ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΙΙ

Επίλυση προβλημάτων με αριθμητικά και αλγεβρικά εργαλεία

Από τους Βαβυλώνιους έως τον Euler

Παρουσίαση :
Ασημάκης Παναγιώτης
Ορφανάκης Σπύρος

Αθήνα, Ιούνιος 2012

Αντικείμενο της εργασίας

- Η μελέτη έξι ιστορικών κειμένων που προέρχονται από έξι διαφορετικές χρονικές περιόδους και αναφέρονται στην επίλυση προβλημάτων με αριθμητικά και αλγεβρικά εργαλεία.

- Παρουσιάζονται τα προβλήματα και η διαδικασία επίλυσης στην ιστορική τους μορφή και με σύγχρονο αλγεβρικό λογισμό.

- Πρόταση διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών

Το πρόβλημα I της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 (περίπου 1800 π. Χ.)

- *Σε μια ορθογώνια επιφάνεια προσαρτώ τη διαφορά του μήκους από το πλάτος της. Το αποτέλεσμα είναι 183. Το μήκος και το πλάτος έχουν άθροισμα 27. Ποιο είναι το μήκος και ποιο είναι το πλάτος;*
- Συμβολική αναπαράσταση:

$$\begin{cases} xy + x - y = 183 \\ x + y = 27 \end{cases}$$

- Με πρόσθεση κατά μέλη και πρόσθεση του 2 στη δεύτερη εξίσωση, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} x(y+2) = 210 \\ x + y + 2 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 210 \\ x + z = 29 \end{cases}$$

Επίλυση προβλήματος

Λύση στην πινακίδα AO 8862	Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός
29:2=14,5	$\frac{x+z}{2}=14,5$
14,5 x 14,5=210,25	$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2=210,25$
210, 25 - 210=0, 25	$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-xz=\left(\frac{x-z}{2}\right)^2=0,25$
0, 25=0, 5 x 0, 5	$\frac{x-z}{2}=\sqrt{0,25}=0,5$
14,5+0,5=15 (Μήκος)	$\frac{x+z}{2}+\frac{x-z}{2}=x=15$
14,5–0,5=14 (Πλάτος)	$\frac{x+z}{2}-\frac{x-z}{2}=z=14$

Το πρόβλημα 3 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862

- *Το μήκος και το πλάτος μιας ορθογώνιας επιφάνειας έχουν άθροισμα 100. Με τη διαφορά του μήκους από το πλάτος και το άθροισμά τους, δημιουργώ μια νέα ορθογώνια επιφάνεια. Οι δύο επιφάνειες μαζί είναι 4400. Ποιο είναι το μήκος και ποιο είναι πλάτος;*

- Συμβολική αναπαράσταση:

  Αν συμβολίσουμε το μήκος με **x** και το πλάτος με **y** τότε το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 100 \\ xy + (y - x)(y + x) &= 4400 \end{aligned}\right\}$$

Βαβυλωνιακά μαθηματικά

- Συγκεκριμένα δεδομένα και αριθμητικές πράξεις που εκτελούνται απευθείας επί των αριθμητικών δεδομένων

- Ο τρόπος του σκέπτεσθαι των Βαβυλωνίων ήταν πρωτίστως αλγεβρικός αλλά με γεωμετρικό υπόβαθρο αφού τους άγνωστους αριθμούς τους απεικόνιζαν με γραμμές και επιφάνειες.

Βαβυλωνιακά μαθηματικά

- Όλα τα μαθηματικά προβλήματα των Βαβυλωνίων είναι προβλήματα υπολογισμών. Οι λύσεις που δίνονται είναι καθαρά πρακτικού χαρακτήρα. Δίνονται οδηγίες για τα βήματα που πρέπει να γίνουν για να λυθεί το πρόβλημα, χωρίς να δικαιολογείται η διαδικασία και χωρίς να δίνεται η εξήγηση γιατί περνάμε από το ένα βήμα στο επόμενο

- Οι Βαβυλώνιοι παρόλη την αριθμητική και αλγεβρική τους ικανότητα, δεν έθεσαν κανένα αλγεβρικό συμβολισμό και τα περιεχόμενα των Βαβυλωνιακών μαθηματικών παραμένουν στο επίπεδο των στοιχειωδών μαθηματικών και δεν πέρασαν ποτέ το κατώφλι των προεπιστημονικών σκέψεων

Το πρόβλημα Ι-1 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ. Χ)

- *Να διασπαστεί ένας αριθμός σε δύο αριθμούς που έχουν δοθείσα διαφορά.*

- <u>Το γενικό πρόβλημα</u>

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

- Για πρώτη φορά χρησιμοποιείται άγνωστος

Επίλυση προβλήματος

Λύση στα Αριθμητικά

- Έστω ότι ο δοθείς αριθμός είναι το 100, η δε διαφορά το 40. Να βρεθούν οι αριθμοί.
- Ας τεθεί χ ο μικρότερος. Τότε ο μεγαλύτερος είναι χ+40. Άρα οι δύο μαζί γίνονται 2χ+40.
- Δόθηκε όμως ότι είναι 100. Άρα 100 είναι ίσα με 2χ+40.
- Από ομοίων όμοια. Αφαιρώ από το 100 το 40 και από το 2χ+40 ομοίως το 40. Μένουν οι 2χ ίσοι με 60. Άρα ο καθένας γίνεται 30.
- Έρχομαι στις υποστάσεις. Ο μικρότερος είναι το 30, ο μεγαλύτερος το 70 και η απόδειξη φανερή.

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

Η επιλογή αριθμητικών δεδομένων

$$\begin{cases} x+y=100 \\ y-x=40 \end{cases}$$

Επίλυση συστήματος με Αντικατάσταση

$$\begin{cases} 2x+40=100 \\ y=x+40 \end{cases}$$

Διαδικασία επίλυσης

$$\begin{cases} 2x=60 \\ y=x+40 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x=30 \\ y=70 \end{cases}$$

Το πρόβλημα Ι-27 από τα Αριθμητικά του Διόφαντου (Αλεξάνδρεια, περίπου 250 μ. Χ)

- *Να βρεθούν δύο αριθμοί τέτοιοι, ώστε το άθροισμα και το γινόμενό τους να είναι δοθέντες αριθμοί.*
- *Πρέπει το τετράγωνο του ημιαθροίσματος των ευρισκόμενων να ξεπερνά το γινόμενό τους κατά ένα τετράγωνο.*

Το γενικό πρόβλημα

$$x + y = S \quad \kappa\alpha\iota \quad xy = P$$

Η γενική συνθήκη

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = L^2$$

Επίλυση προβλήματος

Λύση στα Αριθμητικά

- Έστω ότι το άθροισμα είναι 20, το δε γινόμενο 96.
- Ας τεθεί 2λ η διαφορά τους. Επειδή το άθροισμα είναι 20, αν το χωρίσω σε δύο ίσα μέρη, θα είναι το καθένα από 10. Και αν το μισό της διαφοράς, δηλαδή το λ, το προσθέσω στο ένα και το αφαιρέσω από το άλλο, θα είναι πάλι το άθροισμα 20 και η διαφορά 2λ.
- Ας τεθεί λοιπόν ο μεγαλύτερος 10+λ οπότε ο μικρότερος θα είναι 10-λ.
- Έχουμε ακόμη ότι το γινόμενό τους είναι 96. Αλλά το γινόμενό τους είναι $10-\lambda^2$
- Αυτά ίσα με 96. Και γίνεται ο λ (ίσος με) 2. Άρα είναι ο μεγαλύτερος 12, ο μικρότερος 8 και επαληθεύουν την πρόταση.

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

$$x+y=20 \qquad xy=96$$

$$x-y=2\lambda \Leftrightarrow \frac{x-y}{2}=\lambda$$

$$\frac{x+y}{2}=10 \quad x=10+\lambda \quad y=10-\lambda$$

$$xy=96 \Rightarrow 100-\lambda^2=96$$

$$\lambda=2$$

$$x=12 \qquad y=8$$

Τα αριθμητικά του Διόφαντου

- Τα Αριθμητικά του Διόφαντου είναι ένα έργο που σχεδόν ολόκληρο είναι αφιερωμένο στις ακριβείς λύσεις εξισώσεων που έχουν πεπερασμένο αριθμό λύσεων και απροσδιόριστων εξισώσεων. Δίνει ιδιαίτερη έμφαση στη λύση αόριστων προβλημάτων (Διοφαντική Ανάλυση) σημερινό κομμάτι της Θεωρίας Αριθμών.

- Ο Διόφαντος έχει μία χαρακτηριστική "Μέθοδο": όταν ζητά δύο αριθμούς που να ικανοποιούν δύο συνθήκες, επιλέγει αυτούς τους αριθμούς ώστε να ικανοποιούν μία από τις συνθήκες και κατόπιν στρέφει την προσοχή του στη δεύτερη συνθήκη. Αντί να λύσει ένα σύστημα εξισώσεων 2x2, αντιμετωπίζει τις συνθήκες διαδοχικά ώστε μόνο ένας άγνωστος να εμφανίζεται στη λύση.

Τα αριθμητικά του Διόφαντου

- Η χρήση της άλγεβρας για την επίλυση προβλήματος, αποτελεί τη μεγάλη καινοτομία στο έργο του Διόφαντου και σηματοδοτεί τη ρήξη με την παλαιά λογιστική παράδοση

- Η βασική διαφορά με τον σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό είναι η έλλειψη ειδικών συμβόλων για τις πράξεις, τις σχέσεις καθώς και τον εκθετικό συμβολισμό.

Ένα πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaşar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja‘far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ.Χ.)

Αν κάποιος πει: “Χώρισε το δέκα σε δύο μέρη: πολλαπλασίασε το ένα με τον εαυτό του. Θα γίνει ίσο με ογδόντα-μία φορές το άλλο”

Το γενικό πρόβλημα

Έστω x και 10 – x ο διαχωρισμός του 10 σε δύο μέρη. Τότε η εξίσωση που θέλει να λύσει είναι:

$$(10-x)^2 = 81x$$

Επίλυση

Η λύση στο βιβλίο

- Λέγεις, δέκα μείον το πράγμα, πολλαπλασιασμένο επί τον εαυτό του, γίνεται εκατό συν ένα τετράγωνο μείον είκοσι πράγματα, και αυτό ισούται με ογδόντα-ένα πράγματα.
- Ξεχώρισε τα είκοσι πράγματα από το εκατό και το τετράγωνο, και πρόσθεσέ τα στα ογδόντα-ένα. Θα γίνουν τότε εκατό συν ένα τετράγωνο, που θα είναι ίσα με εκατό και μία ρίζες.

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

$$(10-x)^2 = 81x$$

Η εξίσωση φτάνει μέχρι το σημείο

$$100 + x^2 - 20x = 81x$$

$$100 + x^2 = 101x$$

Επίλυση

Η λύση στο βιβλίο

- Χώρισε τις ρίζες σε δύο ίσα μέρη και το μισό τους είναι 50 και ½.
- Πολλαπλασίασε επί τον εαυτό του και γίνεται 2550 και ¼.
- Αφαίρεσε από αυτό εκατό και μένει 2450 και ¼.
- Βγάλε τη ρίζα του και είναι 49 και ½.
- Αφαίρεσε αυτό από το μισό των ριζών και παραμένει 1, που αυτό είναι ένα από τα δύο μέρη

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

Η γενική μορφή είναι $c + x^2 = bx$

$$\frac{b}{2} = (\frac{101}{2} = 50\frac{1}{2})$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = (2550\frac{1}{4} - 100 = 2450\frac{1}{4})$$

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = (50\frac{1}{2} - 49\frac{1}{2} = 1)$$

Al- Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ. Χ)

Ο Al- Khwārizmī

- Έγραψε δύο βιβλία αριθμητικής και άλγεβρας που έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην ιστορία των μαθηματικών.

- Ο όρος Άλγεβρα προέρχεται από τον τίτλο του πιο σημαντικού του έργου Αλ τζαβρ βα'λ μουκιαμπαλαχ.

- Η δουλειά του αποτελεί ένα "αναμάσημα" του έργου του Διόφαντου και το επίπεδό της είναι πολύ πιο χαμηλό από αυτό που συναντάμε στο Διόφαντο. Η άλγεβρά του είναι ρητορική αφού ο συγγραφέας δεν χρησιμοποιεί καμία συντόμευση. Παρόλο που δεν χρησιμοποιεί συμβολισμό όπως ο Διόφαντος, είναι πιο κοντά στη σημερινή άλγεβρα, καθώς δεν περιέχει το βιβλίο του δύσκολα προβλήματα της απροσδιόριστης ανάλυσης (Διόφαντος), αλλά μία απλή περιγραφή της επίλυσης εξισώσεων, κυρίως 2^{ου} βαθμού.

Το πρόβλημα I-1 από το De Numeris Datis του Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ.Χ.)

Αν ένας δεδομένος αριθμός χωρίζεται σε δύο μέρη των οποίων δίνεται η διαφορά, τότε καθένα από τα μέρη προσδιορίζεται.

Το γενικό πρόβλημα

Έστω x ο αριθμός που χωρίζεται σε δύο μέρη α και β με δεδομένη διαφορά y. Τότε

$x = \alpha + \beta$ και $y = \alpha - \beta$ με $\alpha > \beta$

Επίλυση

Η λύση στο βιβλίο

- Το μικρότερο μέρος και η διαφορά δίνουν το μεγαλύτερο,
- έτσι το μικρότερο μέρος μαζί με τον εαυτό του και τη διαφορά δίνουν το σύνολο.
- Αφαιρούμε λοιπόν τη διαφορά από το σύνολο και μένει το διπλάσιο του μικρότερου μέρους.
- Από αυτό, όταν διαιρεθεί με το δύο, θα προσδιοριστεί το μικρότερο μέρος, επομένως και το μεγαλύτερο.

Σύγχρονος αλγεβρικός συμβολισμός

$x = α + β$ και $y = α - β$ με $α > β$

$β + y = β + α - β = α$

$β + β + y = β + β + α - β = α + β = x$

$x - y = α + β - (α - β) = 2β$

$β = (χ - y)/2$

Jordanus de Nemore (περίπου 1250 μ. Χ.)

Ο Jordanus de Nemore

- ✓ έγραψε βιβλία αριθμητικής, γεωμετρίας και αστρονομίας καθώς και μηχανικής.

- ✓ Η Arithmetica του είναι σημαντική κυρίως επειδή οι αριθμοί παριστάνονται με γράμματα και όχι με ψηφία. Με αυτό τον τρόπο γίνεται δυνατή η διατύπωση γενικών αλγεβρικών θεωρημάτων.

- ✓ Η χρήση των γραμμάτων στην Arithmetica υπαινίσσεται την έννοια της παραμέτρου, οι διάδοχοί του όμως αγνόησαν τη χρήση των γραμμάτων που έκανε.

Το πρόβλημα I-1 από το Zeteticorum Libri Quique του François Viète (1540 – 1603)

Αν δοθεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο ρίζες και το άθροισμά τους, να βρεθούν οι ρίζες.

Έστω B η διαφορά ανάμεσα στις ρίζες και D το άθροισμά τους.

Πρόκειται να βρεθούν οι ρίζες.
Έστω A η μικρότερη ρίζα.
Τότε η μεγαλύτερη θα είναι A+B.

Άρα το άθροισμα των ριζών είναι 2A+B. Αλλά αυτό δόθηκε ως D.
Επομένως 2A+B=D
και, με αντίθεση, 2A=D-B.
Διαιρώντας με το 2, βρίσκουμε:
A = ½ D – ½ B.

Έστω $x + y = D$ και $x - y = B$.

Επομένως θα ισχύει ότι η μία ρίζα είναι το y και η άλλη $y + B$.

Άρα $2y + B = D$,

οπότε $y = \frac{1}{2} D - \frac{1}{2} B$ ή
$y = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y)$

François Viète (1540 – 1603)

Ο <u>François Viète</u>

- ✓ χρησιμοποιούσε ένα φωνήεν για να παραστήσει το μέγεθος που ήταν άγνωστο και ένα σύμφωνο για το μέγεθος που ήταν γνωστό. Συναντάμε για πρώτη φορά ένα σαφή διαχωρισμό ανάμεσα στην έννοια της παραμέτρου και στην άγνωστη ποσότητα.

- ✓ Η αλγεβρική του δουλειά ήταν μάλλον συντετμημένη και όχι συμβολική, διότι μολονότι υιοθέτησε τα γερμανικά σύμβολα για την πρόσθεση και την αφαίρεση και τα διαφορετικά σύμβολα για τις παραμέτρους και τους αγνώστους, το υπόλοιπο του έργου του αποτελείται από λέξεις και συντμήσεις λέξεων.

Euler (1770 μ. Χ)

Ο Euler

- χρησιμοποίησε τη γλώσσα και τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε και εμείς σήμερα.
- Χρησιμοποίησε το e για να σημειώσει τη βάση του συστήματος φυσικών λογαρίθμων, παρόλο που σαν έννοια προϋπήρχε για περισσότερο από έναν αιώνα.
- καθιέρωσε το γράμμα π για το λόγο του μήκους προς τη διάμετρο ενός κύκλου
- χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το i για την $\sqrt{-1}$

Προτάσεις διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών

Η αξιοποίηση του ιστορικού υλικού στην τάξη των μαθηματικών ακολουθεί τρεις γενικές κατευθύνσεις ανάλογα με το διδακτικό στόχο:

- *Εκμάθηση της ιστορίας άμεσα από τα ιστορικά στοιχεία και τις σχετικές πληροφορίες.*
- *Εκμάθηση θεμάτων των μαθηματικών, ακολουθώντας μια διδακτική στρατηγική σχεδιασμού και διδασκαλίας εμπνευσμένη από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.*
- *Ανάπτυξη της μαθηματικής συνείδησης προσεγγίζοντας την ίδια τη φύση των μαθητικών καθώς και το κοινωνικό πλαίσιο ανάπτυξής τους.*

Ο ρόλος του καθηγητή

- Ο καθηγητής των μαθηματικών, χωρίς να απαιτείται να είναι ιστορικός, θα πρέπει να αποκτήσει μια βασική γνώση της ιστορικής εξέλιξης του αντικειμένου που θα διδάξει.

- Προσδιορίζονται τα κρίσιμα βήματα της ιστορικής εξέλιξης, οι ιδέες, τα ερωτήματα, τα προβλήματα, οι μέθοδοι που αποτέλεσαν γενετικές στιγμές της ιστορικής εξέλιξης.

- Αυτά τα κρίσιμα βήματα ανακατασκευάζονται, μεταπλάθονται αξιοποιώντας άμεσα ή έμμεσα τα ιστορικά στοιχεία, έτσι ώστε να γίνουν διδακτικά κατάλληλα για χρήση στη σχολική αίθουσα.

- Αυτά τα ανακατασκευασμένα κρίσιμα βήματα ενσωματώνονται σε διδακτικές δραστηριότητες δίνοντας τη δυνατότητα στο μαθητή να αναπτύξει τεχνικές δεξιότητες επίλυσης και να κάνει μαθηματικούς συλλογισμούς.

Δραστηριότητα για τη δευτεροβάθμια εξίσωση

- Τάξη εφαρμογής: Α΄ λυκείου
- Θέμα: Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Διδακτικοί στόχοι:

- Η κατανόηση της ανάγκης να επινοηθεί ένας γενικός τρόπος υπολογισμού των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης
- Να αντιληφθούν οι μαθητές τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης που επινοήθηκαν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους και να τους συγκρίνουν με τη σύγχρονη άλγεβρα
- Η αλλαγή στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά

Περιγραφή δραστηριότητας

- Καταρχήν δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα 1 της Βαβυλωνιακής πινακίδας AO 8862 και ζητείται από τους μαθητές να το εκφράσουν με σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό. Έτσι θα καταλήξουν στην επίλυση ενός συστήματος δύο εξισώσεων. Το ζητούμενο είναι η εύρεση δύο αριθμών που έχουν γνωστό άθροισμα και γνωστό γινόμενο.

- Στη συνέχεια καλούνται οι μαθητές να περιγράψουν με τη σύγχρονη άλγεβρα τη διαδικασία επίλυσης των Βαβυλωνίων. Θα αντιληφθούν ότι οι Βαβυλώνιοι μετασχηματίζουν τα πράγματα έως ότου καταλήξουν σε κάτι που μπορούν να υπολογίσουν, όπως είναι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού.

Περιγραφή δραστηριότητας

- Στο δεύτερο στάδιο δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα Ι – 1 από τα αριθμητικά του Διόφαντου και μάλιστα σε αρχαίο κείμενο, το οποίο καλούνται να μεταφράσουν στη νεοελληνική γλώσσα και στη συνέχεια να το εκφράσουν με τη σύγχρονη άλγεβρα.
- Με το σύγχρονο συμβολισμό οι μαθητές αντιλαμβάνονται και πάλι ότι καταλήγουν στον προσδιορισμό δύο αριθμών για τους οποίους γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο.

Περιγραφή δραστηριότητας

- Στο τρίτο στάδιο δίνεται το πρόβλημα από το βιβλίο Al-kitāb al-muhtaşar fī hisāb al-jabr wa-l-mugābala του Abū Ja‘far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (Βαγδάτη 820 μ. Χ.). Η αναπαράσταση του προβλήματος με σύγχρονο συμβολισμό από τους μαθητές οδηγεί στη δευτεροβάθμια εξίσωση .

$$(10-x)^2 = 81x$$

- Όλα τα παραπάνω ενσωματώνονται σε κατάλληλα διαμορφωμένο φύλλο εργασίας

Συμπεράσματα

- Η ιστορική διάσταση και εξέλιξη ενός μαθηματικού αντικειμένου απέχει πολύ από το στιλβωμένο και οργανωμένο τελικό προϊόν της μαθηματικής κοινότητας που σήμερα είναι αποδεκτό.

- Τα τρία στάδια στην ιστορική εξέλιξη της άλγεβρας. Το ρητορικό ή το αρχικό στάδιο, κατά το οποίο τα πάντα γράφονταν πλήρως με λέξεις. Το συγκεκομμένο ή το ενδιάμεσο στάδιο, κατά το οποίο υιοθετούνται ορισμένες συντομεύσεις και το συμβολικό ή τελικό στάδιο.

Στάδια ιστορικής εξέλιξης της άλγεβρας

Συμβολικό ή τελικό στάδιο.

EULER -VIETE

Το συγκεκομμένο ή το ενδιάμεσο στάδιο

ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ -al-Khwārizmī -Jordanus de Nemore- François Viète

Ρητορικό ή αρχικό στάδιο

Βαβυλώνιοι

Συμπεράσματα

- Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση μπορεί να στηρίξει, να εμπλουτίσει και να βελτιώσει τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών από πολλές πλευρές οδηγώντας σε μια σφαιρικότερη αντίληψη γι’ αυτά

- Ο τρόπος ενσωμάτωσης πρέπει να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας ώστε να μην προκαλέσει περισσότερα προβλήματα από αυτά που επιδιώκει να λύσει.