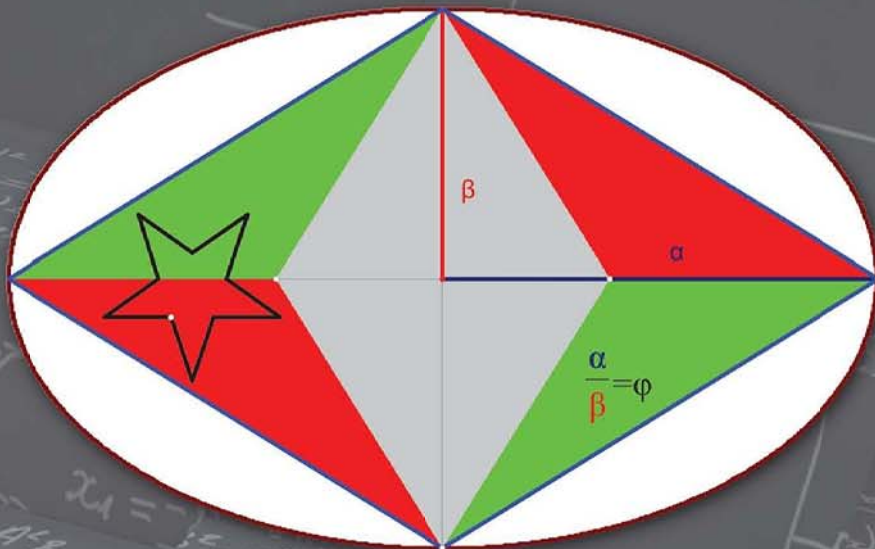


Υπεύθυνος καθηγητής
Σωκράτης Ντριάνκος

Άρρητα ρήματα

Διερεύνηση της αρρητότητας από μαθητές
του Πειραματικού Λυκείου Ρεθύμνου



Τάξη Β΄
Σχολικό έτος 2014-2015

Αγαπητοί συνάδελφοι,

Θα γνωρίζετε ότι η «μέθοδος project» χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην Ευρώπη(1920, Βιέννη) σε ένα σχολείο που ίδρυσε η Anna Freud (οι ιδέες είναι του αμερικανού φιλοσόφου John Dewey...*η μόνη ελευθερία που παρουσιάζει διαρκές ενδιαφέρον είναι η ελευθερία της διανόησης...*, εμπειρία και εκπαίδευση, σελ.47, Γλάρος,1980). Τίτλος... «the world of the Eskimos»...*All subjects were then related to Eskimo life-geography, history,science, math and of course, reading and writing...*

Οι ιδέες εξελίχθηκαν ...και το κορυφαίο project («Άρρητα ρήματα») αναπτύχθηκε κατά το σχ. έτος 2014-2015 στο Πειραματικό Λύκειο Ρεθύμνου.

Στην «τελετή λήξης» οι μαθητές ένοιωσαν «άρρητη ευχαρίστηση» με το δώρο-βιβλίο (το προϊόν του project, ένα αντίτυπο-βραβείο για την προσπάθεια σε κάθε μαθητή) και απόλαυσαν «άρρητες συζητήσεις»(οπότε...δεν μπορούν να ειπωθούν), χυμούς και γλυκά.

ΡΕΘΥΜΝΟ, Απρίλιος 2016

Σωκράτης Ντριάνκος

Ἄρρητα ρήματα

Συγγραφείς:

Η άρρητη ομάδα της Β΄ τάξης:

**Μάρα Β, Μαρία Β,
Βαγγέλης Γ, Αγάπη Γ
Αργυρώ Δ, Μαρία Δ
Μαρίνα Ζ, Δέσποινα Ζ
Ξένια Κ, Λευτέρη Κ,
Αλέξανδρος Κ, Δημήτρης Κ
Φοίβος Μ, Νικόλαος Μ
Στέφανος Π, Ελευθερία Π,
Λευτέρης Σ, Δημήτρης Σ
Διογένης Τ, Νεκτάριος Φ**

Υπεύθυνος καθηγητής: **Σωκράτης Ντριάνκος**

Σεβόμαστε την επιθυμία του χρηματοδότη του βιβλίου,
ζήτησε «αρρητότητα».

Στο άρρητο νεανικό πνεύμα

Όταν μετά από εντατική διανοητική δραστηριότητα φτάνω σε ένα όμορφο αποτέλεσμα που με ενθουσιάζει, παρατηρώ μια σιωπή ή μια απώλεια. Αυτό είναι το πιο ενδιαφέρον στην δημιουργία, το να φτάσει κανείς σε αυτόν τον βαθμό σιωπής, μιας τόσο εκκωφαντικής σιωπής, και όχι στη μάζα των λέξεων... Κάποιες απαντήσεις δεν μπορούν να ειπωθούν...»

Thomas Schutte (1954 -): Από την Συλλογή Πορταλάκη, 2010.

Φ: Φανή-Μαρία Τσιγκάκου

Γ: Γιάννης Μόραλης

Φ. -Κύριε Μόραλη, έχετε σπουδάσει αρχιτεκτονική;

Γ.-Όχι.

Φ.-Στο σχολείο ήσασταν καλός στα μαθηματικά;

Γ.- Έτσι και έτσι.

Φ.-Σας ρωτώ γιατί, όπως καταλαβαίνετε, απορώ πως έχετε σχεδιάσει τόσο άψογες αρχιτεκτονικές συνθέσεις.

Γ.-Απλούστατα, με την αίσθηση!

Ο διάλογος πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2009 στο Μουσείο Μπενάκη, βλ. στη σελ. 10 του: Τσιγκάκου, Φ., επιμέλεια, (2011). *Γιάννης Μόραλης «Αρχιτεκτονικές συνθέσεις»*. Αθήνα: Μουσείο Μπενάκη.

I never came upon any of my discoveries
through the process of rational thinking

Albert Einstein

Περιεχόμενα

0.Εισαγωγή: Σωκράτης Ντριάνκος	11
1.Αρρητότητα λογοτεχνική: Β. Μαρία	31
2.Αρρητότητα θεολογική	38
2.1.Κείμενο από την ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ.....	38
2.2.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β.	38
3.Αρρητότητα Σοφοκλή	39
3.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας».....	39
3.2.Η πρόταση της ομάδας Γ.-Κ.-Τ.	41
3.3.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β.	46
4.Αρρητότητα Ομηρική	47
4.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας».....	47
4.2.Η πρόταση της ομάδας Δ.- Ζ.- Ζ.....	48
5.Αποδείξεις αρρητοτήτων από τα σχολικά βιβλία	51
Ομάδα: Κ., Μ., Μ., Π.....	51
5.1.Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας	51
5.2.Η τετραγωνική ρίζα του 2, ίσως ο πρώτος άρρητος.	54
5.3.Θεαίτητος	55
5.4.Τοποθέτηση των αρρήτων στην αριθμοευθεία	56
5.5.Η προσέγγιση του «π» από τον Αρχιμήδη(250π.Χ.)	57
5.6.Αριστοτέλης(350π.Χ.).....	58

Άρρητα ρήματα

6.ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ.....	59
Ομάδα Σ.- Φ.	59
6.1.Χρυσές Κατασκευές.....	59
6.2.Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)	61
6.3.Ορθογώνια.....	62
6.4.Κανονικό πεντάγωνο.....	63
6.5.Ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου	66
7.Ο αριθμός φ.....	67
Ομάδα φ: Β., Κ., Π.....	67
8.Προσεγγίσεις αρρήτων: Κ.-Σ.....	69
8.1.Αρχύτας.....	69
8.2.Ήρων	72
8.3.Η σύγχρονη μέθοδος.....	73
8.4.Κατασκευή ριζών (Logo).....	75
8.5.Άνθρωποι, Μηχανές, Όρια.....	76
9.Εξώφυλλο-Οπισθόφυλλο	78
Ομάδα: Αγάπη Γ., Αργυρώ Δ.	78
10.Επίμετρο: Σωκράτης Ντριάνκος	79

0.Εισαγωγή:Σωκράτης Ντριάνκος

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολο και δυσνόητο αντικείμενο. Ίσως εξ αιτίας της αφηρημένης φύσης των μαθηματικών αντικειμένων και επινοημάτων, τα οποία δεν βλέπουμε, δεν ακούμε, δεν γευόμαστε, δεν πιάνουμε και δεν μυρίζουμε (Παντελίδης, 1998:v). Ίσως εξ αιτίας των απαιτήσεων για αποδείξεις μόνο με τη χρήση της λογικής και όχι παραδοσιακών «πειστικών» διαδικασιών. Ίσως εξαιτίας του βασικού χαρακτηριστικού που τα διακρίνει από όλες τις άλλες επιστήμες: *«τα μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν»* (Νεγρεπόντης, 2009:14). Η διαφοροποίηση από τις παρατηρησιακές επιστήμες είναι εμφανής: δεν εξηγούμε φαινόμενα, αποδεικνύουμε ότι κάποια είναι αδύνατα.

Στην επιστήμη των μαθηματικών συλλαμβάνονται νέες δυναμικότερες ιδέες και επινοούνται μέθοδοι για άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Οι μέθοδοι προϋποθέτουν τις ιδέες και οι ιδέες προϋποθέτουν κάποιο εύρος εμπειρίας και κάποιο βάθος πνευματικής καλλιέργειας. Αυτά, δηλαδή το εύρος εμπειρίας και το βάθος της πνευματικής καλλιέργειας, είναι αδύνατον να αναχθούν στο μηδέν, ως βασικές προϋποθέσεις. Είναι αδύνατον να κατακτηθούν οι γνώσεις με μηδενική προσπάθεια και κάθε τέτοια προσπάθεια πρέπει να είναι ουσιαστική και όχι βεβιασμένη ή εικονική. *«Εκείνος ο οποίος θα περιπλανηθεί εις τον Μαθηματικόν τόπον, θα συναντήσει εις τους σκολιούς, δυσκόλους δρόμους, μεγάλας, πολλάκις ανυπερβλήτους, δυσχερείας»* (Βαρόπουλος, 1949:153).

Άρρητα ρήματα

Τιμούμε και σεβόμαστε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται. *«Μια δυσκολία είναι ένα φως. Μια ανυπέβλητη δυσκολία είναι ένας ήλιος»* (Βαλερύ, 1996:27). Οι απαιτήσεις για την μελέτη των Μαθηματικών είναι γνωστές (Ευκλείδης προς Πτολεμαίο: μη είναι βασιλικήν ατραπόν επί γεωμετρίαν): μολύβι, χαρτί, αρκετή υπομονή και πολύ απλά, φως, καρέκλα, τραπέζι, ξενύχτι.

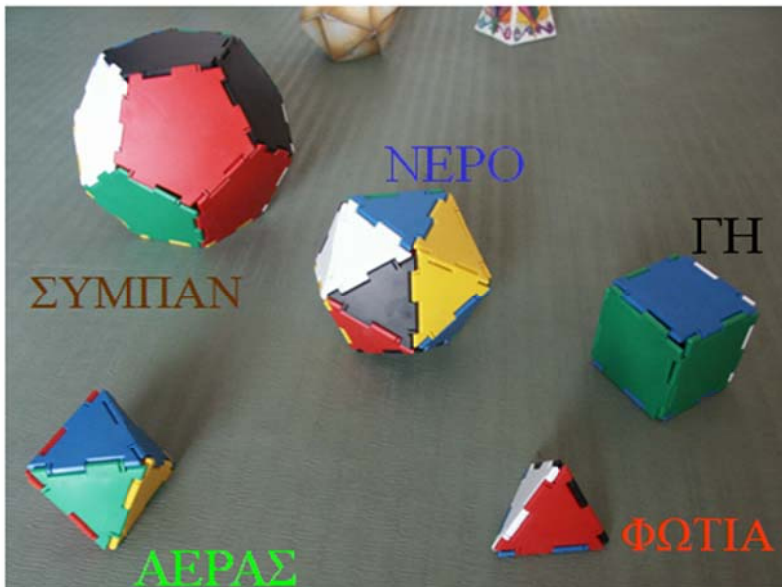
Αμοιβή η μέγιστη : *«τα μαθηματικά προσφέρουν την ευκαιρία της δοκιμασίας και την δοκιμή της ικανότητας, διότι χαρίζουν την λογική ως αίσθημα, την στερεότητα ως χάριτα, την λιτότητα ως αφθονία»* (Καζαντζίδης, 1972:β).

Η δυνατότητα κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου με χρήση αριθμών είναι σύλληψη του Πυθαγόρα και της σχολής του. Εκεί οι αριθμοί μελετήθηκαν θεωρητικά και τέθηκαν οι βάσεις της επιστημονικής θέασης των πραγμάτων. Όμως, η συσσώρευση γνώσης και αποτελεσμάτων προκάλεσε την πρώτη καταγεγραμμένη κρίση στην ιστορία της επιστήμης που σχετίζεται με την διαπίστωση της ύπαρξης «αρρήτων» μεγεθών.

Ο Πυθαγόρας (περίπου 550 π.Χ.) ήταν Μαθηματικός και φιλόσοφος. Κείμενα του Πυθαγόρα δεν έχουμε, αλλά υπάρχουν πηγές από τη σχολή των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν τους νόμους της αρμονίας, ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με την αριθμοθεωρία, το περίφημο Πυθαγόρειο Θεώρημα, ανακάλυψαν την ασυμμετρία και την θεωρία των κανονικών πολυέδρων (ο Πρόκλος γράφει για τον Πυθαγόρα:... *ος δή και την των αλόγων πραγματείαν και την των κανονικών πολυέδρων σύστασιν ανεύρεν*). Τα 5 Πλατωνικά στερεά δεν είναι άσχετα με την ασυμμετρία (βλ.ενότητα 6.4, κανονικό πεντάγωνο).

Στερεά και σύμβολα κατά Πλάτωνα (400π.Χ.):

τα τέσσερα: κύβος, τετράεδρο, οκτάεδρο, εικοσάεδρο, τα σχηματοποίησε ο Θεός χρησιμοποιώντας τις Ιδέες και τους Αριθμούς, το δωδεκάεδρο-έδρες κανονικά πεντάγωνα- το μεταχειρίστηκε για να κατασκευάσει το Σύμπαν (TLG, Plato:Timaeus).



Ο Ευκλείδης έχει την θεωρία των κανονικών πολυέδρων στο 13^ο βιβλίο, το οποίο πιστεύουμε ότι οφείλεται στον Θεαίτητο, όπως επίσης και το 10^ο βιβλίο, «Περί Ασυμμέτρων». Ο **Θεαίτητος** απέδειξε το εκπληκτικό γεγονός της ύπαρξης και μοναδικότητας των πέντε κανονικών πολυέδρων και επίσης ότι αυτά εγγράφονται σε σφαίρα.

Ἄρρητα ρήματα

Οι Πυθαγόρειοι διαιρούσαν τα μαθηματικά σε 4 κλάδους: Αριθμητική (αριθμοί σε ακινησία), Γεωμετρία (μεγέθη σε ακινησία), Μουσική (αριθμοί σε κίνηση), Αστρονομία (μεγέθη σε κίνηση).

Οι κλάδοι αυτοί παρέμειναν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα πολλών χωρών της Ευρώπης μέχρι το Μεσαίωνα. Οι Λατίνοι ονόμαζαν τους 4 αυτούς κλάδους «quadrivium». Η σχολή των Πυθαγορείων ήταν μυστικιστική σχολή. Την δημοσιοποίηση των ευρημάτων τους πιστεύεται ότι έκανε ο Ίππασος. Τη δημοσιοποίηση αυτή εκμεταλλεύτηκαν αργότερα ο Ιπποκράτης ο Χίος και ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος(430π.Χ.), ο δάσκαλος του Θεαίτητου (αναφέρεται από τον Ιάμβλιχο, 300μ.Χ.). Στους Πυθαγόρειους αποδίδεται το δεύτερο μισό του πρώτου βιβλίου των Στοιχείων, προτάσεις 27 έως 48, όπως επίσης και το 2^ο βιβλίο. Πυθαγόρεια μαθηματικά περιέχει επίσης και το 7^ο βιβλίο των Στοιχείων (τα Στοιχεία γράφτηκαν περίπου το 300π.Χ., 13 βιβλία, τα 7-8-9 είναι αριθμοθεωρητικά)

Πολλές πληροφορίες για την φιλοσοφία των Πυθαγορείων έχουμε από τον Αριστοτέλη (εκτενώς στα *Μεταφυσικά*, συνοπτικά στα *Φυσικά*) και από τον Φιλόλαο. Η εικόνα για την φιλοσοφία διαμορφώνεται από τον Αριστοτέλη (350π.Χ.) και επιβεβαιώνεται από τον Φιλόλαο.

Ένα από τα πιο φημισμένα χωρία του Αριστοτέλη είναι το
[985b23-986a26] από τα *Μεταφυσικά*.

Ἐν δ' τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι 985b, 23
τῶν μαθημάτων ἀψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ

έντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ὤθήθησαν εἶναι πάντων.	25
ἐπεὶ δὲ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι, ἐν δὲ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλὰ τοῖς οὖσι καὶ γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρὶ καὶ γῆ καὶ ὔδατι, ὅτι τὸ μ ν τοιονδὶ τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη τὸ δ τοιονδὶ ψυχῆ τε καὶ νοῦς ἕτερον δ καιρὸς καὶ τῶν ἄλ- λων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δ τῶν ἀρμονιῶν ἐν ἀριθ- μοῖς ὀρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, —ἐπεὶ δὴ τὰ μ ν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιωῦσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι, τὰ τῶν ἀριθμῶν στοι- χεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὄλον οὐρανὸν ἀρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμὸν· καὶ ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καὶ ταῖς ἀρμονίαις πρὸς τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καὶ μέρη καὶ πρὸς τὴν ὅλην διακό- σμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήμοττον. κἂν εἴ τί που διέλειπε, προσεγλίχοντο τοῦ συνειρομένην πᾶσαν αὐτοῖς εἶναι τὴν πραγματείαν· λέγω δ' οἶον, ἐπειδὴ τέλειον ἢ δεκάς εἶναι δοκεῖ καὶ πᾶσαν περιειληφέναι τὴν τῶν ἀριθμῶν φύσιν, καὶ τὰ φερόμενα κατὰ τὸν οὐρανὸν δέκα μ ν ε ναί φασιν, ὄντων δ ἐννέα μόνον τῶν φανερῶν διὰ τοῦτο δεκάτην τὴν ἀντίχθονα ποιούσιν. διώρισται δ περὶ τούτων ἐν ἑτέροις ἡμῖν ἀκριβέστερον. ἀλλ' οὐδὲν χάριν ἐπερχόμεθα, τοῦτό ἐστιν ὅπως λάβωμεν καὶ παρὰ τούτων τίνας εἶναι τιθέασι τὰς ἀρχὰς καὶ πῶς εἰς τὰς εἰρημένας ἐμπίπτουσιν αἰτίαις. φαί - νονται δὲ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις, τοῦ δ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν, τούτων δ τὸ μ ν πε-	30 986a, 1 5 986a, 10 986a, 15

Ἄρρητα ρήματα

περασμένον τὸ δ' ἄπειρον, τὸ δ' ἐν ἐξ ἀμφοτέρων εἰ ναι τούτων (καὶ γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν), τὸν δ' ἀριθμὸν ἐκ τοῦ ἐνός, ἀριθμοὺς δέ, καθάπερ εἴρηται, τὸν ὅλον οὐρανόν. – ἕτεροι δ' τῶν αὐτῶν τούτων ...

τὰς ἀρχὰς δέκα λέγουσιν εἶναι

τὰς κατὰ συστοιχίαν λεγομένας, πέρασ [καὶ] ἄπειρον, περιττόν [καὶ] ἄρτιον, ἐν [καὶ] πλῆθος, δεξιόν [καὶ] ἀριστερόν, ἄρρεν [καὶ] θῆλυ, ἡρεμοῦν [καὶ] κινούμενον, εὐθὺ [καὶ] καμπύλον, φῶσ [καὶ] σκότος, ἀγαθόν [καὶ] κακόν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερόμηκες· 989a, 26

Aristoteles: metaphysica

Στο χωρίο αυτό, ο Αριστοτέλης αναλύει την άποψη των Πυθαγορείων για τους αριθμούς. Οι Πυθαγόρειοι ήταν οι πρώτοι που υποστήριζαν ότι τα πάντα είναι αριθμοί. Οι πιο βασικοί αριθμοί είναι οι πρώτοι (θετικοί ακέραιοι με ακριβώς δυο διαιρέτες, π.χ. 2,3,5,7,11,13,17,19, 23,... , κάθε θετικός ακέραιος είναι πρώτος ή γινόμενο πρώτων) ενώ πίστευαν πως ό,τι βρίσκεται στη φύση αποτελεί μίμηση των αριθμών. Στις παραπάνω γραμμές, φαίνεται καθαρά η άποψη των Πυθαγορείων να στηρίζουν τον κόσμο σε βάσεις αριθμών και ισχυρίζονταν πως όλο το σύμπαν στηρίζεται σε 10 αρχές, οι οποίες έχουν την μορφή δίπολου (πέρας-άπειρον, περιττόν -άρτιον κλπ).

Θεμελιώδεις αρχές: το Άπειρο και το Πέρασ. Με την μείξη αυτών των δύο προκύπτει το «Έν».

Το Έν αποτελεί συνδυασμό πέρατος και απείρου.

Από το Έν προκύπτουν οι αριθμοί.

Από τους αριθμούς προκύπτουν όλα τα Όντα της φύσεως (από αυτό προέρχεται και η φημισμένη φράση των Πυθαγορείων «Τα πάντα είναι αριθμοί ή μιμήσεις αριθμών»).

Περίπου το 300π.Χ., ο Ευκλείδης (Στοιχεία, βιβλίο VII, όροι) καταγράφει αυτή τη φιλοσοφική αντίληψη:

[α'] Μονάς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται

[β'] Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλήθος.

Η μονάδα ...δεν είναι αριθμός. Αριθμός είναι πλήθος μονάδων. Η μονάδα είναι μια οντότητα από την οποία παράγονται οι αριθμοί.

Αριθμός είναι μια οντότητα που μετρά πλήθος μονάδων, που μετρά πολλά, όχι ένα, το πλήθος και η μονάδα είναι αντίθετες οντότητες. Ο Ευκλείδης προσέχει και διαχωρίζει τις προτάσεις που έχουν μονάδα, από εκείνες που έχουν αριθμούς, π.χ διατυπώνει και αποδεικνύει ξεχωριστά τις προτάσεις VII.1, VII.2 που αφορούν το μέγιστο κοινό μέτρο δυο αριθμών. Στην VII.1 εξετάζει την περίπτωση της μονάδας, ενώ στην VII.2 την περίπτωση κοινού μέτρου μεγαλύτερου της μονάδας, δηλ. αριθμού κατά Πυθαγόρα-Ευκλείδη. Αυτές οι δυο προτάσεις είναι και το βασικό εργαλείο για το έβδομο βιβλίο, και φυσικά όλο το βιβλίο είναι καθοριστικό για την ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών.

Οι προτάσεις αυτές είναι:

[VII.1] Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρήῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Άρρητα ρήματα

[VII.2] Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὔρειν.

Οἱ Πυθαγόρειοι ἀνακάλυψαν μιὰ βασικὴ μέθοδο, ποὺ ὁ Εὐκλείδης τὴν ὀνομάζει Ἀνθυφαίρεση. Ἡ ἀρχαιότερη ὀνομασίᾳ τῆς εἶναι ἀνταναίρεση-βρίσκεται στὸν Ἀριστοτέλη:

ἔστι δ' ὁρισμὸς τῶν ἀναλόγων, ἣ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μεγέθη πρὸς ἄλληλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δ' τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀνταναίρεσιν εἶρηκε.

Alexander: In Aristotelis topicorum libros octo commentaria, 545,15-545,17

Σήμερα ὀνομάζεται Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος (για ἀριθμούς, ὁ πρῶτος καὶ διασημότερος ἀλγόριθμος, Knuth, D. (2010): *Ἡ τέχνη τοῦ προγραμματισμοῦ*) γιὰ τὴν εὐρεση τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτη (ΜΚΔ) δυο ἀριθμῶν, οἱ ἀρχαῖοι ἔλεγαν κοινὸ μέτρο, ὄχι κοινὸς διαιρέτης.

Ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν κοινὸ μέτρο τὴν μονάδα. Τὸ ὄνομα τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι οἱ μονάδες ποὺ χρειάζονται γιὰ νὰ συγκροτηθεῖ ὁ ἀριθμὸς, π.χ. δέκα πέντε, 15, συγκροτεῖται ἀπὸ 15 μονάδες. Δηλ. ἡ μονάδα μετρά ὅλους τοὺς ἀριθμούς. Ἐπίσης τοὺς π.χ. 15 καὶ 35 μετρά φυσικὰ ἡ μονάδα, ἀλλὰ τοὺς μετρά καὶ ὁ ἀριθμὸς 5, δυο ἀριθμοὶ μπορεῖ νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθοῦν καὶ ἀπὸ ἓνα πλήθος μονάδων.

Ἐξηγούμε τὴ μέθοδο καὶ τὴν ὀνομασίᾳ «ἀνθυφαίρεση» με ἓνα παράδειγμα:

Ἀς πάρουμε τοὺς ἀριθμούς 32 καὶ 7. Τότε:

Ἀφαιρούμε τὸν μικρότερο ἀπὸ τὸν μεγαλύτερο, μέχρι νὰ βρούμε υπόλοιπο μικρότερο ἀπὸ τὸν μικρότερο ἀριθμὸ, δηλ. ἐφαρμόζουμε τὸν ἀλγόριθμο τῆς διαίρεσης στους 32 καὶ 7.

$$32-7=25\dots 1^{\text{η}} \text{αφαίρεση, } 25-7=18\dots, 18-7=11\dots, 11-7=4$$

[σ' αυτο το βήμα προκύπτει $4 < 7$ και για να συνεχίσουμε κάνουμε τον 7 από διαιρέτη, διαιρούμενο,

το πλήθος των μέχρι τώρα αφαιρέσεων (4) είναι το πηλίκο της διαίρεσης $32:7$, η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων]

$$\text{Με σύμβολα, σ'αυτό το βήμα θα έχουμε: } \alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1, \dots [32 = 4 \cdot 7 + 4]$$

Αν $\gamma_1 = 0$, τότε ο β μετρά ακριβώς τον α , και η διαδικασία σταματά, βρήκαμε κοινό μέτρο των α, β .

Παρατηρούμε επίσης ότι αν το γ_1 δεν είναι μηδέν, τότε ισχύει $0 < \gamma_1 < \beta$.

Για να συνεχίσουμε...

Αντιστρέφουμε το ρόλο του 7, ... αντι-αφαιρώ, αντι-αφαιρεση, αντανάιρεση...ανθυφαίρεση.

Εφαρμόζουμε τον αλγοριθμο της διαιρεσης στους 7 και 4.

$7-4=3$ *σ'αυτο το βήμα προκύπτει $3 < 4$ και για να συνεχίσουμε κανουμε τον 4 από διαιρέτη, διαιρούμενο

$$\text{Με συμβολα, σ'αυτο το βήμα θα έχουμε: } \beta = \kappa_2\gamma_1 + \gamma_2, \dots [7 = 1 \cdot 4 + 3],$$

Συνεχίζουμε...

$$4-3=1, \text{ συμβολικά: } \gamma_1 = \kappa_3\gamma_2 + \gamma_3, \dots [4 = 1 \cdot 3 + 1],$$

$$\text{Και τελικά...} [3 = 3 \cdot 1], \gamma_2 = \kappa_4\gamma_3$$

Αν υποθέσουμε ότι η διαδικασία σταματά σαυτο το βήμα, ισχυρίζομαστε ότι $\gamma_3 = \text{MK}\Delta(\alpha, \beta)$

Διότι: Ο γ_3 είναι κοινός διαιρέτης των α, β , όπως καταλαβαίνουμε αν δούμε τις ισότητες ...ανάποδα

$\gamma_2 = \kappa_4\gamma_3, \gamma_1 = \kappa_3\gamma_2 + \gamma_3, \beta = \kappa_2\gamma_1 + \gamma_2, \alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1$.Δηλ. ο γ_3 μετρά τον γ_2 , τον γ_1 , τον β , αρα και τον α , και επομένως είναι κοινός διαιρέτης των α, β .

Άρρητα ρήματα

Επίσης, αν δ κοινός διαιρέτης των α, β , προχωρώντας από πάνω προς τα κάτω, θα έχουμε ότι

$$\alpha = \kappa_1 \beta + \gamma_1, \beta = \kappa_2 \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_1 = \kappa_3 \gamma_2 + \gamma_3, \gamma_2 = \kappa_4 \gamma_3,$$

δηλ. ο δ θα μετρά διαδοχικά τους $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ άρα θα είναι $\gamma_3 = \Lambda * \delta$, με $\Lambda = 1$, ή $\Lambda > 1$. Δηλ. τυχαίος κοινός διαιρέτης των α, β διαιρεί και τον γ_3 και θα είναι είτε ίσος είτε μικρότερος από αυτόν. Άρα $\gamma_3 = \text{ΜΚΔ}(\alpha, \beta)$.

Αν $\gamma_3 = 1$, τότε οι αριθμοί α, β λέγονται πρώτοι μεταξύ τους (σχετικώς πρώτοι). Συμβολικά γράφουμε $\text{Ανθ}(32, 7) = [4, 1, 1, 3]$

υπολ	4	3	1	0	
32	7	4	3	1	$\text{ΜΚΔ}(32, 7) = 1$
πηλ	4	1	1	3	

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία σε κάποιο βήμα σταματά, η ακολουθία των υπολοίπων είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών (επιστημονικά: κάθοδος) και επομένως τερματίζεται, με ελάχιστο στοιχείο (κάθε μη κενό σύνολο φυσικών έχει ελάχιστο) τον ΜΚΔ των α, β .

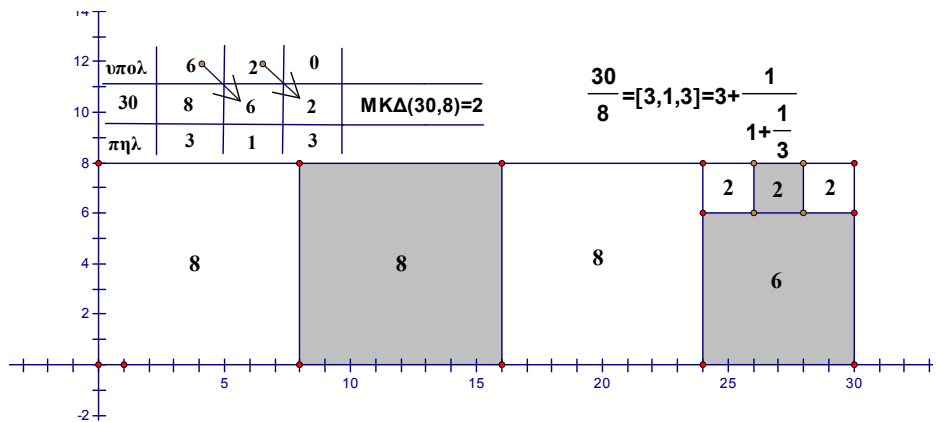
Ο Γάλλος μαθηματικός Gabriel Lamé, 1795-1870, απέδειξε ότι για τους φυσικούς, το πλήθος των βημάτων στον Ευκλείδειο αλγόριθμο είναι το πολύ πενταπλάσιο από το πλήθος των ψηφίων του μικρότερου αριθμού (Burton, 1997: 28).

Ας δουμε ένα ακόμα αριθμητικό παραδειγμα... σχηματικά

Προσπαθούμε να «μετρήσουμε» τον αριθμό 30 με τον αριθμό 8. Σχεδιάσαμε ορθογώνιο 30 επί 8 και αφαιρούμε τετράγωνα για καλύτερη αναπαράσταση.

Στην γραμμή «πηλ» είναι τα μερικά πηλικά της διαίρεσης 30:8, στην γραμμή «υπολ» τα μερικά υπόλοιπα. Αφαιρούνται τρία οκτάρια, πρώτο μερικό υπόλοιπο το 6.

Στην προσπάθεια μέτρησης του 8 με τον 6, μια αφαίρεση, δεύτερο μερικό υπόλοιπο 2, τρίτη προσπάθεια, μέτρηση του 6 με τον 2, ακριβώς 3.



Τους 30 και 8 μετρά φυσικά η μονάδα, αλλά και ο αριθμός 2, ο ΜΚΔ των 30 και 8. Το σχήμα [3,1,3] έχει συμπυκνωμένη την προσπάθεια μέτρησης του 30 με τον 8, είναι το

πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα $3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$.

Οι αριθμοί 3,1,3, τα μερικά πηλικά, είναι οι όροι του συνεχούς κλάσματος.

Άρρητα ρήματα

Ο Ευκλείδης επανέρχεται στην ανθυφαίρεση στο βιβλίο X, με την πρόταση X.2 (βιβλίο 10^ο, πρόταση 2^η) όπου από ανθυφαίρεση δύο άνισων αριθμών, πηγαίνει σε ανθυφαίρεση δυο άνισων μεγεθών (μεγέθη είναι ευθ. τμήματα, επιφάνειες ή όγκοι). Όμως, ενώ στους φυσικούς αριθμούς η διαδικασία σταματά (δυο αριθμοί μετρώνται οπωσδήποτε από την μονάδα, αλλά, πιθανόν να έχουν και άλλο κοινό μέτρο), για τα μεγέθη υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Αν η διαδικασία σταματά, έχουμε βρει κοινό μέτρο των μεγεθών, τα μεγέθη αυτά είναι σύμμετρα, ενώ
- Αν δεν σταματά, αν είναι άπειρη, δεν υπάρχει κοινό μέτρο αυτών των δυο μεγεθών και τα μεγέθη αυτά είναι ασύμμετρα. Δηλ. η ανθυφαίρεση αν είναι άπειρη, αποτελεί ένα **κριτήριο ασυμμετρίας**.

Η πρόταση X2 είναι η εξής:

[X.2] Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῆ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντα το μικρότερο από το μεγαλύτερο και το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει δεν μετρά το προηγούμενο του, τότε τα δύο μεγέθη είναι ασύμμετρα.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με μήκος καθέτων πλευρών ίσο με τη μονάδα μέτρησης, είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν δύο τετραγωνικές μονάδες (τ.μ.). Η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ., ονομάζεται τετραγωνική ρίζα του 2 και το σύμβολο που επιλέχθηκε (μετά το 1525) για να εκφράσει την οντότητα που λέγεται «μήκος» της (γιατί θέλουμε να έχει κάποιο μήκος) είναι το $\sqrt{2}$. Οι Πυθαγόρειοι (πιθανόν ο μαθηματικός Ίππασος) απέδειξαν ότι η διαγώνιος και η πλευρά τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο, δηλαδή ο (σημερινός) $\sqrt{2}$ δεν είναι ίσος με κάποιο λόγο φυσικών, δεν είναι ρητός.

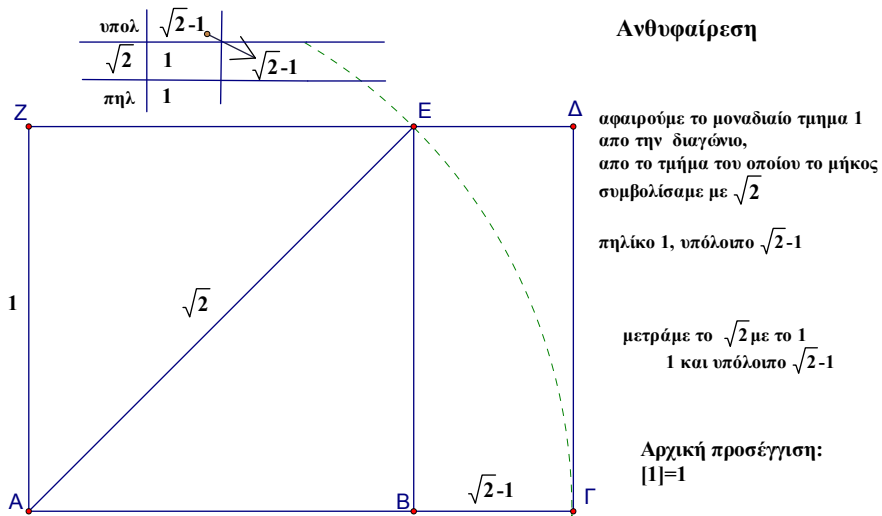
Πρόκειται περί ενός ιδανικού αριθμού, που μπορούμε να τον πλησιάσουμε σε απειροελάχιστη απόσταση, αλλά είναι αδύνατον να τον συλλάβουμε ολόκληρο. Οι αρχαίοι Έλληνες, τον ονόμασαν «άρρητο» (και δεν ήθελαν να τον εντάξουν στους αριθμούς) σε αντιδιαστολή με τους ακεραίους και κλασματικούς, που τους έλεγαν «ρητούς». Ρητός λοιπόν θα πει εκφρασμένος αλλά και προσδιορισμένος (επεκράτησε ο όρος «rational», γιατί οι ρητοί είναι λόγοι, ratios, ακεραίων). Άρρητος σημαίνει μη εκφρασμένος (δεν διέπεται από τη λογική) και μη επαρκώς προσδιορισμένος (δεν εκφράζεται ως λόγος ακεραίων, «irrational»).

Για τον $\sqrt{2}$

Θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την διαγώνιο με μονάδα την πλευρά. Στο σχήμα έχουμε μεγαλώσει αρκετά τη μονάδα. Οι ιδέες μας ενδιαφέρουν.

Άρρητα ρήματα

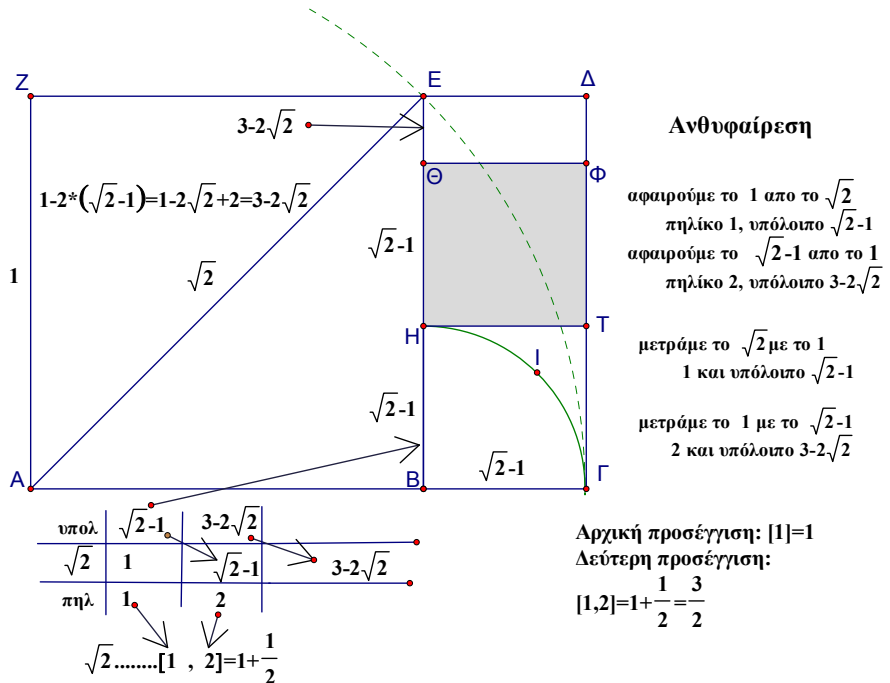
Το ορθογώνιο ΑΖΔΓ είναι $\sqrt{2}$ επί 1.



Αφαιρούμε το μοναδιαίο ΑΒ από το τμήμα μήκους $\sqrt{2}$, από το ΑΓ, βρίσκουμε $\sqrt{2}-1$, είναι το μήκος του ΒΓ.

ΒΓ είναι το «υπόλοιπο» της πρώτης μέτρησης.

Το δεύτερο βήμα είναι η προσπάθεια μέτρησης του μοναδιαίου τμήματος ΒΕ, με το ΒΓ (το υπόλοιπο της μέτρησης του $\sqrt{2}$ με το μοναδιαίο).



Με τη βοήθεια του διαβήτη, διαπιστώνουμε ότι αφαιρούνται δυο τμήματα ΒΓ από το μοναδιαίο ΒΕ, δυο τμήματα με μήκος $\sqrt{2}-1$, από το τμήμα με μήκος τη μονάδα: ΒΕ-ΒΗ-ΗΘ. Υπόλοιπο ΕΘ.

Συμβολικά:

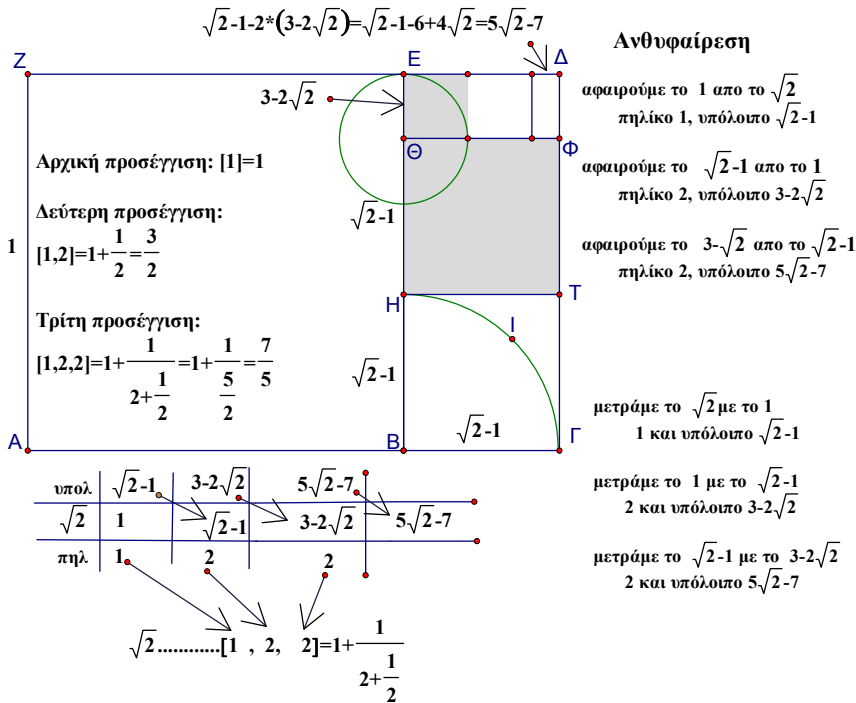
$$1 - 2(\sqrt{2} - 1) = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} .$$

Το κλάσμα $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ δίνει τη δεύτερη προσέγγιση.

Ο 1 μικρότερος, ο 3/2 μεγαλύτερος, ο «1,5» του δεκαδικού συστήματος.

Άρρητα ρήματα

Με το νέο υπόλοιπο $E\Theta$, προσπαθούμε να μετρήσουμε το προηγούμενο, το $\Theta\Phi=B\Gamma=\sqrt{2}-1$. Παρατηρούμε, εργασία με τον διαβήτη, ότι και πάλι τοποθετούνται 2 τμήματα μήκους $E\Theta$, αλλά και κάτι μένει.



Αν π.χ. το $E\Theta$ μετρά ακριβώς το $\Theta\Phi$, δεν ισχύει, αλλά, υποθέτουμε, AN , π.χ. $B\Gamma = BH = H\Theta = \Theta\Phi = \kappa E\Theta$, κ τοποθετήσεις του $E\Theta$, τότε, αντιστρέφοντας τη διαδικασία θα είχαμε: $BE = BH + H\Theta + \Theta E = \kappa E\Theta + \kappa E\Theta + E\Theta$ και για το τμήμα AG : $AG = \sqrt{2} = AB + B\Gamma = BE + B\Gamma = \kappa E\Theta + \kappa E\Theta + E\Theta + \kappa E\Theta$. Το τμήμα μήκους $E\Theta$ θα μετρούσε ακριβώς και την πλευρά $BE = AB$ και την διαγώνιο $AE = AG$. Τα μεγέθη πλευρά και διαγώνιος θα είχαν κοινό μετρο το μήκος του τμήματος $E\Theta$, θα ήταν «σύμμετρα»

Μπορούμε τώρα να χαράξουμε τον κύκλο (H, HΦ).

Παρατηρούμε ότι θα «περάσει» από το E.

$$H\Phi = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)^2} = 2 - \sqrt{2} = 1 - (\sqrt{2}-1) = HE = BE - BH$$

Τα τμήματα BH και HE είναι πάλι η πλευρά και η διαγώνιος ενός «μικρότερου» τετραγώνου, η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως το πρώτο βήμα, τα «2» άπειρα, τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ ασύμμετρα, ο $\sqrt{2}$ άρρητος.

Για τις ρητές προσεγγίσεις, παίρνουμε όσα «2» θέλουμε από το **συνεχές κλάσμα**. Για τη μετατροπή σε σύνηθες είναι απαραίτητες κάποιες

$$\text{πράξεις: π.χ. } [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}, \text{ ο «1,4»}$$

$$[1, 2, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12}, \text{ ο «1,41\bar{6}}\text{»}$$

Οι τέσσερις πρώτες προσεγγίσεις: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}$.

$$\text{Τεχνική: } \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots, \frac{m}{n} \rightarrow \frac{m+2n}{m+n}.$$

Το **συνεχές κλάσμα** είναι περιοδικό, αλλά δεν είμαστε στο δεκαδικό σύστημα. Π.χ. $\frac{11}{9} = \frac{9}{9} + \frac{2}{9} = 1 + \frac{2}{9}$...μετάφραση, $1,2222\dots = 1,\bar{2}$

$$\text{Εδώ } [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, \bar{2}] \dots \text{μετάφραση, } 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}$$

Άρρητα ρήματα

Κλείνουμε αυτή την μικρή εισαγωγή με ένα απόσπασμα από τα εκπληκτικά σχόλια του Πρόκλου:

...
ἤλθον δὲ τὴν ἀρχὴν ἐπὶ τὴν τῆς συμμετρίας ζήτησιν οἱ Πυθαγόρειοι πρότεροι αὐτὴν ἐξευρόντες ἐκ τῆς τῶν ἀριθμῶν κατανοήσεως. κοινὸν γὰρ ἀπάντων ὄντος μέτρον τῆς μονάδος καὶ ἐπὶ τῶν μεγεθῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν οὐκ ἠδυνήθησαν. αἴτιον δὲ τὸ πάντα μ ν καὶ ὅποιονοῦν ἀριθμὸν καθ' ὅποιονοῦν τομὰς διαιρούμενον μόνιον τι καταλιμπάνειν ἐλάχιστον καὶ τομῆς ἀνεπίδεκτον, πᾶν δὲ μέγεθος ἐπ' ἄπειρον διαιρούμενον μὴ καταλιμπάνειν μόνιον, ὃ διὰ τὸ εἶναι ἐλάχιστον τομὴν οὐκ ἐπιδέχεται, ἀλλὰ καὶ ἐκεῖνο ἐπ' ἄπειρον τεμνόμενον ποιεῖν ἄπειρα μέρη, ὧν ἕκαστον ἐπ' ἄπειρον τμηθήσεται, καὶ ἀπλῶς τὸ μ ν μέγεθος κατὰ μ ν τὸ μερίζεσθαι μετέχει τῆς τοῦ ἀπείρου ἀρχῆς, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ πέρατος, τὸν δὲ ἀριθμὸν κατὰ μ ν τὸ μερίζεσθαι τῆς τοῦ πέρατος, κατὰ δὲ τὴν ὁλότητα τῆς τοῦ ἀπείρου. ἐπεὶ οὖν τὰ μέτρα τῶν μετρομένων ἐλάττονα εἶναι προσήκει, μετρεῖται δὲ πᾶς ἀριθμὸς, ἀνάγκη πάντων ἔλαττον εἶναι τὸ μέτρον. ὥστε καὶ τῶν μεγεθῶν, εἰ πάντα μετρεῖται κοινῷ μέτρῳ, ἀνάγκη εἶναι τι ἐλάχιστον. ἀλλ' ἐπὶ μ ν τῶν ἀριθμῶν ἔστιν· πεπερασται γὰρ, ὡς προεῖρηται· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν οὐκέτι. οὐκ ἄρα κοινὸν πάντων τι μεγεθῶν μέτρον.

Scholia In Euclidem: Scholia in Euclidis elementa, 10,1,21-10,1,41

Πρότεροι οἱ Πυθαγόρειοι βρήκαν τὴν ἀρχὴ τῆς συμμετρίας ἀπὸ τὴν κατανόηση τῶν ἀριθμῶν. Γιατί ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν κοινὸ μέτρο τὴν μονάδα, ἀλλὰ γιὰ τὰ μεγέθη δὲν εἶναι δυνατόν νὰ βρεθεῖ κοινὸ μέτρο. Ἡ αἰτία εἶναι ὅτι οἰποιοσδήποτε ἀριθμὸς, ὅσες φορές καὶ ἀν διαιρεθεῖ ἀφήνει στο τέλος ἕνα ἐλάχιστο μέρος που δὲν μπορεῖ νὰ διαιρεθεῖ ἄλλο. Δὲν ἰσχύει τὸ ἴδιο γιὰ τὰ μεγέθη. Κάθε μέγεθος ὅταν διαιρεῖται ἐπ' ἄπειρον δὲν ἀφήνει κάποιο ἐλάχιστο μέρος τὸ οἰοῖο δὲν ἐπιδέχεται διαίρεση, ἀλλὰ καὶ αὐτὸ τὸ μέρος διαιρεῖται ἐπ' ἄπειρον, καὶ ἀπλᾶ τὸ μέγεθος ὅταν διαιρεῖται μετέχει στὴν ἀρχὴ τοῦ ἀπείρου, ἐνὼ ὡς σύνολο μετέχει στὴν ἀρχὴ τοῦ Πέρατος.

Ο αριθμός όταν διαιρείται μετέχει στην αρχή του Πέρατος, ενώ ως ολότητα στην αρχή του Απείρου. Επειδή λοιπόν τα μέτρα πρέπει να είναι μικρότερα από αυτά που μετρούνται, κάθε αριθμός μετρείται. Είναι αναγκαίο το μέτρο να είναι κάτι μικρότερο. Και στα μεγέθη, αν όλα μετρούνται με κοινό μέτρο, είναι αναγκαίο αυτό το μέτρο να είναι κάτι μικρότερο. Αλλά στους αριθμούς υπάρχει κάτι ελάχιστο, γιατί οι αριθμοί έχουν πέρασ, όπως είπαμε προηγουμένως. Επειδή στα μεγέθη δεν υπάρχει κάτι ελάχιστο, άρα δεν υπάρχει κοινό μέτρο όλων των μεγεθών.

.....

Εργασία σε ομάδες που δημιούργησαν οι μαθητές. Κάθε ομάδα επέλεξε ένα θέμα για διερεύνηση, από αρκετά προτεινόμενα. Οι εργασίες «ενισχύθηκαν» στην κατεύθυνση που οδήγησαν οι μαθητές. Ο καθηγητής συνερευνητής. Προβλήματα ομαδοσυνεργατικής τα συνήθη (Κυνηγός, 2006). Γνώση είναι η αντιπαράθεση με το άγνωστο. Ευχαριστώ τους μαθητές για την διάνοιξη του δρόμου. Ευχαριστώ επίσης τον συνάδελφο Κώστα Σταματόπουλο για την βοήθειά του στην λύση των «ηλεκτρονικών προβλημάτων».

Βιβλιογραφία Εισαγωγής

1. Βαρόπουλος, Θ. (1949). *Γενικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εστία.
2. Βαλερύ, Π. (1996). *Στοχασμοί*, μτφρ.Χαρά Καραγκούνη. Στιγμή.
3. Burton, D. (1997). *Elementary number theory*. McGraw-Hill.
4. Collins internet-linked dictionary of Mathematics, Glasgow.
5. Heath T., L. (1908). *The thirteen books of euclid's elements*. Cambridge.
6. Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy*. A New Reconstruction. Oxford University Press.

Άρρητα ρήματα

7. Καζαντζίδης, Γ.(1972). *Βασική Γραμμική Άλγεβρα*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
8. Knuth, D. (2010). *Η τέχνη του προγραμματισμού. Τόμος Γ'. Ταξινόμηση και Αναζήτηση*, μτφρ. Σταύρος Σουραβλάς. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας
9. Κυνηγός Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών, Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Ελληνικά Γράμματα.
10. Morrow G. R. (1970). *PROCLUS: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton: Princeton University Press.
11. Νεγρεπόντης, Σ., Φαρμάκη, Β. (2009). Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες (άρθρο, ανακτήθηκε στις 21/03/2009 από:
www.mathsforyou.gr/arthra/Negrepontis.doc).
12. Ντριάνκος, Σ.(2014).*Συντεταγμένες*. Ρέθυμνο: Γραφοτεχνική.
13. Ντριάνκος, Σ.(2015). *Αριθμός, αυτός ο άγνωστος*. Γραφοτεχνική.
14. Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ' Λυκείου*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.
15. Rozenblum, G., Kurlyandchik, L. Απειρη κάθοδος, Άρθρο στο Quantum, εκδ. Κάτοπτρο, Σεπτ.-Οκτ.1996, τόμος 3, τεύχος 5.
16. TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας). [Artistoteles: Topica, Philolaus: Fragmenta, 6,1-6,31, Plato:Timaeus, Proclus: In primum Euclidis elementorum libris commentarii, Scholia In Euclidem: Scholia in Euclidis elementa, 10,1,21-10,1,41].
17. Waerden B., (2003). *Η αφοπνιση της επιστημης*. Ηράκλειο: Π.Ε.Κ.

Ρέθυμνο, Απρίλιος 2016

1.Αρρητότητα λογοτεχνική: Β. Μαρία

Λογοτεχνική προσέγγιση για την αρρητότητα μέσα από το έργο
Θέρος –έρρος του Αλέξανδρου Παπαδιαμάντη

Ο Αλέξανδρος Παπαδιαμάντης γεννήθηκε το 1851 στην Σκιάθο.Ήταν γιος φτωχού ιερέα.Στη Σκιάθο έμαθε τα πρώτα του γράμματα,έπειτα φοίτησε,με διακοπές,σε γυμνάσια της Χαλκίδας,του Πειραιά και της Αθήνας.Τελείωσε την Μέση Εκπαίδευση το 1874,σε ηλικία 23 ετών,και την ίδια χρονιά γράφτηκε στη Φιλοσοφική Σχολή του Πανεπιστημίου.

Παράλληλα μελετούσε μόνος του ξένες γλώσσες. Οι οικονομικές του δυσκολίες τον ανάγκασαν να διακόψει τις σπουδές του.Εργάστηκε κυρίως ως μεταφραστής (από τα αγγλικά και γαλλικά) σεεφημερίδες.Έζησε με πολλές στερήσεις και πέθανε στη Σκιάθο.

Ήταν άνθρωπος βαθύτατα θρησκευόμενος,ταπεινός και μοναχικός.Θεωρείται ένας από τους σημαντικότερους Νεοέλληνες πεζογράφους και ο κυριότερος εκπρόσωπος του ηθογραφικού διηγήματος.

Το γνήσιο αφηγηματικό υλικό του Παπαδιαμάντη,η αίσθηση της φύσης,η χριστιανική ευλάβεια κι ένα αίσθημα νοσταλγίας που διατρέχει την αφήγησή του, συνθέτουν ένα κλίμα ιδιότυπης γοητείας,που είναι από τα κύρια χαρακτηριστικά της πεζογραφίας του.Γλώσσα του είναι η καθαρεύουσα με στοιχεία από εκκλησιαστικά βιβλία και με λέξεις της δημοτικής.Δεν μπόρεσε να εκδώσει κάποιο βιβλίοζο ζούσε.

Άρρητα ρήματα

Είναι ένας από τους σημαντικότερους Έλληνες λογοτέχνες γνωστός και ως «ο άγιος των ελληνικών γραμμάτων».

Ο Καβάφης γράφει γι' αυτόν: «η κορυφή των κορυφών».

Ο ίδιος σε ένα σύντομο αυτοβιογραφικό σημείωμα ιστορεί τη ζωή του:

Έγεννήθην εν Σκιάθω, τῇ 4 Μαρτίου 1851. Έβγήκα ἀπὸ τὸ Ἑλληνικὸν Σχολεῖον εἰς τὰ 1863, ἀλλὰ μόνον τῷ 1867 ἐστάλην εἰς τὸ Γυμνάσιον Χαλκίδος, ὅπου ἤκουσα τὴν Α΄ καὶ Β΄ τάξιν. Τὴν Γ΄ ἐμαθήτευσα εἰς Πειραιᾶ, εἴτα διέκοψα τὰς σπουδὰς μου καὶ ἔμεινα εἰς τὴν πατρίδα. Κατὰ Ἰούλιον τοῦ 1872 ὑπήγα εἰς τὸ Ἅγιον Ὅρος χάριν προσκυνήσεως, ὅπου ἔμεινα ὀλίγους μῆνας. Τῷ 1873 ἦλθα εἰς Ἀθήνας καὶ ἐφοίτησα εἰς τὴν Δ΄ τοῦ Βαρβακειῦ. Τῷ 1874 ἐνεγράφην εἰς τὴν Φιλοσοφικὴν Σχολὴν, ὅπου ἤκουα κατ' ἐκλογὴν ὀλίγα μαθήματα φιλολογικά, κατ' ἰδίαν δὲ ἠσχολούμην εἰς τὰς ξένας γλώσσας. Μικρὸς ἐζωγράφιζα Ἀγίους, εἴτα ἔγραφα στίχους, καὶ ἐδοκίμαζα νὰ συντάξω κωμωδίας. Τῷ 1868 ἐπεχείρησα νὰ γράψω μυθιστόρημα. Τῷ 1879 ἐδημοσιεύθη Ἡ Μετανάστις, ἔργον μου εἰς τὸ περιοδικὸν Σωτήρα. Τῷ 1882 ἐδημοσιεύθη Οἱ ἔμποροι τῶν Ἐθνῶν εἰς τὸ Μὴ χάνεσαι. Ἀργότερα ἔγραψα περὶ τὰ ἑκατὸν διηγήματα, δημοσιευθέντα εἰς διάφορα περιοδικὰ καὶ ἡμερίδας.

Τα διηγήματα του είναι περιγραφικά, φυσιολατρικά, με έντονο χρωματισμό στα εκφραστικά μέσα, με ειδυλλιακή ατμόσφαιρα, υποταγμένα σε κανόνες και σχέδιο.

Ένα από αυτά είναι και το Θέρος-έρος που γράφτηκε το 1891.

Οι πληροφορίες για την ζωή του Παπαδιαμάντη αντλήθηκαν από το βιβλίο της Νεοελληνικής Γλώσσας της Β΄ Λυκείου σε συνδυασμό με το διαδίκτυο.

Κύρια πηγή άντλησης πληροφοριών για το περιεχόμενο του έργου Θέρος – Ξρος ήταν το ίδιο το βιβλίο του Α. Παπαδιαμάντη. Μέσα από την ανάγνωσή του επιχειρήθηκε η ερμηνεία και στη συνέχεια ο σχολιασμός της “αρρητότητας”, που εκφράζεται από τον συγγραφέα στο «Θέρος – Ξρος»

Θέρος-Ξρος ...Ειδύλλιον της Πρωτομαγιάς(1891)

Το έργο αυτό έχει ως κύρια ιδέα τον έρωτα ενός άνδρα, του Κωστή προς την Ματή, κόρη του καπετάν Λιμπέρτη. Η Ματή, μια νεαρή και ευαίσθητη καλλονή οδηγήθηκε στην εξοχή «την ημέρα της Ανθούς» συνοδευόμενη από την γραιία Φωτεινή, η οποία ήταν βοηθός της οικογένειας της νεαρής κοπέλας, και από μισή ντουζίνα ζωνρά μικρά παιδιά. Στον δρόμο τους συνάντησαν έναν 24χρονο ψηλό άνδρα, τον Κωστή, ο οποίος σε αντίθεση με όλους, αντί να πηγαίνει στην εξοχή, φαινόταν να γυρίζει από εκεί. Αφού χαιρέτησε τις δύο γυναίκες δείχνοντας ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς την νεαρή κοπέλα, απομακρύνθηκε. Οι δυο γυναίκες συνέχισαν το δρόμο τους με πολλές παύσεις λόγω της επιθυμίας των παιδιών για παιχνίδι.

Μόλις έφτασαν στον προορισμό τους, δηλαδή στο μεγάλο κτήμα της οικογένειας της Ματής, τα παιδιά διασκορπίστηκαν προς όλες τις κατευθύνσεις για να κόψουν λουλούδια και καρπούς, ενώ η ίδια η Ματή κατευθύνθηκε προς το εξοχικό της καλύβι. Πριν φτάσει όμως, ο Σταθάκης, ένα από τα αγόρια που πήγε να κόψει καρπούς βρήκε ένα γράμμα ανάμεσα στα φυτά και αμέσως έτρεξε να το δώσει στην αδελφή του.

Άρρητα ρήματα

Η Ματή μόλις το έλαβε απαγόρευσε στο μικρό της αδελφό να πει το παραμικρό στην γραία Φωτεινή. Όπως αποδείχτηκε το γράμμα ήταν ένα ερωτικό σημείωμα από τον νεαρό που είχαν συναντήσει προηγουμένως. Ο νεαρός Κωστής αποκάλυπτε στην Ματούλα τα συναισθήματά του γι' αυτήν, δηλαδή ότι την αγαπά, χωρίς ταυτόχρονα να ελπίζει πως θα την απολαύσει ποτέ του και της αφιερώνει ένα ποίημα στο οποίο κάνει λόγο για τα παραπάνω. Ο λόγος που τον οδήγησε να της γράψει αυτό το γράμμα, είναι, επειδή μια μάγισσα του είπε την προηγούμενη ημέρα, πως η Ματή διατρέχει θανάσιμο κίνδυνο και αποφάσισε να την παρακολουθεί.

Την στιγμή εκείνη μπήκε η γραία Φωτεινή στο καλύβι και ειδοποίησε την νεαρή κοπέλα πως πριν λίγο αντίκρισε από το παράθυρο το πρόσωπο του νεαρού άνδρα που συνάντησαν το πρωί στο δρόμο τους. Η κοπέλα αν και παραξενεύτηκε με την είδηση δεν έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον μπροστά στη γραία μόνο και μόνο για να μην προδοθεί και η ίδια για τα συναισθήματά της. Μόλις όμως η γριά βγήκε από το καλύβι για να πάει με τα παιδιά στην κορυφή του λόφου, η ίδια πήγε στο παράθυρο για να σιγουρευτεί αλλά δεν αντίκρισε κανέναν.

Κάποια στιγμή άκουσε έναν θόρυβο και όταν γύρισε να δει, διέκρινε μια μορφή δίπλα στην πόρτα της καλύβας. Δεν ήταν ούτε η γριά, ούτε κανένα από τα παιδιά, ούτε καν ο Κωστής.

Η μορφή ανήκε σε έναν ξένο, άγριο και άσχημο άνδρα, που έκανε την Ματούλα να κραυγάσει.

Ο άνδρας αυτός επιτέθηκε στην νεαρή κοπέλα και προσπάθησε να την αγγίξει παρά την αντίστασή της. Η νεαρή πρόλαβε μόνο να βγάλει μια δεύτερη κραυγή.

Ο άνθρωπος αυτός έκανε νόημα στην κοπέλα να σωπάσει, ενώ εκείνη τον ρώτησε τι θέλει και για ποιο λόγο ήρθε σ' αυτήν. Ο αλλόκοτος αυτός άνδρας το μόνο που ήθελε από την κοπέλα ήταν να τον ακολουθήσει και να πάει μαζί του στο καλύβι του. Τότε η Ματούλα θυμήθηκε πως άκουσε πολλές φορές την Φωτεινή να διηγείται για έναν λυκάνθρωπο, τον λεγόμενο Αγρίμη, που έμενε πίσω από τον λόφο της Δραγασιάς. Έμενε μόνος, κατέβαινε σπάνια στην πόλη και οι άνθρωποι δεν τον έβλεπαν συχνά. Ήταν σχεδόν βουβός και οι γυναίκες τον φοβούνταν επειδή είχε επιχειρήσει πολλές φορές να τις πειράξει. Υποπτεύθηκε τότε πως δεν άντεξε την μοναξιά του και τον λυπήθηκε, γιατί κατάλαβε πως αυτή ήταν η αιτία της επίθεσής του. Ο Αγρίμης επανέλαβε στην νεαρή κοπέλα να τον ακολουθήσει στο καλύβι του, ενώ εκείνη αρνούμενη την πρότασή του, δέχτηκε και πάλι την βίαιη επίθεσή του. Η Ματή άρχισε να αντιστέκεται και να φωνάζει, όμως οι φωνές της άργησαν να φτάσουν στο σημείο όπου βρίσκονταν τα παιδιά και η γριά, λόγω της απόστασης.

Μόλις εκείνοι αντιλήφθηκαν πως η Ματή ζητούσε την βοήθειά τους έτρεξαν απευθείας προς το καλύβι. Όταν έφτασαν αντίκρισαν την Ματή αναίσθητη να κείτεται στο έδαφος και τον Κωστή να στέκεται από πάνω της κρατώντας ένα σίδερο. Η γριά Ματή αρχικά νόμισε πως υπεύθυνος για το κακό ήταν ο Κωστής, αλλά μόλις είδε τον αναίσθητο Αγρίμη πεσμένο στο έδαφος με ματωμένο το κεφάλι κατάλαβε τι είχε προηγηθεί. Αμέσως όλοι ασχολήθηκαν με την περίθαλψη της Ματής, η οποία μόλις συνήλθε κοίταξε με ευγνωμοσύνη τον Κωστή. Στο μεταξύ ο Αγρίμης πρόλαβε να ξυπνήσει κι αυτός και απευθείας βγήκε από το καλύβι, φοβερίζοντας τον Κωστή πως θα πληρώσει γι' αυτό που έκανε.

Άρρητα ρήματα

Μετά από τρεις μήνες πραγματοποιήθηκε ο γάμος της πανέμορφης Ματῆς με τον γενναίο Κωστή.

Στο κείμενο αυτό γίνεται λόγος για την αρρητότητα και πιο συγκεκριμένα :

Ἐβλεπεν ἐκεῖ κάτω εἰς τὸν ὀρίζοντα, ὑπὸ τὰς ἀκτῖνας τοῦ ἡλίου διαγραφόμενον τὸ ραδινὸν ἀνάστημα καὶ τὴν λευκὴν ἐσθῆτα τῆς Ματούλας, καὶ ἠσθάνετο ἡδονὴν ἄρρητον, ὡς νὰ ἔβλεπέ τι ἐγγύθεν.

Ἡ λέξη «*άρρητος*» ἔχει δυο σημασίες :

1. αὐτὸς που δεν μπορεί να λεχθεῖ ἢ να ειπωθεῖ, που δεν εἶναι δυνατόν να τον εκφράσει ἢ να τον περιγράψει κανεὶς
2. (μαθηματικά) Το σύνολο των πραγματικῶν αριθμῶν που δεν μπορούν να γραφοῦν σε μορφή κλάσματος με ἀκέραιους ὄρους και παρονομαστή διάφορο του μηδενός.

Στο απόσπασμα αὐτὸ ο συγγραφέας χρησιμοποιεῖ αὐτὸν τον ὄρο με την πρώτη σημασία που δόθηκε παραπάνω. Με αὐτὸν τον τρόπο επιχειρεῖ να δώσει στον αναγνώστη να καταλάβει, πως ἡ τέρψη που αισθάνεται ο Κωστής την ὥρα που αντικρίζει την αγαπημένη του Ματῆ, εἶναι ἀδύνατον να εκφραστεῖ. Αὐτὴ ἡ ευχαρίστηση που λαμβάνει ο νεαρός και μόνο ἀπὸ την εικόνα της δεν γίνεται να περιγραφεῖ, εἶναι ἄρρητη.



Πηγές

- Παπαδιαμάντης Αλέξανδρος, *Να είχαν ο έρωτας σαΐτες*, Επιμέλεια Κώστας Ακρίβος, Εκδόσεις Μεταίχμιο, Οκτώβριος 2010
- Βικιπαιδεια, η ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια.
- Νεοελληνική Γλώσσα της Β' Λυκείου.

2.Άρρητότητα θεολογική

2.1.Κείμενο από την ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ

Απόστολος Παύλος, Προς Κορινθίους Β, 12, 1-5

**Καυχᾶσθαι δη· οὐ συμφέρει μοι, ἐλεύσομαι γαρ
εἰς ὀπτασίας καὶ ἀποκαλύψεις κυρίου.**

οἶδα ἄνθρωπον

ἐν Χριστῷ πρὸ ἐτῶν δεκατεσσάρων—εἴτε ἐν σώματι
οὐκ οἶδα, εἴτε ἐκτὸς τοῦ σώματος οὐκ οἶδα, ὁ θεὸς
οἶδεν—ἀρπαγέντα τὸν τοιοῦτον ἕως τρίτου οὐρανοῦ.

καὶ οἶδα τὸν τοιοῦτον ἄνθρωπον—εἴτε ἐν σώματι
εἴτε χωρὶς τοῦ σώματος οὐκ οἶδα, ὁ θεὸς οὐκ οἶδεν—
ὅτι ἤρπαγεν εἰς τὸν παράδεισον καὶ ἤκουσεν ἄρρητα
ρήματα ἃ οὐκ ἐξὸν ἀνθρώπῳ λαλῆσαι.
ὑπὲρ τοῦ τοιοῦτου καυχῆσομαι, ὑπὲρ δε ἐμαυτοῦ οὐ
καυχῆσομαι εἰ μὴ ἐν ταῖς ἀσθενείαις μου...

.....

2.2.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β

Δε με συμφέρει βέβαια να καυχηθῶ· θα το κάνω όμως, γιατί πρόκειται για οράματα κι αποκαλύψεις που μου χάρισε ο Κύριος. Ξέρω έναν άνθρωπο πιστό, ο οποίος πριν από δεκατέσσερα χρόνια ανυψώθηκε μέχρι τον τρίτο ουρανό-δεν ξέρω αν ήταν με το σώμα του ή χωρίς το σώμα, ο Θεός το ξέρει. Ξέρω ότι αυτός ο άνθρωπος-ή ήταν με το σώμα ή χωρίς το σώμα δεν το ξέρω, ο Θεός το ξέρει-μεταφέρθηκε ξαφνικά στον παράδεισο κι άκουσε λόγια που δεν μπορεί ούτε επιτρέπεται να τα πει άνθρωπος. Γι αυτόν τον άνθρωπο θα καυχηθῶ για τον εαυτό μου όμως δε θα καυχηθῶ, παρά μόνο για τις ταλαιπωρίες μου.

Πηγή

Η ΚΑΙΝΗ ΔΙΑΘΗΚΗ, ΙΕΡΑ ΜΗΤΡΟΠΟΛΙΣ ΡΕΘΥΜΝΗΣ ΚΑΙ
ΑΥΛΟΠΟΤΑΜΟΥ, 2014, σελ.422 (εκτυπ. Ελληνική Βιβλική Εταιρεία).

3.Αρρητότητα Σοφοκλή

3.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας»

TLG -Thesaurus Linguae Graecae- Βάση δεδομένων Musaios.

ΟΙΔΙΠΟΥΣ ΤΥΡΑΝΝΟΣ

ΟΙΔΙΠΟΥΣ

ᾠ τέκνα, Κάδμου τοῦ πάλαι νέα τροφή,
τίνας ποθ' ἔδρας τάσδε μοι θαάζετε
ἰκτηρίοις κλάδοισιν ἐξεστεμμένοι;

Πόλις δ' ὁμοῦ μιν θυμιαμάτων γέμει,
ὁμοῦ δ' παιάνων τε καὶ στεναγμάτων·
ἀγὼ δικαίων μὴ παρ' ἀγγέλων, τέκνα,
ἄλλων ἀκούειν αὐτὸς ᾧδ' ἐλήλυθα,
ὁ πᾶσι κλεινὸς Οἰδίπους καλούμενος.

Ἄλλ', ᾧ γεραιέ, φράζ', ἐπεὶ πρέπων ἔφυς
πρὸ τῶνδε φωνεῖν· τίτι τρόπῳ καθέστατε,
δείσαντες ἢ στέρξαντες; ὡς θέλοντος ἂν
ἐμοῦ προσαρκεῖν πᾶν· δυσάλγητος γὰρ ἂν
εἶην τοιάνδε μὴ οὐ κατοικτίρων ἔδραν.

ΙΕΡΕΥΣ

Ἄλλ', ᾧ κρατύνων Οἰδίπους χώρας ἐμῆς,
ὄρᾳ μιν ἡμᾶς ἡλίκοι προσήμεθα
βωμοῖσι τοῖς σοῖς, οἳ μιν οὐδέπω μακρὰν
πτέσθαι σθένοντες, οἳ δ' σὺν γήρα βαρεῖς,
ἱερεῦς, ἐγὼ μιν Ζηνός, οἶδε τ' ἠθέων
λεκτοί· τὸ δ' ἄλλο φῶλον ἐξεστεμμένον

[1-19]

.....[283-309]

- ΟΙ. Εἰ καὶ τρίτ' ἔστι, μὴ παρῆς τὸ μὴ οὐ φράσαι.
ΧΟ. Ἄνακτ' ἄνακτι ταῦθ' ὀρώντ' ἐπίσταμαι
μάλιστα Φοῖβω Τειρεσίαν, παρ' οὗ τις ἂν
σκοπῶν τάδ', ὦναξ, ἐκμάθοι σαφέστατα.
- ΟΙ. Ἄλλ' οὐκ ἐν ἀργοῖς οὐδ' τοῦτ' ἐπραξάμην·
ἔπεμψα γὰρ Κρέοντος εἰπόντος διπλοῦς
πομπούς· πάλαι δ' μὴ παρῶν θαυμάζεται.
- ΧΟ. Καὶ μὴν τά γ' ἄλλα κωφὰ καὶ παλαί' ἔπη.
- ΟΙ. Τὰ ποῖα ταῦτα; πάντα γὰρ σκοπῶ λόγον.
ΧΟ. Θανεῖν ἐλέχθη πρὸς τινων ὁδοιπόρων.
- ΟΙ. Ἦκουσα κἀγὼ· τὸν δ' ἰδόντ' οὐδεὶς ὄρα.
- ΧΟ. Ἄλλ' εἴ τι μιν δὴ δείματός γ' ἔχει μέρος,
τάς σὰς ἀκούων οὐ μενεῖ τοιάσδ' ἄρας.
- ΟΙ. ᾠ μὴ ἔστι δρῶντι τάρβος, οὐδ' ἔπος φοβεῖ.
- ΧΟ. Ἄλλ' οὐξελέγξων αὐτὸν ἔστιν· οἶδε γὰρ
τὸν θεῖον ἤδη μάντιν ᾧδ' ἄγουσιν, ᾧ
τάληθ' ἔμπεφυκεν ἀνθρώπων μόνω.
- ΟΙ. ᾠ πάντα ναμῶν Τειρεσία, διδακτά τε
ἄρρητά τ' οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ,
πόλιν μὲν, εἰ καὶ μὴ βλέπεις, φρονεῖς δ' ὅμως
οἷα νόσφ' σὺνεστιν· ἦς σ' προστάτην
σωτήρ' αὖτ', ὦναξ, μόνον ἐξευρίσκομεν.
Φοῖβος γάρ, εἴ τι μὴ κλύεις τῶν ἀγγέλων,
πέμψασιν ἡμῖν ἀντέπεμψεν, ἔκλυσιν
μόνην ἂν ἐλθεῖν τοῦδε τοῦ νοσήματος,
εἰ τοὺς κτανόντας Λάκρον μαθόντες εὐ
κτείναιμεν ἢ γῆς φυγάδας ἐκπεμψάμεθα.

.....

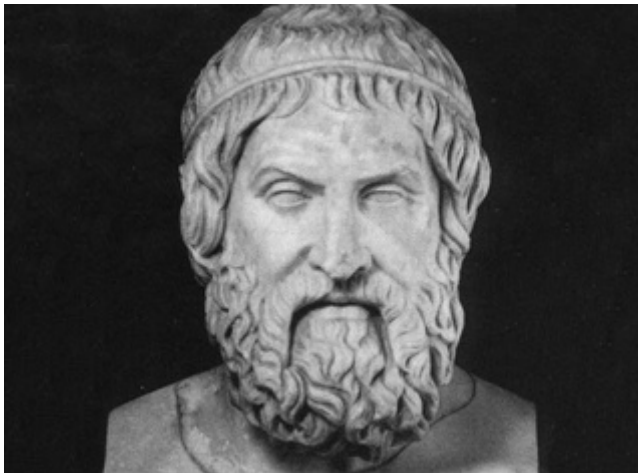
3.2.Η πρόταση της ομάδας Γ.-Κ.-Τ.

Αρρητότητα Σοφοκλή στο έργο του «Οιδίπους Τύραννος»

Βαγγέλης Γ., Λευτέρης Κ., Διογένης Τ.

Τρόπος άντλησης πληροφοριών:

Έγινε μελέτη των αποσπασμάτων του αρχαίου κειμένου(στίχοι1-18 και 283-308) στο εργαστήριο της πληροφορικής. Στη συνέχεια, μέσω διαδικτύου, συζητήσαμε και αναλύσαμε τη φράση που ζητήθηκε [στίχοι 300-301(ὄ πάντα νωμῶν Τειρεσία, διδακτά τε ἄρρητά τ', οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ)]. Για την ανάλυση χρησιμοποιήσαμε τη μετάφραση του κειμένου καθώς και διάφορες ερμηνευτικές προσεγγίσεις , που αντλήσαμε από το διαδίκτυο.



Σοφοκλής (496 π.Χ.- 406 π.Χ)

Μετάφραση αποσπασμάτων

ΟΙΔΙΠΟΥΣ

Παιδιά μου, βλαστοί
της παλαιάς σποράς του Κάδμου,
γιατί στων ανακτόρων το βωμό
τριγύρω συναχτήκατε
με κλάδους ικεσίας στα χέρια.....
και στέφανα στην κεφαλή;
Η πόλη μας πλημμύρισε θυμίαμα
κι ακούγονται παντού θρήνοι και μοιρολόγια.
Δεν καταδέχομαι να με πληροφορούν μεσάζοντες
γι' αυτό κι ήρθα μονάχος μου ν' ακούσω,.....
εγώ ο λαοπρόβλητος κι ονομαστός Οιδίπους.
Μίλησε, γέροντα.
Το κύρος σου εκπροσωπεί το σύνολο.
Ο λόγος ποιος της σύναξης;
Φοβάστε κάτι; Ποθείτε κάτι;.....
Επιθυμώ παντού και πάντα
να σπεύδω στην ανάγκη σας.
Ανάλητος δεν είμαι
γι' αυτό και μου ταραίζει την ψυχή
η λιτανεία της ικεσίας.....

ΙΕΡΕΥΣ

Ω παντοκράτορα της χώρας μου Οιδίπου,
θωρείς τριγύρω στους βωμούς σου
τις ηλικίες όλες πεσμένες στα γόνατα·
νεοσσοί που δεν μπορούν
ν' ανοίξουν τα φτερά τους.....
και να πετάξουν μακριά,
βαρείς από τα χρόνια γέροντες,
ιερείς, όπως εγώ, λειτουργοί του Διός
και παλικάρια διαλεχτά.

- ΟΙΔ. Και τρίτη αν έχεις λέγε,.....
μη διστάζεις.
- ΧΟΡ. Ξέρω καλά πως όσα βλέπει ο μέγας Φοίβος
τα ίδια βλέπει κι ο μέγας Τειρεσίας.
Αν κάποιος τον εξέταζε
μπορούσε να φωτίσει, βασιλιά μου, την υπόθεση.....
- ΟΙΔ. Χωρίς χρονοτριβή το φρόντισα κι αυτό.
Ιδέα του Κρέοντος κι έστειλα δυο
για να τον συνοδεύσουν.
Αργοπορεί και με προβληματίζει.
- ΧΟΡ. Όσο για τις παλιές και κούφιεσ φήμεσ.....
- ΟΙΔ. Για τι μιλάσ;
Τα πάντα ξεψαχνίζω.
- ΧΟΡ. Είπαν πως τον σκότωσαν οδοιπόροι.
- ΟΙΔ. Πήρε το αυτί μου κάτι. Όμως κανείς
δε μολογάει τον αυτόπτη.....
- ΧΟΡ. Αν τον κρατάει ο φόβος,
θ' ακούσει τις κατάρεσ σου
και θα πειστεί.
- ΟΙΔ. Όποιος δεν τρόμαξε την πράξη,
πώς θεσ να φοβηθεί τα λόγια.....
- ΧΟΡ. Ελπίδεσ αποκάλυψησ υπάρχουν.
Ιδού τον ένθεο τον μάντη
τον οδηγούν εδώ.
Είναι θνητόσ μοναδικόσ·
του δόθηκεν η χάρη τησ αλήθειασ.....
- ΟΙΔ. **Ω παντεπόπτη Τειρεσία**
που τα ρητά διαβάζεισ και τ' απόρρητα,
τα μυστικά τησ γησ και τ' ουρανού,
τη νόσο που την πόλη δυναστεύει.
Ομόνοσ είσαι πια προστάτησ και σωτήρασ μασ.....
Ο Φοίβοσ, αν δεν άκουσεσ απ' τουσ απεσταλμένοσ,
στισ ερωτήσεισ που του θέσαμε μασ μήνυσε,
πωσ από τη νόσο ομόνοσ τρόποσ να γλυτώσουμε
είναι να βρούμε του Λαΐου τουσ φονιάδεσ
και να τουσ θανατώσουμε.....
ή να τουσ στείλουμε εξορία.

Άρρητα ρήματα

Μην αρνηθείς να μας μιλήσεις
είτε των οiwωνών τη γλώσσα διάβασες
είτε μιας άλλης μαντικής
τα μονοπάτια πήρες.....
Σώσε τον εαυτό σου, σώσε την πόλη,
σώσε και μένα·
σώσε μας από το μίasma του σκοτωμένου.
Σ' εσένα τις ελπίδες αποθέτουμε.
Αν κάποιος έχει έλεος και το προσφέρει,.....
με τη χαρά της προσφοράς αγάλλεται.

Τα συγκεκριμένα αποσπάσματα αναφέρονται στο λοιμό που ξέσπασε στην πόλη όπου βασίλευε ο Οιδίποδας, τη Θήβα, ο οποίος αποδόθηκε στο Θεό Απόλλωνα. Ο Οιδίποδας πληροφορείται για το γεγονός από τον ιερέα, αφού αντιλήφθηκε ότι ο λαός του κάνει ικεσία στους Θεούς. Στο δεύτερο απόσπασμα ο Οιδίποδας ζητά τη βοήθεια του μάντη Τειρεσία για την αιτία αυτού του θεόσταλτου κακού. Ο Οιδίποδας, ζητώντας τη βοήθεια του Τειρεσία, απευθύνεται σ' αυτόν λέγοντας :«Τειρεσία , εσύ που όλα τα γνωρίζεις και όσα μπορούν να διδαχτούν και τα αφανέρωτα και τα ουράνια και τα επίγεια ξέρεις...»

Σύμφωνα με την προσφώνηση του Οιδίποδα, ο Τειρεσίας έχοντας τη Θεία Χάρη ως μάντης, είναι κάτοχος της αλήθειας και της γνώσης, άρα και γι' αυτό το λόγο σεβαστός απ' όλους. Μπορεί να είναι τυφλός (επομένως δεν λειτουργεί η σωματική όραση), όμως «βλέπει» τα πάντα, γιατί έχει την πνευματική όραση – γνώση.... **Τι είναι αυτό που γνωρίζει;**

Από τη μια μεριά εκείνα που αφορούν τον κόσμο των ανθρώπων είναι όσα έχουν φανερωθεί στους ανθρώπους , είναι η γνώση και η αλήθεια που μπορεί να διδαχθεί, αλλά ίσως είναι και όση αλήθεια μπορεί να αντιληφθεί ο άνθρωπος μέσα στα «πεπερασμένα» όρια των αισθήσεών του.

Από την άλλη, υπάρχει ένας ολόκληρος κόσμος έξω από τα ανθρώπινα. Ο «άρρητος» που δεν έχει φανερωθεί στον άνθρωπο, ο κόσμος που σχετίζεται με τη Θεϊκή βούληση και με δυνάμεις έξω από τα ανθρώπινα όρια, όπως η Μοίρα, που καθόρισε το πεπρωμένο του Οιδίποδα.

Η αρρητότητα αυτή σχετίζεται με την περιορισμένη δυνατότητα του ανθρώπινου νου. Επομένως έχει τη δυνατότητα να γνωρίζει πράγματα που οι κοινοί θνητοί δεν μπορούν να συλλάβουν με το μυαλό τους. Είναι, όμως, ταυτόχρονα η αληθινή γνώση, που γίνεται αντιληπτή από τους λίγους που έχουν την «ευλογία» να γίνονται αποδέκτες αυτής της αλήθειας του σύμπαντος, μέρος της οποίας μόνο μπορούν να αποκαλύψουν στους άλλους. **Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της είναι ότι δεν μπορεί να εξηγηθεί με λόγια.** Τα λόγια είναι στοιχείο της ανθρώπινης φύσης, η οποία δεν είναι δυνατό να καταλάβει τη θεία φύση.

Ο μάντης Τειρεσίας αποκαλύπτοντας τη Θεϊκή βούληση, προβάλλεται ως μεσολαβητής ανάμεσα στο υπερφυσικό και στο ανθρώπινο, ανάμεσα στην υπερκόσμια και την επίγεια δύναμη, ανάμεσα στην αληθινή γνώση και την παραπλάνηση ή την άγνοια.

Πηγές

Ανάκτηση πληροφοριών από το δίκτυο: Φωτογραφία προτομής του

Σοφοκλή (<http://www.sansimera.gr/quotes/authors/26>)

Βιβλίο Β΄ Γενικού Λυκείου: Σοφοκλέους τραγωδία: «Οιδίπους τύραννος» και «Αίας» (<http://ebooks.edu.gr/new/ebooks.php?course=DSGL-B123>)

Ανάλυση του Οιδίποδα Τυρράνου από τον Ιωάννη Κωνσταντάκο (http://www.academia.edu/1744336/Teaching_Notes_for_Sophocles_Oedipus_Rex_in_Greek)

3.3.Η πρόταση της μαθήτριας του Γ1 Μαρίας Β

ΟΙ. ὦμι μὴ ἔστι δρῶντι τάρβος, οὐδ' ἔπος φοβεῖ.

ΧΟ. Ἄλλ' οὐξελέγξων αὐτὸν ἔστιν· οἶδε γὰρ
τὸν θεῖον ἤδη μάντιν ᾧδ' ἄγουσιν, ᾧ
τάληθ ς ἐμπέφυκεν ἀνθρώπων μόνω.

ΟΙ. ὦ πάντα νωμῶν Τειρεσία, διδακτά τε
ἄρρητά τ' οὐράνιά τε καὶ χθονοστιβῆ,
πόλιν μὲν, εἰ καὶ μὴ βλέπεις, φρονεῖς δ' ὅμως
οἷα νόσφ' οὐκ ἐσθ' ἤσ' προστάτην
σωτήρα τ', ᾧναξ, μόνον ἐξευρίσκομεν.
Φοῖβος γάρ, εἴ τι μὴ κλύεις τῶν ἀγγέλων,
πέμψασιν ἡμῖν ἀντέπεμψεν, ἔκλυσιν
μόνην ἂν ἐλθεῖν τοῦδε τοῦ νοσήματος,
εἰ τοὺς κτανόντας Λάκρον μαθόντες εὖ
κτείναιμεν ἢ γῆς φυγάδας ἐκπεμψαίμεθα.

ΟΙ. Ὅποιος δεν φοβήθηκε την πράξη,
πῶς να φοβηθεῖ τα λόγια;

ΧΟ. Υπάρχουν ελπίδες αποκάλυψης
Ἰδοὺ τον ἔνθεο τον μάντη τον οδηγούν εδῶ
Εἶναι θνητός μοναδικός

ΟΙ. ὦ! παντεπόπτη Τειρεσία που τα ρητά
διαβάζεις και τα ἀπόρητα (τα ἄρρητα),
τα μυστικά του ουρανοῦ και της γῆς,
τη νόσο που την πόλη δυναστεύει
Εἶσαι πια ο μόνος προστάτης και σωτήρας μας

4.Αρρητότητα Ομηρική

4.1.Κείμενο από τον «Θησαυρό Ελληνικής Γλώσσας»

TLG -Thesaurus Linguae Graecae- Βάση δεδομένων Musaios.

Homerus Odyssea[book14, line 462-486]

.....
 εὐξάμενός τι ἔπος ἐρέω· ο νος γὰρ ἀνώγει,
 ἠλεός, ὅς τ' ἐφέηκε πολύφρονά περ μάλ' ἀεῖσαι
 καί θ' ἀπαλὸν γελάσαι καί τ' ὀρχήσασθαι ἀνήκε,
 καί τι ἔπος προέηκεν, ὃ πέρ τ' ἄρρητον ἄμεινον.

ἀλλ' ἐπεὶ οἶν τὸ πρῶτον ἀνέκραγον, οὐκ ἐπικεύσω.
 εἶθ' ὡς ἠβώοιμι βίη τέ μοι ἔμπεδος εἶη,
 ὡς ὅθ' ὑπὸ Τροίην λόχον ἤγομεν ἀρτύναντες.
 ἠγείσθην δ' Ὀδυσσεύς τε καὶ Ἴατρος δῆς Μενέλαος,
 τοῖσι δ' ἅμα τρίτος ἦρχον ἐγών· αὐτοὶ γὰρ ἄνωγον.

ἀλλ' ὅτε δὴ ῥ' ἰκόμεσθα ποτὶ πτόλιν αἰπύ τε τείχος,
 ἡμεῖς μ ν περὶ ἄστῳ κατὰ ῥωπή□α πυκνά,
 ἂν δόνακας καὶ ἔλος, ὑπὸ τεύχεσι πεπτηῶτες
 κείμεθα, νύξ δ' ἄρ' ἐπῆλθε κακὴ βορέαο πεσόντος,
 πηγυλῖς· αὐτὰρ ὑπερθε χιῶν γένετ' ἠΰτε πάχνη,
 ψυχρὴ, καὶ σακέεσσι περιτρέφετο κρύσταλλος.
 ἔνθ' ἄλλοι πάντες χλαίνας ἔχον ἠδ' χιτῶνας,
 εἶδον δ' εὐκηλοὶ, σάκεσιν εἰλυμένοι ὦμους·
 αὐτὰρ ἐγὼ χλαῖναν μ ν ἰῶν ἐτάροισιν ἔλειπον
 ἀφραδέως, ἐπεὶ οὐκ ἐφάμην ῥίγασέμεν ἔμπης,
 ἀλλ' ἐπόμην σάκος ο ον ἔχων καὶ ζῶμα φαεινόν.
 ἀλλ' ὅτε δὴ τρίχα νυκτὸς ἔην, μετὰ δ' ἄστρα βεβήκει,
 καὶ τότε ἐγὼν Ὀδυσῆα προσηύδων ἐγγυὸς ἐόντα
 ἀγκῶνι νύξας· ὁ δ' ἄρ' ἐμπαπέως ὑπάκουσε·
 'διογεν ς Λαερτιάδη, πολυμήχαν' Ὀδυσσεῦ,
 οὐ τοι ἔτι ζωοῖσι μετέσσομαι, ἀλλὰ με χεῖμα

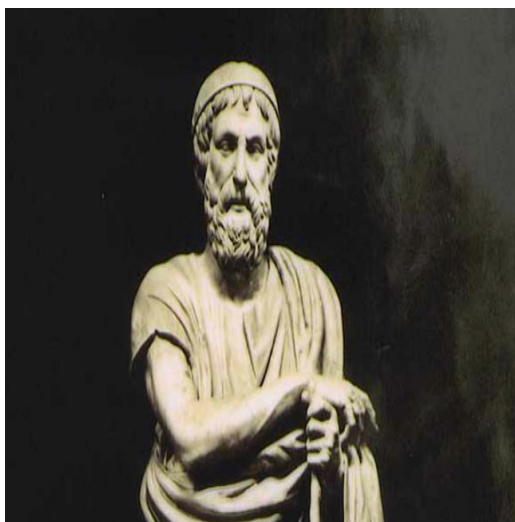
4.2.Η πρόταση της ομάδας Δ.- Ζ.- Ζ.

Άρρητότητα Ομηρική στην « Οδύσσεια»

Μαρία Δ., Μαρίνα Ζ., Δέσποινα Ζ.

Ο Όμηρος φέρεται ως ο συγγραφέας των ποιητικών κειμένων της Ιλιάδας και της Οδύσσειας, από τα πρώτα κείμενα της Ιστορικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, γνωστά ως «Ομηρικά Έπη».

Διαθέτουμε επτά βίους του Ομήρου που προέρχονται από την αρχαιότητα. Η καταγωγή του φαίνεται πως ήταν από την Ιωνία και θυρεείται ότι επτά πόλεις ερίζουν για την καταγωγή του, με επικρατέστερες τη Σμύρνη και τη Χίο. Ως γονείς του αναφέρονται ο Μαίων και η Κριθίδα και λέγεται ότι το πραγματικό του όνομα ήταν Μελησιγένης, επειδή γεννήθηκε κοντά στον ποταμό Μέλητα της Σμύρνης και ότι πήρε αργότερα το όνομα «Όμηρος», είτε επειδή ήταν τυφλός, είτε επειδή ήταν όμηρος των Κολοφονίων στον πόλεμο με τη Σμύρνη.



Σύμφωνα με τους βίους του, περιόδευσε απαγγέλλοντας τα έργα του στις ελληνικές πόλεις, απέκτησε μεγάλη φήμη, αλλά σε ένα διαγωνισμό με τον Ησίοδο στη Χαλκίδα δεν πήρε βραβείο, επειδή προτιμήθηκε ο Ησίοδος ως ποιητής που εξυμνούσε την ειρήνη.

Πιθανός τόπος θανάτου του είναι η Ίος.

Η σύγχρονη έρευνα, και ειδικότερα όσοι δέχονται ότι ο Όμηρος μπορεί να θεωρηθεί πραγματικό πρόσωπο, τοποθετεί τη ζωή του στον 8ο αι. π.Χ. και θεωρεί πιθανό ότι ήταν Ίωνας αοιδός, συνεχιστής μιας μακραίωνης παράδοσης προφορικών ηρωικών αφηγήσεων, που συνέθεσε την *Ιλιάδα* γύρω στο 750 π.Χ. και την *Οδύσσεια* (αν όντως συνέθεσε και τα δύο έργα) γύρω στα 710 π.Χ.

Ο Όμηρος στο έργο του « Οδύσσεια» και συγκεκριμένα στην ραψωδία «ξ» και στον στίχο 466, αναφέρει τον όρο **ἄρρητον**. Ετυμολογικά αυτή η λέξη έχει δύο σημασίες :

1. (λόγ.) που δε λέγεται, που δεν εκφράζεται, απεριγράφτος

Ἄρρητες επιθυμίες / επιδιώξεις.

2. (μαθημ.) *ἄρρητοι αριθμοί*, που δεν είναι ούτε ακέραιοι ούτε κλάσματα, αλλά στη δεκαδική μορφή τους έχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Στο στίχο αυτό αποδίδεται η πρώτη σημασία, καθώς η πρόταση στην οποία εμπεριέχεται μεταφράζεται με τον εξής τρόπο: «καὶ νὰ λὲν ὅσα ἦτανε καλὸ νὰ μὴ λεχτοῦνε».

Άρρητα ρήματα

Ειδικότερα η ραγωδία αυτή αναφέρεται στον ερχομό του Οδυσσέα στον Εύμαιο που τον φιλοξενεί εγκάρδια και θρηνεί για τον αφέντη του που χάθηκε πια και για τις προσβολές του οίκου του από τους μνηστήρες. Ο ζητιάνος-Οδυσσέας του λέει πως είναι Κρητικός και διηγείται φανταστικές του περιπέτειες καταλήγοντας ότι ο Οδυσσέας έρχεται πίσω του. Ο Εύμαιος δεν πείθεται αλλά ο Οδυσσέας βεβαιώνεται για την αφοσίωσή του.

Πηγές

- <http://www.mikrosapoplous.gr/homer/odm14.htm>
- http://www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/triantafyllides/search.html?lq=%22%CE%AC%CF%81%CF%81%CE%B7%CF%84%CE%BF%CF%82+-%CE%B7+-%CE%BF%22&dq=
- <http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%8C%CE%BC%CE%B7%CF%81%CE%BF%CF%82>

5.Αποδείξεις αρρητοτήτων από τα σχολικά βιβλία

Ομάδα: Κ., Μ., Μ., Π.

Αλέξανδρος Κ., Φοίβος Μ.

Νικόλαος Μ., Στέφανος Π.

5.1.Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οποιονδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ υπάρχει τμήμα EZ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορές τόσο στο AB , όσο και στο $\Gamma\Delta$.

Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθηση τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές.

Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ στην γεωμετρία στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγώνιου προς την πλευρά του τετραγώνου, ή κατά την μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στην θεωρία της μουσικής στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου που το τετράγωνό του είναι ίσο με δύο.

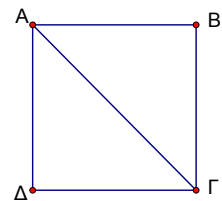
Άρρητα ρήματα

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ' ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα <<Αναλυτικά Ὑστερα>> του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί <<αν υποθεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα ισούται με τον περιττό>>.

«Ὅτι μὲν οὖν οἱ δεικτικοὶ περαίνονται διὰ τῶν προειρημένων σχημάτων, φανερόν· ὅτι δ' καὶ οἱ εἰς τὸ ἀδύνατον, δῆλον ἔσται διὰ τούτων. πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μὲν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίη τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἢ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμέτρου τεθείσης. τὸ μὲν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον εἶναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν»,
Aristoteles :Analytica priora et posteriora, 41a,21-41a,32.

Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:

Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά AB είναι σύμμετρη προς τη δια γώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακέραιων αριθμών, δηλαδή $AB/ΑΓ = \alpha/\beta$ όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι (μπορούμε πάντα να απλοποιήσουμε και να έχουμε το ισοδύναμο «ανάγωγο» κλάσμα). Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2 AB^2$. Επομένως, $AB^2 / ΑΓ^2 = \alpha^2 / \beta^2 = 1/2$ ή $\beta^2 = 2\alpha^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο β^2 είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος, δηλ. $\beta = 2\lambda$.



Τότε ο a πρέπει να είναι περιττός, αφού το a/β είναι ανάγωγο κλάσμα. Από την $\beta^2 = 2a^2$ παίρνουμε: $(2\lambda)^2 = 2a^2$, η $4\lambda^2 = 2a^2$, η $2\lambda^2 = a^2$ κι επομένως ο a^2 είναι άρτιος, οπότε και ο a είναι άρτιος που είναι άτοπο (υποθέσαμε το a/β ανάγωγο, αν οι ακέραιοι a και β είναι και οι δύο άρτιοι τότε έχουν κοινό παράγοντα τον αριθμό 2).

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιτού που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.

[1] Αν ο κ είναι άρτιος, $\kappa=2\lambda$,
τότε: $\kappa^2=4\lambda^2=2(2\lambda^2)$, δηλ. και ο κ^2 είναι άρτιος.

Άρτιοι είναι τα πολλαπλάσια του 2, οι ακέραιοι της μορφής « 2λ ».

Οι περιττοί διαιρούμενοι δια 2 αφήνουν υπόλοιπο 1 (τα δυνατά υπόλοιπα σε μια διαίρεση με διαιρέτη 2 είναι ακριβώς 2, το 0 και το 1). Οι περιττοί είναι της μορφής $2\mu+1$. Διαιρετέος=διαιρέτης επί ηλίκο+υπόλοιπο.

[2] Αν ο ν είναι περιττός, $\nu=2\mu+1$, τότε και το τετράγωνό του
 $\nu^2=(2\mu+1)^2=4\mu^2+4\mu+1=2(2\mu^2+2\mu)+1$, είναι περιττός.

Ένας ακέραιος θα είναι είτε άρτιος, είτε περιττός, οι περιπτώσεις [1] και [2] είναι «εξαντλητικές», οπότε ισχύουν και οι αντίστροφες προτάσεις:

[3] Αν ο κ^2 είναι άρτιος, τότε και ο κ είναι άρτιος,

[4] Αν ο κ^2 είναι περιττός, τότε και ο κ είναι περιττός.

Οι αποδείξεις των αντίστροφων προτάσεων γίνονται με την «εις άτοπον απαγωγή», αποδεικτική μέθοδο που αναπτυχθηκε στη σχολή του Πυθαγόρα. Π.χ. για την [3], αν ο κ δεν είναι άρτιος, τότε θα είναι περιττός, αφού δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, αλλά τότε και το τετράγωνό του θα έπρεπε να είναι περιττό, ενώ από την υπόθεση είναι άρτιο.

5.2. Η τετραγωνική ρίζα του 2, ίσως ο πρώτος άρρητος.

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2} = \frac{\kappa}{\lambda}$,

όπου κ και λ είναι φυσικοί αριθμοί και κ/λ ανάγωγο κλάσμα (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις).

Έχουμε διαδοχικά:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2, 2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}, \kappa^2 = 2\lambda^2, \text{ που σημαίνει ότι ο } \kappa^2 \text{ είναι}$$

άρτιος, οπότε και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής $\kappa=2\mu$.

Οπότε: $\kappa^2=(2\mu)^2$, $(2\mu)^2=2\lambda^2$, $4\mu^2=2\lambda^2$, $\lambda^2=2\mu^2$, που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ , λ είναι άρτιοι, το κλάσμα κ/λ δεν είναι ανάγωγο(άτοπο).

Η «εις άτοπον απαγωγή» είναι η αποδεικτική μέθοδος που κυριαρχεί στις αποδείξεις αρρητοτήτων. Η μέθοδος αναπτύχθηκε στη σχολή του Πυθαγόρα. Η ιδέα πίσω από την ευφυή αυτή μέθοδο είναι ότι αποδεικνύουμε μια πρόταση δείχνοντας την αναλήθεια της αντίθετης. Ένα θεώρημα ή μια πρόταση είτε είναι αληθινή είτε είναι λανθασμένη: π.χ. *«αυτή τη στιγμή είτε διαβάζετε αυτή τη σελίδα είτε δεν τη διαβάζετε»* (Livio, 2005: 62). Οι Μαθηματικοί δεν δέχονται ότι τη *«μισοδιαβάζετε»* (αν και υπάρχει και η *«ασαφής λογική»* με ποσοστά διαβάσματος). *«Όταν έχεις εξαλείψει το αδύνατο, οτιδήποτε μένει, όσο απίθανο κι αν φαίνεται, πρέπει να είναι η αλήθεια»* (Humphrey, 1997).

Μετά την $\sqrt{2}$ το ρεύμα της αρρητότητας ακολούθησαν οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών 3,5,6,7,10,11,12,13,14,15(αποδεικνύει από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο). Επίσης ο Θεαίτητος απέδειξε ότι **αν** το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό N που δεν είναι τετράγωνος, **τότε** η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq a^2$, τότε ο \sqrt{N} δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M} + \sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M} + \sqrt{N}}$. Πιστεύετε ότι το 10^ο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη (Περί Ασυμμέτρων) είναι του Θεαίτητου.

5.3.Θεαίτητος

Πλάτων, Θεαίτητος [147d3-d9]

ΘΕΑΙ. Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δ' ταύτῃ πως ἐνέσχετο ἡμῖν οὖν εἰσηλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἓν, ὅτι(α) πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Στο παραπάνω χωρίο ο Θεαίτητος αναφέρει ότι ο Θεόδωρος μιλούσε για την ασυμμετρία των $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{17}$ και παραλείπει την ασυμμετρία του $\sqrt{2}$. Από αυτό το απόσπασμα προκύπτει με έμμεσο τρόπο ότι η ασυμμετρία του $\sqrt{2}$ ήταν ήδη γνωστή πριν την εποχή του Θεόδωρου και η γνώση της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ ανάγεται στην εποχή των Πυθαγορείων.

Άρρητα ρήματα

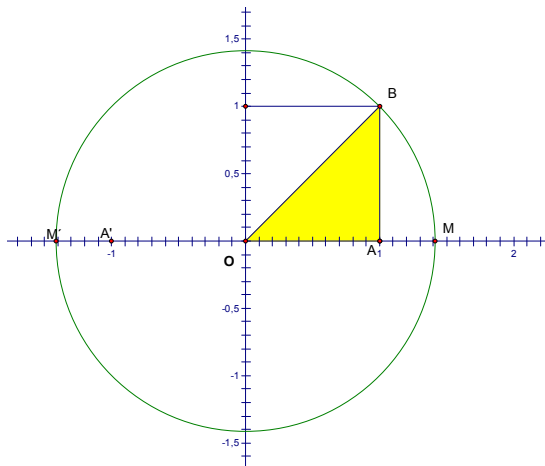
***Θεόδωρος ο Κυρηναίος** (περίπου 430 π.Χ.). Μαθηματικός, γνωστός Γεωμέτρης, συνομήλικος του Σωκράτη, δάσκαλος του Θεαίτητου. Τον αναφέρει ο Πλάτωνας στο έργο του “Θεαίτητος” το οποίο του το αφιέρωσε, όταν ο Θεαίτητος σκοτώθηκε σε μάχη στην Κόρινθο. Ο Θεόδωρος απέδειξε γεωμετρικά ότι οι ρίζες των αριθμών 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17 είναι ασύμμετροι και επίσης δίδαξε στον νεαρό Θεαίτητο τις αποδείξεις (η αρρητότητα της ρίζας του 2 ήταν ήδη γνωστή).

5.4. Τοποθέτηση των αρρήτων στην αριθμοευθεία

Στο σημείο A του πραγματικού άξονα (του $\chi'\chi$) που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα AB με μήκος 1.

Τότε η υποτεινούσα του ορθογωνίου τριγώνου OAB έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$.

Στη συνέχεια με κέντρο το O και ακτίνα $OB = \sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στα σημεία M και M' που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως. Στο σχήμα φαίνεται η τοποθέτηση των σημείων $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ και $(0, -\sqrt{2})$.



5.5.Η προσέγγιση του «π» από τον Αρχιμήδη(250 π.Χ.)

Ἐνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ $\zeta\tau\lambda\zeta$ (6336) πρὸς βιζ δ (2017 $\frac{1}{4}$), ἅπερ τῶν βιζ δ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα ($\frac{233}{71}$).

Archimedes: Dimensio circuli, 1,143,13-1,143,15

Προσέγγιση του λόγου $\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{25344}{8069}$ με τον λόγο $\frac{233}{71}$, μικρότερος

$$\frac{233}{71} < \frac{25344}{8069}$$

Αρχιμήδους, *Κύκλου Μέτρησις* (χρυσουρχείο υπολογισμών κατά Fowler), Πρόταση 3(γ)

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μ ν ἢ ἐβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δ ἢ δέκα ἐβδομηκοστομόνοις.

Archimedes: Dimensio circuli, 1,140,9-1,140,11

καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ρς γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἥπερ $\delta\chi\omicron\gamma$ πρὸς $M\ 10\alpha$ $\delta\chi\pi\eta$. Καὶ ἐστὶν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν $\chi\zeta\zeta$, ἅπερ τῶν $\delta\chi\omicron\gamma$ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἐβδόμῳ μέρει μείζον· ἢ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἐβδόμῳ μέρει μείζων.

Archimedes: Dimensio circuli, 1,143,13-1,143,15

Ο λόγος $\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = \frac{29376}{9347}$ προσεγγίζεται ἀπὸ τον $\frac{22}{7}$, μεγαλύτερος.

$$3,14084507\dots = \frac{223}{71} = 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142857$$

*Προσέγγιση του μήκους και του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα, Β΄ Λυκείου, Κεφ.11

5.6.Αριστοτέλης(350 π.Χ.)

Κλείνουμε με ένα σχόλιο του Αριστοτέλη (Metaphysica 983 α 13-21) σύμφωνα με το οποίο όλοι αρχίζουν με απορία όταν ακούν για την ασυμμετρία της πλευράς και της διαγωνίου, όμως με κατάλληλη διδασκαλία, οι ιδέες γίνονται κατανοητές και ο «γεωμετρικά εκπαιδευθείς νους» τελικά δεν απορεί.

...-δεῖ μέντοι πως καταστήναι τὴν κτήσιν αὐτῆς εἰς τοῦναντίον ἡμῖν τῶν ἐξ ἀρχῆς ζητήσεων. ἄρχονται μ ν γάρ, ὥσπερ εἶπομεν, ἀπὸ τοῦ θαυμάζειν πάντες εἰ οὕτως ἔχει, καθάπερ <περὶ> τῶν θαυμάτων ταυτόματα [τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν] ἢ περὶ τὰς τοῦ ἡλίου τροπὰς ἢ τὴν τῆς διαμέτρου ἀσυμμετρίαν (θαυμαστὸν γὰρ εἰ ναι δοκεῖ πᾶσι <τοῖς μήπω τεθεωρηκόσι τὴν αἰτίαν> εἴ τι τῷ ἐλαχίστῳ μὴ μετρεῖται)·δεῖ δ εἰς τοῦναντίον καὶ τὸ ἄμεινον κατὰ τὴν παροιμίαν ἀποτελευτῆσαι, καθάπερ καὶ ἐν τούτοις ὅταν μάθωσιν· οὐθ ν γὰρ ἂν οὕτως θαυμάσειεν ἀνὴρ γεωμετρικὸς ὡς εἰ γένοιτο ἡ διάμετρος μετρητή.

Πηγές

Βιβλίο Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου κεφ. 9, κεφ.11.

Βιβλίο Ἀλγεβρας Α΄ Λυκείου κεφ. 2.

Livio, M. (2005). *Ο Χρυσός Λόγος*, μτφρ. Μαρ. Σταυροπούλου : Ενάλιος.

Humphrey, N. (1997). Μια ἄλλη ματιά. *Quantum*, 4(5): 2-3. Κάτοπτρο.

TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρὸς Ἑλληνικῆς Γλώσσας).

Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy. A New*

Reconstruction. Oxford University Press.

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%80

6.ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ

Ομάδα Σ.- Φ.

Δημήτρης Σ.-Νεκτάριος Φ.

6.1.Χρυσές Κατασκευές

Ακολουθία «Χρυσών» ορθογωνίων

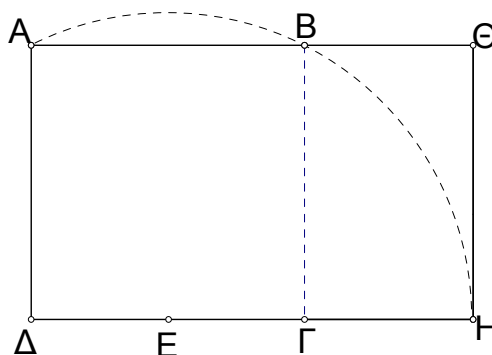
A.Χρυσό ορθογώνιο είναι εκείνο που οι πλευρές του έχουν λόγο φ

1.Τετράγωνο ΑΒΓΔ, πλευράς «α». 2.Ε το μέσον της ΓΔ. 3.Κύκλος (Ε,ΕΒ)

4. «Η» είναι η τομή της προέκτασης της ΔΓ με τον κύκλο

Το ορθογώνιο ΔΗΘΑ είναι

$$\text{χρυσό, δηλ. } \frac{\Delta\text{H}}{\text{H}\Theta} = \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$



Απόδειξη.

Υπολογίζουμε την ακτίνα του κύκλου ΕΒ

Υπολογίζουμε το ΔΗ

Υπολογίζουμε τον λόγο ΔΗ/ΗΘ

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΒΓ έχουμε:

$$ΕΓ^2 + ΒΓ^2 = ΕΒ^2$$

Και επειδή $ΕΓ = a/2$ και $ΒΓ = a$, το $ΕΒ = (\sqrt{5}a)/2$

$$\Delta\text{H} = \text{EH} + \Delta\text{E} = (\alpha \sqrt{5})/2 + \alpha/2 = \alpha (\sqrt{5} + 1) / 2$$

$$\Delta\text{H}/\text{H}\Theta = \alpha(\sqrt{5} + 1)/2 : \alpha = (\sqrt{5} + 1)/2$$

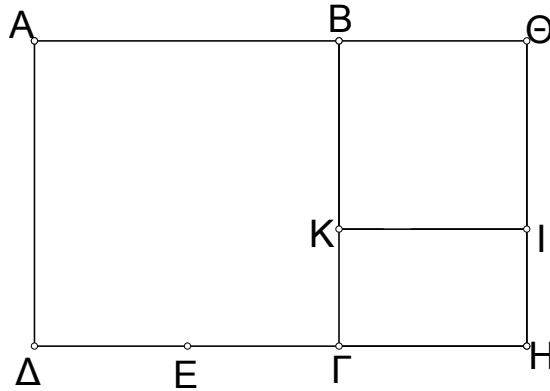
Άρρητα ρήματα

Β. Το ορθογώνιο ΒΘΗΓ είναι χρυσό:

$$\Gamma\text{H} = \Delta\text{H} - \Delta\Gamma = \alpha(\sqrt{5} + 1)/2 - \alpha = (\sqrt{5} - 1)\alpha/2$$

$$\Theta\text{H}/\Gamma\text{H} = \alpha : (\sqrt{5} - 1)/2 = 2(\sqrt{5} + 1)/4 = (\sqrt{5} + 1)/2$$

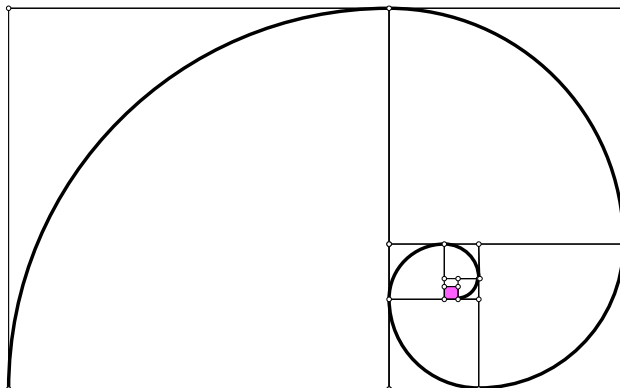
Γ. Αφαιρούμε το τετράγωνο ΒΘΙΚ... το ορθογώνιο ΚΙΗΓ είναι χρυσό.



$$\text{IH} = \Theta\text{H} - \Theta\text{I} = \alpha - \Gamma\text{H} = \alpha - (\sqrt{5}-1)\alpha/2 = \alpha(-\sqrt{5}+3)/2$$

$$\text{Άρα } \Gamma\text{H}/\text{IH} = (\sqrt{5} + 1)/2$$

Δ. Για την σπείρα κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλια, (Γ,ΓΔ), (Κ,ΚΒ)...



6.2. Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (χρυσή τομή)

Το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (O, OE = PE/2)

Αν $PE = \alpha$, τότε:

$$\alpha^2 = PB(PB + \alpha) \dots$$

$$EP^2 = PB(PB + 2OB)$$

Αφού $PE = \alpha$, $PB = \chi$

και $2OB = \alpha$, έχουμε

$$\alpha^2 = \chi(\chi + \alpha).$$

Μεταφέρουμε το PB στο PE,

$PA = PB$. Για ευκολία

θετούμε $PB = PA = \chi$ και θα

$$\text{αποδείξουμε ότι } \chi = \alpha \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

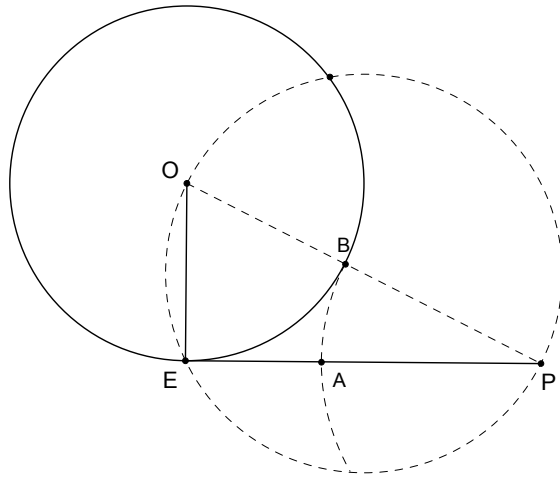
Από την προηγούμενη απόδειξη ισχύει: $\chi^2 + \alpha\chi - \alpha^2 = 0 \dots$

Διακρίνουσα $5\alpha^2$, ρίζες $\frac{-\alpha \pm \alpha\sqrt{5}}{2}$. Για την θετική ρίζα $\chi = (\sqrt{5} - 1)\alpha/2$,

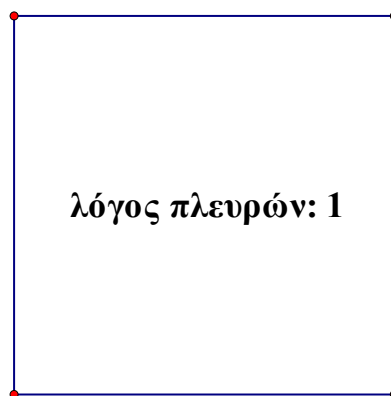
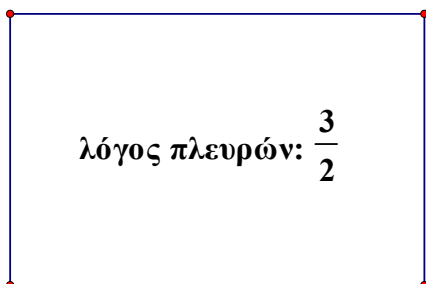
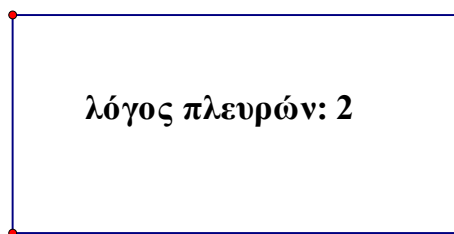
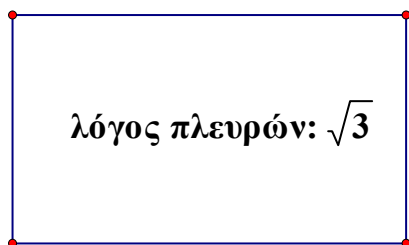
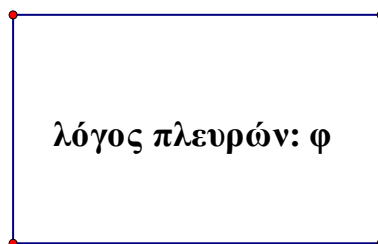
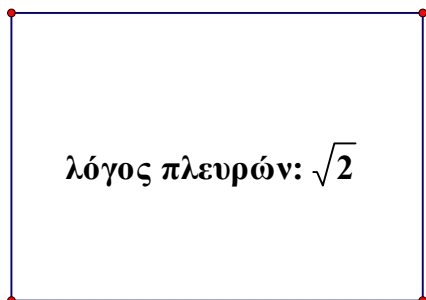
έχουμε: $\frac{\alpha}{\chi} = \varphi$ [$\alpha/\chi = \alpha : ((\sqrt{5} - 1)\alpha/2) = (\sqrt{5} + 1)/2$].

Αποδεικνύουμε ότι και $\frac{PA}{AE} = \frac{\chi}{\alpha - \chi} = \varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

$$\frac{PA}{AE} = \frac{\chi}{\alpha - \chi} = \frac{\frac{(\sqrt{5} - 1)\alpha}{2}}{\alpha - \frac{(\sqrt{5} - 1)\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$



6.3.Ορθογώνια

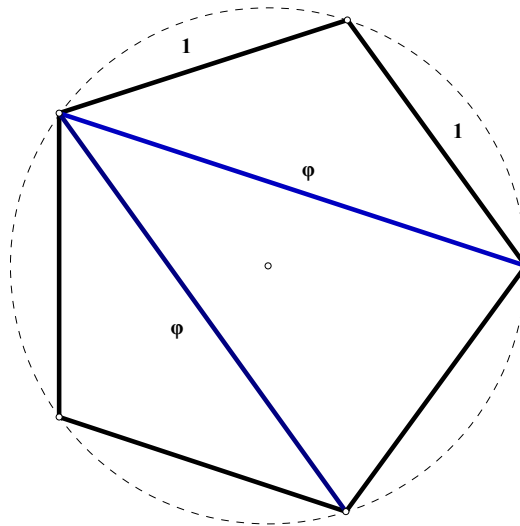
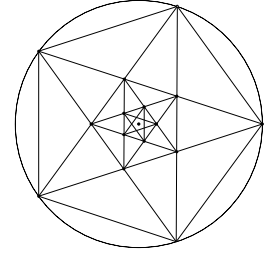


6.4.Κανονικό πεντάγωνο

Ποιόν άρρητο ανακάλυψαν πρώτα οι

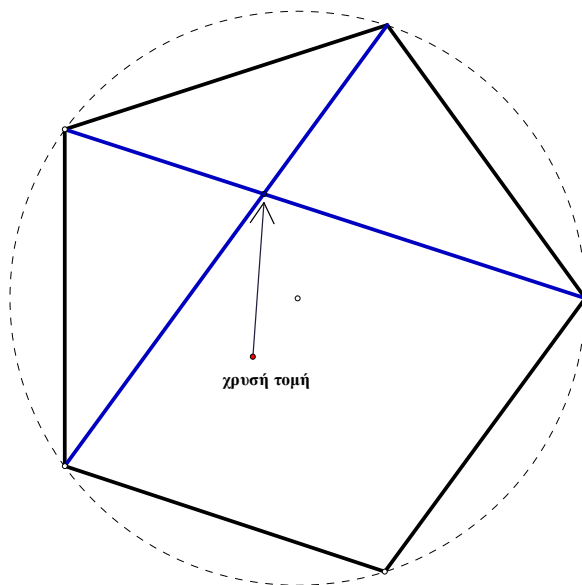
Πυθαγόρειοι; Τον $\sqrt{2}$ ή τον φ ;

Γνωρίζουμε το «έμβλημα» της Σχολής. Μερικοί ιστορικοί υποστηρίζουν ότι με την γραμμική κατασκευή του πενταγώνου οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν στην ανακάλυψη του άρρητου «χρυσού αριθμού» φ , που αντιστοιχεί στο λόγο της «χρυσής τομής», ή παραδοσιακά, της διαίρεσης ενός ευθ.τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Ο αριθμός αυτός θεωρήθηκε μια «Θεία Αναλογία» στενά συνυφασμένη με την αίσθηση του κάλλους και της αρμονίας.



Άρρητα ρήματα

Από την Γεωμετρία Β' Λυκείου, ενότητα 11.2, άσκηση 7:



Κάθε διαγώνιος του κανονικού πενταγώνου τέμνεται από μία άλλη στη θέση της χρυσής τομής, δηλ. κάθε διαγώνιος διαιρεί αυτήν που τέμνει και διαιρείται από αυτήν που τέμνεται σε μέσο και άκρο λόγο.

Είναι η πρόταση XIII.8 των Στοιχείων του Ευκλείδη:

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

«Σε κάθε κανονικό πεντάγωνο δύο διαδοχικές διαγώνιοι τέμνονται σε άκρο και μέσο λόγο και τα μεγαλύτερα τμήματα της διαίρεσης είναι το καθένα ίσο με την πλευρά του πενταγώνου».

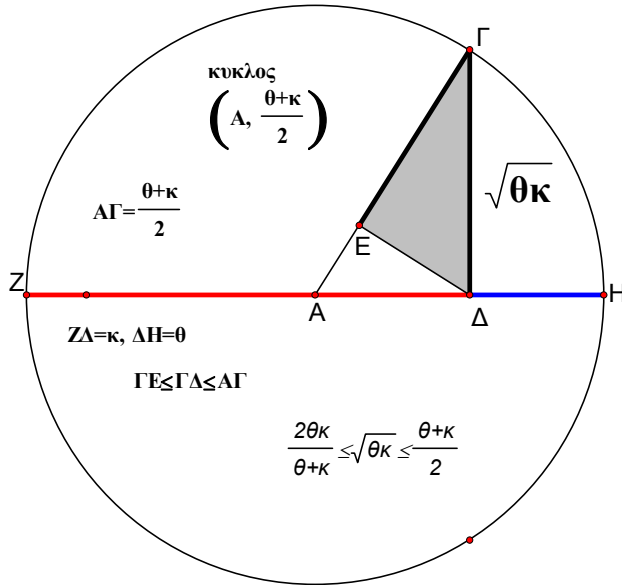
Το κείμενο που ακολουθεί είναι από το βιβλίο «Ιερή Γεωμετρία» του Δ. Ευαγγελόπουλου, σελ.208, εκδ. Αρχέτυπο, Θεσσαλονίκη, 2002.

«Οι αρχαίοι Έλληνες σκέφτηκαν ότι η ομορφιά είναι η σωστή δόση και αναλογία των αντίθετων και ότι η αρμονική διαίρεση δεν σημαίνει αναγκαστικά την ισότητα και τη συμμετρία, δηλ. μια στείρα, στατική διχοτόμηση, αλλά την επίτευξη μιας δυναμικής ισορροπίας μεταξύ δυο αρμονικών άνισων μερών. Μόνο οι φιλόσοφοι και οι μαθηματικοί μπορούσαν να συλλάβουν μια τέτοια ιδέα και να βρουν σε μια ανισότητα την ακριβή θέση μιας τέλει αρμονίας, να γεφυρώσουν με πραγματική τάξη το χάος ανάμεσα στα δυο άκρα» (Ευαγγελόπουλος Δ., Ιερή Γεωμετρία, 2002 σελ.208, εκδ. Αρχέτυπο, Θεσσαλονίκη).

Η «Θεία Αναλογία» χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχαιότητα (κτίρια και αγγεία), αλλά και στις μέρες μας, π.χ. στο κτίριο των Ηνωμένων Εθνών και στο σύστημα Modulor του Le Corbusier (ψευδώνυμο του γνωστού γάλλου αρχιτέκτονα C.E.Jeanneret). Χρησιμοποιήθηκε όχι μόνο στην Αρχιτεκτονική, αλλά και στην Ζωγραφική, και το όνομά της οφείλεται στον Λεονάρντο Ντα Βίντσι, που ήταν ο πρώτος που την ονόμασε Sectio Aurea, δηλ. χρυσή τομή.

Η χρυσή τομή συνδέεται τόσο με τη φανερή όσο και με την κρυμμένη αρμονία μεταξύ δυο μερών ή του μέρους με το όλον. Ο Φειδίας, αρχιτέκτονας του Παρθενώνα, του καλλιμάρμαρου αυτού αριστουργήματος της Ελληνικής Αρχαιότητας, αξιοποίησε στο έπακρο την ιδιότητα της χρυσής τομής και «κληροδότησε» στην ανθρωπότητα το σύμβολο για τον $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, το «φ».

6.5.Ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου



Αρμονικός μέσος : $M_h = 2\alpha\beta/(\alpha+\beta)$, Γεωμετρικός μέσος: $M_g = \sqrt{\alpha\beta}$,

Αριθμητικός μέσος: $M_a = (\alpha + \beta) / 2$. Ισχύει : $M_h \leq M_g \leq M_a$

Η εικόνα δείχνει την γεωμετρική ερμηνεία: Ότι είναι απαραίτητο για την απόδειξη...«ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον»

(Αριστοτέλης, Μετεωρολογικά, 375b 18).

Αλγεβρική απόδειξη της ανισότητας γεωμετρικού-αριθμητικού

μέσου: $\sqrt{\theta\kappa} \leq \frac{\theta + \kappa}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{\theta} - \sqrt{\kappa})^2 \geq 0$.

Αρμονικός είναι ο αντίστροφος του αριθμητικού μέσου των

αντιστρόφων. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη για $\frac{1}{\theta}, \frac{1}{\kappa}$.

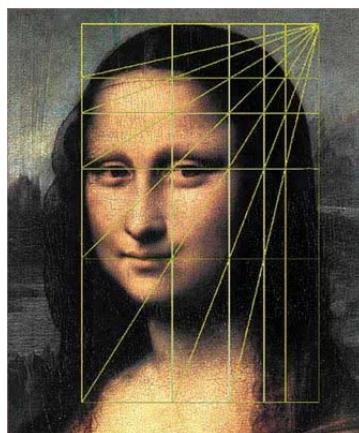
Χρησιμοποιήθηκε από τον Αρχύτα για την προσέγγιση της $\sqrt{2}$.

7.0 αριθμός φ

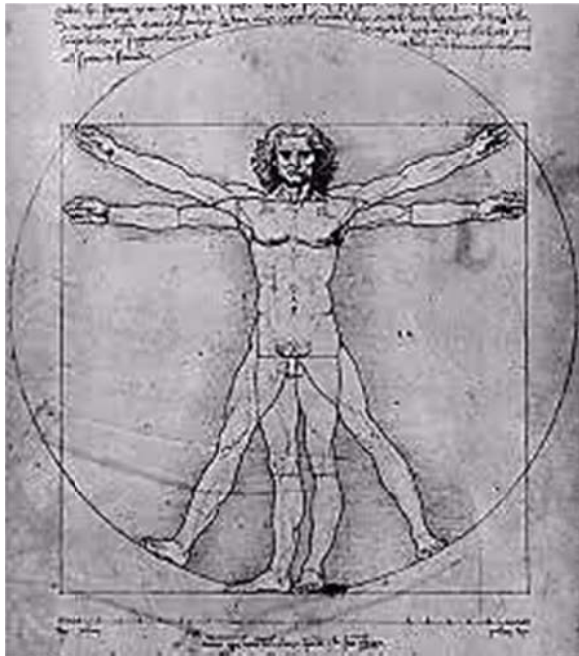
Ομάδα φ: Β., Κ., Π.

Μάρα Β., Ξένια Κ., Ελευθερία Π.

Ο ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ Φ



Άρρητα ρήματα



Ένα από τα γνωστότερα έργα του Leonardo Da Vinci,
«Homo Vitruvians».

Ο Da Vinci εικονογραφεί τον κανόνα των ανθρώπινων αναλογιών που διετύπωσε ο Βιτρούβιος.

Η ανθρώπινη φιγούρα τοποθετείται αρχικά μέσα σε έναν κύκλο κι έπειτα σε ένα τετράγωνο, διαδικασία που ακολούθησε ο Leonardo για όλες τις εικονογραφήσεις της πραγματείας του Βιτρούβιου.

Πηγές

Βαζούρα Ελένη: Η Μαθηματική Αναλογία της Χρυσής τομής, Διπλωματική εργασία στο ΠΜΣ: «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Οκτώβριος 2007, ΕΚΠΑ.

http://www.awakengr.com/2012/09/blog-post_5584.html#ixzz3LOJZgNfk

Under Creative Commons License: [Attribution Share Alike](#)

8. Προσεγγίσεις αρρήτων: Κ.-Σ.

Ομάδα: Δημήτρης Κ.-Λευτέρης Σ.

8.1. Αρχύτας



Ο Αρχύτας (428 π.Χ. - 347 π.Χ.) γιος του Μνήσαρχου ήταν επιφανής Πυθαγόρειος φιλόσοφος, καταγόμενος από τον Τάραντα της Μεγάλης Ελλάδας. Ανήκει στην δεύτερη γενιά Πυθαγορείων και υπήρξε μαθητής του Φιλόλαου του Κροτωνιάτη που ανήκει στην προηγούμενη γενιά Πυθαγορείων. Υπήρξε στρατηγός στην πόλη του επτά φορές, τη στιγμή που ο νόμος απαγόρευε σε όλους τους άλλους να πάρουν τη θέση αυτή για δεύτερη φορά. Ήταν αξιόλογος αστρονόμος, μαθηματικός, μουσικός και πολιτικός. Θεωρείται από τους μεγαλύτερους διανοητές της ελληνικής αρχαιότητας και θαυμάζοταν από όλους για τις αρετές του. Ο Αριστοτέλης έγραψε γι' αυτόν ειδική πραγματεία, «Η φιλοσοφία του Αρχύτα», η οποία δεν έχει διασωθεί. Υπήρξε καλός φίλος του Σωκράτη με τον οποίο διατηρούσε στενές σχέσεις. Ο Αρχύτας πιθανολογείται να είναι εκείνος που μύησε τον Πλάτωνα στον Πυθαγορισμό.

Άρρητα ρήματα

Ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε μαθηματικές αρχές στη μηχανική, και ο πρώτος που χρησιμοποίησε την *αρχή της αντίδρασης* πάνω στην οποία στηρίζεται η λειτουργία των πυραύλων και των αεριοθούμενων αεροπλάνων. Ακόμα, ο Αρχύτας επινόησε και κατασκεύασε ένα αεριοπροωθούμενο περιστέρι, που αποκλήθηκε «πετομηχανή» ή «περιστερά». Ήταν δεινός γεωμέτρης και είναι ο πρώτος ιστορικά που έλυσε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου, γνωστό και ως Δήλιο πρόβλημα που είναι ένα από τα τρία άλυτα γεωμετρικά προβλήματα.

Ο Πλάτωνας έκανε αυστηρή κριτική στην πορεία που έπαιρνε η γεωμετρία με τη χρήση μηχανικών μεθόδων από τον Αρχύτα, θεωρώντας ότι αυτό την απομάκρυνε από τον σκοπό της που είναι να ανάγει τον άνθρωπο στη θέαση των αιώνιων αληθειών.

Άφησε γραπτό έργο του οποίου έχουν διασωθεί μόνο αποσπάσματα. Από πολλούς μελετητές θεωρείται πιθανό ότι ο Πλάτωνας στην «Πολιτεία» του έχει εμπνευστεί ή επηρεαστεί από τα γραπτά του Αρχύτα και τη μεγάλη φιλία που συνέδεε τους δύο άνδρες.

Το θεώρημα του Αρχύτα

Η βασική παρατήρηση είναι ότι οι τέσσερις αριθμοί

$\alpha, \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta$ αποτελούν αναλογία: $\frac{\alpha}{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\beta}$. Αν γίνει δυνατόν

οι δύο «μέσοι όροι» της αναλογίας να εξισωθούν, τότε βρέθηκε η τετραγωνική ρίζα του γινομένου των άκρων όρων, α και β , της αναλογίας.

$$\text{Η ανισότητα } (\alpha, \beta \text{ θετικοί, } \alpha < \beta) \quad \alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta$$

δείχνει την μέθοδο εγκλωβισμού της ρίζας (αυτή είναι μέρος της ανισότητας των πέντε μέσων του Αρχύτα: αρμονικού - γεωμετρικού - αριθμητικού - τετραγωνικού - αντιαρμονικού μέσου,

$$\alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} \leq \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta} \leq \beta).$$

Για την προσέγγιση της τετραγωνικής ρίζας του 2, δηλ. του αριθμού $\sqrt{2}$, ξεκινάμε με αρχικές τιμές $\alpha=1$ και $\beta=2$ στην

$$\alpha \leq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \leq \dots \sqrt{\alpha\beta} \dots \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \beta. \text{ Παίρνουμε αρχικά τους } \frac{4}{3} \text{ (αρμονικός}$$

μέσος) και $\frac{3}{2}$ (αριθμητικός μέσος). Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τα α, β με

αυτές τις τιμές και παίρνουμε: $\frac{24}{17}, \frac{17}{12}$. Στο τρίτο βήμα, ο μέσος αρμονικός

των δύο προηγούμενων είναι ο $\frac{816}{577}$ και ο μέσος αριθμητικός ο $\frac{577}{408}$.

*Δεκαδικές προσεγγίσεις των κλασμάτων

$$\frac{816}{577} = 1.41421143847487001733102253032928942807625649913344887348353552859618 \backslash$$

$$7175043327556325823223570190641247833622183708838821490467937608318890 \backslash$$

$$8145580589254766031195840554592720970537261698440207972270363951473136 \backslash$$

$$9150779896013864818024263431542461005199306759098786828422876949740034 \backslash$$

$$6620450606585788561525129982668977469670710571923743500866551126516464 \backslash$$

$$4714038128249566724436741767764298093587521663778162911611785095320623 \backslash$$

$$9168110918544194107452339688041594454072790294627383015597920277296360 \backslash$$

$$4852686308492201039861351819757365684575389948006932409012131715771230 \backslash$$

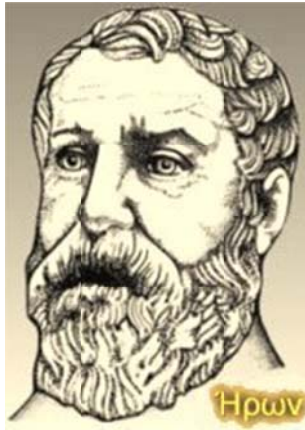
$$502599653379549393$$

$$\frac{577}{408} = 1.414215686274509839$$

$$\text{Παρατήρηση: } \frac{816}{577} = 1.41421\dots,$$

$$\frac{577}{408} = 1.41421\dots$$

8.2. Ήρων



Ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς ήταν μηχανικός και γεωμέτρης. Έζησε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου περίπου τον 1ο π.Χ ή 1ο μ.Χ αιώνα. Η πιο διάσημη εφεύρεση του είναι η αιολόσφαιρα ή ατμοστρόβιλος, η πρώτη ατμομηχανή στην ιστορία. Υπήρξε διευθυντής της περίφημης Ανώτατης Τεχνικής Σχολής της Αλεξάνδρειας, το πρώτο πολυτεχνείο που είχε ιδρυθεί στο Μουσείο για μηχανικούς.

Η μέθοδος του Ήρωνα

Ο Ήρωνα παρατήρησε ότι αν a είναι μια προσέγγιση με έλλειψη του $\sqrt{2}$ τότε ο $2/a$ είναι με υπεροχή. Έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $\sqrt{2}$ βρίσκοντας τον αριθμητικό μέσο των a , $2/a$: $\left\{ \frac{1}{2} \times (a + 2/a) \right\}$

Π.χ. για $a=1$ έχουμε τον αριθμό $3/2$. Στη συνέχεια παίρνουμε $a=3/2$ και καταλήγουμε στον αριθμό $17/12$. Μετά από αλληπάλληλες εφαρμογές καταλήγουμε σε κλάσματα που μας οδηγούν όλο και πιο κοντά στον $\sqrt{2}$.

*Τέταρτη προσέγγιση: $\frac{577}{408}$...γνωριμία με τον Αρχύτα

8.3. Η σύγχρονη μέθοδος

Οι υπολογιστές χρησιμοποιούν την μέθοδο των **Newton-Raphson**, η οποία για την τετραγωνική ρίζα και για αρχική προσέγγιση θετικό ρητό, είναι ίδια με την μέθοδο που πρότεινε ο Ήρωνας.

Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του 2 ακριβώς;

Οι υπολογιστές προσαρμόζουν το «ακριβώς» όχι μόνο στην μέθοδο προσέγγισης, αλλά και στον τρόπο παράστασης των αριθμών στη μνήμη τους και στο πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που χρησιμοποιούν στους υπολογισμούς (οι αριθμομηχανές και στο μέγιστο πλήθος των ψηφίων της οθόνης τους). Για τους αρρήτους το «ακριβώς» υπάρχει μόνο στον κόσμο των Πλατωνικών ιδεών.

Αν αρχίσουμε τον αλγόριθμο Newton-Raphson,

$$x_{n+1} = 0.5 \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \text{ με } x_0=1, \text{ το πρώτο βήμα εξελίσσεται ομαλά: } x_1=1.5.$$

Από το δεύτερο βήμα όμως θα πρέπει να αποφασίσουμε με πόσα δεκαδικά ψηφία θα συνεχίσουμε τους υπολογισμούς και έτσι θα υποχρεωθούμε σε αποκοπές ή στρογγυλεύσεις, γιατί απλά οι μηχανές, δεν συμπαθούν το άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Επιλέγουμε λοιπόν σφάλματα στρογγύλευσης αντί αποκοπής. Αν είμαστε ικανοποιημένοι με ακρίβεια 4 δ.ψ., τότε, διατηρώντας 5 δ.ψ. στους υπολογισμούς, παίρνουμε (στρογγυλοποίηση σε 5 δ.ψ.) : $x_2 = 1.41667$, $x_3 = 1.41422$, $x_4 = 1.41421$ και σταματάμε, γιατί: $|x_3 - x_4| = 0.00001 \leq .5 * 10^{-4}$.

Λέμε ότι: με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων η $\sqrt{2}$ είναι 1.4142, ή ότι η x_4 συμπίπτει με την $\sqrt{2}$ σε 4 δ.ψ., και εννοούμε ότι οι δύο τελευταίες προσεγγίσεις συμπίπτουν σε 4 δ.ψ.

Άρρητα ρήματα

Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις προσεγγίζουν κάποιον αριθμό; Πως γνωρίζουμε ότι προσεγγίζουν τον $\sqrt{2}$ και όχι κάποιον άλλον; Πως γνωρίζουμε ότι οι διαδοχικές επαναλήψεις είναι βελτιώσεις της αρχικής επιλογής x_0 ; Δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί ότι αν $x_0 > 0$

θετικός ρητός, τότε, διαδοχικά: $x_n > 0$, $x_{n+1} - \sqrt{2} = 0.5 \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{\frac{2}{x_n}} \right)^2 \geq 0$,

$x_n \geq \sqrt{2}$, $x_n - x_{n+1} = 0.5 \left(\frac{x_n^2 - 2}{x_n} \right)^2 \geq 0$, $x_n \geq x_{n+1}$, η ισότητα δεν είναι

δυνατή, γιατί η μέγιστη χαρά των ρητών είναι η χαρά του πλησιάζματος των αρρήτων...και φτάνουμε στο μέγιστο κάτω φράγμα της γνήσια φθίνουσας ακολουθίας x_n .

* Πλήρης μελέτη στο Χατζηδής Απ., Αριθμητική Ανάλυση Ι, Κ7: Αριθμητική επίλυση εξισώσεων, σελ.179-220, Ιωάννινα 1978.

Με την βοήθεια ισχυρών υπολογιστών και κατάλληλων προγραμμάτων μπορούμε να πάρουμε χιλιάδες ή και εκατομμύρια δεκαδικά ψηφία (όχι μόνο) του $\sqrt{2}$.

Joseph Raphson

Ο Joseph Raphson γεννήθηκε στο Middlesex της Αγγλίας το 1648 και πέθανε το 1715. Σπούδασε Μαθηματικά στο πανεπιστήμιο του Cambridge. Ο Raphson έγινε γνωστός για την μέθοδο Newton-Raphson. Το πιο αξιοσημείωτο έργο του Raphson είναι η Analysis Aequationum Universalis, η οποία δημοσιεύθηκε το 1690.

Για τον I.Newton(1642-1727) δεν χρειάζονται ιδιαίτερες αναφορές.

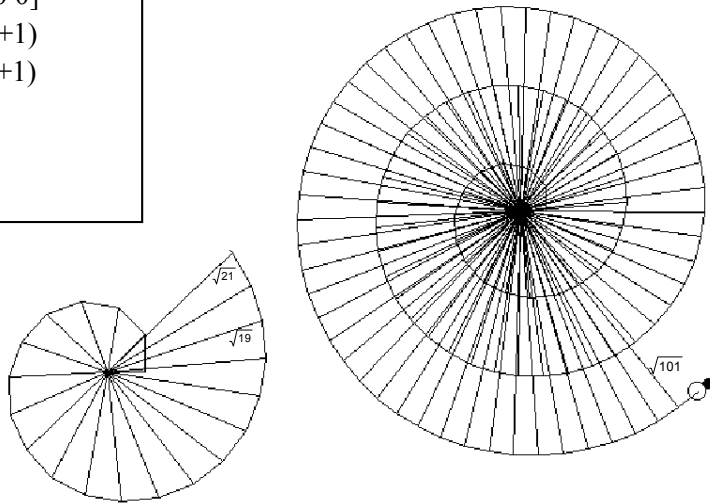
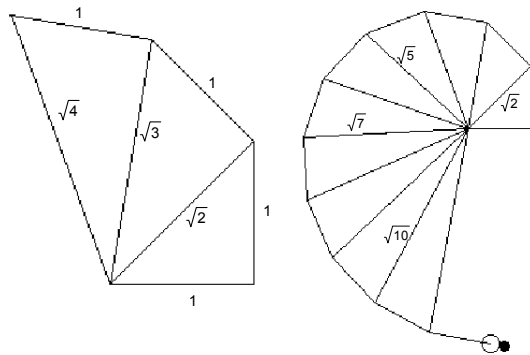
8.4.Κατασκευή ριζών (Logo)

Το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με τη μονάδα. Η τιμή του k είναι τα χελωνοβήματα που παίρνουμε για μονάδα (π.χ.20,30,40,...).Το πλήθος των διαδοχικών ριζών ελέγχεται από την εντολή «αν :x > ...», στην διαδικασία «αρρητο :x»

```

για ρίζες
make "k 20
make "x 1
rt 90 fd :k lt 90 fd :k
αρρητο :x
τέλος

για αρρητο :x
αν :x > 100 [σταμάτησε]
seth towards [0 0]
μ :k*SQRT(:x+1)
π :k*SQRT(:x+1)
δ 90 μ :k
αρρητο :x+1
τέλος
    
```



Το λογισμικό «Logo-Χελωνόκοσμος» διατίθεται δωρεάν από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (<http://etl.ppp.uoa.gr>),

8.5. Άνθρωποι, Μηχανές, Όρια

Δεν δημιουργούν μόνο οι άρρητοι προβλήματα στους υπολογισμούς.

Αν δοκιμάσουμε να μετατρέψουμε σε δεκαδικούς π.χ. τους ρητούς $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$,

$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{109}$, $\frac{1}{61}$, $\frac{360}{109}$, $\frac{1}{98982277}$ κλπ θα διαπιστώσουμε ότι η αρχική

χαρά της ακρίβειας μετατρέπεται και πάλι σε χαρά του πλησιάσματος: Η περίοδος του $1/3$ αποτελείται από το ψηφίο 3 μόνο, αλλά πόσα «3» θα γράψουμε;

Παρόμοια για τον $\frac{2}{9} = 0.\bar{2}$ ή για τον $\frac{1}{28} = 0.03571428\bar{}$.

Υπάρχουν βέβαια και εξωφρενικές περιπτώσεις, π.χ. η περίοδος του $\frac{1}{1861}$ (ο 1861 είναι πρώτος) αποτελείται από 1860 ψηφία, του $\frac{1}{98982277}$ αποτελείται από 16 493 730 ψηφία (ο 98982277 δεν είναι πρώτος, είναι γινόμενο των πρώτων 9931 και 9967).

Αν χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω πρόγραμμα (mathematica) παίρνουμε ρητές προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ σε κλασματική και δεκαδική μορφή με οκτώ δ.ψ. ή και περισσότερα, αν αλλάξουμε το «9» στην εντολή N[yn,9]. Ας μην ξεχνάμε ότι τα λογισμικά υπολογίζουν τα σημαντικά (είναι όλα τα ψηφία του αριθμού, εκτός από τυχόν μηδενικά που υπάρχουν στην αρχή του αριθμού) και όχι τα δεκαδικά ψηφία.

Αν θέλουμε περισσότερα ζεύγη (μ,ν)
αλλάζουμε το 10 στην εντολή {i,1,10}.

```
yn=1;...Print ["y1=",N[yn,9]]...Do [y=((yn+2)/(1+yn));...yn=y;
Print ["y",i+1,"=", N[yn,9], "=", Rationalize[yn]],{i,1,10}]
```

Μερικά αποτελέσματα: $y_2 = 1.50000000 = 3/2$, $y_3 = 1.40000000 = 7/5$,
 $y_4 = 1.41666667 = 17/12$, $y_5 = 1.41379310 = 41/29$, $y_6 = 1.41428571 = 99/70$,
 $y_7 = 1.41420118 = 239/169$, $y_8 = 1.41421569 = 577/408$,
 $y_9 = 1.41421320 = 1393/985$, $y_{10} = 1.41421362 = 3363/2378$

Κλείνουμε με ένα απόσπασμα από το βιβλίο της Rebecca Golstein:

«ΑΙΧΜΑΛΩΤΟΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»... Κ. Γκέντελ

...Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο του νου που θα είναι μηχανικό, ουσιαστικά δηλαδή «νεκρό», αλλά ο νους ακριβώς επειδή είναι «ζωντανός», θα βρίσκεται πάντα ένα βήμα μπροστά σε σχέση με οποιοδήποτε τυπικό απολιθωμένο, νεκρό σύστημα. Χάρη στο θεώρημα του Γκέντελ, ο νους θα έχει πάντα τον τελευταίο λόγο...

Πηγές

1. Δανιηλόπουλος, Σ. (1980). *Εισαγωγή στην Υπολογιστική, την Επιστήμη των Αυτομάτων Υπολογισμών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
2. Χατζηδήμος, Α. (1978). *Αριθμητική Ανάλυση Ι,ΙΙ*. Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.
3. Bunt L., Jones P., Bedient J. (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, μτφρ. Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου. Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
4. Pluvinage, F. (1988). Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μτφρ. Αθανάσιος Γαγάτσης-Μαρίανα Τζεκάκη. *Διάσταση 2*: 48-58.

9.Εξώφυλλο-Οπισθόφυλλο

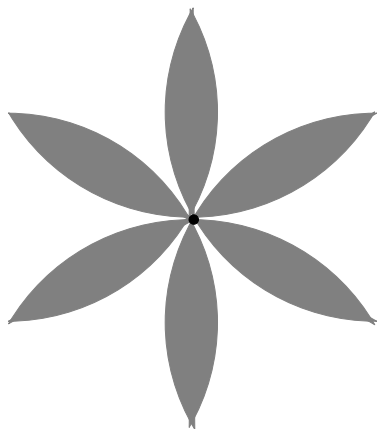
Ομάδα: Αγάπη Γ., Αργυρώ Δ.

Εξώφυλλο:

Χρυσή έλλειψη, ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό άξονα είναι φ.

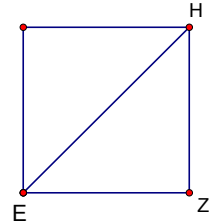
Οπισθόφυλλο:

Ρητοί εναντίων αρρήτων



10.Επίμετρο: Σωκράτης Ντριάνκος

Ο αριθμός $\sqrt{2}$ οφείλει την ύπαρξή του στη διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου και στις αναρίθμητες ανεπιτυχείς προσπάθειες εύρεσης κοινής μονάδας μέτρησης με την πλευρά αυτού του τετραγώνου.



Με έναυσμα τον $\sqrt{2}$ μπορεί να εξηγηθεί και η ελληνική ιδέα του «μεγέθους» και το νόημα της ασυμμετρίας μεγεθών: Ας υποθέσουμε ότι ένας (βαθμολογημένος) χάρακας μετρά ακριβώς την πλευρά (ή τη διαγώνιο), οπότε τα σημεία E, Z (ή τα E, H) συμπίπτουν με δύο «σημάνσεις» του χάρακα.

Τότε, αν ο χάρακας τοποθετηθεί έτσι ώστε ένα σημάδι του να συμπίπτει με το E, το άλλο άκρο της διαγωνίου, το H (ή της πλευράς, το Z) θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών σημάνσεων αυτού του χάρακα. Πάντα, για κάθε χάρακα, ανεξάρτητα από το πλήθος των σημάνσεων. Διαφορετικά, για κάποια μονάδα u, θα είχαμε $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{mu}{nu}$ και ο $\sqrt{2}$ θα ήταν ο ρητός $\frac{m}{n}$.

Συνεχίζουμε όπως στην ενότητα 5.2(σελ.54),...άτοπον!

Αυτή η απόδειξη ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν ανήκει στους ρητούς, δεν προσφέρει κάποια βοήθεια στην κατανόησή του. Όπως παρατηρεί και ο Hardy στην «Απολογία» του, είναι ένα θεώρημα καθαρής αριθμητικής που «δεν απαιτεί καμία γνώση «αρρήτων αριθμών» ούτε εξαρτάται από οποιαδήποτε θεωρία για τη φύση τους» (Hardy, 1993:70).

Η έννοια του αρρήτου είναι φυσικά δύσκολο να κατανοηθεί.

Άρρητα ρήματα

Στο διάσημο έργο τους «What is mathematics» οι Courant & Robbins(1978: 60) γράφουν ότι δεν υπάρχει κάτι που μπορεί να βοηθήσει τη διαίσθησή μας για να διακρίνουμε τα άρρητα σημεία από τα ρητά.

Δεν δημιουργεί έκπληξη το γεγονός ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας συντάραξε τους Έλληνες φιλοσόφους και μαθηματικούς και ότι αυτή ακολουθείται έως σήμερα από προκλητικές επιδράσεις στους συλλογισμούς. Ας μην ξεχνάμε ότι οι κλασσικοί Έλληνες αρνήθηκαν την έννοια του αριθμού στους άρρητους (τους θεώρησαν γεωμετρικά μεγέθη και εργαζόνταν με μήκη, εμβαδά και όγκους, παρακάμπτοντας τα προβλήματα που δημιουργούσαν ως αριθμοί), αν και ο πραγματικός τους χαρακτήρας εντοπίστηκε πολύ νωρίς από τους Πυθαγόρειους (Kline,1981).

Ο Dedekind στο έργο του «Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί» γράφει: *«Θεωρώ την έννοια του αριθμού ως τελείως ανεξάρτητη από τις εποπτείες του χώρου και του χρόνου. Τη θεωρώ ως άμεσο παράγωγο των νόμων της σκέψης... Οι αριθμοί είναι ελεύθερη δημιουργία του ανθρώπινου νου. Μας βοηθούν να κατανοήσουμε ευκολότερα και σαφέστερα τις διαφορές των πραγμάτων. Μόνο με την καθαρά λογική διαδικασία κατασκευής της επιστήμης των αριθμών και με την απόκτηση του συνεχούς πεδίου των αριθμών μπορούμε να προετοιμαστούμε καταλλήλως για να ερευνήσουμε τις έννοιες του χώρου και του χρόνου, συσχετίζοντάς τις με το αριθμητικό πεδίο που κατασκευάσαμε στο νου μας»(Dedekind,1872).*

Ίσως η κατανόηση της φύσης των άρρητων αριθμών περνά μέσα από την άπειρη ανθυφαίρεση και τα συνεχή κλάσματα.

Από το $[1, 2, 2, 2, \dots]$ μπορούμε να υπολογίσουμε τους όρους της ακολουθίας των ρητών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$: $\alpha_1 = \frac{1}{1}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = \frac{7}{5}$, $\alpha_4 = \frac{17}{12}, \dots$ (βλ.σελ.27). Οι τρεις τελείες δηλώνουν την συνεχή παραγωγή των ρητών προσεγγίσεων και το $[1, 2, 2, 2, \dots]$ είναι ένας άλλος τρόπος γραφής του $\sqrt{2}$ που θυμίζει και την «απειρία» του.

Το σχήμα $[1, 2, 2, 2, \dots]$ περιέχει «συμπυκνωμένη» τη γνώση μας για τον άρρητο $\sqrt{2}$.

Τα «άρρητα» θέματα είναι κάπως δύσκολα για διδασκαλία, αλλά, ...

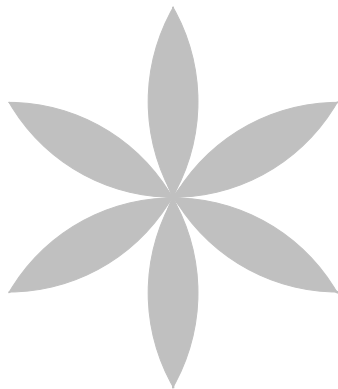
«αν και κανείς ποτέ δεν έφτασε στον Πολικό Αστέρα, πολλοί όμως βρήκαν τη σωστή πορεία κοιτώντας τον» (Polya, 2001: 12).

Βιβλιογραφία

- 1.Courant, R. and Robbins, H. (1978). *What is mathematics?* Oxford University Press.
- 2.Dedekind, R. (1988). Συνέχεια και άρρητοι αριθμοί, *Μαθηματική Επιθεώρηση* 1988 Β (35): 31-41. Αθήνα: ΕΜΕ.
- 3.Hardy, G. (1993). *Η απολογία ενός Μαθηματικού*, μτφρ.Δ.Καραγιαννάκης - Μ.Λάμπρου. Ηράκλειο:ΠΕΚ.
- 4.Kline, M. (1981). Λογική εναντίον Παιδαγωγικής, μτφρ.Δημήτρης Χασάπης. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 22: 3-34. Αθήνα: ΕΜΕ.
- 5.Polya, G. (2001). *Η μαθηματική ανακάλυψη, τ. Α'*, μτφρ. Σπύρος Στεργιάκης-Γιώργος Τσαπακίδης. Αθήνα: Κάτοπτρο.

**Προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τις απεριόριστες
δυνατότητες των παιδιών, το «άρρητο» νεανικό τους πνεύμα,
προσπαθούμε να γεμίσουμε με φώς τα αστραφτερά τους
μάτια, να απαντήσουμε με σοβαρότητα, άμεσα, στα
αλλεπάλληλα «γιατί» τους και να δημιουργήσουμε νέα.**

Ο Σωκράτης Ντριάνκος είναι καθηγητής Μαθηματικών
στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.



Το νόημα και το περιεχόμενο της αρρητότητας,
όχι μόνο στα μαθηματικά,
αλλά και σε κείμενα του Ομήρου, του Σοφοκλή,
του Αποστόλου Παύλου και του Παπαδιαμάντη.

Χρυσή τομή και κατασκευές.

Ο αριθμός «φ».

Ρητές προσεγγίσεις αρρήτων.

