=0, x(2)=20, x(4)=16, x(10)=340$.



Επομένως στο $[0,2]$: $S_{ολ}=ΑΣ_1+Σ_1Σ_2+Σ_2Τ=20+4+324=348m$

Ε6. Η τελική μετατόπιση είναι $x(10)=340m$.

ΘΕΜΑ 27

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2$ και η συνάρτηση

$f(x)=e^{x^{g(0)}}$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2xf(x)$ και $f''(x)=2f(x)(2x^2+1)$.

Ε2. **α.** Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to g(0)}\dfrac{\ln f(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{x-g(0)}=2$.

β. Να υπολογίσετε τα όρια :

1. $\lim\limits_{x\to0}\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g^2(x)}\right|$ **2.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x-\frac{1}{2}}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{\dfrac{f''(x)}{f(x)}-11}{2x-3}$ **4.** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{\sqrt{f(x)}-1}$

Ε3. Να δείξετε ότι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ είναι της μορφής $y=2x_0e^{x_0^2}x+e^{x_0^2}-2x_0^2e^{x_0^2}$. Σε ποια σημεία οι εφαπτομένες αυτές διέρχονται από την αρχή των αξόνων;

Ε4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $\mathbf{f}$ και να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της αυξάνει για κάθε $\mathbf{x \in R}$.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $\mathbf{x_0 = 0}$. Συνεπώς $\mathbf{g(0) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 2}$. Τότε $\mathbf{f(x) = e^{x^{g(0)}} = e^{x^2}}$. Η $\mathbf{f}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $\mathbf{f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x)}$ και

$$\mathbf{f''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) = 2f(x) + 2x(2xf(x)) = 2f(x) + 4x^2 f(x) = 2f(x)(2x^2+1)}$$

Ε2. **α.** $$\mathbf{\lim_{x\to g(0)} \frac{\ln f(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}}{x-g(0)} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln e^{x^2} - \frac{2xf(x)}{f(x)}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2} x = 2.}$$

β.1. Επειδή $\mathbf{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{g^2(x)} \underset{\text{Αφού η g συνεχής}}{\overset{\text{Αφού η f συνεχής}}{=}} \frac{f(0)-g(0)}{g^2(0)} = \frac{e^0-2}{2^2} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}}$ έχουμε

$$\mathbf{\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)-g(x)}{g^2(x)}\right| = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}}.$$

β.2. Είναι

$$\mathbf{\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f'(x)}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-2xf(x)}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-2f(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(-2e^{x^2}\right) = -2e^{\frac{1}{4}}}.$$

β.3. Είναι

$$\mathbf{\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\frac{f''(x)}{f(x)}-11}{2x-3} = \lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\frac{2f(x)(2x^2+1)}{f(x)}-11}{2x-3} = \lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{4x^2-9}{2x-3} = \lim_{x\to\frac{2}{3}}(2x+3) = \frac{13}{3}}.$$

β.4. Είναι $$\mathbf{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{\sqrt{f(x)}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-1)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}{\left(\sqrt{f(x)}-1\right)\left(\sqrt{f(x)}+1\right)}}$$

$$\mathbf{= \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{f(x)}+1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{e^{x^2}}+1\right) = 2}.$$

Ε3. Η εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο $\mathbf{(x_0, f(x_0))}$ έχει εξίσωση

$$\mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{y - e^{x_0^2} = 2x_0 e^{x_0^2}(x-x_0) \Leftrightarrow}$$
$$\mathbf{y = e^{x_0^2}\cdot 2x_0 \cdot x + e^{x_0^2} - e^{x_0^2}\cdot 2x_0}$$

Θέλουμε

$$O(0,0)\in(\varepsilon_f)\Leftrightarrow 0=e^{x_o^2}2x_o\cdot 0+e^{x_o^2}-e^{x_o^2}2x_o^2\Leftrightarrow e^{x_o^2}\left(1-2x_o^2\right)=0\Leftrightarrow x_o=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ και

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$.

2ος Τρόπος

Η εφαπτομένη της C_f στο $(x_o,f(x_o))$ έχει εξίσωση $y=\lambda x+\kappa$ με $\lambda=f'(x_0)=2x_0e^{x_0^2}$ και το $(x_o,f(x_o))$ σημείο της άρα θα ισχύει $f(x_0)=\lambda x_0+\kappa$ οπότε $\kappa=f(x_0)-\lambda x_0=e^{x_0^2}-2x_0^2e^{x_0^2}$ και θέλουμε το $O(0,0)$ να ανήκει σε αυτή οπότε θα ισχύει $0=\lambda 0+\kappa\Leftrightarrow 0=\kappa$ επομένως $e^{x_o^2}\left(1-2x_o^2\right)=0\Leftrightarrow x_o=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$ και

$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e}\right)$.

Ε4. Έχουμε βρει $f'(x)=2xf(x)=2xe^{x^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^{x^2}	+		+
$2x$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	Ο.ε	↗

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Τέλος παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή $f(0)=1$.

Ο ρυθμός μεταβολής της f είναι η f' και αυξάνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $f''(x)=2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 28

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{\alpha x}+x+\alpha, x\in\mathbb{R}, \alpha>0$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$.

Ε1. Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y=(2\alpha+1)x+\alpha+2$.

Ε2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha>0$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τους άξονες γίνεται ελάχιστο.

Για $\alpha=1$

Ε3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

Ε4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f''(x)-2}{\sqrt{\ln\dfrac{f'(x)-1}{2}}-1}$.

Ε5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f'(x)-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.

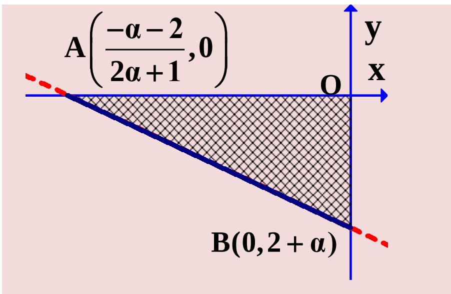
Ε6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

Λύση:

Ε1. Έχουμε $f(0)=2+\alpha$ άρα η C_f τέμνει τον στο $B(0,2+\alpha)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\alpha e^{\alpha x}+1$.Οπότε $f'(0)=2\alpha+1$.
Αν η εφαπτομένη είναι η $y=(2\alpha+1)x+\beta$, διέρχεται από το B άρα $\beta=\alpha+2$.
Τελικά έχουμε, $y=(2\alpha+1)x+\alpha+2$.

Ε2.

Για τον $xx':0=(2\alpha+1)x+\alpha+2 \Leftrightarrow x \overset{\alpha>0}{=} \dfrac{-\alpha-2}{2\alpha+1}$.



Το εμβαδόν είναι

$$E(\alpha)=\frac{1}{2}|OB|\cdot|OA|=\frac{1}{2}|\alpha+2|\cdot\left|\frac{-\alpha-2}{2\alpha+1}\right|\overset{\alpha>0}{=}\frac{(\alpha+2)^2}{2(2\alpha+1)}.$$

Άρα, $E'(\alpha)=\dfrac{\alpha^2+\alpha-2}{(2\alpha+1)^2}$. Η παράγωγος έχει ρίζες $-2{,}1$ και αφού $\alpha>0$ έχουμε ότι $\alpha=1$.
Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\mathbf{E}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Τέλος η $\mathbf{E}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\alpha=1$.

x	-∞		-2		0		1		+∞
$\alpha^2+\alpha-2$		+	0	-	‖	-	0	+	
$(2\alpha+1)^2$		+		+	‖	+		+	
$E'(x)$		+	0	-	‖	-	0	+	
$E(x)$					‖	↘	Ο.ε	↗	

Ε3. Είναι $f(x)=2e^x+x+1,\ f'(x)=2e^x+1>0$ άρα η κλίση της C_f σε κάθε σημείο της είναι θετική, άρα η γωνία της εφαπτομένης με τον $x'x$ είναι οξεία.

Ε4. Είναι $f''(x)=2e^x$. Με αντικατάσταση, το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{2e^x+x+1-2e^x-2}{\sqrt{\ln\frac{2e^x}{2}}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2\,.$$

Ε5. Είναι $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2e^x+x+1-2e^x-1-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{(\sqrt{3x^2+1}-2)(\sqrt{3x^2+1}+2)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{3x^2-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)}{3(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2}{3(x+1)}=\frac{\sqrt{3+1}+2}{3(1+1)}=\frac{2}{3}.$$

Ε6. Είναι $f(x)=2e^x+x+1,\ f'(x)=2e^x+1.$

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εξίσωση εφαπτομένης είναι.

$$y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)$$

Αφού διέρχεται από το $A(0,1)$ προκύπτει

$$1-f(x_o)=f'(x_o)(-x_o)\Leftrightarrow$$

$$1-2e^{x_0}-x_0-1=-(2e^{x_0}+1)x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{x_0}+x_0=2x_0e^{x_0}+x_0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{x_0}=2x_0e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=1$$

Με αντικατάσταση, προκύπτει $(\epsilon):y=(2e+1)x+1$.

2ος Τρόπος

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Τότε η εφαπτομένη είναι

$(\epsilon):y=f'(x_0)x+\beta\Leftrightarrow y=(2e^{x_0}+1)x+\beta$.

Αφού διέρχεται από το $A(0,1)$ προκύπτει $\beta=1$ άρα $(\epsilon):y=(2e^{x_0}+1)x+1$.

Το M είναι σημείο της, άρα για $x=x_0, y=f(x_0)$ είναι

$$2e^{x_0}+x_0+1=(2e^{x_0}+1)x_0+1\Leftrightarrow 2e^{x_0}+x_0+1=2x_0e^{x_0}+x_0+1\Leftrightarrow 2e^{x_0}=2x_0e^{x_0}\Leftrightarrow x_0=1$$

Με αντικατάσταση, προκύπτει $(\epsilon):y=(2e+1)x+1$.

ΘΕΜΑ 29

Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=9x-x^2, x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}, & x>9\\[2ex] \kappa\cdot\lim\limits_{t\to1}\dfrac{t^3-3t^2+2t}{t^2-1}, & x=9\end{cases}$$

Ε1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}$.

Ε2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η g να είναι συνεχής στο $x_0=9$.

Ε3. Με διαστάσεις x και $f(x)$ κατασκευάζουμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

Ε4. Να βρεθεί για ποιά τιμή του x η περίμετρος γίνεται μέγιστη.

Ε5. Να βρεθεί για ποιά τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

Λύση:

Ε1. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=9-2x$. Τότε

$$\lim_{x\to9}\frac{f(x)}{\sqrt{-f'(x)}-3}=\lim_{x\to9}\frac{9x-x^2}{\sqrt{2x-9}-3}=\lim_{x\to9}\frac{x(9-x)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-9}-3\right)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{-x(x-9)\left(\sqrt{2x-9}+3\right)}{2(x-9)}=-27.$$

Ε2. Η g συνεχής στο $x_0=9$, οπότε

$$\lim_{x\to9}g(x)=g(9)\Leftrightarrow-27=k\cdot\lim_{t\to1}\frac{t\left(t^2-3t+2\right)}{t^2-1}\Leftrightarrow-27=k\cdot\lim_{t\to1}\frac{t(t-1)(t-2)}{(t-1)(t+1)}$$

$$\Leftrightarrow k=54.$$

Ε3. Για να είναι τα $x, f(x)$ διαστάσεις ορθογωνίου πρέπει $x>0$ και $f(x)>0$.

x	-∞	0		9	+∞
$9x-x^2$	-	0	+	0	-

Λύνουμε την $9x-x^2>0$. Δηλαδή $x\in(0,9)$.

- Έχουμε για την περίμετρο

  $\Pi(x)=x+x+f(x)+f(x)=2x+2f(x)=2x+2(9x-x^2)$

  $\Leftrightarrow \Pi(x)=-2x^2+20x\,,x\in(0,9)$.

- και το εμβαδόν

  $E(x)=xf(x)=x(9x-x^2)\Leftrightarrow E(x)=-x^3+9x^2\,,x\in(0,9)$.

Ε4. Η συνάρτηση $\Pi(x)=-2x^2+20x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,9)$ με $\Pi'(x)=-4x+20$. Η $\Pi'(x)$ μηδενίζεται για $x=5$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της Π' και μεταβολών της Π.

x	0	5	9
$\Pi'(x)=-4x+20$	+	0	-
$\Pi(x)$	↗	Ο.μ	↘

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $\Pi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,5]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[5,9)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=5$ το $\Pi(5)=50$.

Ε5. Η συνάρτηση $E(x)=-x^3+9x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,9)$ με $E'(x)=-3x^2+18x$. Η $E'(x)$ μηδενίζεται για $x=6$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της E' και μεταβολών της E.

x	0	6	9
$E'(x)=-3x^2+18x$	+	0	-
$E(x)$	↗	Ο.μ	↘

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[6,9)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=6$ το $E(6)=108$.

ΘΕΜΑ 30

Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\kappa x\,,\ \kappa\in[0,e]$.

Ε1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Ε2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πηγή: Χρήστος Κανάβης

Λύση:

Ε1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Ε2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^x-\kappa$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **1η περίπτωση**: Για $\kappa=0$ έχουμε $f'(x)=e^x>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Οπότε δεν έχει ακρότατα.
- **2η περίπτωση:** Για $\kappa\in(0,e]$ έχουμε $f'(x)=e^x-\kappa$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\kappa=0 \Leftrightarrow e^x=\kappa \Leftrightarrow x=\ln\kappa$.

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου της f' και μεταβολών της f.

x	$-\infty$	lnk	$+\infty$
$f'(x)=e^x-\kappa$	-	0	+
f(x)	↘	Ο.ε	↗

<u>**Δικαιολόγηση προσήμου**</u>

Έστω $e^x-\kappa>0 \Leftrightarrow e^x>\kappa \Leftrightarrow x>\ln\kappa$.

Από το διπλανό πίνακα έχουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln\kappa]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\ln\kappa, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln\kappa$ με τιμή

$f(\ln\kappa)=e^{\ln\kappa}-\kappa\ln\kappa=\kappa-\kappa\ln\kappa=\kappa(1-\ln\kappa)$.

Ε3.

- **1η περίπτωση:** Για $\kappa=0$ έχουμε $f(x)=e^x>0$.
- **2η περίπτωση:** Για $\kappa\in(0,e]$ έχουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln\kappa$ με τιμή

$f(\ln\kappa)=e^{\ln\kappa}-\kappa\ln\kappa=\kappa-\kappa\ln\kappa=\kappa(1-\ln\kappa)\geq 0$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $f(x)\geq 0$.