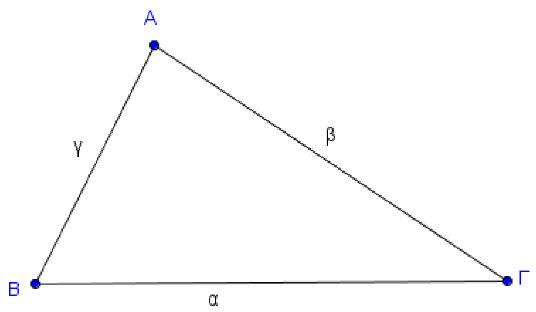
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΜΑ: ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Τριγωνική ανισότητα)

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.
Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται τριγωνική ανισότητα.

Απόδειξη

Για την απόδειξη δείτε το σχολικό βιβλίο σελ. 55.



Δηλαδή, αν α, β, γ πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ τότε η τριγωνική ανισότητα είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \\ &|\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma \qquad (1) \\ &|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta \end{aligned}$$

Το ερώτημα που καλούμαστε τώρα να απαντήσουμε είναι το εξής:

Ερώτημα

Για να αποδείξουμε ότι τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου (σχηματίζουν δηλαδή τρίγωνο), οφείλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν και οι τρεις σχέσεις της (1) ή αρκεί η απόδειξη μιας μόνο από αυτές;

Πριν από την οποιαδήποτε προσπάθεια για απάντηση, ας δούμε τις παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 1

Αν ισχύει ότι

$\alpha<\beta+\gamma \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \beta<\alpha+\gamma \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \gamma<\alpha+\beta \quad (2)$

Τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα, δηλαδή όλες οι σχέσεις της (1).

Απόδειξη

Επειδή $\beta<\alpha+\gamma \Rightarrow \beta-\gamma<\alpha$.

Επειδή $\gamma < \alpha + \beta \Rightarrow \gamma - \beta < \alpha$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση έχουμε $|\beta - \gamma| < \alpha$ και αφού $\alpha < \beta + \gamma$ συμπεραίνουμε ότι $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι δύο άλλες σχέσεις της (1).

Αποδείξαμε λοιπόν ότι αν ισχύει η (2), τότε ισχύει και η τριγωνική ανισότητα (1).

Πρόταση 2

Αν α, β, γ ευθύγραμμα τμήματα και ισχύει $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ (3) τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα (1).

Απόδειξη

Από την υπόθεση έχουμε $\alpha < \beta + \gamma$. Επιπλέον, από την υπόθεση ισχύει και

$$|\beta - \gamma| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \beta - \gamma < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha < \beta - \gamma \\ \beta - \gamma < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma < \alpha + \beta \\ \beta < \alpha + \gamma \end{cases}$$

Επομένως, $\alpha < \beta + \gamma$ και $\beta < \alpha + \gamma$ και $\gamma < \alpha + \beta$, δηλαδή ισχύει η πρόταση (1) και κατά συνέπεια και η τριγωνική ανισότητα.

Ερώτημα

Για να αποδείξουμε ότι τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου (σχηματίζουν δηλαδή τρίγωνο), οφείλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν και οι τρεις σχέσεις της (1) ή αρκεί η απόδειξη μιας μόνο από αυτές;

Η απάντηση τώρα είναι προφανής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις (1). Μπορούμε να προχωρήσουμε και περισσότερο τη διερεύνηση του ερωτήματος αποδεικνύοντας την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3

Αν α, β, γ ευθύγραμμα τμήματα και το α είναι το μεγαλύτερο από αυτά και ισχύει $\alpha < \beta + \gamma$ τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

Απόδειξη

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα (1), αρκεί να αποδείξουμε ένα μόνο από τα παρακάτω:

- $\alpha < \beta + \gamma \ \ \textit{και} \ \ \beta < \alpha + \gamma \ \ \textit{και} \ \gamma < \alpha + \beta$ (2) ή
- $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ (3) ή
- $\alpha < \beta + \gamma$ με το α είναι το μεγαλύτερο από τα α, β, γ.