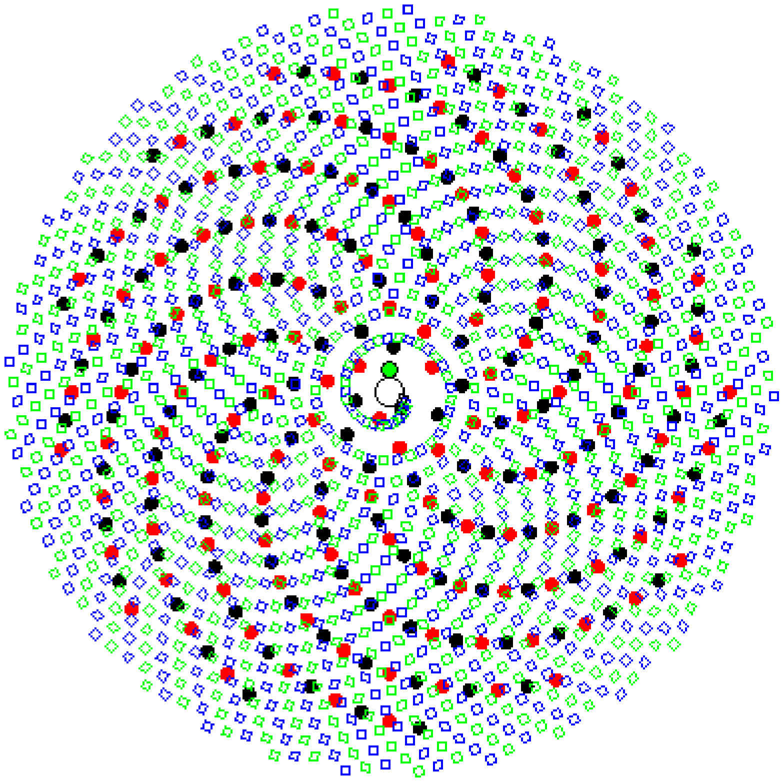
ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΝΤΡΙΑΝΚΟΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ευθείες και κλίσεις στα μαθηματικά & στη ζωή



Τα «γιατί» των παιδιών, κάθε είδους, όλες οι κατευθύνσεις, χωρίς όρια.

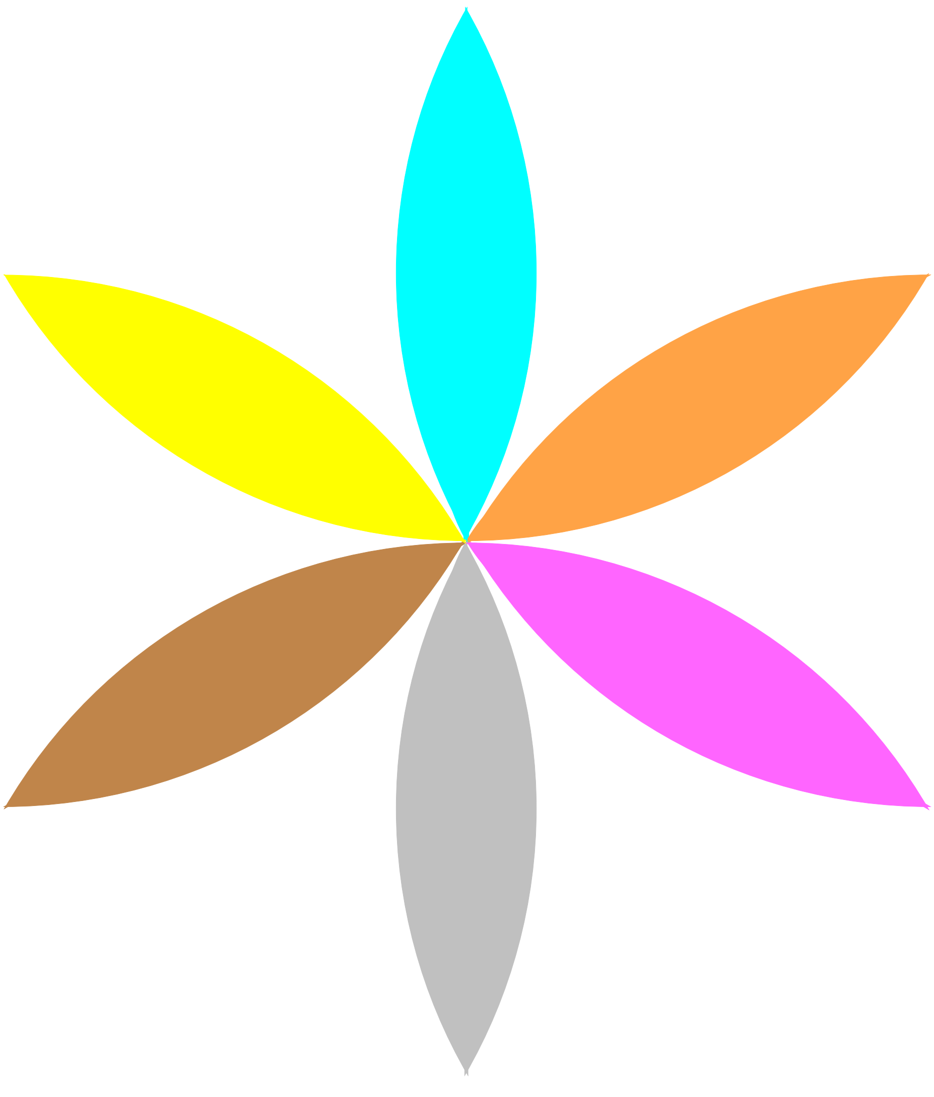
ΡΕΘΥΜΝΟ

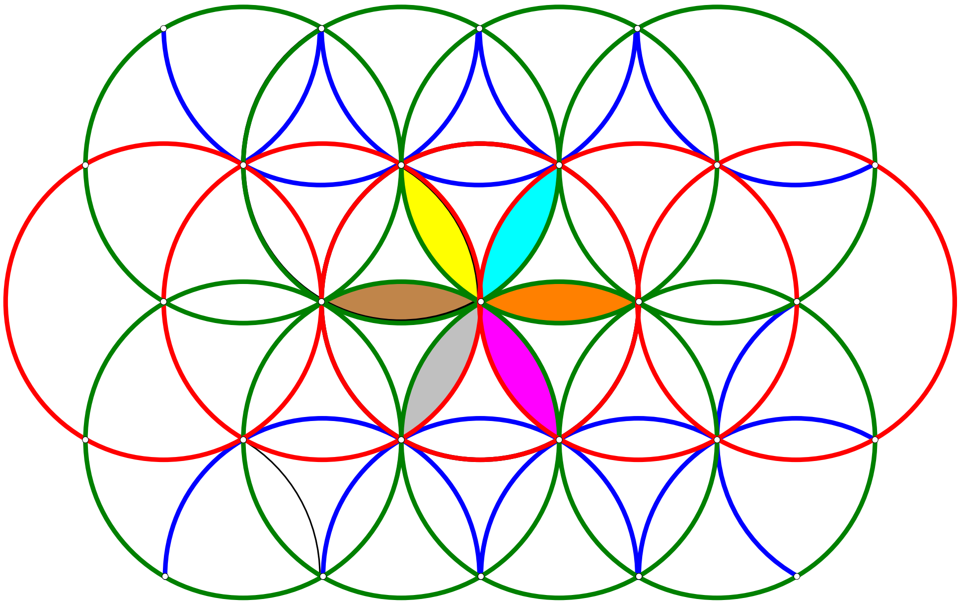
2016

Πολλά σχέδια και εικόνες!

Ακολουθήσαμε τη συμβουλή του ζωγράφου Αλέξη Ακριθάκη(1939-1994):

«*κάθε τι που γράφεται θέλει τη διακόσμηση του*».





Ότι είναι απαραίτητο για την κατασκευή,

«ἐκ τοῦ διαγράμματος ἔσται θεωροῦσι δῆλον»

(Αριστοτέλης, Μετεωρολογικά, 375b 18).

Συγγραφέας: Σωκράτης Ντριάνκος

Τίτλος: **ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ**

«*Ευθείες και κλίσεις*» *στα μαθηματικά & στη ζωή*

Επικοινωνία:

Τ.Θ. 6113, Τ.Κ. 74100, Γάλλος, Ρέθυμνο

sntriankos@gmail.com

sntriankos@sch.gr

http://blogs.sch.gr/sntriankos

ISBN:978-960-99831-9-8

Εκδόσεις: Το βιβλίο εκδόθηκε από την «Γραφοτεχνική Κρήτης» τον Οκτώβρη του 2014(και εξαντλήθηκε).

Μέχρι να βρεθεί εκδότης για την επανέκδοση αυτού του μαθηματικού αριστουργήματος, μπορείτε να το απολαύσετε ...ηλεκτρονικά.

Έχουν γίνει κάποιες αλλαγές και μερικές διορθώσεις.

*Με βασικό υπόστρωμα το ορθοκανονικό σύστημα διερευνώνται κάποιες λεπτές πτυχές των ρητών. Οι γνώμονες είναι το μέσον για την γνωριμία με την τετραγωνική ρίζα και τους άρρητους αριθμούς.

Η κλίση είναι η έννοια που κυριαρχεί. Τα πολλά σχήματα θα οδηγήσουν γρήγορα τον δραστήριο αναγνώστη στον δρόμο των αφηρημένων συλλογισμών. Εύκολα κατανοητό από τον μαθητή που έφτασε στο Γυμνάσιο, αλλά και από οποιονδήποτε ενδιαφέρεται για τον συναρπαστικό κόσμο των μαθηματικών ιδεών.

<u>Αφιερώνεται</u>

στον Μαθητή που ρωτά: γιατί; γιατί; γιατί;

και στον Δάσκαλο,

που μοχθεί καθημερινά,

για να βρίσκει απαντήσεις
στα αλλεπάλληλα γιατί του Μαθητή.

«*Εκείνος ο οποίος θα περιπλανηθεί εις τον Μαθηματικόν τόπον, θα συναντήση εις τους σκολιούς, δυσκόλους δρόμους, μεγάλας, πολλάκις ανυπερβλήτους, δυσχερείας*».

Βαρόπουλος, Θ.(1949:153). *Γενικά Μαθηματικά*. Αθήνα: Εστία.

Τιμούμε και σεβόμαστε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται.

«*Μια δυσκολία είναι ένα φως. Μια ανυπέρβλητη δυσκολία είναι ένας ήλιος*»

Βαλερύ, Π.(1996:27). *Στοχασμοί*,

μτφρ.Χαρά Μπανάκου-Καραγκούνη. Αθήνα: Στιγμή.

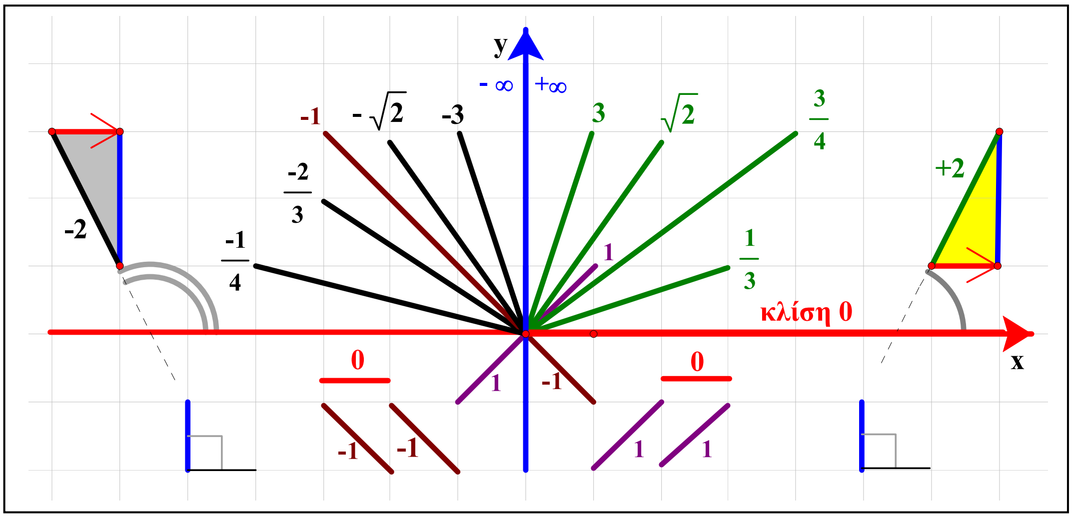
Τα δώρα από το ξεπέρασμα των δυσκολιών είναι μοναδικά:

«*Τα μαθηματικά προσφέρουν την ευκαιρίαν της δοκιμασίας και την δοκιμήν της ικανότητος, διότι χαρίζουν την λογικήν ως αίσθημα, την στερεότητα ως χάριτα, την λιτότητα ως αφθονίαν*»

Καζαντζίδης, Γ.(1972:β).*Βασική Γραμμική Άλγεβρα*. Ιωάννινα.

Η σπίθα υπάρχει μέσα σε κάθε άνθρωπο.

Άνεμος είναι ο δάσκαλος



«Τα παιδιά ρωτούν Γιατί;
Τότε τα στέλνουν στο σχολείο που τα θεραπεύει από το ένστικτο αυτό
και θριαμβεύει πάνω στην περιέργεια με την πλήξη».
Βαλερύ, Π.(1996: 49). *Στοχασμοί.*

Ακόμα και τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας, σχεδόν πάντοτε, θέτουν ερωτήσεις του είδους: «Πως γνωρίζουμε ότι…; Γιατί πιστεύουμε ότι…;» , *«μέχρις ότου η τυπική εκπαίδευση τους διδάξει να σταματήσουν αυτή τη συνήθεια»* . Arons, A.(1992: 492). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*, μτφρ. Ανδρέας Βαλαδάκης. Αθήνα : Τροχαλία.

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>

«Όταν μετά από εντατική διανοητική δραστηριότητα φτάνω σε ένα όμορφο αποτέλεσμα που με ενθουσιάζει, παρατηρώ μια σιωπή ή μια απώλεια. Αυτό είναι το πιο ενδιαφέρον στην δημιουργία, το να φτάσει κανείς σε αυτόν τον βαθμό σιωπής, μιας τόσο εκκωφαντικής σιωπής, και όχι στη μάζα των λέξεων... Κάποιες απαντήσεις δεν μπορούν να ειπωθούν…»

Η εκπληκτική αυτή έκφραση είναι του Thomas Schutte (1954 -):

Από την Συλλογη Πορταλάκη, 2010.

«…It goes without saying that one should not "read" a mathematics book. It is better to get out pencil and paper and rewrite the book…If he does not understand every step of a proof in the first round, he should plan to return to it later and tackle it once again until he mastered…»

Olds, C. (1963:4). *Continued Fractions*.

The Mathematical Association of America.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

«**Μ**» είναι ο μαθητής, στην πρώτη Γυμνασίου.

«Δ» είναι ο δάσκαλος, μέση ηλικία.

Η συζήτηση εξελίσσεται σε κάποια σχολική αίθουσα, χωρίς τυπικότητες, στον ενικό. Ο διάλογος δεν είναι απόλυτα φανταστικός. Προέκυψε όχι μόνον από την εικοσαετή διδακτική εμπειρία του δασκάλου σε όλους τους τύπους των «δευτεροβάθμιων» σχολείων, αλλά και από την συνεχή επιμόρφωσή του σε θέματα διδακτικής και μαθηματικών. Οι ενότητες που έχουν επιλεγεί είναι «συμβατές» με την σχολική ύλη. Οι επεκτάσεις είναι ελάχιστες, αλλά απαραίτητες[1]. Θίγονται και κάποια θέματα εκτός μαθηματικών, συνέπεια ερωτήσεων που κατακλύζουν «απρόκλητες» τον απεριόριστο νοοχώρο[2] των παιδιών. *Με πλάγια είναι κάποιες σκέψεις του μαθητή. Δεν θα ήθελε να τις ακούσει ο δάσκαλος.*

Στα περιεχόμενα του βιβλίου οριοθετούνται τα κεφάλαια. Τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου βρίσκονται στην αρχική του σελίδα. Μερικές φορές το κλάσμα π.χ. $\frac{3}{5}$ γράφεται στη μορφή 3/5. Για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιείται και το «*», όχι μόνον η τελεία, «$\cdot$», π.χ. 2*3=6, $2\cdot 3=6$.

Οι βιβλιογραφικές αναφορές είναι ανά κεφάλαιο στις σημειώσεις. Εκφράζω τις ευχαριστίες μου όχι μόνο στους συγγραφείς των βιβλίων και άρθρων αλλά και σ’ αυτούς που ασχολήθηκαν με το επίπονο έργο της μετάφρασης των μαθηματικών κοσμημάτων που διαμόρφωσαν τις ιδέες μου. Ευχαριστώ επίσης τους δημιουργούς των λογισμικών Sketchpad (το λογισμικό που κυριαρχεί), Scratch, Logo, Elica, Mathcad και Mathematica.

Στην προσπάθεια μου να περιγράφω τα «φαντάσματα[3]» με τα οποία «νοεί η ψυχή», μου πρόσφεραν την μέγιστη βοήθεια: να σχεδιάζω χωρίς λεπτομερή διατύπωση και να σκέφτομαι αποφεύγοντας τον μόχθο των υπολογισμών. Για τον μαθητή όμως είναι απαραίτητη και η «εξω-υπολογιστική» δραστηριότητα. Αποκτούμε γνώσεις όχι μόνο με το μάτι και το αυτί, αλλά και με το χέρι, με το πιάσιμο, με την αφή[4].

Ευχαριστώ τον εκλεκτό φίλο και συνάδελφο Γιώργο Ψαθάκη, που διάβασε με προσοχή όλο το κείμενο και πρότεινε πολλές διορθώσεις και βελτιώσεις τις οποίες υιοθέτησα όλες. Ευχαριστώ επίσης τον Μανώλη Περήφανο, φίλο από την εποχή των ιδεατών αναζητήσεων στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, για την βελτιστοποίηση των κοινωνικών θεμάτων. Ευχαριστώ τον Κώστα Σταματόπουλο όχι μόνο για την συνεχή «ηλεκτρονική υποστήριξη», αλλά κυρίως γιατί με τη συμπεριφορά του μου έδειξε κάτι πολύ απλό: αν θέλεις να βοηθήσεις κάποιον, τότε θα τον βοηθήσεις με τον τρόπο που εκείνος θέλει. Φυσικά, είμαι αποκλειστικά υπεύθυνος για την τελική διαμόρφωση του κειμένου, όπως και για τα ποικίλα γλωσσικά λάθη. Ευχαριστώ τους καθηγητές αλλά και τους συμφοιτητές μου στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων και στο Μεταπτυχιακό του Πανεπιστημίου Αθηνών καθώς επίσης και τους μαθητές και συναδέλφους μου στο Γυμνάσιο και Λύκειο Αμυνταίου, στο Γυμνάσιο Πέλλας, στο 3^{ο} Λύκειο Πολίχνης Θεσσαλονίκης, στο Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας Νεάπολης, στο 1^{ο} Γυμνάσιο και στο Πειραματικό Λύκειο Ρεθύμνου, που με τις ερωτήσεις, τις παρατηρήσεις, τις κρίσεις, τις επικρίσεις και επιβραβεύσεις τους, με βοήθησαν να κατανοήσω την αξία της διδασκαλίας στη βαθύτερη διερεύνηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών.

Ρέθυμνο, Φεβρουάριος 2016

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΑΞΟΝΑΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Σχεδίασε έναν άξονα.

Μ. Εύκολο:

Μ. Γιατί περιμένεις; Είναι ένας πολύ όμορφος άξονας. Δεν σου αρέσει;

Δ. Δεν είναι άξονας. Είναι μια πολύ όμορφη οριζόντια ευθεία.

Μ. Καλά. Έχω άλλη προσπάθεια;

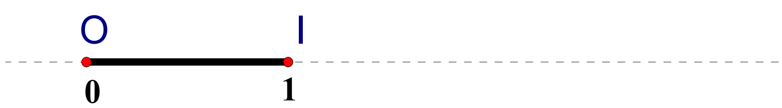
Δ. Έχεις.

Μ. Ξέχασα να βάλλω την αρχή.

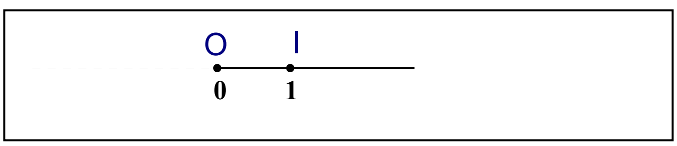
Δ. Αρχή μετρήσεων. Και κάτι ακόμα; Άλλα προσόντα της ευθείας για να ονομαστεί άξονας;

Μ. Λίγη βοήθεια;

Δ. Άξονας είναι μια ευθεία πάνω στην οποία έχουμε επιλέξει ένα σημείο, ας το ονομάσουμε Ο, που το λέμε αρχή και αντιστοιχεί στον αριθμό 0 και ένα σημείο Ι (τα ονόματα των σημείων είναι κεφαλαία, μπορεί να έχει όνομα άλλο κεφαλαίο γράμμα, π.χ. Α) συνήθως «δεξιά» του Ο, που αντιστοιχεί στον αριθμό 1. Είναι ευθεία με αρχή μετρήσεων και μονάδα μέτρησης: το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΟΙ.



Άξονας με μονάδα μέτρησης το εκατοστό:



Μ. Ευθεία με αρχή μετρήσεων και μονάδα μέτρησης. Εντάξει. Ο άξονας είναι πάντα οριζόντιος;

Δ. Μπορεί να είναι οριζόντιος, κατακόρυφος, ή με άλλη διεύθυνση.

Μ. Διεύθυνση;

Δ. Κλείσε το παράθυρο, έχει δυνατό αέρα.

Μ. Βοριάς και πολύ ενοχλητικός.

Δ. Τι εννοείς βοριάς;

Μ. Ξέρω ότι λέγεται βοριάς, από τον παππού Βαγγέλη, αλλά ακριβώς…, με βοηθάς;

Δ. Έχεις δει πάνω στους χάρτες το παρακάτω σχήμα: Ξέρεις τα σύμβολα;

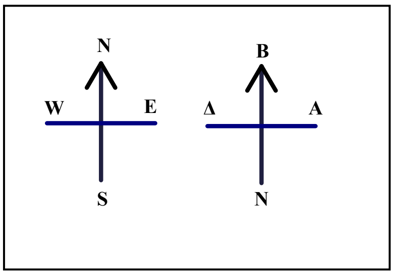
Μ. Με υποτιμάς. Πρώτη Γυμνασίου.

Μαθαίνω και αγγλικά,

Βορράς(North) - Νότος(South) –

Ανατολή(East)-Δύση(West).

Το βέλος δείχνει πάντα το βορρά.

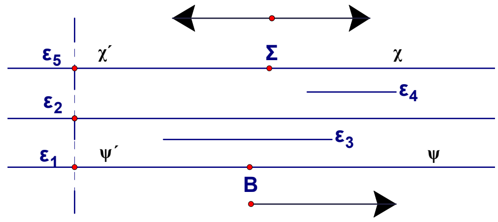


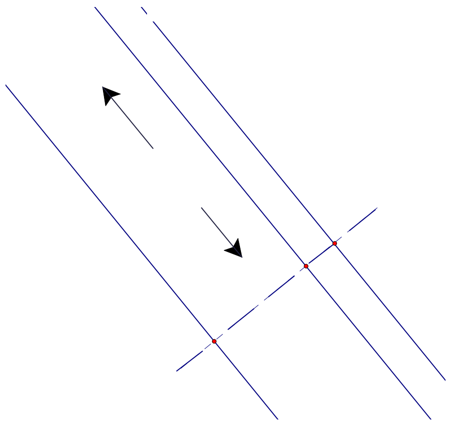
Δ. Όταν λέμε ότι φυσά βοριάς, εννοούμε ότι φυσά από το βορρά προς το νότο. Ο Νότιος άνεμος έχει κατεύθυνση προς το βορρά. Η νοητή γραμμή βορράς-νότος καθορίζει τη διεύθυνση. Σ' αυτή τη διεύθυνση έχουμε δυο κατευθύνσεις: η μια από το βορρά προς το νότο και η άλλη από το νότο προς το βορρά. Στη νοητή γραμμή ανατολή – δύση έχουμε πάλι δυο κατευθύνσεις:

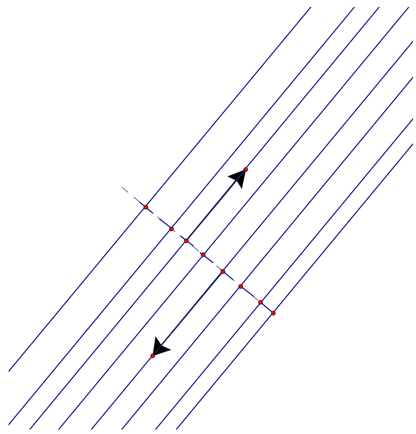
Από την ανατολή προς τη δύση, ή αντίστροφα. Η ευθεία (και οποιαδήποτε παράλληλή της) καθορίζει τη διεύθυνση.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Από κάθε σημείο, π.χ. Σ μιας ευθείας δημιουργούνται δύο αντικείμενες ημιευθείες, π.χ. Σχ και Σχ΄, που καθεμιά τους καθορίζει μια κατεύθυνση κίνησης, μια «φορά», από το Σ προς το χ ή από το Σ προς το χ΄. Σε κάθε διεύθυνση έχουμε δυο αντίθετες κατευθύνσεις. Η ευθεία εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δυο κατευθύνσεις, αλλά ένα μικρό τμήμα της φτάνει για να καθοριστεί η διεύθυνση. Οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$, $ε_4$, $ε_5$ καθορίζουν μια διεύθυνση. Σ' αυτή τη διεύθυνση οι ημιευθείες Βψ, Σχ΄ έχουν αντίθετες κατευθύνσεις, όπως και οι Σχ , Σχ΄. Αντίθετες κατευθύνσεις έχουν και οι Σχ, Βψ΄. Το «βέλος» δεν είναι απαραίτητο, η κατεύθυνση (φορά) καθορίζεται από τα μικρά γράμματα χ , ψ΄.







Μ. Οι διακεκομμένες τι είναι;

Δ. Η διακεκομμένη μας βοηθά στη χάραξη των παραλλήλων. Οι παράλληλες είναι κάθετες στην διακεκομμένη.

Μ. Τραμουντάνα τι είναι;

Δ. Ονομασία που χρησιμοποιούν συνήθως οι ναυτικοί για τον βοριά.

Που το βρήκες;

Μ. Ο παππούς χρησιμοποιεί την ονομασία, συνταξιούχος ναυτικός. Οι άλλες ναυτικές ονομασίες πως είναι; Γιατί ο παππούς λέει ότι τώρα στο σχολείο δεν μαθαίνουμε τίποτα, ενώ όταν πήγαινε αυτός μάθαιναν τα πάντα. Απορώ πως γινόταν αυτό. Χωρίς υπολογιστές, χωρίς τηλεόραση και βίντεο, χωρίς πληροφορική και internet, χωρίς κινητά, χωρίς διαδραστικούς πίνακες!

Δ. Η διδασκαλία χρειάζεται …δάσκαλο και μαθητή. Μπορεί να γίνει οπουδήποτε, στην αυλή του σχολείου, στον δρόμο, στο εστιατόριο, στην παραλία, στο πλοίο, στο αεροπλάνο. Η παραδοσιακή διδασκαλία έχει δοκιμαστεί για 3000 χρόνια ενώ οι «νέες τεχνολογίες» υπάρχουν στο προσκήνιο μόνο λίγες δεκαετίες. Ο δάσκαλος χρησιμοποιεί όλα τα μέσα που διαθέτει η εποχή του για να συναντήσει το μαθητή στο δικό του γλωσσικό και εννοιολογικό επίπεδο, ετοιμάζει καινούργιο υλικό καθώς εξαντλούνται οι δυνατότητες του παλιού, συνοδεύει το μαθητή διακριτικά στο ξεπέρασμα των εμποδίων, ενθαρρύνει την επιμονή και επανέρχεται τακτικά στα βασικά, ώστε να βοηθήσει το μαθητή να απελευθερώσει τη σκέψη του από το συγκεκριμένο και να οδηγηθεί σε αφηρημένους συλλογισμούς.

Ακούγοντας διαλέξεις, παρακολουθώντας έτοιμες εικόνες, εκπαιδευτικές ταινίες, φυλλομετρώντας ιστοσελίδες, μπορείς να μάθεις κάτι, σίγουρα όμως δεν μπορείς να μάθεις πολλά.

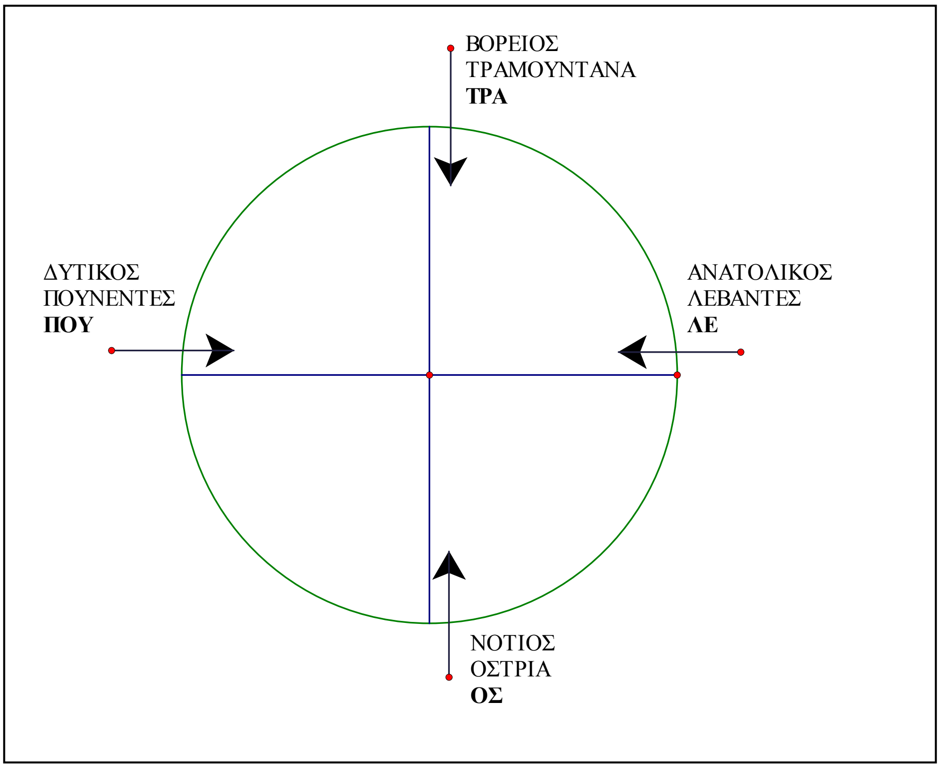
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Για τη μάθηση απαραίτητη είναι η ενεργός συμμετοχή του δικού σου μυαλού, η παραγωγή και ανάπλαση νοητικών εικόνων και παραστάσεων με τον δικό σου ξεχωριστό τρόπο.

Αμοιβή: η μέγιστη ευχαρίστηση, η χαρά της εντατικής διανοητικής δραστηριότητας.

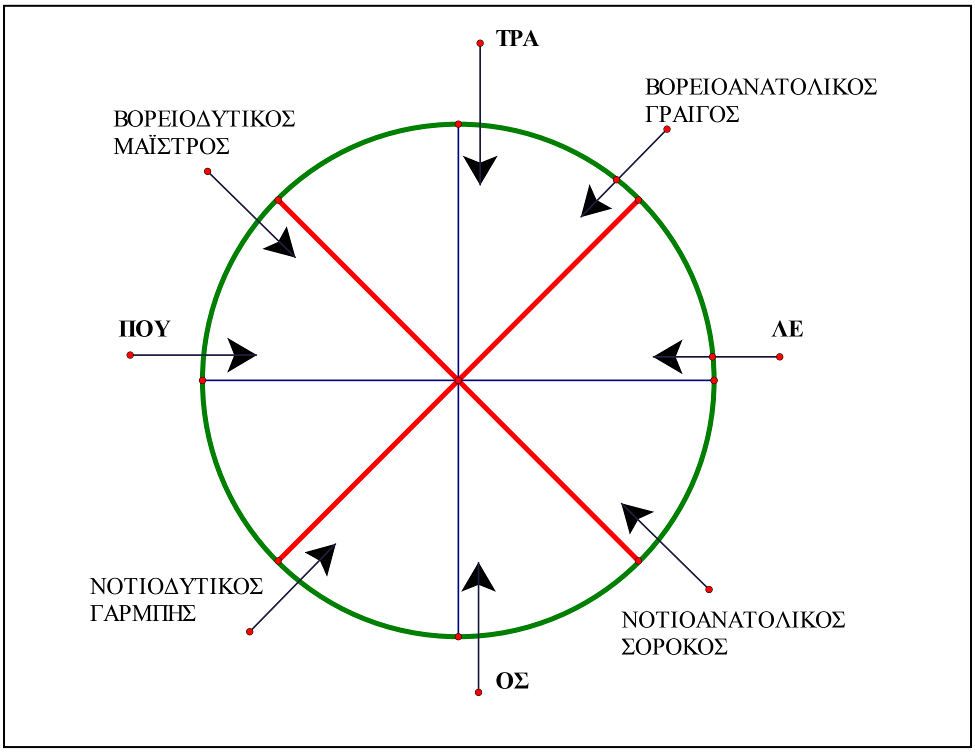
Ας επανέλθουμε στους ανέμους: Δες το σχήμα. Να θυμάσαι τα αρχικά[1]: ΤΡΑ-ΛΕ-ΟΣ-ΠΟΥ.

Τα βέλη δείχνουν την κατεύθυνση του ανέμου, π.χ. ο λεβάντες φυσά στη διεύθυνση ανατολή-δύση, από την ανατολή προς τη δύση, ο πουνέντες έχει ίδια διεύθυνση, αλλά κατεύθυνση(φορά) από τη δύση προς την ανατολή.



Μ. Μήπως ξέρεις και ενδιάμεσες ονομασίες; Γαρμπής ποιος είναι;

Δ. Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών… Δες το σχήμα:



Μ. Αρχικά για να θυμάμαι και τις ενδιάμεσες ονομασίες;

Δ. ΓΡΑΙ-ΣΟ… Σκέψου μόνος.

Μ. Τα σχέδια; Με υπολογιστή;

Δ. Ναι, χρησιμοποιώ την τεχνολογία της εποχής.

Μ. Τώρα μάλλον θα χαλάσει το καλό κλίμα που υπάρχει μεταξύ μας.

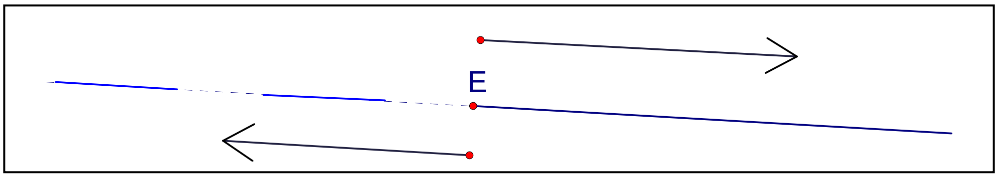
Δ. Γιατί;

Μ. Γιατί θα θέλεις να μου πεις τον ορισμό της διεύθυνσης και οι ορισμοί με εκνευρίζουν.

Δ. Αν αισθάνεσαι μέσα σου την έννοια της διεύθυνσης, τότε δεν θα σου διαταράξω την ηρεμία που χρειάζεται για να συνεχίσουμε τη συζήτηση.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Πρώτα έρχονται οι ιδέες και κατόπιν οι ονομασίες. Οι ιδέες συντίθενται με βάση την πείρα που αποκτάται με την παρατήρηση παρά συλλαμβάνονται από την συμπυκνωμένη μορφή των ορισμών. Ας επανέλθουμε στον άξονα.



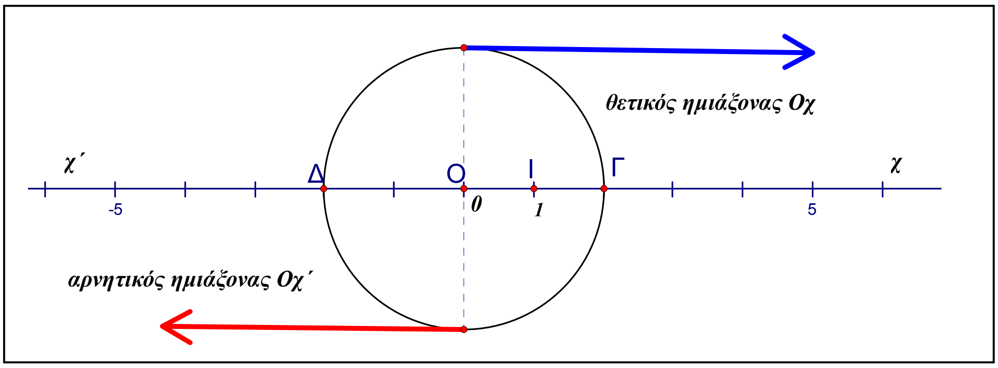
Οποιοδήποτε σημείο μιας ευθείας καθορίζει δυο αντικείμενες ημιευθείες με αντίθετες κατευθύνσεις. Σ' έναν άξονα η ημιευθεία που περιέχει το «1» είναι ο θετικός ημιάξονας, όπου τοποθετούμε τους θετικούς αριθμούς. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΙ, η μονάδα μέτρησης, καθορίζει την «θετική κατεύθυνση» Οχ.

Στην αντικείμενη ημιευθεία Οχ΄ τοποθετούμε τους αρνητικούς.

Μ. Σε ποια ακριβώς απόσταση από το 0 τοποθετείται ο αριθμός 1;

Δ. Σε όποια απόσταση μας διευκολύνει, ανάλογα με το πρόβλημα που έχουμε να διαπραγματευθούμε. Καθορίζεται έτσι η μονάδα μέτρησης.

Μπορείς να βρεις που τοποθετούμε τους αριθμούς +2 και -2;



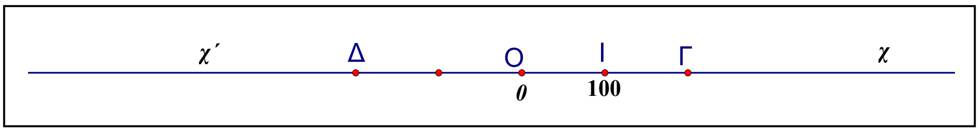
Μ. Στον θετικό ημιάξονα τοποθετούμε τον 2, τον +2 (το «+» μπορούμε να το παραλείπουμε), στο σημείο Γ. Ο αριθμός +2 είναι η τετμημένη του Γ.Το « - » με υποχρεώνει να κινηθώ στον αρνητικό ημιάξονα Οχ΄, όπου τοποθετούμαι τον -2. Ο αριθμός -2 είναι η τετμημένη του σημείου Δ.

Δ. Θαυμάσια! Τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΟΔ έχουν μήκος 2 μονάδες, «2» είναι η απόλυτη τιμή και του (+2) και του (-2), συμβολικά $\left|(-2)\right| = 2 = +2$, $\left|(+2)\right| = 2 = +2$.Τα σημεία Γ και Δ βρίσκονται σε ίση απόσταση δεξιά και αριστερά από την αρχή και έχουν τετμημένες αντίθετους αριθμούς. Είναι συμμετρικά ως προς κέντρο Ο. Το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΓΔ. Αν περιστρέψουμε το Γ περί το Ο κατά 180^{o} βρίσκουμε το Δ. Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο την αρχή Ο και ακτίνα την απόλυτη τιμή 2, και βρίσκουμε τα Γ και Δ που έχουν τετμημένες τους αντίθετους αριθμούς (+2) και (-2).

Μπορείς να πεις δύο αντίθετους και δύο ετερόσημους που να μην είναι αντίθετοι;

Μ. Αντίθετοι: (+3), (-3). Ετερόσημοι: (+7), (-8,5).

Δ. Μερικές φορές η μονάδα μέτρησης υπάρχει στον άξονα, αλλά δεν φαίνεται γιατί είναι πολύ μικρή, δεν είναι τοποθετημένος ο αριθμός «1», αλλά καταλαβαίνουμε την μονάδα από την τετμημένη του σημειου «Ι». Στον παρακάτω άξονα, ποιες είναι οι τετμημένες των σημείων Γ και Δ;



Μ. Τετμημένη του Γ: +200, Τετμημένη του Δ: - 200.

Δ. Πολύ καλά. Ξεκινούμε πάντα από την αρχή, από το σημείο Ο που έχει τετμημένη 0.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ έχει διπλάσιο μήκος από το ΟΙ, όπως και το ΟΔ. Η μονάδα είναι «δεξιά» του σημείου Ο, επομένως η τετμημένη του Γ είναι (+200).

Τα σημεία Γ και Δ είναι σε αντίθετες κατευθύνσεις ως προς την αρχή Ο. Αν θέλουμε να κινηθούμε 200 μονάδες κατά την διεύθυνση του άξονα χ΄χ έχουμε δυο δυνατότητες: 200 μονάδες προς την κατεύθυνση του χ, «δεξιά», προς την κατεύθυνση που είναι η μονάδα μέτρησης, ή 200 μονάδες «αριστερά» από την αρχή, προς το χ΄. Τα σύμβολα «+» και « - » χαρακτηρίζουν την κατεύθυνση της κίνησης. Οι αριθμοί «+200» και «-200» έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΓ και ΟΔ είναι 200 μονάδες (με τη μονάδα του συγκεκριμένου άξονα). Και εδώ οι αριθμοί (+200) και (-200) είναι αντίθετοι. Τα σημεία Γ και Δ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο.

Αν μια ευθεία γίνει άξονας, τότε μπορούμε να παραστήσουμε με σημεία του άξονα όχι μόνον τους ακεραίους αλλά και τους ρητούς αριθμούς.

Μ. Τους ρητούς; Με βοηθάς;

Δ. Ας κάνουμε μια επανάληψη στα είδη των αριθμών.

Μ. Ωραία! Μου αρέσουν οι επαναλήψεις! Δεν θα έχω διάβασμα για αύριο.

Δ. Θα έχεις. Η επανάληψη θα φωτίσει κάποια σκοτεινά σημεία που δεν τα πρόσεξες με την πρώτη ματιά. Αρχίζουμε με τους φυσικούς.

Μ. Τους ξέρω! **Φυσικοί** είναι οι αριθμοί :

$$0,\ 1,\ \underline{2},\ \underline{3},\ 4,\ \underline{5},\ 6,\ \underline{7},\ 8,\ 9,\ 10,\ \underline{11},\ 12,\ \underline{13},\ 14,\ 15,\ 16,\ldots$$

Έγραψα τους άρτιους, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 2: $0 \cdot 2 = 0, 1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 4, 3 \cdot 2 = 6, \ldots$ με μεγαλύτερα ψηφία, τους περιττούς με μικρότερα, όπως συμφωνήσαμε παλιότερα.

Δ. Και υπογράμμισες;

Μ. Τους πρώτους, τους φυσικούς που έχουν **ακριβώς δυο** διαιρέτες, τον αριθμό 1 και τον εαυτό τους. Η υπογράμμιση δίνει και ιδιαίτερη αξία;

Δ. Το όνομα του φυσικού αριθμού είναι οι μονάδες που χρειάζονται για να συγκροτηθεί ο αριθμός, π.χ. δέκα πέντε, 15, συγκροτείται από 15 μονάδες, «15» είναι η καταμέτρηση των μονάδων. Η μονάδα μετρά όλους τους αριθμούς. Τον 15 μετρά φυσικά η μονάδα, αλλά τον μετρά και ο αριθμός 5, 5+5+5, ο «15» μπορεί να μετρηθεί και από ένα πλήθος μονάδων. Ο αριθμός 15 ονομάζονται σύνθετος. Ο αριθμός 5 είναι διαιρέτης του 15, όπως και ο 3. Ο 15 έχει διαιρέτες, εκτός των 1,15 και τους 3,5.

Ονομάζουμε «**δεύτερο διαιρέτη**» ενός φυσικού[2], τον διαιρέτη του που είναι δεύτερος στη σειρά, αν «διατάξουμε» όλους τους διαιρέτες του από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, δηλ. τον μικρότερο διαφορετικό του 1 διαιρέτη, για τον 15 είναι ο 3. Αν ο αριθμός είναι πρώτος, π.χ. ο 7, τότε ο δεύτερος διαιρέτης του είναι ο ίδιος, εδώ ο 7, επομένως αυτός ο δεύτερος διαιρέτης είναι πρώτος. Αν είναι σύνθετος, τότε και πάλι ο δεύτερος διαιρέτης του είναι πρώτος, π.χ. οι διαιρέτες του 30 είναι οι 1,2,3,5,6, 10,15, 30, ο «2» είναι πρώτος, γράφουμε 30 = 2*15. Για τον 15, ο δεύτερος διαιρέτης, ο 3, είναι πρώτος, οπότε 30 = 2*15=2*3*5, γινόμενο πρώτων.

Μπορούμε να αποδείξουμε, μελλοντικά, ότι κάθε μεγαλύτερος του ένα φυσικός, είτε είναι πρώτος, είτε γινόμενο πρώτων, δηλ. ότι κάθε σύνθετος «αναλύεται» σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, και μάλιστα, αν αγνοήσουμε την σειρά των παραγόντων, κατά μοναδικό τρόπο[3].

Παραδείγματα: 18 =2*3*3 = $2*3^2$, 28=2*2*7=2^2*7, 49=7*7, 70=2*5*7.

Οι πρώτοι είναι οι στοιχειώδεις δομικοί λίθοι[4] των φυσικών αριθμών, με ρόλο ανάλογο με τα στοιχεία στη χημεία.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Μπορείς να πεις τους τέσσερις επόμενους φυσικούς του 16;

Μ. Είναι οι 17,18,19,20.

Δ. Επόμενος του 1821;

Μ. Ο αριθμός 1822

Δ. Πως τον βρήκες;

Μ. Μήπως ξεχνάς κάποια λεπτομέρεια;

Δ. Τι λεπτομέρεια.

Μ. Είμαι πρώτη Γυμνασίου. Αστεία ερώτηση.

Δ. Καλά, συγγνώμη!

Μ. Σε συγχωρώ, είμαι μεγάλη καρδιά!

Δ. Ας πούμε ότι έχουμε έναν οποιοδήποτε φυσικό αριθμό. Μπορείς να περιγράψεις πως θα βρούμε τον επόμενο φυσικό;

Μ. Πάλι τα ιδία! Ποιόν ακριβώς φυσικό έχουμε;

Δ. Έναν οποιοδήποτε, ας τον ονομάσουμε με ένα γράμμα, π.χ. «μ» είναι ένας αντιπρόσωπος των φυσικών, μπορεί να είναι ο 50, ο 150, ο 1941, κλπ.

Μ. Καλά, μη φωνάζεις! Γιά να δουμε…50, 51,… 150,151,…, 1941,1942… απλά προσθέτουμε «1» και βρίσκουμε τον επόμενο.

Δ. Ο επόμενος του «μ»;

Μ. Προσθέτουμε ένα είπαμε! Στον «μ» δεν μπορούμε να προσθέσουμε 1!

Δ. Γιατί;

Μ. Γιατί δεν ξέρουμε ποιος είναι. Τι αποτέλεσμα θα βρούμε προσθέτοντας 1 στον μ που δεν τον γνωρίζουμε;

Δ. Μπορούμε να πούμε «μι συν ένα», συμβολικά «μ+1». Εφόσον ο μ είναι φυσικός, με το σύμβολο « μ+1» περιγράφουμε τον επόμενο οποιουδήποτε φυσικού μ.

Μ. Δεν περιγράφουμε μια πρόσθεση;

Δ. Το «μ+1» περιγράφει την **πράξη**, αλλά και το **αποτέλεσμα** της πράξης, το άθροισμα των αριθμών «μ» και «1», δύο έννοιες σε ένα σύμβολο

Φυσικοί λοιπόν είναι οι 0,1,2,3,4,… . Κάθε φυσικός έχει έναν επόμενο που βρίσκεται προσθέτοντάς του τον 1.

Μ. Και έναν προηγούμενο, αφαιρώντας 1.

Δ. Εκτός από το μηδέν. Το 0 δεν έχει προηγούμενο φυσικό. Αν «κ» είναι ένας φυσικός, διαφορετικός από το μηδέν, πως θα περιγράψουμε τον προηγούμενο;

Μ. Αφαιρούμε 1, «κ-1», αφαίρεση και αποτέλεσμα της αφαίρεσης, όνομα ;

Δ. Διαφορά του ένα από τον κ. Κλασματικοί αριθμοί; Παράδειγμα;

Μ. Ναι. Οι $\frac{3}{5}, \frac{1821}{2014}, \frac{123456789}{987654321}, \frac{65}{13}$ είναι **κλασματικοί αριθμοί**.

Δ. Είναι οι αριθμοί της μορφής $\frac{\text{φυσικός}}{\text{φυσικός διαφορετικός από το } 0}$, συμβολικά $\frac{\mu}{\nu}$, όπου οι αριθμοί μ, ν είναι φυσικοί, μ αριθμητής, ν παρονομαστής με $\nu \neq 0$, ο παρονομαστής διαφορετικός από τον αριθμό 0.

Μ. Είναι γνωστή μαθηματική αντιπάθεια!

Δ. Οι φυσικοί μπορεί να θεωρηθούν κλασματικοί αριθμοί με παρονομαστή τη μονάδα: $5 = \frac{5}{1}$, $1821 = \frac{1821}{1}$. Κλασματικοί αριθμοί, ή πιο απλά **κλάσματα**, με παρονομαστές 10,100,1000…ονομάζονται **δεκαδικά κλάσματα** και τα γράφουμε συνήθως ως αριθμούς με υποδιαστολή: $\frac{3}{10} = 0,3 \quad \frac{1821}{100} = 18,21 \quad \frac{13}{1000} = 0,013$. Ίσως είσαι εξοικειωμένος με την ονομασία «δεκαδικοί αριθμοί», αλλά οι δεκαδικοί αριθμοί δεν έχουν αποκλειστική προέλευση τα δεκαδικά κλάσματα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Και αντίστροφα! $0,001 = \frac{1}{1000}$, $\quad 18,21 = \frac{1821}{100}$

Δ. Πολύ σωστά. Γράφουμε στον αριθμητή τα ψηφία χωρίς την υποδιαστολή και στον παρονομαστή το 1 ακολουθούμενο από τόσα μηδενικά, όσα είναι τα ψηφία του αριθμού μετά την υποδιαστολή.

Γνωρίζεις ποιοι είναι οι ακέραιοι;

Μ. Ναι. **Ακέραιοι** είναι οι αριθμοί: …,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,…

Δ. Από κάθε φυσικό διάφορο του 0, π.χ. τον 5, δημιουργούμε δυο αντίθετους ακεραίους, τον θετικό (+5) και τον αρνητικό (-5). Οι φυσικοί αποκτούν ένα πρόσημο «+», το οποίο μπορεί να παραλείπεται. Φυσικοί έγιναν τώρα οι θετικοί ακέραιοι και το 0.

Γράφουμε 2 και εννοούμε τον αριθμό «+2», συνήθως σε παρένθεση, αλλά για τον (-2) πρέπει να γράψουμε οπωσδήποτε το «-». Το 0 δεν θεωρείται ούτε θετικός ούτε αρνητικός, άλλα δεν θα παρεξηγηθεί αν του βάλλουμε το σύμβολο «+» ή «- », +0, -0 είναι ο αριθμός 0.

Μπορούμε να πούμε κάτι για τον επόμενο ενός ακεραίου;

Μ. Κάθε ακέραιος έχει έναν επόμενο, όπως συμβαίνει στους φυσικούς, αλλά και έναν προηγούμενο, ενώ στους φυσικούς είπαμε ότι το 0 δεν έχει προηγούμενο, είναι ο μικρότερος φυσικός.

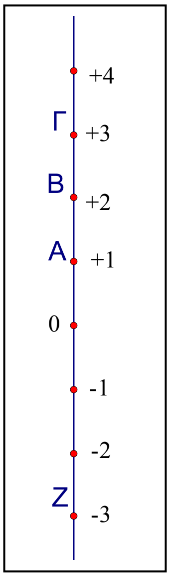
Δ. Πως βρίσκουμε τον επόμενο κάποιου ακεραίου;

Μ. Όπως και στους φυσικούς. Προσθέτουμε 1.

Δ. Στους ακεραίους δεν έχουμε ούτε πρώτο, ούτε τελευταίο. Συνήθως τους γράφουμε …,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,…, οπότε προκύπτει άμεσα ο τρόπος τοποθέτησης στον άξονα αλλά και η **διάταξη**.

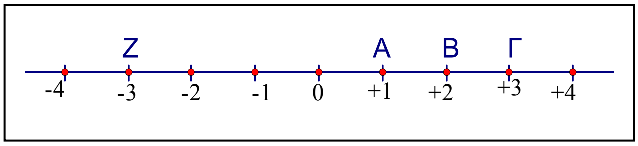
Μ. Διάταξη;

Δ. Οι μεγαλύτεροι αριθμοί είναι δεξιότερα. Οι τετμημένες των σημείων αυξάνονται καθώς κινούμαστε στον άξονα από αριστερά προς τα δεξιά. Στον κατακόρυφο άξονα οι αριθμοί μεγαλώνουν «ανεβαίνοντας», όπως οι θερμοκρασίες, (-2) είναι μεγαλύτερη θερμοκρασία από (-3). Οι αριθμοί (+3) και (-3) είναι αντίθετοι, τα σημεία με τα οποία τους παριστάνουμε στον άξονα (τα παραστατικά τους σημεία) Γ και Ζ επέχουν 3 μονάδες (φυσικός αριθμός, θετικός ακέραιος) από το παραστατικό σημείο του αριθμού 0, της αρχής, απόλυτη τιμή των (+3) και (-3): $|-3| = |+3| = 3 = +3$.



Από κάθε φυσικό διάφορο του 0 δημιουργούμε δυο αντίθετους ακεραίους.

Το ίδιο κάνουμε και με τα κλάσματα.



Μ. Δηλαδή;

Δ. Από κάθε κλασματικό αριθμό, π.χ. τον $\frac{2}{17}$ δημιουργούμε δυο αντίθετους, τον θετικό $\left(+\frac{2}{17}\right)$ και τον αρνητικό $\left(-\frac{2}{17}\right)$. Μετά την εισαγωγή των αρνητικών, όπως έχουμε θετικούς και αρνητικούς ακεραίους έχουμε και θετικά και αρνητικά κλάσματα.

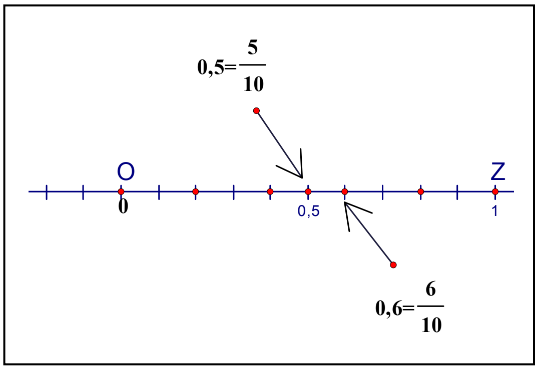
Μπορείς να γράψεις μερικά παραδείγματα;

Μ. Ναι. Εύκολο: $\frac{3}{5}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1821}{2014}, -\frac{5}{6}$.

Δ. Ο αριθμός 8 είναι κλάσμα; Ο (-8);

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Επειδή $8=\frac{8}{1}$, γράφουμε και τον αντίθετό του: $-8=-\frac{8}{1}$. Και οι Ρητοί ποιοι είναι;



Δ. Λίγη υπομονή ακόμα. Μπορείς να τοποθετήσεις στον άξονα τους δεκαδικούς αριθμούς 0,5 και 0,6;

Μ. Πολύ απλό: δεκαδικά κλάσματα, $0,5=\frac{5}{10}$, $0,6=\frac{6}{10}$.

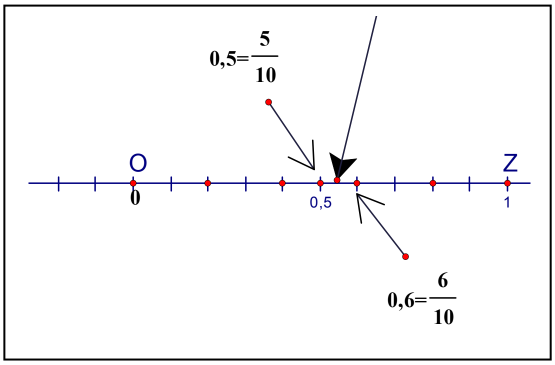
Χωρίζουμε το μοναδιαίο τμήμα σε δέκα ίσα, χάρακας, παίρνω μονάδα ΟΖ = 5cm, εύκολα και γρήγορα, είναι χωρισμένο σε 10 μισά, δες το σχήμα!

Δ. Ανάμεσα στους 0,5 και 0,6 μπορείς να τοποθετήσεις κάποιον αριθμό;

Μ. Όχι. Ο «0,6» είναι ο επόμενος του «0,5».

Δ. Επόμενος;

Μ. Ναι, προσθέτουμε 1 και βρίσκουμε τον επόμενο… μια στιγμή, όχι λάθος, προσθέτουμε 0,1.



Δ. Όμως, βλέπω κάποιο σημείο ανάμεσα…

Μ. Και εγώ το βλέπω, εσύ όμως είπες κάποτε ότι το σχέδιο βοηθά, αλλά περιέχει ανακρίβειες και θα πρέπει να θεμελιώνουμε τους ισχυρισμούς με σκέψεις, με συλλογισμούς.

Δ. Με σωστές σκέψεις.

Μ. Αν υπάρχει αριθμός ανάμεσα, ποιος αριθμός είναι;

Δ. Σκέψου Ευρωπαϊκά, με ευρώ, 50 λεπτά, «0,50€», 60 λεπτά, «0,60€».

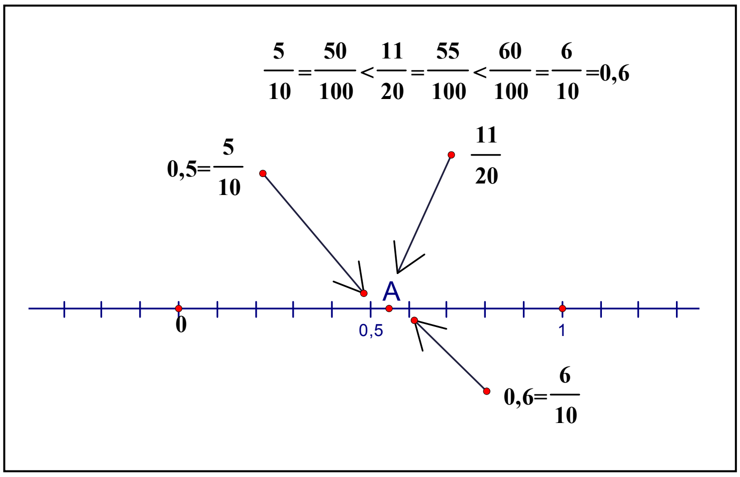
Μ. Α ναι! Εντάξει, 9 αριθμοί, «0,51, 0,52, …, 0,59».

Δ. Οπωσδήποτε διευκολύνουν και τα κλάσματα: $0,5=\frac{5}{10}$, $0,6=\frac{6}{10}$.

Το $\frac{5+6}{10+10}=\frac{11}{20}$ είναι ανάμεσα και χωρίς ευρωπαϊκή βοήθεια.

Μ. Το άθροισμα των κλασμάτων

Δ. Δεν είναι το άθροισμα των κλασμάτων, είναι το κλάσμα που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών, λέγεται **ενδιάμεσο** κλάσμα και είναι πάντα **μεταξύ** των δυο από τα οποία δημιουργήθηκε[5]. Του δόθηκε το κατάλληλο όνομα, **ενδιάμεσο**. Ο αριθμός $\frac{5+6}{10+10}=\frac{11}{20}=\frac{5\cdot 11}{5\cdot 20}=\frac{55}{100}$ είναι ο 0,55.



Ποιο είναι το άθροισμα των κλασμάτων;

Μ. Το ξέρω, πριν απάντησα βιαστικά, είναι ομώνυμα, $\frac{5}{10}+\frac{6}{10}=\frac{11}{10}=1,1$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Για την πρόσθεση, αν είναι ομώνυμα, τότε προσθέτουμε τους αριθμητές, αν είναι ετερώνυμα, πρώτα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα.

Αν προσθέσουμε αριθμητές και παρονομαστές βρίσκουμε το ενδιάμεσο των δυο, δεν βρίσκουμε το άθροισμα των δυο κλασμάτων.

Ανάμεσα στους 0,51 και 0,52 υπάρχουν αριθμοί;

Μ. Όχι, δεν τελειώσαμε με αυτό το ζήτημα;

Δ. Ποιο είναι το ενδιάμεσο κλάσμα; Είναι ανάμεσα στους 0,51 και 0,52;

Μ. Ενδιάμεσο των $0{,}51=\frac{51}{100},\ 0{,}52=\frac{52}{100}:\ \frac{51+52}{100+100}=\frac{103}{200},$

$$\frac{51}{100}=\frac{51\cdot 2}{100\cdot 2}=\frac{102}{200}<\frac{103}{200}<\frac{104}{200}=\frac{52}{100}$$

Είναι. Τελικά, πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους 0,5 και 0,6;

Δ. Μπορείς να σκεφτείς και ισοδύναμα με παρονομαστή, π.χ. 1000.

Μ. 1000; Καλά. $\frac{5}{10}=\frac{500}{1000},\ \frac{6}{10}=\frac{600}{1000},\quad \frac{5}{10}=\frac{500}{1000}<\frac{501}{1000}<\frac{502}{1000}...,$

Χαμός. Και ισοδύναμα με παρονομαστή 10 δισεκατομμύρια;

Δ. Όποιον θέλεις. Ανάμεσα στα οποιαδήποτε δυο νέα υπάρχει το ενδιάμεσο…

Μ. Άπειροι ! Αν τα κλάσματα δεν είναι δεκαδικά;

Δ. Παράδειγμα;

Μ. Ανάμεσα στα $\frac{1}{7},\frac{2}{7}$ υπάρχουν αριθμοί;

Δ. Απάντησε εσύ, με την ίδια τεχνική.

Μ. Κατάλαβα! $\frac{1}{7}=\frac{1000}{7000},\frac{2}{7}=\frac{2000}{7000}$. Ανάμεσα $\frac{1001}{7000},\frac{1002}{7000}$ κλπ.

Δ. Υπάρχει και το ενδιάμεσο κλάσμα, το $\frac{1+2}{7+7}=\frac{3}{14},\ \frac{1}{7}=\frac{2}{14}<\frac{3}{14}<\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

Μπορείς τώρα να πάρεις ενδιάμεσα στα $\frac{2}{14}, \frac{3}{14}$ και στα $\frac{3}{14}, \frac{4}{14}$ κλπ

Μ. Το ενδιάμεσο, του ενδιαμέσου ή του ενδιάμεσου, αυτό πάντα το μπερδεύω, να πάω να ρωτήσω την κ. Ειρήνη, τη φιλόλογο;

Δ. Όχι.

Μ. Εντάξει. Ανάμεσα στους $\frac{1000}{7000}, \frac{1001}{7000}$ πόσοι αριθμοί υπάρχουν;

Δ. Μπορείς να βρεις όσους θέλεις. Σου υπέδειξα την μέθοδο.

Μ. Προσπαθώ να το «καταπιώ».

Πολλαπλασιάζω επί 10 εκατομμύρια… $\frac{1000}{7000} = \frac{10000000000}{70000000000}$, $\frac{1001}{7000} = \frac{10010000000}{70000000000}$. Τελικά, ποιος είναι ο επόμενος;

Δ. Επόμενος ποιού αριθμού;

Δεν υπάρχει αριθμός που να μπορεί να χαρακτηριστεί επόμενος του $\frac{1}{7}$

Να τοποθετήσουμε στον άξονα μερικά ακόμα κλάσματα;

Μ. Κλάσματα! Έχω αποκτήσει ειδικότητα!

Δ. Τοποθέτησε λοιπόν στον άξονα τα κλάσματα

$\frac{3}{5}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25}, \frac{30}{50}, \frac{33}{55}, \frac{36}{60}, \frac{72}{120}, \frac{300}{500}, \frac{333}{555}, \frac{5463}{9105}$

Μ. Ναι, βέβαια…

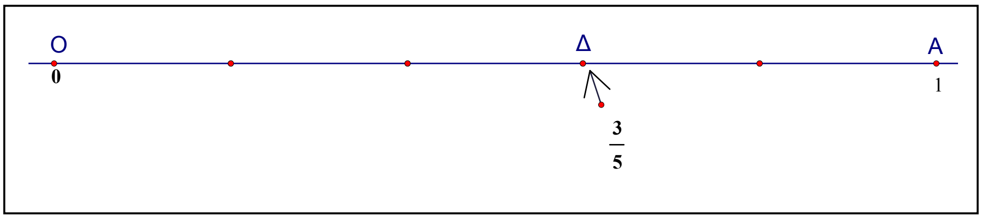
Δ. Γιατί με κοιτάς πονηρά;

Μ. Η τιμωρία είναι επειδή δεν αντέγραψα το «θυμόμαστε –μαθαίνουμε» και δεν έλυσα τις 20 ασκήσεις που μας έβαλες εργασία για το σπίτι;

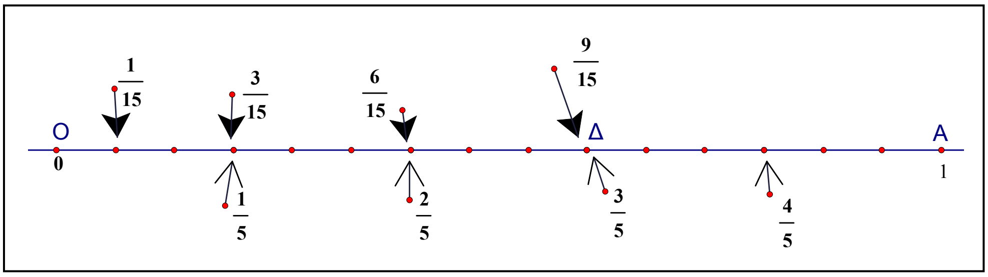
Δ. Δεν είναι τιμωρία! Προσπάθησε!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Για το $\frac{3}{5}$ χωρίζουμε το μοναδιαίο σε 5 ίσα, το $\frac{3}{5}$ στο σημείο Δ.



Για το $\frac{9}{15}$ θα πρέπει να χωρίσω το μοναδιαίο σε 15 ίσα μέρη, οπότε κάθε πέμπτο πρέπει να χωριστεί σε 3…κατι δεν πάει καλά!



Δ. Γιατί;

Μ. Βρίσκω πάλι το σημείο Δ! Δυο αριθμοί μπορεί να έχουν το ίδιο παραστατικό σημείο στον άξονα; Δεν πρέπει να έχουν διαφορετικές τετμημένες;

Δ. Αν είναι διαφορετικοί, τότε θα πρέπει να έχουν διαφορετικές τετμημένες. Αν είναι ίσοι, θα έχουν την ίδια. Τα κλάσματα $\frac{3}{5}, \frac{9}{15}$ εκφράζουν το ίδιο μέρος του τμήματος ΟΑ. Είναι ισοδύναμα, $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$, οπότε σωστά βρήκες ότι έχουν τετμημένη το σημείο Δ.

Παρατήρησε και τα υπόλοιπα κλάσματα.

Μ. Ισοδύναμα! $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{15}{25}=\frac{30}{50}=\frac{33}{55}=\frac{36}{60}$..., δεν ξέρω για το τελευταίο.

Δ. Είναι: $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 1821}{5\cdot 1821}=\frac{5463}{9105}$

Μ. Έπρεπε να το φανταστω!1821, επανάσταση!

Δ. Πόσα ισοδύναμα με το $\frac{3}{5}$ μπορούμε να βρούμε;

Μ. Άπειρα, με πολλαπλασιασμούς, γιατί το $\frac{3}{5}$ είναι ανάγωγο, Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των 3 και 5, ΜΚΔ(3,5)=1, δεν απλοποιείται άλλο.

Δ. Πως βρήκες τον ΜΚΔ;

Μ. Διαιρέτες του 3: 1, 3.Διαιρέτες του 5: 1, 5. Κοινός διαιρέτης μόνο ο 1.

Δ. Καθένα από τα ισοδύναμα με το $\frac{3}{5}$ κλάσματα είναι ένας αντιπρόσωπος του **ρητού** αριθμού $\frac{3}{5}$.

Το σημείο Δ παριστάνει τα κλάσματα: $\frac{3}{5},\frac{9}{15},\frac{12}{20}, \frac{15}{25},\frac{30}{50}, \frac{33}{55},\frac{36}{60},\frac{72}{120},\frac{300}{500},\frac{333}{555},\frac{5463}{9105}$ και όλα τα ισοδύναμα με το $\frac{3}{5}$.

Όλα αυτά τα κλάσματα είναι διαφορετικά σύμβολα για τον ίδιο **ρητό** αριθμό, για τον $\frac{3}{5}$. Έχοντας στο μυαλό μας αυτή την λεπτομέρεια, όταν γράφουμε $\frac{3}{5}$ θα εννοούμε και το κλάσμα $\frac{3}{5}$, αλλά και τον ρητό αριθμό $\frac{3}{5}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Πολλαπλασιασμός των όρων του $\frac{3}{5}$

με τον ίδιο, μη μηδενικό, φυσικό

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}=\frac{\mathbf{3\cdot 2}}{\mathbf{5\cdot 2}}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}=\frac{15}{25}=\frac{18}{30}=\frac{21}{35}=\frac{24}{40}=\frac{27}{45}=\frac{30}{50}=\frac{33}{55}=\frac{36}{60}=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ανάγωγο

Διαίρεση των όρων με κοινό διαιρέτη:
Απλοποίηση

Δ. Μπορείς να γράψεις 5 διαφορετικά σύμβολα για τον 13;

Μ. $\frac{13}{1}=\frac{26}{2}=\frac{39}{3}=\frac{52}{4}=\frac{65}{5}$.

Δ. Δεν έχουμε μοναδικά σύμβολα για τους αριθμούς. Άλλα σύμβολα που να μην είναι κλάσματα αλλά να είναι ο 13;

Μ. Πράξεις επιτρέπονται;

Δ. Επιτρέπονται. Πράξη και αποτέλεσμα. Δυο σε ένα.

Μ. 13+0, $13\cdot 1$, 8+5, 20-7, 13+8-8+7-7+6-6+5-5+1821-1821.

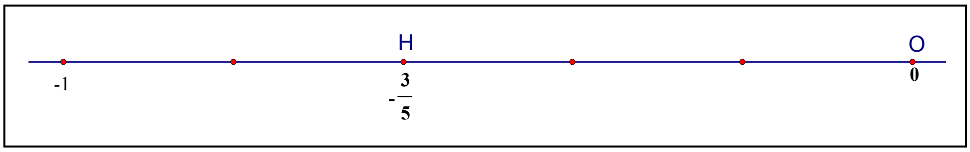
Πολλά σε ένα! Να κάνουμε και ένα «αρνητικό» παράδειγμα για τα κλάσματα, έναν αρνητικό ρητό;

Δ. Ποιον αριθμό θέλεις;

Μ. Ας πούμε τον $\frac{3}{5}$

Δ. Με το σημείο Η παριστάνουμε τον **ρητό** $-\frac{3}{5}$ και κάθε κλάσμα - αντιπρόσωπο αυτού του ρητού, κάθε κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{3}{5}$, π.χ.

$-\frac{3}{5}=-\frac{6}{10}=-\frac{9}{15}=-\frac{12}{20}=-\frac{15}{25}=-\frac{30}{50}=-\frac{33}{55}=-\frac{36}{60}$. Είναι τα θετικά



κλάσματα που είχαμε για τον $\frac{3}{5}$ με « - ». Ο $-\frac{3}{5}$ είναι ο αντίθετος του $\frac{3}{5}$.

Ο $\frac{3}{5}$ τώρα αποκτά ένα σύμβολο «+», $+\frac{3}{5}$, το όποιο μπορεί να παραλείπεται. Μπορείς να γράψεις και μερικούς ακεραίους σαν κλάσματα;

Μ. Αμέσως: $\frac{3}{1}=3,\ \frac{5}{1}=5\ldots$ και οι αντίθετοι $-\frac{3}{1}=-3,\ -\frac{5}{1}=-5$.

Δ. Μπορεί κάποιος ακέραιος να έχει παρονομαστή διαφορετικό του 1;

Μ. Όχι, ή μάλλον ναι. Γράφω τα ισοδύναμα. Μπορεί να έχει όποιον παρονομαστή θέλουμε: $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=\frac{500}{100}$ κλπ.

Δ. Πολλαπλασιάζουμε επί 1, ουδέτερο για τον πολλαπλασιασμό, $5=5\cdot 1,\ 5\cdot\frac{2}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}=\frac{10}{2},\ 5\cdot\frac{3}{3}=\frac{5\cdot 3}{3}=\frac{15}{3},\ 5\cdot\frac{1821}{1821}=\frac{5\cdot 1821}{1821}=\frac{9105}{1821}$.

Ένας ακέραιος γίνεται κλάσμα με οποιονδήποτε παρονομαστή.

Δ. Βλέπεις κάποια διαφορά των ακεραίων-ρητών;

Μ. Αυτό το κόλπο με τον επόμενο, δεν υπάρχει επόμενος ρητού.

Δ. Δεν υπάρχει επόμενος οποιουδήποτε ρητού, όπως δεν υπάρχει και προηγούμενος. Οι ρητοί δεν έχουν αυτή την ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους ακεραίους. Ανάμεσα σε δυο ρητούς υπάρχουν άπειροι ρητοί.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Βρες 5 ρητούς ανάμεσα στους $-\frac{1}{7},-\frac{2}{7}$. Να τους γράψεις από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο.

Μ. Εντάξει: $-\frac{1}{7}=-\frac{10}{70},-\frac{2}{7}=-\frac{20}{70}$, οπότε $-\frac{19}{70},-\frac{18}{70},-\frac{17}{70},-\frac{12}{70},-\frac{11}{70}$

Δ. Τέλεια! Πως σκέφτηκες για τη διάταξη;

Μ. Ομώνυμα. Σκέφτομαι τους ακεραίους στον άξονα-θερμόμετρο.

Αντίστροφα;

Δ. Τι αντίστροφα;

Μ. Αν έχουμε ένα σημείο στον άξονα, πως καταλαβαίνουμε ποιον ρητό παριστάνει;

Δ. Γιατί να παριστάνει ρητό;

Μ. Είπα «ρητό» για να καλύψω όλες τις περιπτώσεις, φυσικό, ακέραιο, κλασματικό, αρνητικό, οποιονδήποτε αριθμό.

Δ. Κάλυψες όλες τις περιπτώσεις… ρητών.

Μ. Εσύ είπες ότι «αν μια ευθεία γίνει άξονας, τότε μπορούμε να παραστήσουμε με σημεία του άξονα όλους τους ρητούς αριθμούς».

Δ. Σωστά, αν έχουμε ρητό, τότε αυτός είναι τετμημένη κάποιου σημείου του άξονα, αλλά δεν είπα το αντίστροφο!

Μ. Δηλαδή, υπάρχουν σημεία στον άξονα που δεν έχουν τετμημένη ρητό; Και τι είδους αριθμός είναι αυτός; Και που θα τοποθετηθεί; Δεν υπάρχουν θέσεις. Που βλέπεις κενές θέσεις;

Δ. Πως βρήκαμε «θέσεις» για τους άπειρους που υπάρχουν ανάμεσα σε δυο οποιουσδήποτε ρητούς;

Μ. Αυτό πήγε στο στομάχι, προσπαθώ να το χωνέψω. Αλλά, τελικά, δεν βρήκαμε θέσεις, σκεφτήκαμε ότι υπάρχουν.

Δ. Οι αριθμοί υπάρχουν στον κόσμο των ιδεών. Δεν εμφανίζονται στη φύση, ούτε εξαρτώνται από οποιονδήποτε «άξονα», ο οποίος και πάλι είναι επινόηση για να μας βοηθήσει σε κάποιες σκέψεις.

Μ. Υπάρχουν όμως πέντε κινητά, πέντε υπολογιστές, πέντε ποδήλατα.

Δ. Πέντε συγκεκριμένα αντικείμενα υπάρχουν και μας οδήγησαν στην «αφαίρεση», στον αφηρημένο αριθμό που γράφουμε τη σημερινή εποχή με το σύμβολο «5», αλλά το «5» το είδες κάπου στη φύση; Είδες κάπου τον αριθμό 0,0000000000007, ή κάπου αλλού «-5» αντικείμενα; Η ιδέα του «αρνητικού αριθμού» συνάντησε μεγάλη αντίσταση αρχικά, αφού αντιπροσώπευε ένα διαφορετικό είδος «αφαίρεσης», αλλά βαθμιαία έγινε αποδεκτή. Δεν «βλέπουμε» θέσεις στον άξονα, οι αριθμοί είναι νοητικά δημιουργήματα τελείως ανεξάρτητα από την εποπτεία.

Οι επινοήσεις δεν γίνονται πάντα αντιληπτές με τους διαύλους επικοινωνίας που παρέχουν οι αισθήσεις μας, αλλά ακόμη και η λογική, που επιβάλλει η περιορισμένη από βιολογικούς παράγοντες επικοινωνία μας με τον φυσικό κόσμο. Η προσπάθεια του ανθρώπου να υπερβεί την δυσκολία μέτρησης με ρητούς υπαρκτών μεγεθών, μεγεθών τα οποία βλέπει, αλλά ο κόσμος των ρητών αδυνατεί να μετρήσει, οδήγησε στην επινόηση των αρρήτων. Πρόκειται περί ιδανικών αριθμών που μπορούμε να πλησιάσουμε σε απειροελάχιστη απόσταση με ρητούς, αλλά είναι αδύνατον να τους προσδιορίσουμε πλήρως.

Μ. Πρόσφατες ανακαλύψεις;

Δ. Οι άρρητοι ανακαλύφτηκαν στη σχολή του Πυθαγόρα, γύρω στο 550 π.Χ. και κλόνισαν την Πυθαγόρεια κοινότητα, γιατί οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι «τα πάντα είναι ρητοί αριθμοί ή μιμήσεις αριθμών».

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Αλλά ας ασχοληθούμε για κάποιο διάστημα με τους ρητούς, για κατανόηση, πριν ακολουθήσουμε δυσκολότερους δρόμους.

Μ. 2500 χρόνια πριν! Τι κάνουν τα «μέσα ενημέρωσης»; Τουλάχιστον ο παππούς θα έπρεπε κάτι να μου έχει πει για το θέμα αυτό! Θα αργήσω πολύ να γνωρίσω κάποιον άρρητο;

Δ. Έχεις ήδη γνωρίσει τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία ενός από τους διασημότερους αρρήτους, του αριθμού «π». Στο βιβλίο της Στ΄ Δημοτικού γράφει[6] «…γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου είναι περίπου 3 φορές η διάμετρος. Αυτός ο αριθμός, ο “περίπου 3” ονομάζεται π και είναι στην πραγματικότητα ένας αριθμός με πάρα πολλά δεκαδικά ψηφία, ωστόσο για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνο τα δύο: λέμε π = 3,14…». Ο αριθμός «π» έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Όσο κι αν υπολογίζουμε, όσο ευφυείς κι αν είμαστε στην εύρεση νέων τεχνικών, δεν θα βρούμε ποτέ την ακριβή αριθμητική τιμή του, δεν θα γνωρίσουμε ποτέ όλα τα δεκαδικά του ψηφία!

Μ. Έχει αριθμούς που έχουν άπειρα δεκαδικά και τα γνωρίζουμε;

Δ. Ναι, π.χ. $\frac{10}{7} = 1,428571\,428571... = 1,\overline{428571}$, άπειρα δεκαδικά ψηφία, αλλά τα γνωρίζουμε, είναι η ομάδα «428571» που επαναλαμβάνεται.

Μ. Γιατί αναζητούμε τόσα πολλά δεκαδικά για τον «π», πού χρειάζονται;

Δ. Οι μηχανικοί δεν χρειάζονται περισσότερα από 7 δεκαδικά, οι φυσικοί δεν χρησιμοποιούν περισσότερα από 15 ή 20. Οι άνθρωποι εξερευνούν τα βάθη των ωκεανών, τις κορυφές των βουνών, τ' αστέρια, το σύμπαν. Έχουν μια ακατανίκητη επιθυμία να δοκιμάζουν τα όριά τους. Πιο γρήγορα, πιο δυνατά, πιο ψηλά! Ανεβαίνουν στον Ψηλορείτη, στον Όλυμπο, στο Έβερεστ. Εξερευνούν τον αριθμό «π», απλά και μόνο επειδή υπάρχει!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΑΞΕΙΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Από πράξεις; Έχουμε κάποιο πρόβλημα;

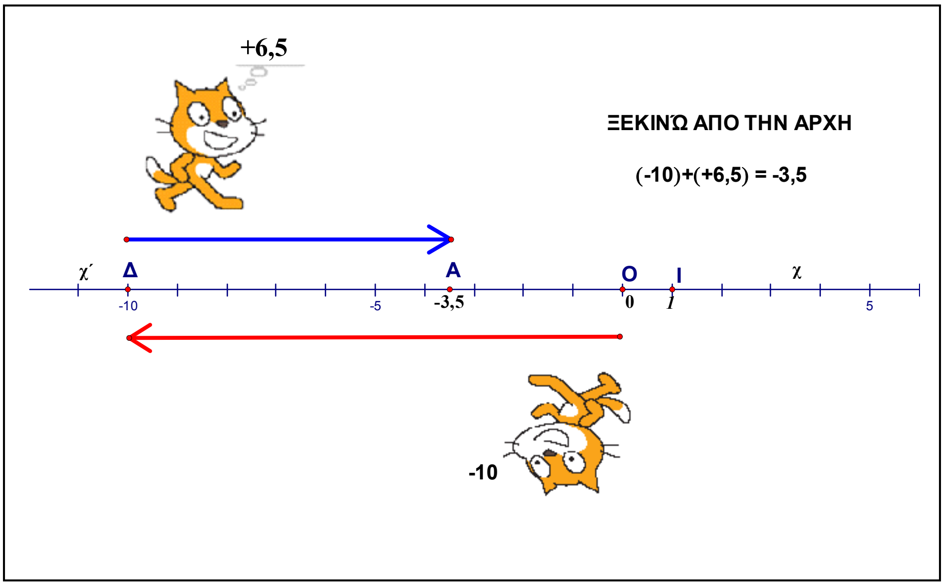
Μ. Μου υπενθυμίζεις την πρόσθεση ρητών με την βοήθεια του άξονα;

Δ. Ας δούμε την πρόσθεση: (-10)+(+6,5). Είμαι στην αρχή, στο Ο.

Το « - » του αριθμού (-10) με κατευθύνει 10 μονάδες «αριστερά», φτάνω στο σημείο Δ με τετμημένη -10.

Το «+» του αριθμού (+6,5) με υποχρεώνει να αλλάξω κατεύθυνση, κινούμαι 6,5 μονάδες «δεξιά», προς τον θετικό ημιάξονα Οχ.

Αποτέλεσμα της πρόσθεσης, άθροισμα, ο αριθμός (-3,5), τετμημένη του Α.



Μ. Που βρήκες τα γατάκια;

Δ. Λογισμικό «Scratch», ελεύθερο, http://scratch.mit.edu

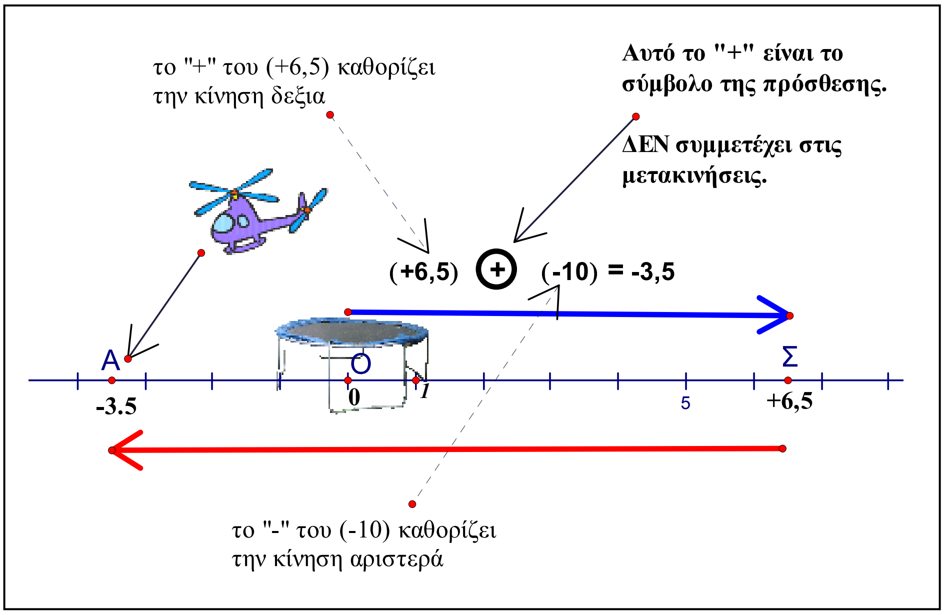
Μπορείς να συμπληρώσεις την αρίθμηση στον άξονα, θα σε διευκολύνει.

Μ. Η πρόσθεση (+6,5)+(-10) θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα;

Δ. Τα γατάκια χρειάζονται;

Μ. Όχι, αλλά μου άρεσαν.

Δ. Καλά, ας το περάσουμε γρήγορα:



Σκέψου το «+» της πρόσθεσης σαν ένα πλήκτρο με το οποίο στέλνονται στο ελικόπτερο οι αριθμοί (+6,5) και (-10). Το ελικοδρόμιο είναι στην αρχή, στο σημείο Ο, π.χ. το τραμπολίνο. Τα καύσιμα κοστίζουν, ο Ίππασος[1] κάνει την πρόσθεση και δίνει το αποτέλεσμα στον Αναθέτη[2]. Αυτός κατευθύνει το ελικόπτερο στο **άθροισμα,** στο σημείο Α που έχει τετμημένη (-3,5), δεν σπαταλά καύσιμα για τις διαδρομές ΟΣ και ΣΑ.

Μ. Ποιος είναι ο Αναθέτης

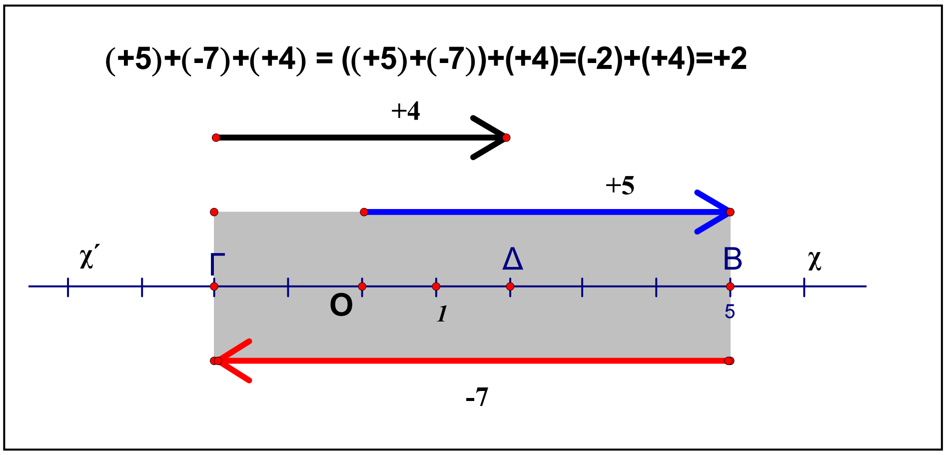
Δ. Ο πιλότος, αυτός που αναθέτει τετμημένες στα σημεία του άξονα. Ίππασος είναι ο συγκυβερνήτης, βρίσκει το άθροισμα, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, (+6,5)+(-10)= (-10)+(+6,5), ιδιότητα;

Μ. Αντιμεταθετική.

Η προσεταιριστική ποια είναι;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Παρατήρησε στο παρακάτω σχήμα την πρόσθεση (+5)+(-7)+(+4). Ξέρουμε να προσθέτουμε δύο αριθμούς. Για τρείς, προσθέτουμε τους δύο πρώτους, άθροισμα (-2), η τετμημένη του Γ, κατόπιν στο άθροισμα των δυο πρώτων, στο (-2) προσθέτουμε τον τρίτο, τον (+4). Εκκίνηση πάντα από την αρχή, από το σημείο Ο, πηγαίνουμε πρώτα στο Β, (+5), κατόπιν από το Β στο Γ, (-2), και τελικά από το Γ στο σημείο Δ με τετμημένη (+2).
Μετά την άφιξη των αρνητικών στην χώρα των αριθμών, οι αριθμοί απέκτησαν πρόσημα, (+5), (-7), η προτεραιότητα καθορίζεται με παρένθεση γράφουμε: ((+5)+(-7)) ή και [(+5)+(-7)] για να γίνει πρώτα η πρόσθεση των αριθμών (+5) και (-7).

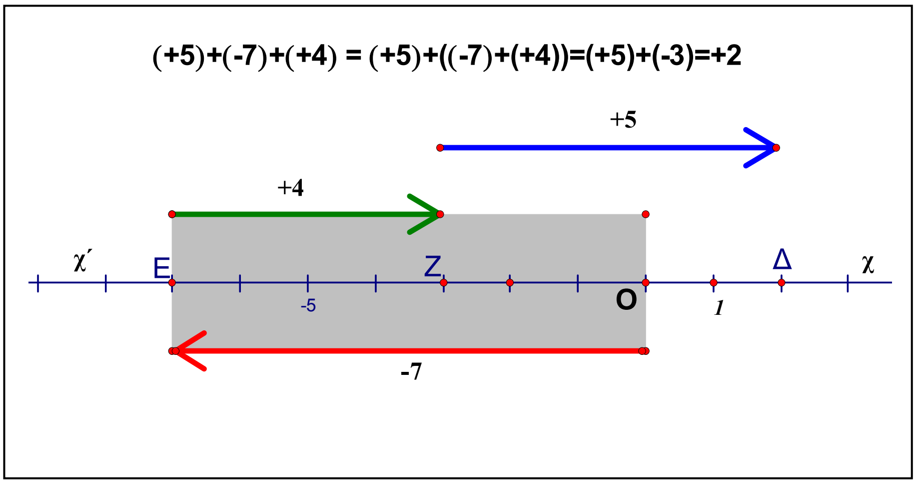


Δες στο ορθογώνιο, (+5)+(-7)=(-2). Συμπλήρωσε την αρίθμηση στον άξονα, η αρχή Ο και η μονάδα,1, είναι καθορισμένα.
Μπορούμε όμως να προσθέσουμε τον πρώτο, τον (+5), στο άθροισμα των δυο επομένων, στο (-3). Από την αρχή, από το σημείο Ο, πηγαίνουμε πρώτα στο Ε, (-7), κατόπιν από το Ε στο Ζ. Η τετμημένη του Ζ, (-3), είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης (-7)+(+4) που προηγείται, σύμβολο ((-7)+(+4)).

Τελική μετακίνηση από το Ζ στο σημείο Δ με τετμημένη (+2).

((+5)+(-7))+(+4)=(-2)+(+4)=+2,   (+5)+((-7)+(+4))=(+5)+(-3)=+2

Πρώτα γίνεται η πρόσθεση, στο ορθογώνιο, (-7)+(+4)=(-3).



Μ. Καλά. Θα συμπληρώσω στον άξονα τους ακεραίους που λείπουν. Με τα καύσιμα τι γίνεται; Ποιος πληρώνει για τις βόλτες του Αναθέτη και του Ίππασου;

Δ. Γίνεται η ελάχιστη δαπάνη. Μετά τους υπολογισμούς του Ίππασου, ο Αναθέτης κατευθύνει το ελικόπτερο στο (+2), τετμημένη του σημείου Δ, δεν πηγαινοέρχεται στον άξονα.

Η αντιμεταθετική ιδιότητα ανεξαρτητοποιεί τη σειρά δυο προσθετέων, (+4)+(-7)=(-7)+(+4).

Για περισσότερους από δυο, η προσεταιριστική μας δείχνει ότι είτε στο άθροισμα των δυο πρώτων προσθέσω τον τρίτο, είτε στον πρώτο προσθέσω το άθροισμα των δυο άλλων, θα βρω το ίδιο αποτέλεσμα.

Δεν επηρεάζει το άθροισμα η «ομαδοποίηση».

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ο Ίππασος που είναι ειδικός στους υπολογισμούς και στη χρήση αντιμεταθετικής και προσεταιριστικής ιδιότητας, σκέφτηκε ότι για την πρόσθεση χρειάζεται να ξέρει μόνο **ποιους** αριθμούς θα προσθέσει. Τη σειρά την καθορίζει ο ίδιος, όπως τον διευκολύνει περισσότερο.

Οπότε προσθέτει τους θετικούς και το άθροισμα με τον αρνητικό

Επειδή το σύμβολο της πρόσθεσης δεν παίζει κάποιο ρόλο στις μετακινήσεις δεξιά-αριστερά, γράφει μόνο τα σύμβολα που τον ενδιαφέρουν +5 +4 -7 και εννοεί την πρόσθεση (+5)+(+4)+(-7). Οι θετικοί προηγήθηκαν ιστορικά, τους γράφει πρώτα, ακολουθεί ο (-7).

Σκέφτηκε επίσης ότι μπορεί να παραλείψει και το «+» του (+5), οπότε καταλήγουμε στην μορφή 5+4-7

Μ. Γιατί δεν παρέλειψε και το + του 4;

Δ. Γιατί τότε θα έβλεπε 54-7 και… αρχίζουν τα προβλήματα. Επειδή δεν οδηγεί το ελικόπτερο και απολαμβάνει το τοπίο, οδηγείται σε σκέψεις και μεγάλα όνειρα, για να τα θυμάται, τα μικρά τα ξεχνά εύκολα, και όταν τον «ξυπνήσει» η επιτακτική φωνή του Αναθέτη, βλέπει το χαρτί και απαντά αυτόματα…54-7=47, ενώ 5+4-7=9-7=2.

Μ. Αν επιλέξει τη σειρά (-7)+ (+5)+(+4) τι παραλείπει;

Δ. Το «+» της πρόσθεσης και τις παρενθέσεις, το «- » του (-7) δεν παραλείπεται: (-7)+ (+5)+(+4)= -7 +5 +4

Αν δούμε λοιπόν την παράσταση -7 +5 +4, εννοούμε την πρόσθεση (-7)+ (+5)+(+4).

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπουν να προσθέτουμε τις ομάδες των ομόσημων, θετικών και αρνητικών, και να βρίσκουμε το άθροισμα με μια ακόμα πρόσθεση, ενός θετικού και ενός αρνητικού .

Μ. Παράδειγμα;

Δ. (+5)+(-7)+(-2)+(-6)+(+16)+(+2)=(+5)+(+16)+(+2)+(-7)+(-2)+(-6)=

= +5 +16 +2 -7 -2 -6 = **5+16-7-6**=21-13 = (+21)+(-13) = +8

Μ. Ενδιάμεσα κάτι ξέχασες, δηλ. ξέχασε ο Ίππασος.

Δ. Επειδή το «0» δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της πρόσθεσης, λέμε ότι είναι ουδέτερο, μπορούμε να το παραλείπουμε.

Μ. Για το 0 ξέρω, αλλά δεν έχουμε κάπου 0.

Δ. Έχουμε (+2)+(-2) = +2 -2 =2 -2 =0, οπότε 5 +16 +2 -7 -2-6 = 5+16-7-6

Τα σύμβολα για το 0, όπως και για οποιονδήποτε ρητό δεν είναι μοναδικά, π.χ. $0=2-2=5-5=3{,}5-3{,}5=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=1821-1821$, -2014+2014 κλπ, πράξη και αποτέλεσμα…

Μ. Το έμαθα! Δυο σε ένα! Με τον άξονα ερμηνεύουμε και την αφαίρεση;

Δ. Όχι. Η αφαίρεση μετατρέπεται σε πρόσθεση, προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

Μ. Γιατί αφαιρούμε με αυτόν τον τρόπο;

Δ. Χρησιμοποιούμε την προηγούμενη γνώση. Τι σημαίνει αφαίρεση στους θετικούς, δηλ. στους φυσικούς ή στους κλασματικούς αριθμούς;

Μ. ……..

Δ. Γιατί δεν μιλάς;

Μ. Κάτι είπαμε για την αντιπάθεια των ορισμών, για το κλίμα της συζήτησης…, για να μην χαλάσει;

Δ. Καλά.

Μ. Αφαίρεση ανάμεσα σε δυο δοσμένους αριθμούς, το μειωτέο και τον αφαιρετέο, σημαίνει να βρούμε ένα τρίτο αριθμό, τη διαφορά, που αν τον προσθέσουμε στον αφαιρετέο, να βρίσκουμε άθροισμα τον μειωτέο.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Παράδειγμα: 9(μειωτέος)-5(αφαιρετέος) = …;

Μ. 4

Δ. 4 είναι η διαφορά του 5 από τον 9. Δοκιμή: 4+5=9.

Ποια είναι η διάφορα του 13 από τον 25;

Μ. 25(μειωτέος)-13(αφαιρετέος) = 12(διαφορά του 13 από τον 25)

Δ. Δοκιμή;

Μ. Εντάξει, απλό, είπαμε είμαι πρώτη Γυμνασίου!

Δ. Ποια είναι η διαφορά του 0,27 από τον $\frac{4}{5}$; Μπορείς από μνήμης;

Μ. Για να δούμε $\frac{4}{5}-0,27=...$ Το $\frac{4}{5}$ γίνεται δεκαδικό κλάσμα, 5 επί 20 ίσον 100, άρα επί 20 και το 4, … $0,60$…0,60-0,27=0,33.Σωστό;

Δ. Να το διαπιστώσεις μόνος. Δεν μπορώ να στα διδάξω όλα!

Μ. 0,33+0,27=0,60, Προσθέτω στον αφαιρετέο «0,27» τη διαφορά «0,33» και βρίσκω το μειωτέο «0,60». Σωστό.

Δ. Δεν είναι σωστό!

Μ. Γιατί; Η πρόσθεση της διαφοράς 0,33 στον αφαιρετέο 0,27 δίνει άθροισμα 0,60, τον μειωτέο.

Δ. Τον δικό σου μειωτέο. Εγώ σου έδωσα την αφαίρεση $\frac{4}{5}-0,27=...$. Μειωτέος είναι ο $\frac{4}{5}$.

Μ. Εντάξει, μεταφράζω σε κλάσμα, $0,60=\frac{60}{100}=\frac{6}{10}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{3}{5}$ …Οχ!

Λάθος στην απλοποίηση, όχι!, πριν έγραψα το $\frac{4}{5}$ ίσον 0,60, το βρήκα,

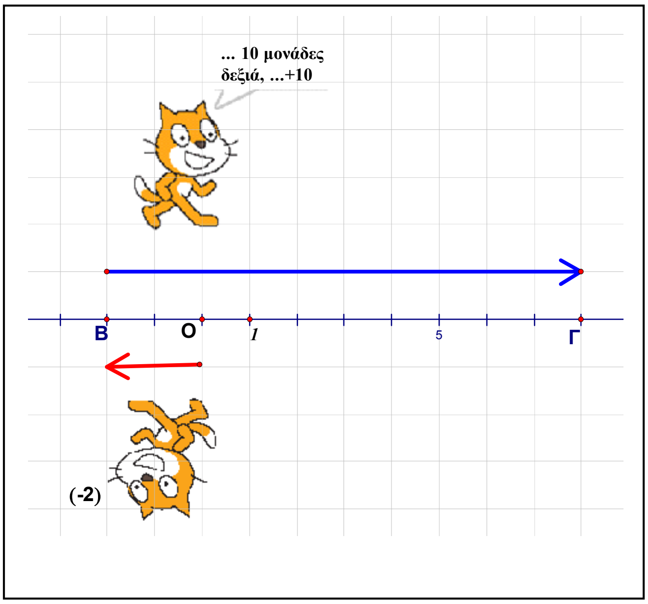
$\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{80}{100}=0,80$ και $\frac{4}{5}-0,27=0,80-0,27=0,53$

Δ. Χρειάζεται λίγη προσοχή.

Μ. Σκεφτόμαστε με τον ίδιο τρόπο και για την αφαίρεση ρητών: Ας βρούμε τη διαφορά του (-2), αφαιρετέος από τον (+8), μειωτέος: (+8)-(-2)=…;

Δ.Η διαφορά είναι ένας αριθμός που αν προστεθεί στον αφαιρετέο (-2), θα δώσει αποτέλεσμα πρόσθεσης τον μειωτέο (+8). Μπορείς να χρησιμοποιήσεις τον άξονα, ότι είπαμε για την ερμηνεία της πρόσθεσης, και να βρεις το αποτέλεσμα.

Μ. Είμαι στο σημείο Β, τετμημένη (-2), για να βρεθώ στο Γ με τετμημένη (+8) θα πρέπει να κινηθώ 10 μονάδες δεξιά, (+10), (-2)+(+10)=(+8).



Αυτή είναι η δοκιμή.

Επομένως (+8)-(-2)=+10, που βρίσκεται και με την πρόσθεση (+8)+(+2):

(+8**) - (-2)** = (+8) **+ (+2)** =(+10).

Προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, καλό!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η πρόσθεση (-2)+(+10)=(+8) δεν είναι δοκιμή και της αφαίρεσης (+8)-(+10);

Δ. Πολύ σωστά! Αποτέλεσμα;

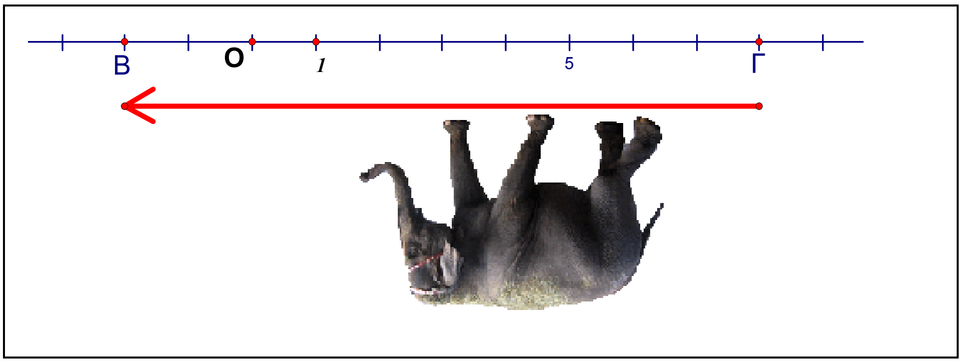
Μ. Πρέπει να είναι (-2), αν από το άθροισμα (+8) αφαιρέσω τον ένα αριθμό θα βρω τον άλλο. Ας σκεφτώ, τι πρέπει να προσθέσω στον αφαιρετέο (+10) για να βρω τον μειωτέο (+8); Το (-2), απλό, μπορώ να το φανταστώ, δεν μου χρειάζονται τα γατάκια σου!

(+8)-(+10) = (-2),… Αυτοματισμός: (+8) + (-10) = (-2)

Δ. Και για την αφαίρεση (-2)-(+8)=…;

Μ. Είμαι στο (+8), τι πρέπει να προσθέσω για να βρεθώ στο (-2);

Εύκολο: (-10). Μπορούμε να την κάνουμε με ελεφαντάκι;



Δ. Μπορούμε. Αυτοματισμός ;

Μ. (-2)-(+8)= (-2)+(-8)=(-10). Γιατί ο ελέφαντας έχει πολύ μεγάλα αυτιά;

Δ. Γιατί έχει την άποψη: καλύτερα να με βλέπεις και να με χαίρεσαι, παρά να με λυπάσαι.

Μ. Άσχετο;

Δ. Σχετικό. Τρώει σε όλα τα εστιατόρια της φύσης, χωρίς να το πολυσκέφτεται, είναι και δωρεάν, δεν τον ενδιαφέρει ο όγκος, η μάζα και το βάρος, δεν ζει σε διαμερίσματα.

Δεν τρώει κρέας, φυτοφάγο, αλλά θα έχεις παρατηρήσει ότι τα ογκωδέστερα ζώα είναι τα φυτοφάγα.

Για τις διακοπές του στη γη επιλέγει περιοχές με υψηλές θερμοκρασίες. Τα μεγάλα αυτιά αυξάνουν σημαντικά το εμβαδόν της επιφάνειάς του και τον βοηθούν να δροσίζεται[3].

Μπορείς να βρεις με ποιο σημείο του άξονα παριστάνουμε το αποτέλεσμα της αφαίρεσης: (-10)-(-6.5);

Μ. Και καλά για να δροσίζεται!

Μειωτέος (-10), Αφαιρετέος (-6,5), αντίθετος του αφαιρετέου (+6,5). Προσθέτουμε στον μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου (αυτοματισμός):

$$(-10)-(-6,5)=(-10)\oplus(+6,5)=-10+6,5=-3,5$$

Στο σημείο με τετμημένη -3,5.

Το $\oplus$ είναι το σύμβολο της πρόσθεσης, το έβαλα σε κύκλο για να το ξεχωρίζεις από το πρόσημο των αριθμών, π.χ. το «+» του (+6,5). Αφού έχουμε μόνο πρόσθεση στην αριθμητική παράσταση (-10)+(+6,5) μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις και το σύμβολο της πρόσθεσης και να γράψουμε -10 + 6,5. Γράφουμε -10 +6,5 και εννοούμε (-10)+(+6,5)!

Δ. Αυτό, όπως είδαμε στην προσεταιριστική ιδιότητα, γίνεται και με περισσότερους αριθμούς: Γράφουμε $-\frac{1}{3}+2,1+\frac{5}{6}-7,7$ και εννοούμε $\left(-\frac{1}{3}\right)\oplus(+2,1)\oplus\left(+\frac{5}{6}\right)\oplus(-7,7)$.

Η τελευταία παράσταση πριν μεταμορφωθεί σε προσθέσεις μπορεί να ήταν π.χ. $\left(-\frac{1}{3}\right)+(+2,1)-\left(-\frac{5}{6}\right)+(-7,7)$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μπορείς να βλέπεις το « - » σαν μηχανή δημιουργίας αντίθετων. Όταν είναι μπροστά από παρένθεση δημιουργεί αντίθετους: - (+2)= -2 Διαβάζουμε: ο αντίθετος του (+2) είναι ο -2. Μπορείς να διαβάσεις τα σύμβολα -(-2) =+2;

Μ. Ο αντίθετος του (-2) είναι ο (+2).

Γνωρίζουμε ότι 10-2=8, αφαίρεση φυσικών.

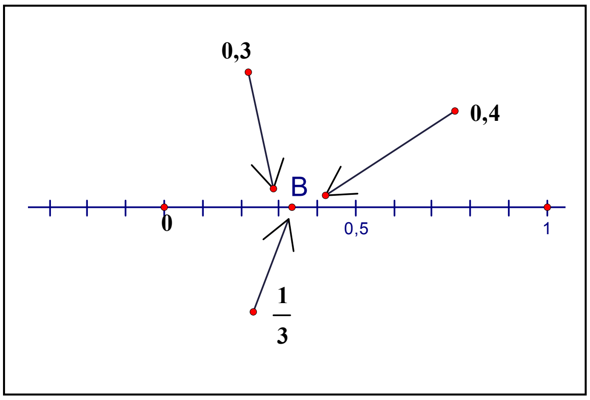
Αν δούμε 10-2 τι καταλαβαίνουμε;

Δ. Ό,τι και ο Ίππασος, (+10)+(-2). Αλλά και αν θεωρήσεις την αφαίρεση 10-2 σαν (+10) - (+2) θα οδηγηθείς στο ίδιο αποτέλεσμα, αφού (+10)-(+2) = (+10)+(-2) = +10-2 = 10-2.

Καλύτερα όμως να αναπτύξεις τον αυτοματισμό 10-2 =(+10)+(-2).

Μ. Μπορούμε να κάνουμε ένα παράδειγμα προσεγγιστικής τοποθέτησης ενός δεκαδικού ή κλάσματος στον άξονα;

Δ. Βεβαίως. Π.χ. το κλάσμα $\frac{1}{3}$ τοποθετείται στο σημείο Β, ανάμεσα στο 0,3 και 0,4, αλλά πιο κοντά στο 0,3:



$\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{1}{30}$, $\frac{4}{10}-\frac{1}{3}=\frac{2}{30}$,

$\frac{1}{30}<\frac{2}{30}$, η απόσταση του $\frac{1}{3}$ από τον αριθμό 0,3 είναι μικρότερη από την απόσταση του $\frac{1}{3}$ από τον 0,4.

Μ. Στην πρώτη αφαίρεση ο 1/3 είναι μειωτέος, στην δεύτερη αφαιρετέος, γιατί;

Δ. Η απόσταση είναι θετικός αριθμός, στην δεύτερη περίπτωση ο 0,4 είναι μεγαλύτερος από το 1/3.

1	3	…	10	3
			-9	0,3
			1	

Μ. Το 1/3 ποιος δεκαδικός αριθμός είναι;

Δ. Διαιρούμε, αριθμητής δια παρονομαστής, 1:3, αμέσως μετά την πρώτη αφαίρεση, 10-9 = 1, στο υπόλοιπο παρουσιάζεται το ψηφίο του διαιρετέου, το «1», οπότε, αν συνεχίσουμε τη διαίρεση 1:3, $\frac{1}{3} = 0,3333333...$Για τα άπειρα «3» έχει επιλεγεί το σύμβολο $\overline{3}$, $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$.

Το 1/3 δεν είναι δεκαδικό κλάσμα, ο δεκαδικός αριθμός που προκύπτει δεν είναι πεπερασμένος, όπως π.χ. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$, είναι **απειροψήφιος**, αλλά όλα τα ψηφία του γνωστά: 3.

Μ. Πόσο ακριβώς είναι;

Δ. Έχεις κάτι στο μυαλό σου;

Μ. Έχουμε να μοιράσουμε 1€ σε τρείς ανθρώπους: παππούς, γιαγιά και εγώ. Θα μας τα μοιράσεις; Για τα γλυκά είναι εύκολο, χωρίζουμε[4] σε τρία ίσα μέρη, αλλά εδώ παρουσιάζεται ένα προβλη-ματάκι.

Δ. Είναι η κ. Αναστασία στο κυλικείο;

Μ. Ναι. Να φέρω φρα-παιδάκι;

Δ. Όχι. Πήγαινε να μεταφράσεις το 1€ σε λεπτά

Μ. …Ορίστε 100 λεπτά.

Δ. Ναι. Παίρνετε από 33 και ένα κρατώ για τον κόπο μου.

Μ. Είναι δίκαιο αυτό;

Δ. Ένα λεπτό! Η αμοιβή είναι συμβολική, δεν έχει καμιά αξία.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Για σένα και την κ. Αναστασία. Ο χυμός κάνει 1€ και τον δίνει με 99 λεπτά, ακόμα και με 98. Το εισιτήριο όμως στο λεω-φορείο κάνει 1€ και το μηχάνημα αρνείται να το τυπώσει αν το ταΐσεις με 99 λεπτά. Ζητά αυτό το ασήμαντο λεπτό! Το γράφει και στην οθόνη, 1 λεπτό ακόμα. Μερικές φορές η τεχνολογία είναι εκνευριστική!

Δ. Γνωρίζεις πολύ καλά ότι δεν έχει υλοποιημένη άλλη υποδιαίρεση του €. Δέκατα είναι τα δεκάλεπτα, εκατοστά είναι τα λεπτά. Αλλά με οποιαδήποτε υποδιαίρεση κάπου θα σταματήσουμε, η ζωή είναι πεπερασμένη, έχει αρχή και τέλος. Αφού δεν θέλεις να κρατήσω αυτό το ασήμαντο λεπτό ας το πετάξουμε. Αν κάποια φορά σου λείπουν μερικά λεπτά μπορώ να σου δώσω, είπαμε, ασήμαντα.

Μ. Έχω! Αλλά φροντίζω για το μέλλον μου, να εκμεταλλευτώ τις οικονομίες μου και να περνώ καλύτερα. Αφού μπορώ να αγοράσω φτηνότερα δίνω τα 98 και αποταμιεύω 2 λεπτά!

Δ. Το διάλλειμα τέλος. Έχεις κάποια άλλη ερώτηση για το 0,333… ;

Μ. Και αν έχουμε τον αριθμό 0,3333333333333… άπειρα τριάρια, πως θα βρούμε ποιο κλάσμα παριστάνει;

Δ. Το $\frac{1}{3}$, οι ισότητες ισχύουν και «ανάποδα»: 5=2+3, 2+3=5. Μακροπρόθεσμα προκρίνονται οι μαθητές που καταλαβαίνουν και χρησιμοποιούν τις ισότητες «ανάποδα». Π.χ. όλοι απαντούν 5-5=0, $\frac{5}{5}=1$, ποια είναι η περίμετρος και το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 2, αλλά λίγοι γράφουν 0=5-5, $1=\frac{5}{5}$ και ελάχιστοι μπορούν να βρουν την πλευρά τετραγώνου από το εμβαδόν.

Π.χ. πλευρά 2,5m, εμβαδόν;….εμβαδόν $2m^2$, πλευρά του τετραγώνου;

Μ. Πλευρά 2,5, …εμβαδόν 2,5*2,5=6,25m^2, η πλευρά του άλλου…1*1=1, 2*2=4, κάπου ανάμεσα στο 1 και στο 2 είναι.

Και αν έχουμε τον αριθμό 0,22222… άπειρα δυάρια, πως θα βρούμε ποιο κλάσμα παριστάνει;

Δ. Γιατί να παριστάνει κλάσμα;

Μ. Αν έχουμε κλάσμα, διαιρούμαι αριθμητή δια παρονομαστή και βρίσκουμε δεκαδικό. Αν έχουμε δεκαδικό κάποιος τρόπος θα υπάρχει να γυρίσουμε πίσω, στο κλάσμα.

Δ. **Αν** έχουμε Έλληνα, **τότε** αυτός είναι σίγουρα Ευρωπαίος;

Μ. Σίγουρα, η Ελλάδα είναι χώρα της Ευρώπης. Τι θα είναι Αμερικάνος;

Δ. Αν εναλλάξουμε την υπόθεση με το συμπέρασμα;

Μ. Δεν το συνέλαβα;

Δ. Έχουμε μια υποθετική πρόταση:

υπόθεση Έλληνας, συμπέρασμα Ευρωπαίος.

Εναλλαγή: υπόθεση Ευρωπαίος, συμπέρασμα Έλληνας.

Αν βρούμε κάποιον Ευρωπαίο, τότε αυτός είναι σίγουρα Έλληνας;

Μ. Όχι. Υπάρχουν κλάσματα που δεν γίνονται δεκαδικοί;

Δ. Όχι. Υπάρχουν δεκαδικοί που δεν γίνονται κλάσματα. Αν έχουμε τον δεκαδικό αριθμό που βρήκαμε από τη διαίρεση των όρων του κλάσματος, αριθμητής δια παρονομαστής, τότε υπάρχει τρόπος να βρούμε ένα κλάσμα από το οποίο γεννήθηκε, αλλά έχουμε και δεκαδικούς που δεν προκύπτουν από διαιρέσεις ακεραίων, όπως ο «π» που είδαμε στη συζήτηση για τον άξονα. Ή μπορούμε να κατασκευάσουμε.

Μ. Πως θα κατασκευάσουμε;

Ένα παράδειγμα ακόμα και χωρίς εξηγήσεις; Είναι πολύπλοκο;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Ο αριθμός: 0,212112111211112111111…..Μετά το πρώτο «2» έχουμε ένα «1», μετά το δεύτερο «2» έχουμε δυο «1» μετά το τρίτο «2» έχουμε τρία «1» κλπ. Ο αριθμός κατασκευάστηκε με τα ψηφία «1» και «2», αλλά δεν υπάρχει ομάδα ψηφίων που επαναλαμβάνεται, οπότε δεν υπάρχει και ρητό κλάσμα ίσο με αυτή την «δεκαδική παράσταση».

Μ. Ο «0,2222…» γίνεται κλάσμα;

Δ. Ναι, επαναλαμβάνεται ο «2», είναι το $\frac{2}{9}$.

Μ. Ο «0,1111…»;

Δ. Είναι το κλάσμα $\frac{1}{9}$.

Μ. Πως θυμάσαι τόσα πολλά μαθηματικά.

Ο παππούς λέει ότι όσο μεγαλώνουμε η μνήμη «αδυνατίζει».

Δ. Υπονοούμενο; Και όσο μικραίνουμε! Καθημερινά διαπιστώνεις ότι έχεις ξεχάσει πολλά από τα θέματα που συζητήσαμε. Η μνήμη αδυνατίζει όταν δεν την εξασκείς. Αλλά δεν τα θυμάμαι.

Βλέπω το «1», το ψηφίο αρχίζει να επαναλαμβάνεται **αμέσως** μετά την υποδιαστολή, είναι αριθμητής, παρονομαστής είναι το 9.

Μ. Ναι, αλλά για τον 0,33333… είπαμε ότι είναι το 1/3.

Δ. Ισοδύναμο, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Μ. Εγώ πως θα βρίσκω το κλάσμα;

Δ. Θα πούμε πως βρίσκουμε ένα κλάσμα για τους αριθμούς που έχουν **ένα** επαναλαμβανόμενο ψηφίο **αμέσως** μετά την υποδιαστολή, λέγονται «απλοί περιοδικοί» με μονοψήφια περίοδο, περίοδος είναι η ομάδα ψηφίων που επαναλαμβάνεται, εδώ ένα.

Τα **ψηφία** που χρησιμοποιούμε στο δεκαδικό σύστημα είναι ακριβώς…δέκα: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Αν υποθέσουμε ότι το ακέραιο μέρος είναι 0, τότε πόσες είναι όλες οι περιπτώσεις για απλό περιοδικό; Μπορείς να τις γράψεις; Χρησιμοποίησε την παύλα πάνω από το ψηφίο, για να δηλώσεις το ψηφίο που επαναλαμβάνεται.

Μ. Περιπτώσεις: 0,000…, 0,111…, χρησιμοποιώ την «-», $0,222222...=0,\bar{2}$, $0,\bar{3}$, $0,\bar{4}$, $0,\bar{5}$, $0,\bar{6}$, $0,\bar{7}$, $0,\bar{8}$, $0,\bar{9}$.

Δ. Ο πρώτος είναι ο αριθμός μηδέν. Είναι ξεκάθαρο;

Μ. Ναι, μηδέν.

Δ. Κάνε τη διαίρεση 1:9

1	9	…	10	9
			-9	0,1
			1	

Μ. Εντάξει, $\frac{1}{9}=0,1111...=0,\bar{1}$

Δ. Συνέχισε, 2:9 κλπ.

2	9	…	20	9
			-18	0,2
			2	

Μ. $\frac{2}{9}=0,222...=0,\bar{2}$

Δ. Μπορείς να παρατηρήσεις ότι αμέσως μετά την πρώτη διαίρεση, προκύπτει στο υπόλοιπο το ψηφίο του διαιρετέου, φυσικά έχουμε 2 «δέκατα», οπότε επαναλαμβάνεται αιώνια το «2» στο πηλίκο.

Μ. $\frac{3}{9}=0,\bar{3}$, $\frac{4}{9}=0,\bar{4}$, $\frac{5}{9}=0,\bar{5}$, $\frac{6}{9}=0,\bar{6}$, $\frac{7}{9}=0,\bar{7}$, $\frac{8}{9}=0,\bar{8}$, $\frac{9}{9}=0,\bar{9}$.

Δ. Έκανες τις διαιρέσεις;

Μ. Όχι, ανέπτυξα «αυτοματισμό»!

Δ. Οι ισότητες προέκυψαν από αριστερά προς τα δεξιά, αλλά αφού είναι ισότητες, ισχύουν και από δεξιά προς τα αριστερά. Επομένως για κάθε έναν από τους $0,\bar{1}$,$0,\bar{2}$, $0,\bar{3}$, $0,\bar{4}$, $0,\bar{5}$, $0,\bar{6}$, $0,\bar{7}$, $0,\bar{8}$, $0,\bar{9}$ γνωρίζουμε τουλάχιστον ένα κλάσμα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Υπάρχουν και άλλα κλάσματα που είναι ίσα π.χ. με τον $0,\overline{6}$;

Δ. Όλα τα ισοδύναμα με το 6/9 δίνουν $0,\overline{6}$: $\frac{6}{9}=0,\overline{6}=\frac{2}{3}=\frac{20}{30}=\frac{14}{21}=...$

Κάνε τη διαίρεση 9:9.

Μ. Αστείο; Πηλίκο 1, υπόλοιπο 0.

Δ. Στον «αυτοματισμό» έχεις γράψει $\frac{9}{9}=0,\overline{9}$, δηλαδή $\frac{9}{9}=0,\overline{9}=0,9999...$.

Μ. Ναι, δεν το πρόσεξα, στον αυτοματισμό δεν σκεφτόμαστε, γράφουμε «αυτόματα». Και τώρα; Η ίδια διαίρεση, 9:9, γίνεται να δίνει δυο διαφορετικά αποτελέσματα; Δεν γίνεται αυτό. Το αποτέλεσμα κάθε πράξης είναι μοναδικό. Τι συμβαίνει[5];

Δ. Πολύ σωστά! Μοναδικό αποτέλεσμα. Βρήκες ακόμα ένα σύμβολο για τον αριθμό 1, $1=0,9999...=0,\overline{9}$.

Μ. Είναι σωστό αυτό; Όσα εννιάρια και να πάρουμε, κάτι μένει, δεν φτάνουμε τον 1.

Δ. Κάτι μένει από τι;

Μ. Από την αφαίρεση, **ένα πλην μηδέν κόμμα τα εννιάρια**.

Δ. Για συγκεκριμένο πλήθος, υπάρχει κάποια διαφορά, π.χ. υπολόγισε τις διαφορές 1-0,9, 1-0,99, 1-0,999, 1-0,9999…

Μ. 1-0,9 = 0,1, 1-0,99 = 0,01, 1-0,999 = 0,001, 1-0,9999= 0,0001.

Δ. Οι διαφορές αυξάνονται ή μειώνονται;

Μ. Μειώνονται, ένα δέκατο, ένα εκατοστό, ένα χιλιοστό, ένα δεκάκις χιλιοστό…

Δ. Μπορούμε να πάρουμε εννιάρια ώστε η διαφορά από τον αριθμό 1 να γίνει ένα εκατομμυριοστό;

Μ. Δέκατο ένα 9, εκατοστό δυο 9, χιλιοστό τρία 9 …, εκατομμύριο, έξη μηδενικά, οπότε έξη 9, 1-0,999999=0,000001, ένα εκατομμυριοστό, μικρή αλλά **υπάρχει** διαφορά.

Δ. Σωστό. Μετράς τα μηδενικά μετά το 1, 1 000 000 έξη μηδενικά, τόσα είναι τα εννιάρια μετά το κόμμα, έξη, 0,999999. Το αποτέλεσμα της διαφοράς είναι ο 1000000 γραμμένος ανάποδα, 0000001, τα έξη μηδενικά στην αρχή, κόμμα στο πρώτο μηδενικό, τελευταίο ψηφίο το «1» :0,000001

Μπορείς να υπολογίσεις τη διαφορά 1-1;

Μ. Μηδέν.

Δ, Αν δεν γνωρίζουμε τους αριθμούς αλλά γνωρίζουμε ότι έχουν διαφορά μηδέν, τι συμπεραίνουμε;

Μ. Ότι είναι ίσοι. Αλλά εδώ **έχουμε** διαφορά.

Δ. Μπορούμε να πάρουμε εννιάρια ώστε η διαφορά να είναι ένα δισεκατομμυριοστό, «0, 000 000 001»;

Μ. Εννιά μηδενικά, εννιά εννιάρια, θα πάρουμε τον αριθμό 0,999 999 999.

Δ. Πόσα εννιάρια θα πάρουμε ώστε η **διαφορά** να είναι:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 0…

Μ. Που είναι το «1»;

Δ. Στο…άπειρο!

Μ. Θα πάρουμε τον αριθμό:

0,999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 999 9…

Δ. Που τελειώνουν τα «9»;

Μ. Όπου και τα μηδενικά σου, στο …άπειρο.

Δ. Και τότε ποια είναι η διαφορά του $0,\overline{9}$ από τον 1;

Μ. ……….Μηδέν;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Όσο και να προχωρήσεις «δεξιά» στον αριθμό 0,000 000 000 0…, δεν πρόκειται να βρεις «1», η διαφορά είναι μηδέν, οπότε οι αριθμοί 1 και $0,\overline{9}$ είναι ίσοι, $1 = 0,\overline{9}$. Ο αριθμός «1» έχει άπειρες «κλασματικές» μορφές, όλα τα κλάσματα με αριθμητή ίσο με τον παρονομαστή, εκτός φυσικά το «0/0». Έχει και δυο[5] «δεκαδικές» παραστάσεις: 1 και $0,\overline{9}$, ή 1,000… και 0,999… Αν πολλαπλασιάσεις την ισότητα $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ επί 3, θα έχεις μια ακόμα διαπίστωση του $1 = 0,\overline{9}$.

Ισχύει γενικά: Κάθε μη μηδενικός **πεπερασμένος** δεκαδικός αριθμός, π.χ. 12,5 , 13,21, **μπορεί** να παρασταθεί και με ένα σύμβολο που τελειώνει σε $\overline{9}$, δηλ.έχει δυο δεκαδικές παραστάσεις. Το μονο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να αλλάξουμε το τελευταίο ψηφίο, βάζοντας αντι αυτού το αμέσως μικρότερο και δίπλα του το σύμβολο $\overline{9}$, π.χ. $15 = 14,\overline{9}$, $12,5 = 12,4\overline{9}$, $13,21 = 13,20\overline{9}$.

Μ. Αν δεν έχουμε μηδέν ακέραιο μέρος; Π.χ.τον 5,77777…, δηλ. τον $5,\overline{7}$;

Δ. «Διαίρει και βασίλευε», χώρισε το ακέραιο μέρος.

Μ. Κατάλαβα, 5+0,777…

Δ. Συνέχισε, βρες ένα κλάσμα.

Μ. Ναι, $5 + \frac{7}{9} = \frac{5}{1} + \frac{7}{9} = \frac{45+7}{9} = \frac{52}{9}$

Δ. Βρες ένα κλάσμα για τον $5,\overline{9}$

Μ. Ίδια διαδικασία, $5 + \frac{9}{9} = \frac{5}{1} + \frac{9}{9} = \frac{45+9}{9} = \frac{54}{9}$

Δ. Αυτοματισμός; Απλοποίηση γίνεται;

Μ. Ναι, απλό.. …Α! ναι! Πως δεν το είδα πρώτος, 5+1=6.

Δ. Το σύμβολο $5,\overline{9}$ είναι μια διαφορετική παράσταση του 6.

Μ. Αν έχουμε τον 5,123787878…, δηλ. τον $5,123\overline{78}$. Γίνεται κλάσμα;

Δ. Έχει ομάδα ψηφίων που επαναλαμβάνεται, την ομάδα «78», **είναι** λοιπόν η δεκαδική παράσταση κάποιου κλάσματος και όλων των ισοδυνάμων του.

Να το αφήσουμε προς το παρόν και να συνεχίσουμε στον άξονα;

Η συζήτηση ήταν περί του παραστατικού σημείου του κλάσματος 1/3.

Μ. Για να βρούμε την απόσταση δυο αριθμών στον άξονα είναι απαραίτητο να βρούμε τον μεγαλύτερο;

Δ. Όχι. Η απόλυτη τιμή μας βοηθά να αναπτύξουμε τον αυτοματισμό της απόστασης. Τι παριστάνουμε με το σύμβολο $\left|\frac{1}{3}\right|$;

Μ. Την απόσταση του σημείου που έχει τετμημένη 1/3 από την αρχή, από το σημείο Ο.

Δ. Πολύ καλά. Μπορούμε να γράψουμε $\left|\frac{1}{3}-0\right|$. Έτσι γράφουμε $\left|\frac{1}{3}-0,3\right|$, ή $\left|\frac{1}{3}-0,4\right|$ για τις αποστάσεις του $\frac{1}{3}$ από τους 0,3 και 0,4. Για συντομία μιλούμε για την απόσταση δυο αριθμών στον άξονα και εννοούμε την απόσταση των σημείων που έχουν τετμημένες αυτούς τους αριθμούς, την απόσταση των παραστατικών τους σημείων. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $\left|\frac{1}{3}-0,4\right|=\left|\frac{10}{30}-\frac{12}{30}\right|=\left|-\frac{2}{30}\right|=\frac{2}{30}$.

Η απόλυτη τιμή καλύπτει και τις δυο περιπτώσεις.

Μ. Ισχύει για την απόσταση οποιονδήποτε αριθμών;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Για την απόσταση γράφουμε $\left|(\triangle)-(\square)\right|$.

Βάζουμε στην πρώτη παρένθεση, στη θέση που βρίσκεται το τριγωνάκι τον ένα αριθμό, στη δεύτερη παρένθεση, στο τετραγωνάκι, τον άλλο, δεν ξεχνάμε τα πρόσημα των αριθμών, και ότι προκύψει από την αφαίρεση.

Π.χ. Απόσταση των αρνητικών: $-\frac{1}{3}$ και $-0{,}3$;

Πρώτη παρένθεση $\left(-\frac{1}{3}\right)$, δεύτερη $(-0{,}3)$.

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)-(-0{,}3)\right|=\left|\left(-\frac{10}{30}\right)+\left(+\frac{9}{30}\right)\right|=\left|-\frac{10}{30}+\frac{9}{30}\right|=\left|-\frac{1}{30}\right|=\frac{1}{30}$$

Απόσταση θετικού και αρνητικού: $\left(+\frac{1}{3}\right)$ και (-0,5);

$$\left|\left(+\frac{1}{3}\right)-(-0{,}5)\right|=\left|\left(\frac{10}{30}\right)+\left(+\frac{15}{30}\right)\right|=\left|\frac{10}{30}+\frac{15}{30}\right|=\left|+\frac{25}{30}\right|=\frac{25}{30}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{5}{6}$$

Μ. Στην τελευταία ισότητα μπορούμε να γράψουμε $\frac{5\cdot \cancel{5}}{6\cdot \cancel{5}}=\frac{5}{6}$;

Δ. Διαιρούμε τον αριθμητή 25 και τον παρονομαστή 30 με το ΜΚΔ(25,30)=5 και παίρνουμε το ανάγωγο κλάσμα που είναι ισοδύναμο με το $\frac{25}{30}$, δηλ. το $\frac{5}{6}$.

Πρόσεξε ότι δεν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο στο κλάσμα $\frac{5+5}{6+5}$.

Γιατί $\frac{5+5}{6+5}=\frac{10}{11}$ και ΜΚΔ(10,11)=1.

Θυμάσαι με ποιον τρόπο δημιουργούμε ισοδύναμα κλάσματα;

Μ. Είτε πολλαπλασιάζουμε είτε διαιρούμε και τους δυο όρους του κλάσματος, αριθμητή και παρονομαστή, με τον ίδιο αριθμό.

Δ. Πολύ σωστά. Για τον παρονομαστή του π.χ. $\frac{25}{30}$ έχουμε: 30:5=6, ή καλύτερα $(6\cdot 5):5=6$.Ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη διαδοχικών προσθέσεων: $6\cdot 5=5+5+5+5+5+5$, η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων, πόσα «5» μπορούμε να αφαιρέσουμε από το $6\cdot 5$; Όσα προσθέσαμε, 6. Μπορούμε να γράψουμε $\frac{5\cdot \cancel{5}}{6\cdot \cancel{5}}=\frac{5}{6}$ γιατί αυτό σημαίνει τις διαιρέσεις 25:5 = 5 και 30: 5=6 . Άλλα παραδείγματα:

$(6\cdot 1821):1821=6$, $\frac{1821\cdot 2014}{3\cdot 2014}=\frac{1821}{3}=\frac{3\cdot 607}{3}=607$

Μ. Να επαναλήψουμε και τις άλλες πράξεις;

Πολλαπλασιασμός; Διαίρεση; Μπορείς να με βοηθήσεις;

Δ. Επαναλήψουμε; Η κ. Ειρήνη συμφωνεί;

Μ. Πηγαίνω να τη ρωτήσω.

Δ. Όχι! Εντάξει θα τις …επαναλήψουμε! Βρες τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών:

Μ. $3\cdot 0=(+3)\cdot 0,\ 0\cdot(+2),\ (-3)\cdot 0,\ 0\cdot(-2)$

Όλα 0! Το θυμάμαι από το δημοτικό. Ότι πολλαπλασιάζεται με το 0 μηδενίζεται. Το «0» είναι σαν τον απορροφητικό σωλήνα της ηλεκτρικής σκούπας. Καταπίνει, δηλ. μηδενίζει ότι πολλαπλασιάζεται με αυτό.

Δ. Με τους θετικούς καλά θυμάσαι. Αλλά διδάχθηκες και τον πολλαπλασιασμό του 0 με αρνητικούς;

Μ. Όχι. Αλλά πιστεύω ότι το 0 είναι σταθερή αξία και «καταπίνει» και τους αρνητικούς. Σωστά;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Τέλεια. Και οι Μαθηματικοί συμφώνησαν σε αυτό. Συμφώνησαν επίσης να επεκταθεί η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, που γνωρίζουμε για τους φυσικούς, και στους ρητούς. Τη θυμάσαι;

Μ. Να την περιγράψω;

Δ. Ακούω.

Μ. Ο αριθμός που είναι έξω από την παρένθεση πολλαπλασιάζεται με κάθε αριθμό που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση.

Δ. Και μετά τι κάνουμε με τα αποτελέσματα των πολλαπλασιασμών, δηλ. με τα γινόμενα; Πρόσθεση ή αφαίρεση;

Μ. Ότι σύμβολο υπάρχει μέσα στην παρένθεση.

Οι άλλες ιδιότητες;

Δ. Ξέρεις και άλλες; Πες δυο.

Μ. Αντιμεταθετική, προσεταιριστική.

Δ. Μετά από σκληρές διαπραγματεύσεις επήλθε συμφωνία για όλες τις ιδιότητες. Ο κανόνας των προσήμων είναι συνέπεια των συμφωνιών.

Μ. Διευκρινήσεις;

Δ. Πρόσεξε: $\left(+3\right)\left(+5-5\right)=\left(+3\right)\cdot 0=0$ Προχωρώ;

Μ. Είμαι μαζί σου.

Δ. Από τον πολλαπλασιασμό φυσικών έχουμε $3\cdot 5=\left(+3\right)\left(+5\right)=+15$.

Συνεχίζω;

Μ. Ναι.

Δ. Τι πρέπει να προσθέσω στον +15 για να βρω αποτέλεσμα 0;

Μ. Τον -15.

Δ. Εφάρμοσε την επιμεριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό: $\left(+3\right)\left(+5-5\right)$

Μ. Πρώτα γράφω, +5-5 = (+5) + (-5)

$$(+3)\left((+5)+(-5)\right)=(+3)\cdot(+5)+(+3)\cdot(-5)=(+15)+(+3)\cdot(-5).$$

Δ. Το αποτέλεσμα πρέπει να είναι 0, το έχουμε βρει, έχω τον (+15), (+15)+(-15) = 0, οπότε $(+3)(-5)=-15$

Αντιμεταθετική;

Μ. (-5)(+3)= -15

Δ. Το γινόμενο ετερόσημων είναι αρνητικός.

Μ. Για τους ομόσημους;

Δ. Για τους θετικούς γνωρίζουμε, για τους αρνητικούς προσπάθησε να υπολογίσεις με άλλο τρόπο το $(-5)\cdot 0=(-5)(-3+3)$.

Γνωρίζουμε το αποτέλεσμα;

Μ. Μηδέν. Εφαρμόζω επιμεριστική;

Δ. Ναι.

Μ. $0=(-5)\cdot 0=(-5)\left((-3)+(+3)\right)=(-5)\cdot(-3)+(-5)\cdot(+3)=?+(-15)$

Σωστά;

Δ. Πολύ καλά. Συνεχίζω;

Μ. Ναι.

Δ. Στο (-15) πρέπει να προσθέσω τον αντίθετο, (+15), για να έχω αποτέλεσμα 0, οπότε $(-5)(-3)=+15$.

Ίσως είναι λίγο δύσκολο να κατανοηθεί, αλλά σκέψου και τον αγώνα των αρνητικών για να τους δεχτούν οι Μαθηματικοί στην κοινότητα των αριθμών. Ο αγώνας «δικαιώθηκε» μόνο κατά τον $17^{\text{ο}}$ αιώνα.

Μ. Δεν απορώ. Φυσιολογική αργοπορία. Εκπληκτικό: « $-\cdot-=+$ »!!!

Με τις παρενθέσεις τι γίνεται;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Παράδειγμα;

Μ. Ας πούμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $(-2)(+3-5-10)$

Δ. Μπορείς να ξεκινήσεις; Ποια είναι η προτεραιότητα;

Μ. Παρενθέσεις: $(-2)(+3-5-10)=(-2)(+3-15)=(-2)(-12)=+24$

Δ. 2ος τρόπος;

Μ. Επιμεριστική: $(-2)(+3-5-10)=(-2)((+3)+(-5)+(-10))$

Η αριθμητική παράσταση $+3-5-10$ είναι η $(+3)+(-5)+(-10)$. Σωστό;

Δ. Σωστό. Συνέχισε.

Μ. Εύκολο.

$$\begin{aligned}(-2)(+3-5-10)&=(-2)((+3)+(-5)+(-10))=\\&=(-2)(+3)+(-2)(-5)+(-2)(-10)\\&=(-6)+(+10)+(+20)=\\&=(-6)+(+30)=-6+30=+24\end{aligned}$$

Αυτοματισμοί: $-\cdot+=-$, $-\cdot-=+$

Δ. Αν έχουμε $-(+3-5-10)$;

Μ. Με ποιον αριθμό πολλαπλασιάζουμε την παρένθεση;

Δ. Με τον αριθμό (-1). Συνήθως δεν γράφουμε το 1, αλλά γράφουμε το « - »

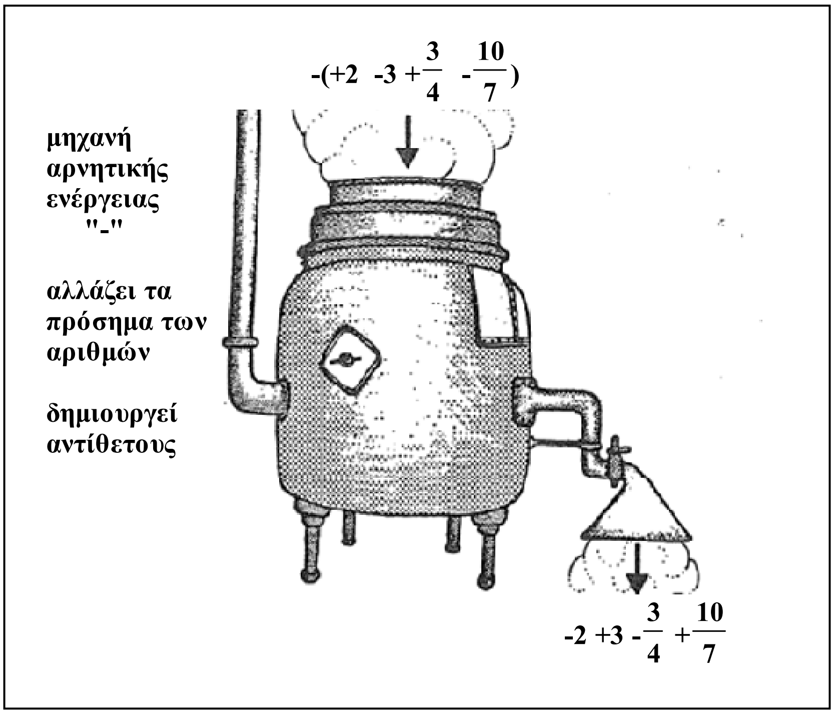
Μ. Επιμεριστική;

Δ. Ναι. Ότι έκανες με τον (-2).

$$\begin{aligned}-(+3-5-10)&=(-1)((+3)+(-5)+(-10))=\\&=((-1)(+3))+((-1)(-5))+((-1)(-10))\\&=(-3)+(+5)+(+10)=-3+5+10=12\end{aligned}$$

Δ. Τελικά: –(+3-5-10) = -3 +5 +10.

Μπορούμε να σκεφτούμε ότι το « - » μπροστά από παρένθεση έχει σαν συνέπεια την αλλαγή των προσήμων των αριθμών που είναι μέσα, δηλ. γράφουμε τους αντίθετους των αριθμών που είναι μέσα στην παρένθεση και καταργούμε την παρένθεση. Παρατήρησε την μηχανη αρνητικής ενέργειας[6]. Η ενέργεια του « - » είναι ίδια, είτε έχουμε έναν αριθμό στην παρένθεση, όπως είδαμε στα - (+2)= -2, -(-2) =+2, είτε πολλούς.



Μ. Η διαίρεση;

Δ. Οι σκέψεις είναι ανάλογες με την αφαίρεση. Εκεί οδηγηθήκαμε σε αποτελέσματα με την βοήθεια της πρόσθεσης. Εδώ χρησιμοποιούμε τις γνώσεις για τον πολλαπλασιασμό.

Ας σκεφτούμε πάλι τον πολλαπλασιασμό θετικών ακεραίων: $5 \cdot 3 = 15$. Αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι δοκιμή από δυο διαιρέσεις:

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

{διαιρετέος 15, διαιρέτης 5, πηλίκο 3}, ή {διαιρετέος 15, διαιρέτης 3, πηλίκο 5}.Το πηλίκο είναι ο αριθμός που όταν πολλαπλασιαστεί με τον διαιρέτη δίνει τον διαιρετέο.

Για την διαίρεση (+15):(-3), διαιρετέος (+15), διαιρέτης (-3). Πρέπει να βρούμε έναν αριθμό, το πηλίκο, να τον βάλλουμε στο τετραγωνάκι, και να πάρουμε γινόμενο τον διαιρετέο, (+15), $(\square)\cdot(-3)=+15$.

Μπορείς να τον βρεις;

Μ. Αφού προκύπτει «+», οι παράγοντες του γινομένου πρέπει να είναι ομόσημοι, βρήκα το πρόσημο «-», εντάξει θα είναι ο (-5).

Δ. Για την διαίρεση (-15):(-3);

Μ. Σκεφτόμαστε… $(\square)\cdot(-3)=-15$, από τον αυτοματισμό του πολλαπλασιασμού οι παράγοντες πρέπει να είναι ετερόσημοι, αφού δίνουν αρνητικό γινόμενο, …είναι ο (+5). Εύκολο.

Δ. Αν χρησιμοποιήσουμε κλάσματα, τότε όλες οι διαιρέσεις είναι τέλειες. Με το κλάσμα π.χ. $\frac{1}{7}$ παριστάνουμε το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης 1:7. Μπορούμε να απαντάμε ή και να γράφουμε «αυτόματα»: το πηλίκο της διαίρεσης 1:7 είναι το $\frac{1}{7}$.

Δοκιμή: $\frac{1}{7}\cdot 7=1$, πολλαπλασιάζω το πηλίκο $\frac{1}{7}$ επί τον διαιρέτη 7 και βρίσκω τον διαιρετέο 1.

Μ. Το $\frac{1}{7}$ ποιος δεκαδικός είναι;

Δ. $\frac{1}{7}=0{,}142857142857142857...=0{,}\overline{142857}$.

Μ. Και πως βρίσκουμε τον δεκαδικό;

Δ. Διαίρεση 1:7. Τα δυνατά υπόλοιπα είναι ακριβώς 7: 0,1,2,3,4,5,6. Αν δεν βρούμε «0», τότε είναι σίγουρο ότι κάποιο από τα 1,2,3,4,5,6 θα επανεμφανιστεί στο υπόλοιπο, εδώ το «1», οπότε τα ψηφία στο πηλίκο επαναλαμβάνονται.

Διαίρεση 1:7								
1	**0**	0	0	0	0	0	0	7
	3	0						0,142857…
		2	0					
			6	0				
				4	0			
					5	0		
						1		

Για να καταλάβουμε την αξία των δεκαδικών ψηφίων, επειδή προχωρώντας δεξιότερα συνεχώς μικραίνει, μάλλον είναι καλύτερα να επιλέξουμε το σύμβολο[7] «0.142857…», από το αναλυτικότερο:

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{8}{10000}+\frac{5}{100000}+\frac{7}{1000000}+\frac{0,000001}{7},$$ ή το:

$$\frac{1}{7}=\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{8}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{7}{10^6}+\frac{1}{7\cdot 10^6}$$

Όπως και για το $\frac{1}{3}$,

$$0,333333333333...=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+...=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+...$$

Κάθε «3» έχει διαφορετική αξία, το πρώτο είναι 3 δέκατα, το δεύτερο 3 εκατοστά, το τρίτο 3 χιλιοστά κλπ, 0.333333...

Συμφωνείς;

Μ. Απόλυτα!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Συνεχίζουμε στους ρητούς;

Μ. Ναι.

Δ. Για τη διαίρεση (-3):(+5), χρησιμοποιούμε τον αυτοματισμό του κλάσματος, μπορούμε να γράψουμε $(-3):(+5)=\frac{-3}{+5}$, δοκιμή: $\left(\frac{-3}{+5}\right)\cdot(+5)=(-3)$. Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα των προσήμων για τη διαίρεση, ομόσημοι-πηλίκο θετικό, ετερόσημοι-πηλίκο αρνητικό, τότε τα δυο πρόσημα, αριθμητή και παρονομαστή **συνοψίζονται** σε ένα, π.χ.: $-\frac{3}{5}=\frac{-3}{+5}=\frac{+3}{-5}$, $\frac{2}{7}=\frac{+2}{+7}=\frac{-2}{-7}$.

Δ. Θυμάσαι ποιοι είναι οι ρητοί αριθμοί;

Μ. Ναι. Ξεκινήσαμε από τους φυσικούς, μετά κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή φυσικό, προσέχουμε την τυραννία του μηδενός στον παρονομαστή, και μετά πήραμε τους αντίθετους όλων αυτών.

Δ. Γράψε 10 διαφορετικά σύμβολα για τον ρητό -3;

Μ. Απλό: $-3=\frac{-3}{1}=\frac{-6}{2}=\frac{-9}{3}=-\frac{30}{10}=\frac{-45}{15}=\frac{-60}{20}=\frac{90}{-30}=-\frac{300}{100}=\frac{-3000}{1000}$.

Δ. Γράψε 5 διαφορετικά σύμβολα για τον +2.

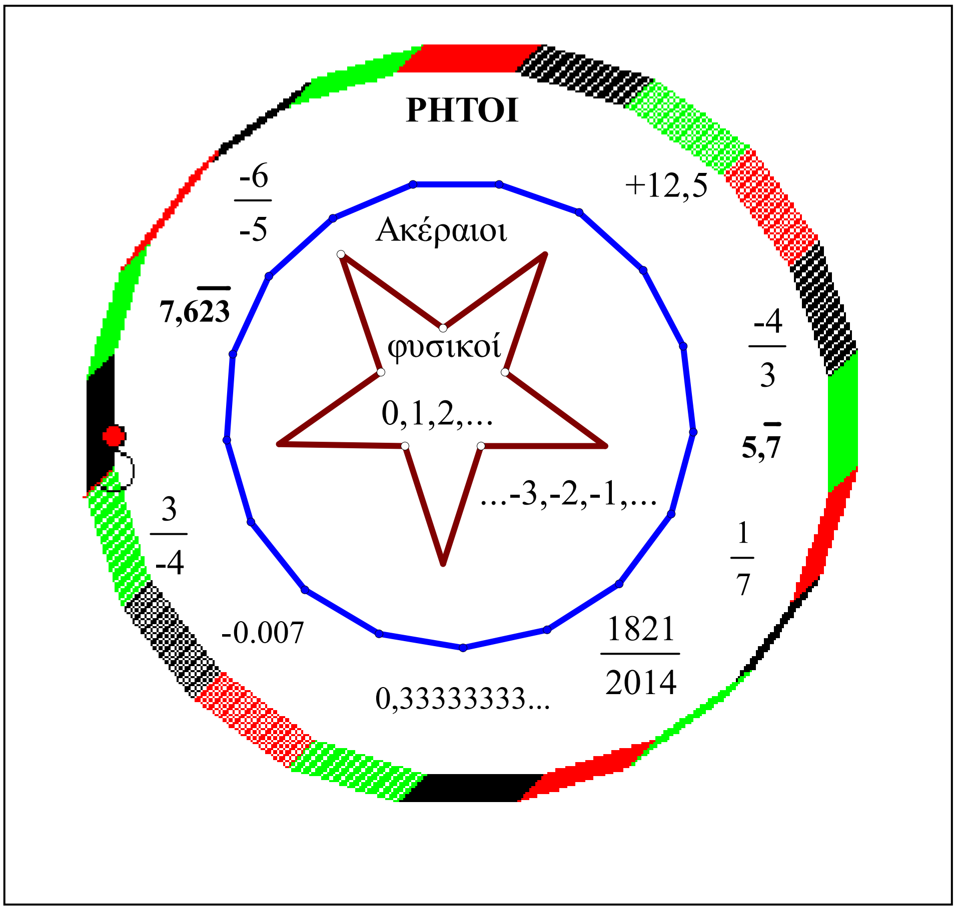
Μ. Πολύ απλό: $+2=2=\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}=\frac{10}{5}=\frac{-10}{-5}$.

Δ. Γράψε 5 διαφορετικά σύμβολα για τον $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4}=\frac{-3}{-4}=\frac{-6}{-8}=\frac{6}{8}=\frac{30}{40}$$

Δ. Μπορούμε τώρα να πούμε ότι **ρητοί** είναι οι αριθμοί της μορφής $\dfrac{\text{ακέραιος}}{\text{ακέραιος διαφορετικός από το 0}}$, συμβολικά $\dfrac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ οποιοιδήποτε ακέραιοι με τη γνωστή σύμβαση, $\lambda \neq 0$. Ο παρονομαστής είναι πάντα διαφορετικός από το 0. Εφαρμόζοντας τον κανόνα για τη διαίρεση βρίσκουμε ένα θετικό ή ένα αρνητικό κλάσμα. Ο αριθμός «0» είναι οποιοδήποτε κλάσμα με αριθμητή 0.

Το εικοσάγωνο-ρητοί, περιέχει το δεκαεπτάγωνο-ακέραιοι,
και το δεκαεπτάγωνο-ακέραιοι περιέχει το αστέρι-φυσικοί.



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Τεχνολογία;

Δ. Το λογισμικό συμβολικής έκφρασης «Χελωνόκοσμος(Logo)» διατίθεται δωρεάν : http://etl.ppp.uoa.gr.

Σου γράφω τις εντολές για την κατασκευή χρωματιστού πολυγώνου:

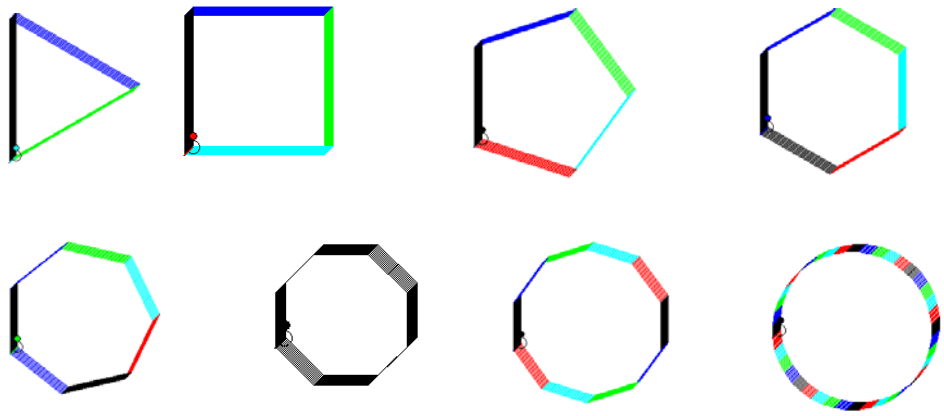
```
για χρπολγν :α :β;α ειναι η περιμετρος
; β ειναι το πληθος των πλευρων
make "χρωμα 0
;  θα κατασκευασθει χρωματιστο
σκ;μηπωςη χελωνα ξεχαστηκε και δεν γραφει
θεσεχρωμαστυλο :χρωμα; αρχιζει με μαυρο
επανάλαβε :β [μ :α/:β δ 360/:β
make "χρωμα :χρωμα+1
αν :χρωμα =5 [make "χρωμα 0]
θεσεχρωμαστυλο :χρωμα]
τελος

για πολγν :α :β :ζ
επαναλαβε :ζ [
δ 90   μ 1 α 90 μ 1
χρπολγν :α :β]
τελος
```

Μ. Το εικοσάγωνο είναι σαν κύκλος.

Δ. Κύκλος για το λογισμικό είναι κανονικό πολύγωνο με πολύ μεγάλο πλήθος πολύ μικρών πλευρών.

Μ. Κανονικό;

Δ. Ίσες πλευρές και ίσες γωνίες.



Κύκλος είναι ο τελικός στόχος των κανονικών πολυγώνων.

Στην εικόνα (πλευρές 3,4,5,6,7,8,10, 40) όλα έχουν την ίδια περίμετρο.

Μ. Και ίδιο εμβαδόν;

Δ. Όχι. Για ίδια περίμετρο, δηλαδή για ισοπεριμετρικά σχήματα, ο κύκλος έχει το μέγιστο εμβαδόν. Ορολογία: Κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα, γνωστό στους αρχαίους γεωμέτρες.

Μ. Ο κύκλος; Λύση;

Δ. Εργασία για το σπίτι. Η διαμόρφωση του προβλήματος μας ενδιαφέρει περισσότερο από τη λύση. Οι προσπάθειες για τη λύση οδηγούν στην επιστημονική εξέλιξη.

Μ. Μήπως είναι δύσκολο για μένα; Είναι υποχρεωτικό;

Δ. Δοκίμασε. Μέτρησε, υπολόγισε.

Θα είμαι δίπλα σου για τη διόρθωση της πορείας.

Οι δυσκολίες θα σε δυναμώσουν.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

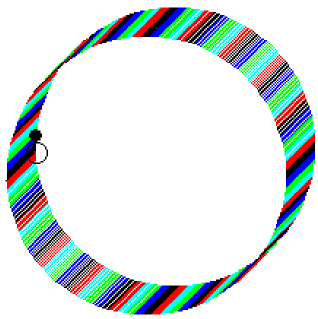
Οι ανυπέρβλητες δυσκολίες θα σε οδηγήσουν στην κατανόηση και στη γνώση, θα εκτινάξουν την αυτοπεποίθησή σου και θα απομακρύνουν τον φόβο, την αβεβαιότητα και την αγωνία που γεννούν συχνά στα παιδιά τα μαθηματικά. Δεν είναι υποχρεωτικό, ασχολήσου μόνο αν το θέλεις.

Η ευχαρίστηση δεν έρχεται από υποχρεώσεις.

Αν δώσουμε την τιμή 600 στη μεταβλητή «α», η περίμετρος του πολυγώνου θέλουμε να είναι 600 χελωνοβήματα, και την τιμή 100 στη μεταβλητή «β» της «διαδικασίας» πολγν :α :β :γ, δηλ.«πολγν 600 100 20», τότε κατασκευάζεται 100-γωνο. Η «β» ελέγχει το πλήθος των πλευρών.

Μ. Το 20 στην «πολγν 600 100 20», τι είναι;

Δ. Με τη μεταβλητή «ζ» ελέγχουμε το πλήθος των εκατοσταγώνων. Κατασκευάζονται είκοσι 100-γωνα, το ένα πάνω στο άλλο, και το αποτέλεσμα είναι ένας εκπληκτικής ομορφιάς «κυλινδρικός» κύκλος. Με τον «μεταβολέα», αφού καθορίσουμε τα όρια, μπορούμε με «κλικ και σύρσιμο» να αλλάζουμε τις τιμές των μεταβλητών α, β και ζ.



Μεταβολέας				
Διαδικασία: πολγν				
Μεταβλητή	**Από**		**Μέχρι**	**Βήμα**
α	**300**	**…600…**	**1200**	**10**
β	**50**	**…100…**	**200**	**1**
ζ	**10**	**…20…**	**40**	**1**

Μ. Οι νεαροί δάσκαλοι κοστίζουν περισσότερο στο κράτος;

Δ. Οι νεαροί πληρώνονται λιγότερο, αλλά η τελευταία ερώτηση τι σχέση έχει με τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση ή τους ρητούς ή τους κύκλους;

Μ. Προς το παρόν δεν μπορώ να το συνδέσω, αλλά εσύ είπες ότι η επιστήμη εξελίσσεται όταν νεαροί ερευνητές κατορθώνουν να συσχετίσουν άσχετα μεταξύ τους γεγονότα.

Δ. Ενδιαφέρεσαι για την εξέλιξη; Έγραψες τις λύσεις από τις 100 επαναληπτικές ασκήσεις που σου έδωσα;

Μ. Τις έγραψα, αλλά ξέχασα το τετράδιο στο σπίτι! Έχω τόσα πράγματα να φροντίσω. Αγγλικά, Ρωσικά, Γιαπωνέζικα, Βίκτωρας, αρμόνιο, κολυμβητήριο… ! Καλά! Και ο ηλικιωμένος δάσκαλος έχει πλεονεκτήματα. Αν διατηρήσει το σώμα του δραστήριο θα ακολουθήσει και το πνεύμα του. Έτσι έχει στην κατοχή του τη νεανική χαρούμενη διάθεση, τον ενθουσιασμό, τη ζωτικότητα και τη φιλοδοξία που την συνοδεύουν. Ο ηλικιωμένος είναι μια πανίσχυρη δύναμη. Έχει το πλεονέκτημα της μακροχρόνιας πείρας και δεν έχει χάσει την αγάπη του για τη ζωή και την εμπνέουσα δύναμη που βρίσκεται πίσω από το νεανικό πνεύμα. Επειδή το απόγευμα έχω να πάω σε κάτι γενέθλια, να φέρω το τετράδιο την Δευτέρα;

Δ. Εντάξει, αλλά καθορίζουμε την επόμενη Δευτέρα, όχι την Δευτέρα.

Που τα διάβασες όλα αυτά;

Μ. Μου τα είπε ο παππούς μου, ο Βαγγέλης, που παριστάνει το babe με προσόντα! Είναι απόσπασμα από ομιλία κάποιου Bernarr Macfadden[8], αμερικανού γυμναστή. Ο παππούς δεν βλέπει καλά, ακούει ελάχιστα, ιδίως αυτά που τον αφορούν, λέει ότι τα ξέρει όλα, δαπάνησε μια ζωή για να τα μάθει, αλλά συνεχώς τον κερδίζω και στο σκάκι και στο τάβλι.

Δ. Με τόσες ασχολίες που έχεις, πού βρίσκεις χρόνο για παιχνίδια;

Μ. Δεν παίζω για μένα. Παίζω για τον παππού.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Για να μην νοιώθει εγκατάλειψη. Για να μιλά, να έχει ενδιαφέροντα, να μην είναι όλες οι μέρες του ίδιες, να μην νοιώθει μοναξιά!

Δ. Καλά. Συνεχίζουμε;

Μ. Ναι. Έχω να μάθω πολλά ακόμα;

Δ. Πολλά, αλλά εύκολα. Τα δυσκολότερα τα έχεις μάθει.

Μ. Ποια είναι τα δύσκολα;

Δ. Αυτά που προσφέρεις στον παππού Βαγγέλη. Τα μαθηματικά είναι εύκολο να τα κατακτήσεις. Είναι ζήτημα συστηματικής διδασκαλίας, από μένα, και καθημερινής άσκησης, από σένα φυσικά. Οι καινούργιες ιδέες στηρίζονται σε γνωστές έννοιες. Μερικές φορές είναι απαραίτητο να ανατρέχεις στα βιβλία προηγουμένων τάξεων για να τις επαναφέρεις στη μνήμη σου. Είναι το κύριο στοιχείο της εξέλιξης των μαθηματικών: οι νέες θεωρίες δεν αντικαθιστούν, αλλά **προστίθενται** στις παλιές, συνεχής προσαύξηση.

Πόσες πράξεις χρειάζονται για να βρεις την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $2\cdot 12{,}5+2\cdot 7{,}5-2\cdot 20+2\cdot 89{,}99+2\cdot 10{,}01$;

Μ. Πέντε πολλαπλασιασμοί και 4 προσθέσεις.

Δ. Ποιοι είναι οι παράγοντες κάθε γινομένου;

Μ. Γιά να δούμε. Το πρώτο γινόμενο $2\cdot 12{,}5$ έχει δυο παράγοντες, τον 2 και τον 12,5. Το δεύτερο γινόμενο $2\cdot 7{,}5$ έχει παράγοντες τον 2 και τον 7,5…ο παράγοντας «2» υπάρχει σε όλα τα γινόμενα, άρα μπορώ να γράψω:

$$2\cdot 12{,}5+2\cdot 7{,}5-2\cdot 20+2\cdot 89{,}99+2\cdot 10{,}01=$$
$$=2\cdot 12{,}5+2\cdot 7{,}5+(+2)\cdot(-20)+2\cdot 89{,}99+2\cdot 10{,}01=.$$
$$=2\cdot(12{,}5+7{,}5-20+89{,}99+10{,}01)=2\cdot 100=200$$

Χρειάστηκε **ένας** πολλαπλασιασμός και φυσικά οι 4 προσθέσεις στην παρένθεση, αρκετά απλούστερη διαδικασία.

Δ. Γιατί έγραψες το γινόμενο $-2 \cdot 20$ σαν $(+2)\cdot(-20)$;

Μ. Για να φανεί ξεκάθαρα ο κοινός παράγοντας, ο «+2».

Δ. Ποια ιδιότητα χρησιμοποίησες;

Μ. Την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ανάποδα.

Δ. Τι εννοείς «ανάποδα»;

Μ. Να το γράψω με ένα παράδειγμα γιατί δυσκολεύομαι να το περιγράψω;

Δ. Βεβαίως. Γράψε και το «ανάποδα» αλλά και αυτό που δεν είναι ανάποδα.

Μ. $5\cdot 17+5\cdot 27+5\cdot 37+5\cdot 19-5\cdot 100=5\cdot(17+27+37+19-100)=0$

$$5\cdot(17+27+37+19-100)=5\cdot 17+5\cdot 27+5\cdot 37+5\cdot 19-5\cdot 100$$

Τελικά, πράγματι είναι κουραστικό.

Δ. Τι είναι κουραστικό;

Μ. Το ότι οι μεγάλοι ποτέ δεν καταλαβαίνουν τίποτα μόνοι τους και είναι πολύ κουραστικό για τα παιδιά να τους δίνουν ξανά και ξανά εξηγήσεις.

Δ. Εξυπερύ;

Μ. Ναι. Μικρός Πρίγκιπας[9].

Δ. Έχω παρατηρήσει ότι προτιμάς τα λογοτεχνικά βιβλία.

Μ. Φυσικά. Τα διαβάζω, τελειώνω και τα θυμάμαι. Δεν χρειάζονται επαναλήψεις. Διαβάζονται στο λεωφορείο, στο τραίνο στο αεροδρόμιο, στην παραλία, στο κρεβάτι, παντού. Δεν χρειάζονται εργαλεία σχεδίασης: χάρακα, διαβήτη, τρίγωνο-εντάξει γνώμονα-μοιρογνωμόνιο, σταματάς σε οποιαδήποτε σελίδα και συνεχίζεις-ακόμα και μετά από μέρες-στην επόμενη, δεν χρειάζονται επαναλήψεις ξανά και ξανά από την αρχή για την κατανόηση. Είναι διασκεδαστικά, είμαι νεαρός και έχω δικαίωμα στην απόλαυση ενός καλού λογοτεχνικού βιβλίου. Δεν έχει εξετάσεις, κάνεις παρέες, δημιουργούνται καινούργιες γνωριμίες…

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Οι γνωριμίες πως γίνονται;

Μ. Λογοτεχνικά βιβλία διαβάζει όλος ο κόσμος! Μπορείς να τα δανείσεις ή να τα δανειστείς, να φανταστείς τον ήρωα ή την ηρωίδα, να ανταλλάξεις απόψεις για την εξέλιξη της ιστορίας που περιγράφεται, χωρίς την εξωφρενική αγωνία του «σωστό – λάθος», να κάνεις μια ευχάριστη συζήτηση χωρίς διενέξεις!

Δ. Και με τα μαθηματικά βιβλία;

Μ. Έχεις παρατηρήσει πολλούς να κυκλοφορούν με ένα μαθηματικό βιβλίο στο χέρι; Υπάρχει το εξής προβληματάκι: κάθε φορά που διαβάζω το ίδιο μαθηματικό βιβλίο, κυρίως από υποχρέωση επαναλήψεων, βρίσκω καινούργιες απορίες, αντιλαμβάνομαι ότι δεν έχω κατακτήσει αρκετές από τις ιδέες του. Οι σκέψεις για την κατανόηση είναι ανυπόφορα δύσκολες. Είναι ανεξάντλητο, στέκει εκεί διπλά μου και μου υπενθυμίζει ότι θα πρέπει να μελετήσω και πάλι αρκετές από τις σελίδες του!

Δ. Οι αναγνώστες μαθηματικών βιβλίων καταφεύγουν συχνά στο μολύβι και το χαρτί, καθώς διαβάζουν, για να κάνουν υπολογισμούς, να λύσουν εξισώσεις ή για να φτιάξουν τα δικά τους σχήματα. Αρκετά μονοπάτια είναι δύσβατα, αλλά οδηγούν σε έφορες πεδιάδες. Για την κατανόηση πολλές φορές απαιτείται πολλή πνευματική και αρκετή γραφική εργασία.

Ωστόσο αυτή η προσπάθεια δεν μένει χωρίς επιβράβευση. Λίγες εμπειρίες προσφέρουν τόσο έντονη χαρά όσο η διαπίστωση «το βρήκα!» που έρχεται σαν λάμψη μόλις λύσει κανείς κάποιο περίπλοκο πρόβλημα ή μόλις κατανοήσει μια δυσνόητη ιδέα.

Μ. Σπάνιες, αλλά έντονες χαρές, το παραδέχομαι!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

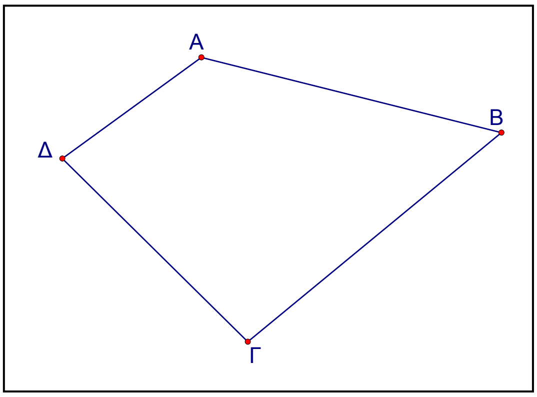
ΚΛΙΣΗ

**Με πλάγια είναι οι σκέψεις του μαθητή*

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Σχεδίασε ένα τετράγωνο.

Μ. Έτοιμο: ΑΒΓΔ. Τι συμβαίνει ; Λάθος;



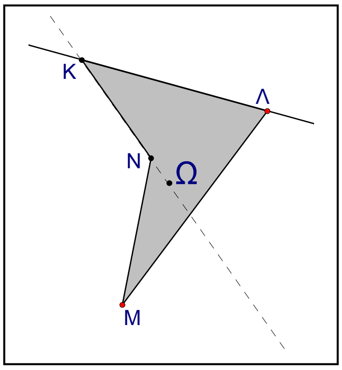
Δ. Έχει τέσσερις πλευρές. Είναι ένα τετράπλευρο. Κυρτό τετράπλευρο.

Μ. Ναι, αλλά έχει και τέσσερις γωνίες, τετράγωνο.

Δ. Λέμε τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο, εξάγωνο κλπ. Χρησιμοποιούμε την κατάληξη «γωνο» για όλα τα πολύγωνα, εκτός από αυτά που έχουν 4 γωνίες. Φυσικά θα μπορούσαν οι ονομασίες να είναι τρίπλευρο, τετράπλευρο, πεντάπλευρο, εξάπλευρο κλπ.

Μ. Τρίκορφο, τετράκορφο, πεντάκορφο… .Αλλά, κατάλαβα, στα βαφτίσια πάντα γίνονται φασαρίες. Τελικά, πως θα σχεδιάσω τετράγωνο;

Δ. **Ίσες** πλευρές και **ορθές** γωνίες.



Μ. Το «κυρτό» τι είναι;

Δ. Τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, οι «πλευρές» ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ, καθορίζουν την «συνοριακή γραμμή», το πολύγωνο ΚΛΜΝ. Οριοθετούν και το γκρι **εσωτερικό** του πολυγώνου. Αν η προέκταση **οποιασδήποτε** πλευράς του πολυγώνου δεν έχει κοινό σημείο με το εσωτερικό του, τότε το πολύγωνο ονομάζεται κυρτό[1], π.χ. το ΑΒΓΔ, διαφορετικά «μη κυρτό». Το ΚΛΜΝ είναι μη κυρτό: η προέκταση της ΚΛ δεν έχει κοινά σημεία με το εσωτερικό του πολυγώνου, αλλά της ΚΝ έχει, π.χ. το Ω.

Πολυγωνικό «χωρίο» είναι το σχήμα που αποτελείται από το πολύγωνο ΚΛΜΝ και τα γκρι εσωτερικά του σημεία.

Συνηθίζουμε π.χ. να λέμε «υπολόγισε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου ΚΛΜΝ» και εννοούμε το άθροισμα των μηκών των πλευρών του και το εμβαδόν του χωρίου που αυτό καθορίζει.

Τι σου χρειάζεται για να σχεδιάσεις τετράγωνο;

Μ. Αφού έχει ίσες πλευρές και ορθές γωνίες χρειάζομαι μόνο το μήκος μιας πλευράς.

Δ. Σχεδίασε τετράγωνο με πλευρά 2cm.

……..Τι περιμένεις; Δύσκολο; Έχεις κάποια άλλη ερώτηση;

Μ. Όχι. Αλλά έχω παρατηρήσει ότι θυμώνεις όταν φέρνω κάθετες χωρίς το ορθογώνιο τρίγωνο-γνώμονα, ο θυμός αυξάνει την πίεση και αυτό δεν είναι και τόσο καλό για την ηλικία σου!

Τον ξέχασα. Και είμαι σίγουρος ότι θα με συγχωρήσεις.

Δ. Γιατί;

Μ. Έχει γίνει και άλλες φορές. Τα παιδιά μαθαίνουν με την επανάληψη. Επίσης γνωρίζω ότι πάντα έχεις εναλλακτική λύση, εξαιτίας αυτού του προτερήματος των παιδιών, οπότε, δείξε μου πως θα σχεδιάσω χωρίς γνώμονα. Λίγη βοήθεια παρακαλώ!

Δ. Προτέρημα; Γιατί;

Μ. Γιατί σε βοηθά να διατηρείς το μυαλό σου ενεργό, να σκέφτεσαι διαφορετικές προσεγγίσεις, να χαράξεις τον δικό σου δρόμο, να μην ακολουθείς τους άλλους…

Δ. Ας αφήσουμε τις ειρωνείες. Σχεδίασέ το στο σύστημα συντεταγμένων, στο πρώτο τεταρτημόριο. Άρχισε από το σημείο Α(2,0), μήκος πλευράς 2 μονάδες, με ότι μονάδα έχουν οι άξονες.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Στο πρώτο τεταρτημόριο, Α (2, 0), μήκος πλευράς 2 μονάδες, έχω λίγο χρόνο για σκέψεις;

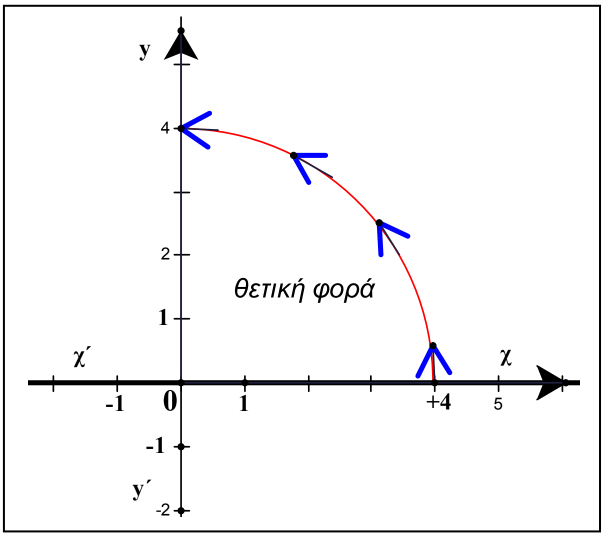
Δ. Θα περιμένω 300 δευτερόλεπτα.

Μ. Έκανες τα λεπτά δευτερόλεπτα για να φαίνεται πολύς ο χρόνος; Θα μπορούσες να μου πεις: 3000 δέκατα του δευτερολέπτου…

Δ. Το χρονόμετρο ξεκίνησε.

Μ. Μπορείς να μου υπενθυμίσεις πως τοποθετούμε τα σημεία;

Δ. Περιστρέφουμε ένα αντίγραφο του άξονα χ΄χ κατά 90 μοίρες γύρω από την αρχή κατά τη θετική φορά …



Μ. Ποια είναι η θετική φορά;

Δ. Η αντίστροφη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Μ. Μουσείο;

Δ. Δεν άκουσα;

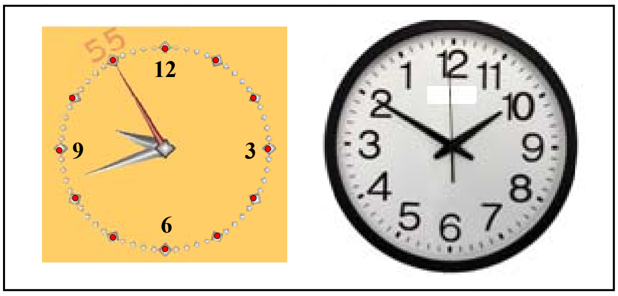
Μ. Που είδες δείκτες στα ρολόγια;

Όλα είναι ψηφιακά, όπου υπάρχουν ακόμα. Πλεονασμός. Έχουμε κινητά. Κάνουν και δείχνουν τα πάντα, τηλεφωνήματα, διαδίκτυο, φωτογραφίες, η ώρα είναι αστεία υπόθεση. Σε ποια εποχή ζούμε;

Δ. Καλά. Περιστρέφουμε ένα αντίγραφο του άξονα χ΄χ γύρω από το 0, αριστερά κατά 90^{o}. Αυτή η φορά περιστροφής λέγεται θετική. Οι ονομασίες είναι ζήτημα συμφωνιών. Όπως π.χ. τον «Βόρειο» πόλο, τον βαφτίσανε «Βόρειο». Θα μπορούσε να ονομάζεται «Θανάσης».

Μπορούμε όμως να έχουμε και ψηφιακό με δείκτες: θετική φορά είναι η αντίστροφη της κίνησης των δεικτών του ψηφιακού με δείκτες. Τα κινητά δείχνουν τα πάντα, γιατί τα λογισμικά κάνουν και δείχνουν τα πάντα. Είναι ζήτημα προγραμματισμού: με ποιο τρόπο θέλουμε να βλέπουμε την ώρα.

Αλλά ίσως έχεις δίκιο για τα ρολόγια: στα παρακάτω μπορείς να διαβάσεις την ώρα; Η εικόνα αριστερά είναι δημιούργημα του «Elica 5.6». Δεξιά είναι φωτογραφία από ρολόι που κυκλοφορεί στην αγορά.



Μ. Πρωί είναι ή νύχτωσε;

Δ. Πρωί.

Μ. Το «αριστερό» δέκα παρά δεκαοκτώ. Το δεξιό; Που το βρήκες; Υπάρχουν τέτοια ρολόγια; Δείχνουν την σωστή ώρα ή είναι παιχνίδι;

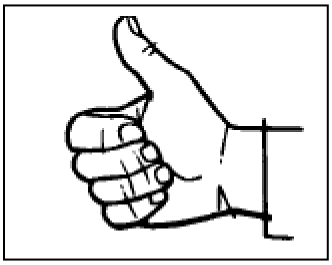
Δ. Δέκα και δέκα. Φορά περιστροφής η θετική. Δείχνουν την σωστή ώρα, όπως και τα συνηθισμένα. Πολλοί θα αρνηθούν την ύπαρξή τους γιατί δεν τα έχουν δει. Μερικά κομμωτήρια τα χρησιμοποιούν. Είναι τοποθετημένα πίσω από την πλάτη του «κουρευτικού καθίσματος» και ο πελάτης βλέπει στον καθρέπτη που είναι μπροστά του την πρόοδο των εργασιών καλλωπισμού του, αλλά και την ώρα.

Μ. Πηγαίνεις εσύ στο κομμωτήριο; Και τι κάνεις εκεί; Καφεδάκι;

Δ. Πολλοί με ζηλεύουν για τα πλούσια και όμορφα μακριά μαλλιά μου, έχω συνηθίσει.

Εναλλακτικά, καθορίζουμε την θετική φορά με τον «κανόνα του δεξιού χεριού». Ο αντίχειρας προς τα πάνω.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



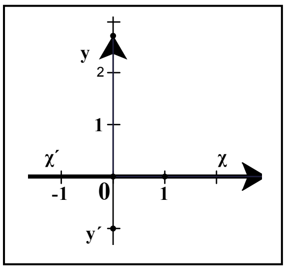
Θετική είναι η φορά περιστροφής που δείχνουν τα τέσσερα μεγαλύτερα δάχτυλα του δεξιού χεριού[2], όταν πλησιάζουν προς την παλάμη.

Ας επανέλθουμε στην πορεία: Περιστρέφουμε, θετική φορά περιστροφής, ένα αντίγραφο του άξονα χ΄χ γύρω από το σημείο που παριστάνει το 0, κατά 90 μοίρες, ονομάζουμε το αντίγραφο y΄y και έτσι δημιουργήσαμε ένα **καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων.

Μ. Καρτεσιανό;

Δ. Το επινόησε ο Rene Descartes, λατινικό Cartesius, ελληνικό Καρτέσιος.

Μ. 500 π.Χ.;



Δ. Όχι, ο Καρτέσιος, ο πρώτος από τους μεγάλους φιλοσόφους του ΙΖ΄ αιώνα, γεννήθηκε στη La-Haye της Touraine στις 31 Μαρτίου 1596 και πέθανε στη Σουηδία στις 11 Φεβρουαρίου 1650.Το 1637 δημοσίευσε, μεταξύ των άλλων, την «Γεωμετρία», όπου παρουσιάζεται η ιδέα των συντεταγμένων. Ο Καρτέσιος ενοποίησε τα στοιχειώδη Μαθηματικά. Θεμελιωτής της «Αναλυτικής Γεωμετρίας», είναι από του πρώτους που έδειξε την δύναμη των γενικών μεθόδων της άλγεβρας στη μελέτη γεωμετρικών προβλημάτων. Αν ο y΄y είναι «ακριβές αντίγραφο», δηλ. η μονάδα στους δύο άξονες είναι ίδια, τότε το σύστημα λέγεται «κανονικό».

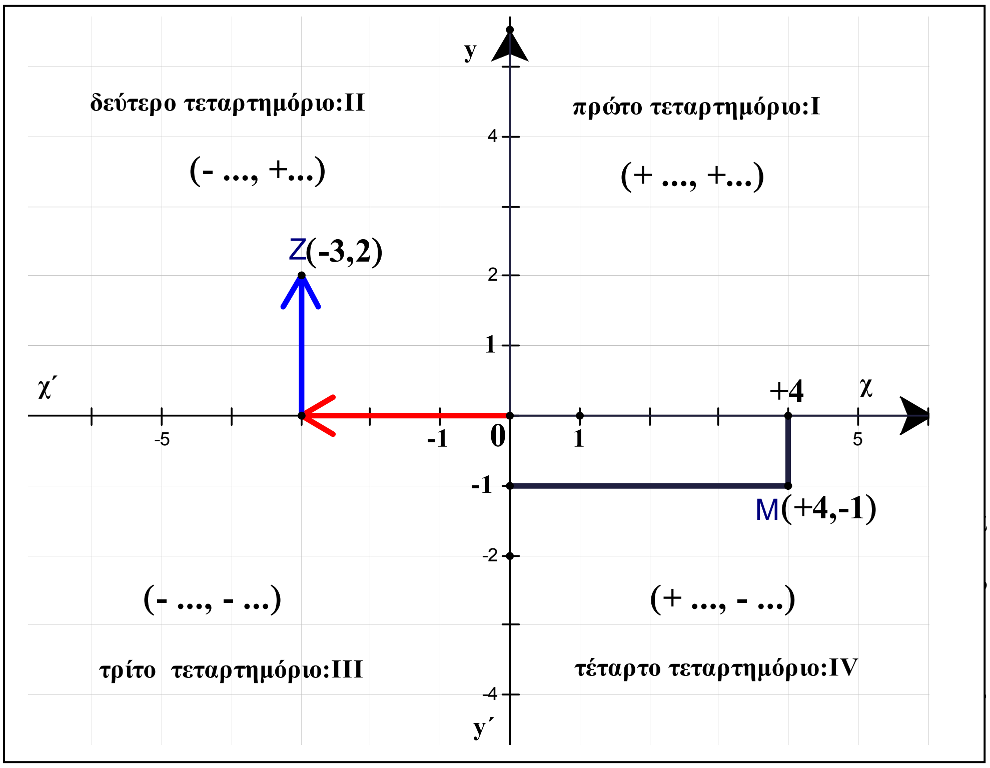
Ας τοποθετήσουμε το σημείο Ζ(-3,2):

Ξεκινάμε πάντα από το σημείο τομής των αξόνων, από το σημείο με συντεταγμένες (0,0).

Ο πρώτος αριθμός, -3, μου δείχνει ότι θα πρέπει να κινηθώ κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα χ΄χ, αριστερά, σε απόσταση 3 μονάδες από τον κατακόρυφο άξονα.

Ο δεύτερος αριθμός, 2, δηλ. +2, με οδηγεί προς τα πάνω, προς το θετικό ημιάξονα Oy, σε απόσταση 2 μονάδες από τον άξονα χ΄χ.

Αντίστροφα: αν θέλω να προσδιορίσω τις συντεταγμένες του Μ, τότε φέρνω κάθετες στους άξονες και διαβάζω την τετμημένη στον χ΄χ , +4, και την τεταγμένη στον y΄y, -1.

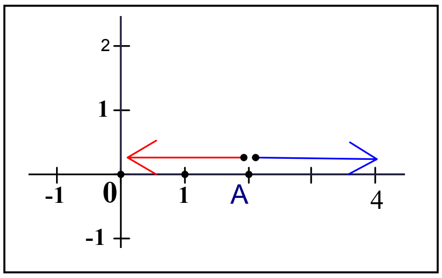


Κάθε σημείο του άξονα χ΄χ έχει τώρα δυο ειδών προσδιορισμούς: τον αριθμό που πήρε στην αρχική αρίθμηση, όταν η οριζόντια ευθεία έγινε άξονας(π.χ. σημείο με τετμημένη 4, ή «+4») και το ζεύγος των αριθμών (4,0) που δείχνει τη θέση του σαν σημείο του επιπέδου.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. *Λοιπόν, πρέπει να αρχίσω από το σημείο Α(2,0) και να σχεδιάσω τετράγωνο με πλευρά 2 μονάδες. Α(2,0), για 2 μονάδες μήκος, 2μ συμβολικά, ας του κάνω τη χάρη, έχει αυτή την ιδιοτροπία με τα σύμβολα, είναι στο πρώτο τεταρτημόριο, δεξιά ή αριστερά;*

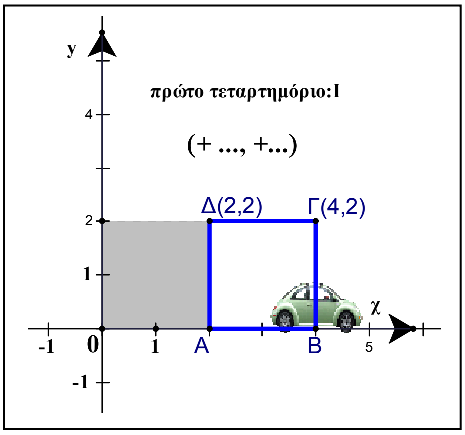
Αριστερά θα μπορούσα να πάω στο σημείο (0,0), την αρχή, αλλά, θυμάμαι μια συζήτηση μεταξύ «μεγάλων» στο σπίτι, λέγανε ότι δοκιμάσανε «αριστερά» και δεν έμειναν ικανοποιημένοι. Άκουσα επίσης ότι δοκιμάσανε και «δεξιά», αλλά πάλι κάτι δεν πήγε καλά. Οι μεγάλοι δεν είναι ικανοποιημένοι με τίποτα! Διαρκής αγώνας, άγχος και τρέξιμο για να βρουν την χαρά, την ευτυχία, το χρήμα και την δόξα, αλλά μάλλον κινούνται «στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά», για να χρησιμοποιούμε και να συνηθίζουμε και την επιστημονική ορολογία! Τετράγωνο είπε ο «σοφός», που τα ξέρει όλα, αλλά πού θα μου πάει, θα βρω κάτι που να μην γνωρίζει…



Δ. Τι μουρμουρίζεις; Ο χρόνος περνά.

Μ. Είναι μισοψημένο….

Ας πάω δεξιά από το Α(2,0), σταθμεύω λοιπόν το αυτοκινητάκι[3] μου στο σημείο Β(4,0). Πρώτο τεταρτημόριο είπαμε, πλευρά 2μ, ανεβαίνω 2 από τα Α και Β, βρίσκω τα σημεία (2,2) και (4,2). Τέλειο;



Δ. Πολύ όμορφο.

Υπάρχει εναλλακτική πρόταση;

Μ. Όμορφο; Ο θείος μου ο Αρτέμης είναι οφθαλμίατρος. Να σου δώσω το κινητό του, ή μάλλον επιστημονικότερα, τον αριθμό του κινητού;

Δ. Αστείο;

Μ. Θα μπορούσαμε να πάρουμε τα σημεία Α, Δ και τα (0,0), (0,2).

Οι άξονες σε ποια τεταρτημόρια ανήκουν;

Δ. Τεταρτημόρια είναι τα εσωτερικά σημεία των γωνιών χΟy, yOχ΄, χ΄Oy΄ και y΄Oχ. Οι άξονες δεν ανήκουν στα τεταρτημόρια.

Τα σημεία του χ΄χ έχουν τεταγμένη 0, π.χ. (5,0), (-2,0), $\left(\frac{3}{4},0\right)$, $\left(-0,26,\ 0\right)$, (1821, 0). Αυτό είναι και το χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτής της ευθείας. Τα σημεία του άξονα y΄y έχουν τετμημένη 0, π.χ. (0,7), (0,-17), (0,1821), (0, -12,5). Η αρχή, το σημείο τομής των αξόνων έχει συντεταγμένες (0,0).

Για να δηλώσουμε ένα οποιοδήποτε σημείο, χωρίς συγκεκριμένες συντεταγμένες, γράφουμε (τετμημένη, τεταγμένη) και συμβολικά (χ, y).

Μ. *Συμβολικά (χ,y). Μάλλον θα πρέπει να εγκαταστήσω στο κεφάλι μου έναν «συμβολομεταφραστή», compiler[4], που έχουν και οι υπολογιστές, ένα πρόγραμμα που μεταφράζει τις πληροφορίες από τα σύμβολα στη γλώσσα μου για να καταλαβαίνω εγώ, και αντίστροφα, να μεταφράζει τις σκέψεις μου σε σύμβολα για να καταλαβαίνουν οι δάσκαλοι. Παντού σύμβολα. Στα μαθηματικά, στη μουσική, στα θρησκευτικά, στη φυσική, στη χημεία. Ευτυχώς υπάρχει και η λογοτεχνία και η ποίηση. Αλλά και εδώ πρόβλημα! Οι ποιητές μιλούν και γράφουν συμβολικά… χωρίς σύμβολα! Χρησιμοποιούν τις λέξεις αλλά με διαφορετική σημασία από αυτή που καταλαβαίνουμε. Διαβάζουμε ένα κείμενο ή ποίημα και ψάχνουμε τι εννοεί! Τόση επιστημονική εξέλιξη, απορώ, δεν είναι δυνατόν να διορθωθεί αυτό το πρόβλημα;*

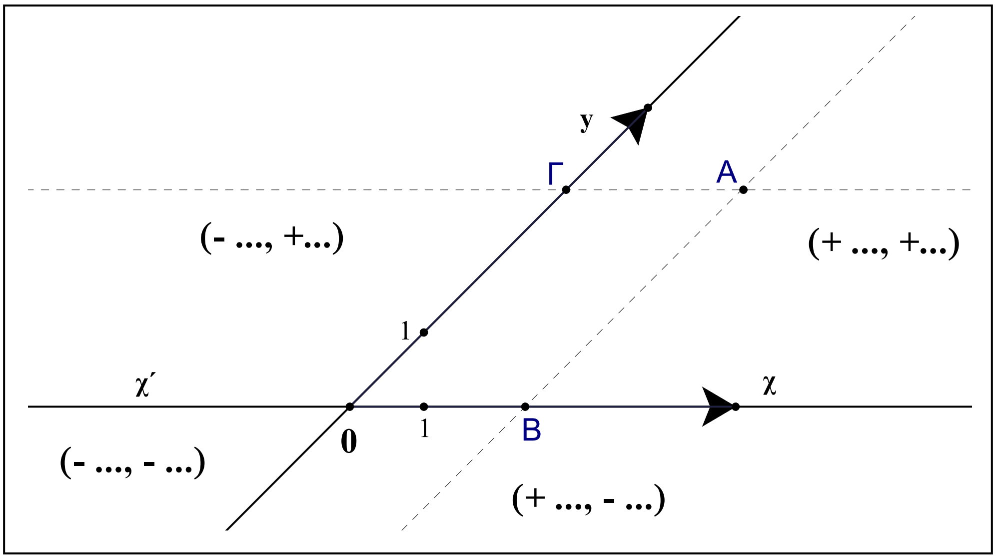
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Τι σκέφτεσαι; Έχεις κάποια ερώτηση;

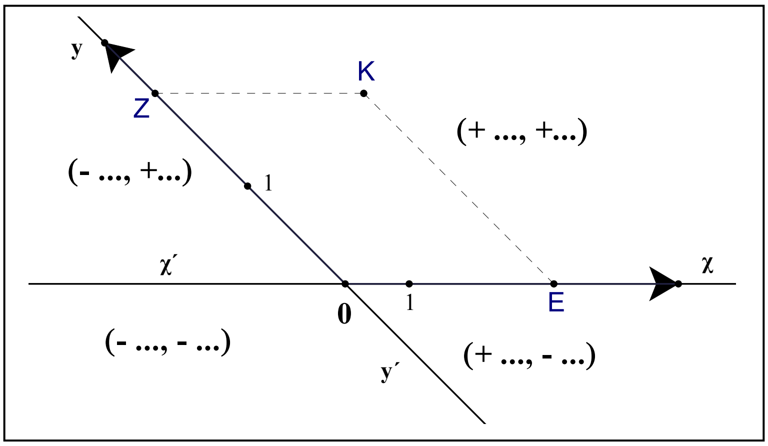
Μ. Οι άξονες είναι πάντα «οριζόντιος» και «κατακόρυφος»;

Δ. Μια, ίσως προτιμότερη από λογική άποψη, ορολογία είναι ο «πρώτος» και ο «δεύτερος» άξονας, αλλά οι περισσότεροι άνθρωποι κρατάνε τα βιβλία ή τα τετράδιά τους, ή ακόμα βλέπουν τους πίνακες στις αίθουσες διδασκαλίας με τον ίδιο τρόπο, οπότε οι όροι «οριζόντιος» και «κατακόρυφος» είναι πιο παραστατικοί. Το σύστημα συντεταγμένων δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογώνιο, ούτε είναι υποχρεωτικά «κανονικό», δηλ. οι μονάδες στους άξονες μπορεί να είναι διαφορετικές, ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε. Παρακάτω είναι σχεδιασμένα δυο **πλαγιογώνια** συστήματα συντεταγμένων.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Α, φέρνουμε παράλληλες στους άξονες και διαβάζουμε τετμημένη και τεταγμένη, τους αριθμούς που αντιστοιχούν στα σημεία Β και Γ, ανάλογα με την μονάδα που έχουμε επιλέξει σε κάθε άξονα.



Αντίστροφα, όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου, η τετμημένη καθορίζει ένα σημείο στον χ΄χ, π.χ. το Ε, η τεταγμένη καθορίζει το σημείο Ζ στον άλλο άξονα, από τα Ε και Ζ φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες y΄y και χ΄χ αντίστοιχα και βρίσκουμε το σημείο Κ στο οποίο αντιστοιχεί το συγκεκριμένο ζεύγος (τετμημένη, τεταγμένη). Ας εξοικειωθούμε με το **ορθοκανονικό** σύστημα και επεκτείνουμε τις διαδικασίες αργότερα.



Μ. Ορθοκανονικό;

Δ. Η γωνία των αξόνων ορθή, η μονάδα ίδια στους δυο άξονες, ορθογώνιο και κανονικό.

Μ. Στους άξονες βάζουμε μόνο αριθμούς;

Δ. Ανάλογα με το πρόβλημα. Δες τα «περιεχόμενα» του βιβλίου.

Μ. Άλλο παράδειγμα;

Δ. Ο Σωκράτης αρρώστησε βαριά και μεταφέρθηκε στο νοσοκομείο την Τετάρτη το πρωί με πυρετό 39.Του εφαρμόζεται μια θεραπεία και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Να παρουσιάσεις την εξέλιξη του πυρετού του Σωκράτη με ένα διάγραμμα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

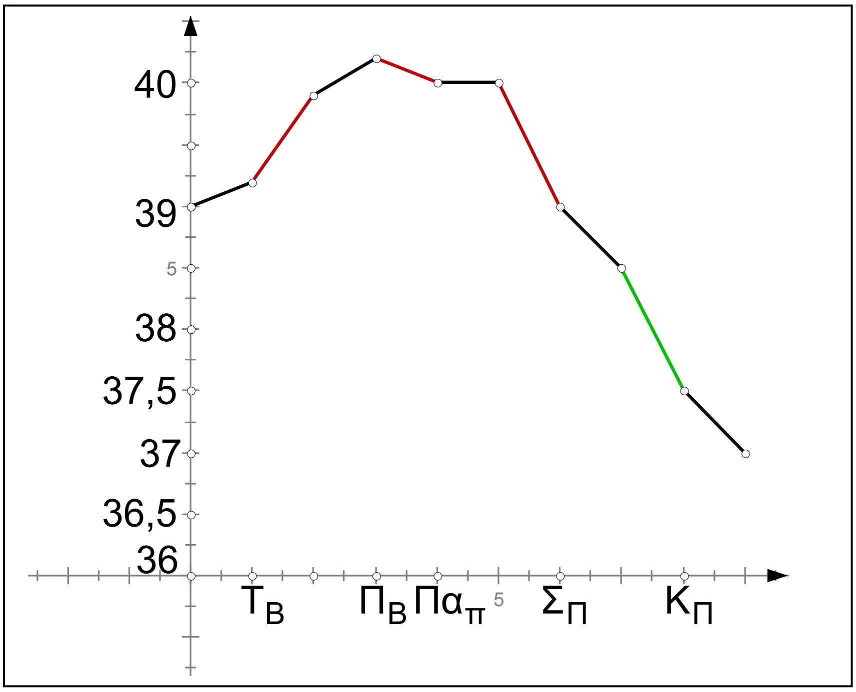
	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Πρωί	39	39,8	40	39	37,5
Βράδυ	39,2	40,2	40	38,5	37

Μ. Και πως θα κάνω το διάγραμμα;

Δ. Στο πρώτο τεταρτημόριο. Στον οριζόντιο άξονα Τετάρτη πρωί, Τετάρτη βράδυ, κλπ, σύμβολα $Τ_π$, $Τ_β$, $Π_π$, $Π_β$, κλπ, ανά 1 μονάδα. Στον κατακόρυφο άξονα 2,5 δέκατα πυρετού ανά μισή μονάδα, αρχή το σημείο ($Τ_π$, 36).

Μ. Βοήθεια;

Δ. Καλά. Θα το κάνω εγώ.

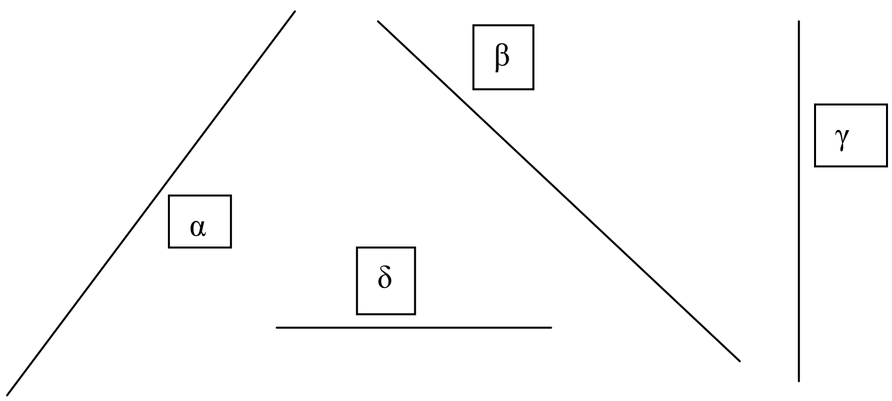


Ενώνουμε[5] με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία ($Τ_π$, 39), ($Τ_β$, 39,2), ($Π_π$, 39,8), ($Π_β$, 40,2), ($Πα_π$, 40)…κλπ.

Η εξέλιξη του πυρετού φαίνεται άμεσα από το σχέδιο! Μπορείς να συμπληρώσεις μέρες πρωί-βράδυ, π.χ. Παρασκευή βράδυ, $Πα_Β$, Κυριακή βράδυ, $Κ_Β$, ή και «πυρετούς», π.χ. 39,5, κλπ για διευκόλυνση.

Μ. Να εξηγήσουμε το «φαίνεται άμεσα»;

Δ. Ας δούμε τις ευθείες α, β, γ, δ:



Η «α» ανεβαίνει, η «β» κατεβαίνει, η «γ» είναι κατακόρυφη και η «δ» οριζόντια.

Μ. Δεν μπορούμε να πούμε ότι η «α» κατεβαίνει και η «β» ανεβαίνει;

Δ. Όχι.

Μ. Γιατί;

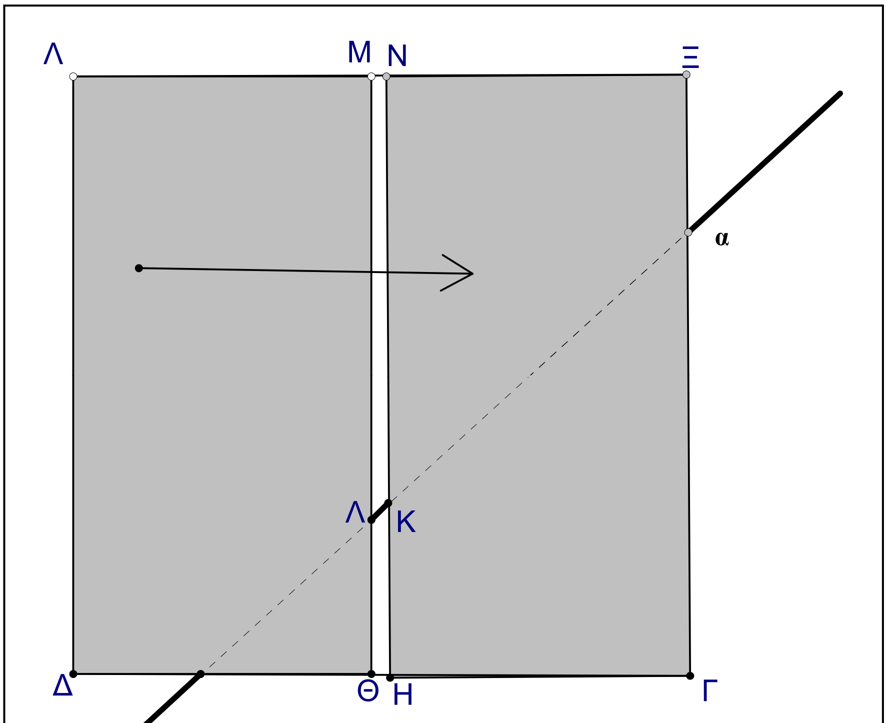
Δ. Βλέπουμε τις ευθείες από **αριστερά προς τα δεξιά**, όπως διαβάζουμε.

Φανταζόμαστε μια κίνηση κατά μήκος κάθε ευθείας.

Η «α» έχει ανοδική πορεία. Μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα αυτή την ανοδική πορεία αν κάνουμε μια πολύ λεπτή σχισμή ΜΝΗΘ σ'ένα κομμάτι χαρτιού ΛΞΓΔ και **σύρουμε** το χαρτί πάνω από την ευθεία από **αριστερά προς τα δεξιά**, όπως δείχνει το βέλος στο σχήμα της επόμενης σελίδας.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Κατά την διάρκεια αυτής της κίνησης του χαρτιού[6], μέσα από την σχισμή μπορούμε να βλέπουμε ένα μικρό μόνο τμήμα (ΛΚ) της ευθείας, που μας δίνει την εντύπωση αυτής της ανηφορικής πορείας.



Άνω-Κάτω μηχάνημα

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα της εξέλιξης του «Σωκράτειου» πυρετού.

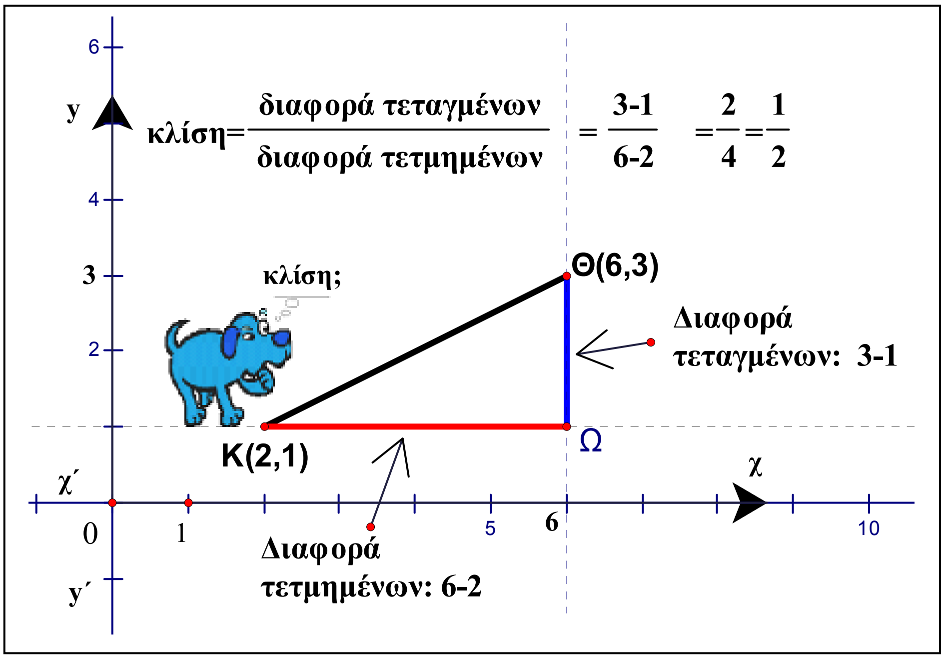
Αν το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο μετρήσεων «ανεβαίνει», ο πυρετός ανεβαίνει. Η δεύτερη μέτρηση, αυτή που βρίσκεται «δεξιότερα», δείχνει υψηλότερη «Σωκράτεια» θερμοκρασία.

Μ. Έχουμε και «οριζόντιο» τμήμα.

Δ. Παρασκευή πρωί και Παρασκευή βράδυ **ίδια** θερμοκρασία, 40, η διαφορά των δύο μετρήσεων είναι 0.

Μ. Λίγη βοήθεια για το ανεβοκατέβασμα ακόμα;

Δ. Ας πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με γνωστές συντεταγμένες των άκρων, π.χ. το ΚΘ. Προτιμούνται οι ακέραιοι για παραδείγματα, προσανατολίζουμε τις σκέψεις στις ιδέες και εξοικονομούμε χρόνο από το μόχθο των υπολογισμών, οι σκέψεις όμως δεν αλλάζουν για τα διάφορα είδη αριθμών :



Πορεία από αριστερά προς τα δεξιά. Χρειάζεται να «σύρουμε» το χαρτί με τη λεπτή σχισμή; Να φέρω το «άνω-κάτω μηχάνημα»;

Μ. Δεν είναι απαραίτητο. Από το Κ προς το Θ, πορεία ανηφορική.

Δ. Πόσο ανηφορική;

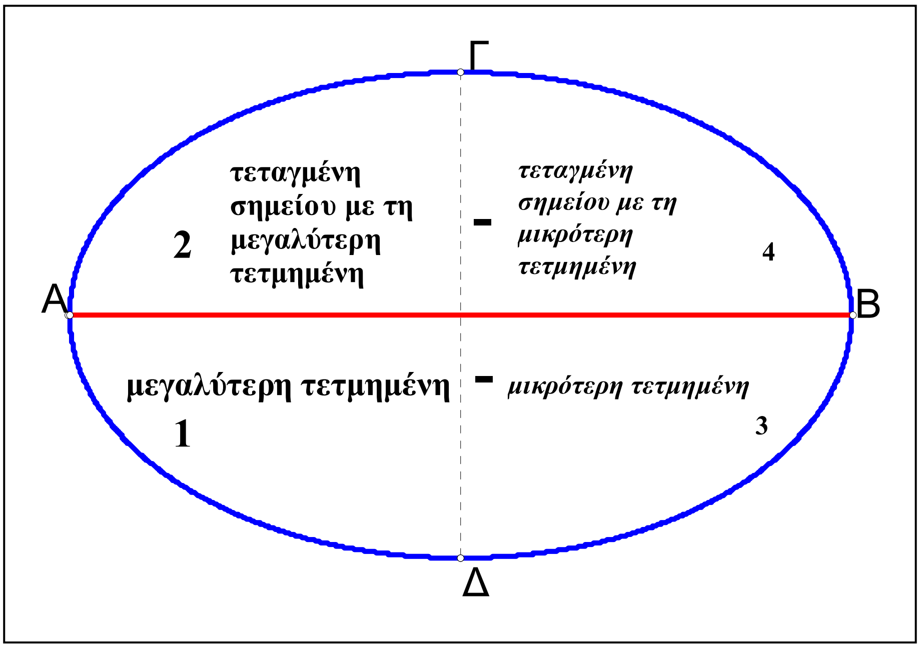
Μ. Άλλη διατύπωση;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Η οριζόντια διεύθυνση καθορίζεται από τον άξονα χ΄χ. Το ευθ.τμήμα ΚΘ ανεβαίνει. Ξεφεύγει, αποκλίνει, από την οριζόντια διεύθυνση. Πόσο απότομα ανεβαίνει;

Μ. Εντάξει, θα υπάρχει κάποιος αριθμός, όνομα;

Δ. **Κλίση.** Από τα Κ(2,1) και Θ(6,3) φέρνουμε παράλληλες στους άξονες. Το ΚΩ έχει μήκος 4 μονάδες. Από το Ω φτάνω στο Θ ανεβαίνοντας 2 μονάδες, (+2). Η κλίση του ΚΘ είναι $\frac{3-1}{6-2}=\frac{+2}{+4}=+\frac{2}{4}$, δυο προς τέσσερα.



Θα διευκολυνθείς αν για τις διαφορές στους όρους του κλάσματος συμπληρώσεις πρώτα τη «θέση 1», κάτω από τον μεγάλο άξονα ΑΒ της έλλειψης[7] και αμέσως μετά τη «θέση 2», πρώτα τις θέσεις αριστερά του μικρού άξονα της έλλειψης, του τμήματος ΓΔ. Στις θέσεις «1» και «2» είναι οι συντεταγμένες του «δεξιότερου» σημείου, εδώ του Θ.

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{3-(...)}{6-(...)} . .. \frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4}.$$

Κατά τη διάρκεια της μελέτης δημιουργούνται απορίες, μη σταματάς, προχώρα παρακάτω, η κατανόηση ολοκληρώνεται με την επανάληψη!

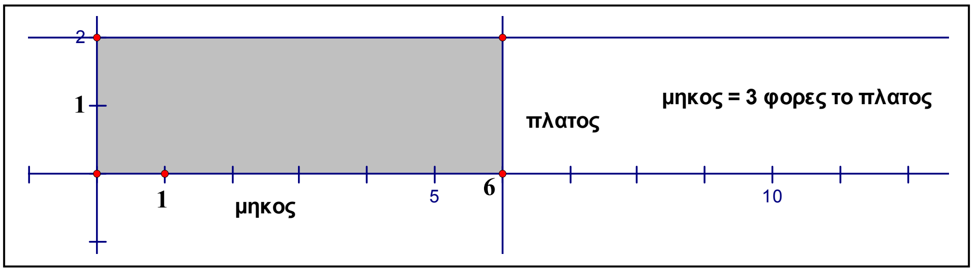
Μ. Τι $\frac{2}{4}$; Μέτρα, εκατοστά; Πάντως € δεν είναι.

Δ. Αφηρημένος αριθμός. Λόγος του ΩΘ προς το ΚΩ.

Αποτέλεσμα σύγκρισης: $\frac{\text{ΩΘ}}{\text{ΚΩ}} = \frac{2 \text{ μονάδες}}{4 \text{ μονάδες}} = \frac{2}{4}$

Μ. Ας πούμε ότι είναι χάπι. Νερό για να το καταπιώ;

Δ.Το παρακάτω ορθογώνιο έχει μήκος 6 μονάδες και πλάτος 2 (ίδιες) μονάδες. Το μήκος είναι τριπλάσιο από το πλάτος.



Μαθηματική έκφραση: **ο λόγος** του μήκους προς το πλάτος είναι 3.

Συμβολικά: $\frac{\text{μηκος}}{\text{πλατος}} = 3 = \frac{3}{1}$.

Μ. Παρέλειψες τους τόνους.

Δ. Πρώτη γυμνασίου, δεν έμαθες να τονίζεις τις λέξεις;

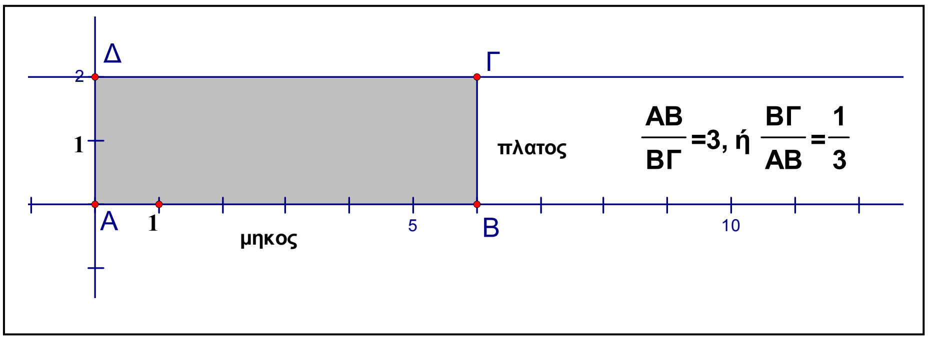
Φυσικά, μπορούμε να αντιστρέψουμε τις εκφράσεις: Ο **λόγος** του πλάτους προς το μήκος είναι 1 προς 3, συμβολικά : $\frac{\text{πλατος}}{\text{μηκος}} = \frac{1}{3}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

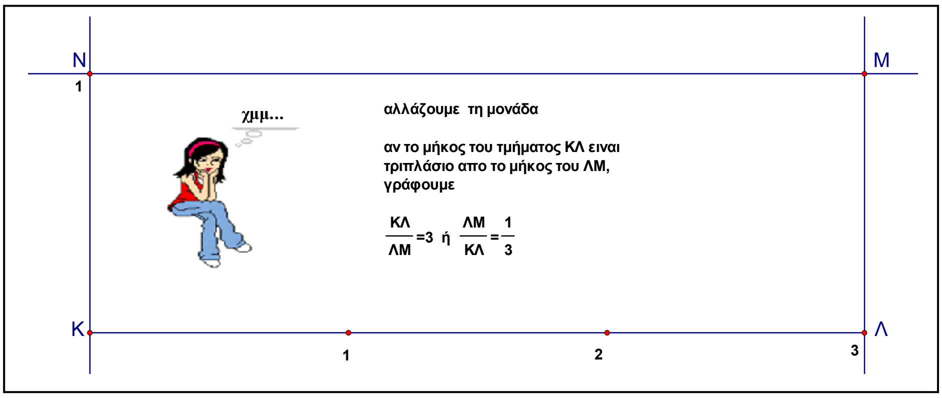
Μ. Και πάλι ξέχασες να τονίσεις.

Δ. Αντέστρεψα το προηγούμενο, μια φορά ξέχασα!

Στις επόμενες εικόνες αλλάζουμε μόνο τα σύμβολα, όροι του κλάσματος είναι τα ονόματα των ευθ.τμημάτων.



Προσέχουμε να μετράμε τα τμήματα με την ίδια μονάδα.



Μ. Μήπως με € καταλάβω καλύτερα;

Δ. Πόσα € έχεις μαζί σου σήμερα;

Μ. Είκοσι λεπτά

Δ. Εγώ έχω 20 ευρώ. Μπορείς να υπολογίσεις το λόγο των χρημάτων μας;

Μ. Λόγος: $\frac{20}{20}=\frac{1}{1}=1$, απλοποίηση με το 20

Δ. Δηλαδή, ένα προς ένα, έχουμε τον ίδιο αριθμό €; Δεν μπορούμε να «απλοποιήσουμε» € με λεπτά.

Πρέπει να έχουμε **ίδια** μονάδα μέτρησης για τη σύγκριση, είναι απαραίτητο να μεταφράσεις τα € σε λεπτά…

Μ. Μια στιγμή, διορθώνω, κάθε € είναι 5 εικοσάλεπτα, 20€ είναι 100 εικοσάλεπτα, εσύ έχεις εκατονταπλάσια χρήματα από μένα.

Δ. Μπορούμε να γράψουμε $\frac{2000\text{ λεπτά}}{20\text{ λεπτά}}=100=\frac{100}{1}$

Μ. Πως δεν το σκέφτηκα πρώτος, είναι απλό.

Δ. Το «100» τι είναι;

Μ. Ευρώ.

Δ. Ευρώ ποιού; Εγώ έχω είκοσι €, εσύ 20 λεπτά.

Μ. Λάθος;

Δ. Το 100 είναι ο λόγος των χρημάτων μου προς τα δικά σου. Δεν έχει μονάδα μέτρησης. Είναι αποτέλεσμα σύγκρισης. Δείχνει ότι ο αριθμητής, 2000, είναι εκατονταπλάσιος από τον παρονομαστή, 20.

Αφού εκφράσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την ίδια μονάδα, μπορείς να σκεφτείς ότι αυτή η κοινή μονάδα «απλοποιείται»: $\frac{2000\,\cancel{\ }}{20\,\cancel{\ }}=100=\frac{100}{1}$, εκατό προς ένα.

Μ. Εκατό προς ένα;

Δ. Το 100 είναι η ποσότητα του αριθμητή που αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή. Εκατό λεπτά από τα δικά μου 2000 λεπτά, αντιστοιχούν σε 1 λεπτό από τα δικά σου 20 λεπτά.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Εγώ έχω εκατονταπλάσια χρήματα από σένα, ο λόγος των χρημάτων μας είναι $\frac{\delta}{\mu}=100=\frac{100}{1}$. Εσύ; Αν θέλουμε τον λόγο $\frac{\mu}{\delta}$;

Μ. Τι είναι τα δ,μ;

Δ. Αριθμός χρημάτων του δασκάλου :δ, αριθμός χρημάτων του μαθητή: μ

Μ. Εγώ έχω το $\frac{1}{100}$ των χρημάτων σου. Εντάξει. Αντίστροφος.

Αν μεταφράσω τα 20 λεπτά σε €, 0,20€;

Δ. Εφόσον έχουμε ίδια μονάδα μέτρησης, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο, δεν εξαρτάται από την μονάδα:

$$\frac{\delta}{\mu}=\frac{20\cancel{€}}{0,20\cancel{€}}=\frac{20}{0,2}=\frac{\frac{20}{1}}{\frac{2}{10}}=\frac{2\cancel{0}^{10}\cdot 10}{1\cdot\cancel{2}^{1}}=100=\frac{100}{1}$$

Ας βρούμε την κλίση μερικών ακόμα ευθυγράμμων τμημάτων: Βλέπουμε στο σχήμα της διπλανής σελίδας. Ποια ευθύγραμμα τμήματα ανεβαίνουν, ποια κατεβαίνουν;

Θα σε βοηθήσει το «άνω-κάτω μηχάνημα».

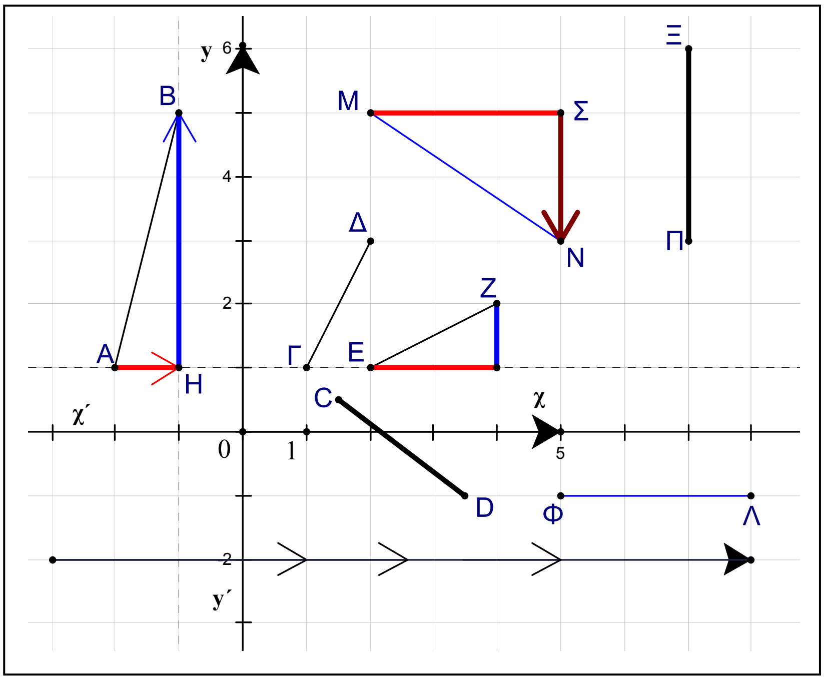
Μ. Σύρουμε το μηχάνημα από αριστερά προς τα δεξιά, τα ΑΒ, ΕΖ, ΓΔ ανεβαίνουν, το ΜΝ κατεβαίνει, το ΦΛ οριζόντιο, ούτε πάνω, ούτε κάτω. Για το ΠΞ; problem, το μηχάνημα θέλει βελτίωση.

Δ. Από τα Α και Β φέρνουμε παράλληλες στους άξονες, είναι έτοιμες στο τετραγωνισμένο χαρτί, το ΑΗ έχει μήκος 1 μονάδα, από το Η φτάνω στο Β ανεβαίνοντας 4 μονάδες, (+4). Η κλίση του ΑΒ είναι $\frac{+4}{1}=+\frac{4}{1}=4$.Το «4» είναι αποτέλεσμα σύγκρισης των ευθυγράμμων τμημάτων ΗΒ και ΑΗ. Μας παρέχει ένα τρόπο για τη μέτρηση της απόκλισης του ΑΒ από την οριζόντια διεύθυνση. Μπορείς να συνεχίσεις;

Μ. Για το ΕΖ, οριζόντια 2 μονάδες, κατακόρυφα 1, (+1), κλίση $\frac{+1}{2}=\frac{1}{2}$

Δ. Κλίση $\frac{1}{2}$ σημαίνει ότι το «y» αυξάνεται κατά 1 μονάδα, όταν το «χ» αυξάνεται κατά 2 μονάδες.

Μ. Και όταν το «χ» αυξάνεται κατά μια μονάδα;



Δ. Το «y» αυξάνεται κατά μισή μονάδα, $\frac{1}{2}$.

Μ. Κλίση του ΓΔ: δυο προς 1. Κλίση του ΜΝ: 3 μονάδες κατά την κατεύθυνση του Οχ, φτάνω στο Σ, μετά κατεβαίνω 2 μονάδες,

(-2), το κατεβαίνω «-», $\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Κλίση $-\frac{2}{3}$ σημαίνει ότι το «y» ελαττώνεται κατά 2 μονάδες, όταν το «χ» αυξάνεται κατά 3 μονάδες.

Μ. Για το CD, C(1,5 , 0,5), D(3,5 , -1), δεξιότερα το D, $\frac{-1-0,5}{3,5-1,5}=\frac{-1,5}{2}=-\frac{3}{4}$.

Για το ΦΛ: Κλίση 0, $\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}}=\frac{(-1)-(-1)}{8-5}=\frac{0}{3}=0$

Δ. Για το ευθ.τμήμα ΠΞ, Π(7,3), Ξ(7,6), δεν υπάρχει σημείο του «δεξιότερα» από το Π. Αν προσπαθήσουμε για υπολογισμό της κλίσης… $\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}}$ καταλήγουμε στη γνωστή μαθηματική αντιπάθεια: παρονομαστής 0. Λέμε ότι το ΠΞ είναι ευθύγραμμο τμήμα χωρίς κλίση.

Μ. Η κλίση εξαρτάται από το μήκος του τμήματος;

Δ. Η κλίση είναι ίδια για μικρό ή μεγάλο τμήμα, ακόμα και για την ευθεία.

Μ. Ευθεία;

Δ. Η ευθεία που καθορίζεται από το τμήμα, αν το προεκτείνουμε απεριόριστα. Οι ευθείες: «δ» που καθορίζεται από το ΦΛ, «ε» που καθορίζεται από το ΑΒ, « η» που καθορίζεται από το ΜΝ, έχουν κλίσεις $0,4,-\frac{2}{3}$ αντίστοιχα, όπως και τα τμήματα τα οποία τις καθορίζουν.

Δεν ορίζουμε κλίση για την κατακόρυφη ευθεία «ζ», όπως και για το ΠΞ.

Πες δυο σημεία του χ΄χ.

Μ. Υ(-2,17 0), Τ(13,3, 0)

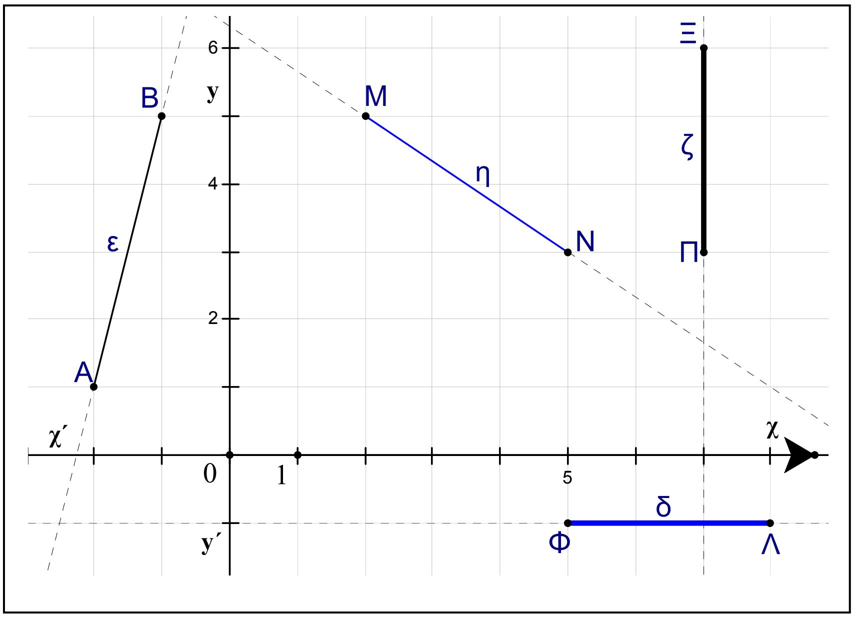
Δ. Ποιο είναι «δεξιότερα»;

Μ. Το Τ.

Δ. Διαφορά τεταγμένων; Διαφορά τετμημένων; Κλίση;

Μ. Έχουμε, διαφορά τεταγμένων: 0-0=0, διαφορά τετμημένων: 13,3-(-2,17)=1940, διαίρεση, (διαφορά τεταγμένων) δια (διαφορά τετμημένων), κλίση 0, αυτό δεν έπρεπε να βρω;

Δ. Σωστά! Περίμενε λίγο, το 1940 πως το βρήκες;



Μ. Η αλήθεια είναι ότι έγραψα τον αριθμό του «ΟΧΙ», χωρίς να σκεφτώ. Αφού ο διαιρετέος είναι 0, ότι και να είναι ο διαιρέτης το πηλίκο θα είναι 0. Π.χ. $\frac{0}{13}=0$, δοκιμή: 0*13=0, διαιρέτης επί πηλίκο = διαιρετέος.

Δ. Καλά. Βρες και το πηλίκο της διαίρεσης 0:0.

Μ. Ίδιο: $\frac{0}{0}=0$, δοκιμή: 0*0=0, Σωστό!

Δ. Το 1821 δεν ταιριάζει;

Μ. Όχι.

Δ. Γιατί, έκανες τη δοκιμή;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Όχι, αλλά απλό, $\frac{0}{0} = 1821$, δοκιμή, 1821*0=0, διαιρέτης επί πηλίκο ίσον διαιρετέος, μάλλον είναι σωστή και η επανάσταση! Δυο σωστά αποτελέσματα! Πρωτοφανές. Κάτι δεν πάει καλά με τα μαθηματικά σου. Έχεις πει ότι το αποτέλεσμα μιας πράξης είναι μοναδικό. Δεν μπορεί να βρίσκει καθένας το δικό του αποτέλεσμα!

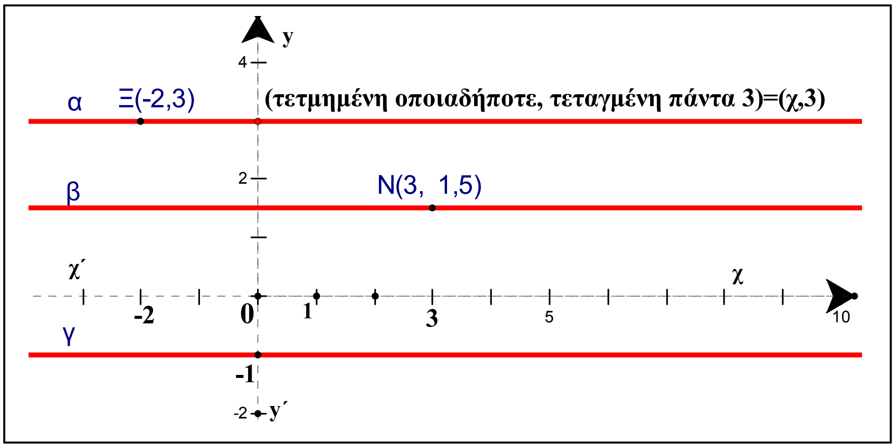
Δ. Οποιοσδήποτε αριθμός επαληθεύει την δοκιμή.

Μ. Α ναι! πως δεν το σκέφτηκα! Δεν διαιρούμε με το 0. Ακαθόριστο πηλίκο. Το 0 μπορεί να είναι διαιρετέος, αλλά όχι διαιρέτης.

Δ. Ο «οριζόντιος» άξονας χ΄χ είναι ευθεία με κλίση 0. Κλίση 0 έχει κάθε οριζόντια ευθεία, κάθε ευθεία παράλληλη στον χ΄χ, όπως και η «δ» που είδαμε προηγουμένως.

Ας σχεδιάσουμε μερικές ευθείες με κλίση 0. Κοινό χαρακτηριστικό;

Μ. Κάθετες στον y΄y.



Δ. Για δυο σημεία της «α», π.χ. τα Ξ(-2,3) και Ρ(0,3), δεξιότερα είναι το Ρ, τοποθέτησέ το στο σχήμα, το 0 είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό (-2), έχουμε:

$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{3-3}{0-(-2)} = \frac{0}{2} = 0$. Το σύμβολο για οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου είναι (χ,y). Τα «y» των σημείων της «α», οι τεταγμένες, είναι «3», και κάθε σημείο με τεταγμένη 3 είναι σημείο της «α». Τυχαίο σημείο της ευθείας «α», συμβολίζεται με (χ, 3), αφού η τεταγμένη δεν αλλάζει, είναι 3. Δεν υπάρχουν σημεία με τεταγμένη «3» έξω από την «α». Η ευθεία «α» χαρακτηρίζεται από την τεταγμένη 3, λέμε ότι είναι η ευθεία y =3.

Οι ευθείες β, γ;

Μ. Για την β: y =1,5 , για την ευθεία γ: y = -1

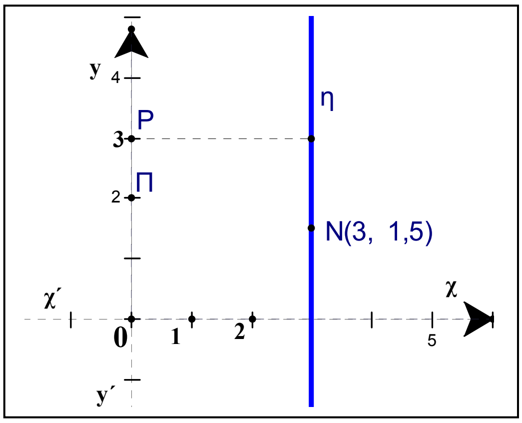
Δ. Οι ευθείες α, β, γ είναι παράλληλες. Θυμάσαι το σύμβολο;

Μ. Μια στιγμή, ενεργοποίηση, α//β//γ//χ΄χ, είναι παράλληλες και με τον άξονα χ΄χ.

Δ. Εξαιρετικά! Τι ενεργοποίησες;

Μ. Τον συμβολομεταφραστή[8]:

Για τον y΄y; Κλίση;



Δ. Ποιες είναι οι συντεταγμένες των σημείων Ρ και Π;

Μ. Π(0,2), Ρ(0,3)

Δ. Δεν υπάρχει σημείο του y΄y «δεξιότερα» από το Π.

Αν προσπαθήσουμε για τον υπολογισμό της κλίσης…

$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{3-2}{0-0} = \frac{1}{0} = ?$ καταλήγουμε στη γνωστή αντιπάθεια: διαιρέτης 0.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ενώ στην διαίρεση 0:0 μπορούμε να πάρουμε πηλίκο οποιονδήποτε αριθμό, στην 1:0 δεν ταιριάζει κανένας, εξαιτίας της γνωστής απορροφητικής ιδιότητας του μηδενός, θυμήσου, καταπίνει οτιδήποτε πολλαπλασιάζεται επί αυτό.

Ο y΄y είναι ευθεία χωρίς κλίση, όπως είπαμε προηγουμένως για την ευθεία «ζ» και το τμήμα ΠΞ. Οποιοδήποτε σημείο του y΄y έχει τετμημένη 0 και κάθε σημείο με τετμημένη 0 βρίσκεται «πάνω» στον y΄y , λέμε ότι ο άξονας y΄y είναι η ευθεία χ = 0.

Μπορείς να πεις μερικά σημεία της κατακόρυφης ευθείας «η»;

Μ. Διέρχεται από το N(3, 1,5), όλα τα σημεία της έχουν ίδια τετμημένη, (3,3), (3,13), (3,23), (3,-33), η// y΄y, κάθετες στον χ΄χ.

Δ. Κλίση; Περιγραφή των σημείων της «η»;

Μ. Ευθεία χωρίς κλίση, χαρακτηρίζεται από την τετμημένη 3, τα σημεία της είναι της μορφής (3, y), είναι η ευθεία χ = 3.

Να κάνουμε και ένα παράδειγμα για πολύ μικρά τμήματα, αλλά να βλέπουμε την κλίση;

Δ. Με τα μάτια;

Μ. Όχι! Με τη μύτη. Να τη μυρίζουμε! Μπορεί να είμαι μικρότερος και να μου λείπουν κάποιες γνώσεις, αλλά δεν θέλω να με ειρωνεύεσαι.

Δ. Δεν σε ειρωνεύομαι. Η κλίση μπορεί να βρεθεί από τις συντεταγμένες, δεν είναι απαραίτητο να βλέπουμε το τμήμα, είτε έχει μικρό, είτε μεγάλο μήκος. Π.χ. φαντάσου το τμήμα με άκρα D(-1, 2) και G(2,-3). Μεγαλύτερη τετμημένη 2, το G είναι δεξιότερα,

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{-3-...(\ )}{2-...(\ )}, \quad \frac{\text{δφρ τεταγμένων}}{\text{δφρ τετμημένων}} = \frac{-3-2}{2-(-1)} = \frac{-5}{3}.$$

Μ. Και αν δεν γνωρίζουμε τα άκρα;

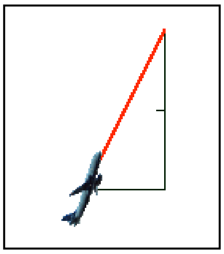
Δ. Για τον υπολογισμό χρειάζονται οι συντεταγμένες δύο σημείων του τμήματος, δεν είναι απαραίτητο να είναι τα άκρα. Το μήκος του τμήματος μπορεί να είναι πολύ μικρό,

π.χ. Q(0,1 , 0,2), R(0,11 , 0,22) , κλίση του QR: $\frac{0,22-0,2}{0,11-0,1}=\frac{0,02}{0,01}=\frac{2}{1}=2$

Μ. Πολλά κόμματα!

Δ. Ίσως είναι προτιμότερο ο αριθμός ένα δέκατο να συμβολίζεται «0.1», αντί «0,1», πράγμα που συμβαίνει σε άλλες χώρες, αλλά, τουλάχιστον προς το παρόν, στη χώρα μας προκρίθηκε το σύμβολο «0,1», προσέχουμε.

Στην διπλανή εικόνα έχουμε τμήμα με κλίση 2.

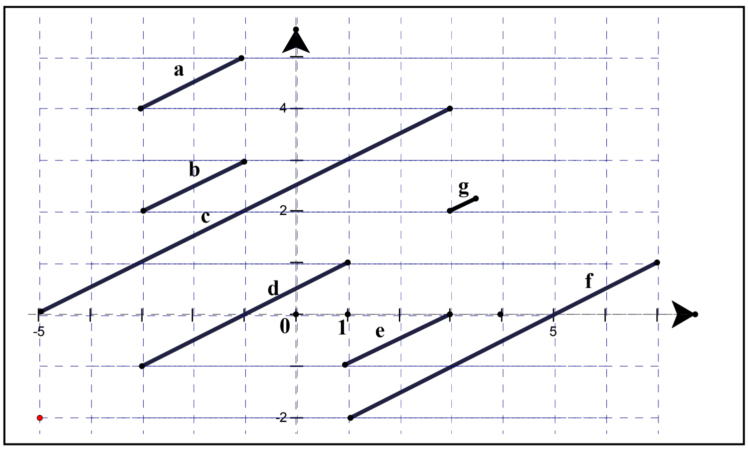


Μ. Στην αεροπλανική εικόνα δεν χρησιμοποίησες άξονες, σημεία και τετραγωνισμένο χαρτί.

Δ. Έχεις κάποια αμφιβολία για την κλίση 2;

Μια μονάδα οριζόντια, δυο μονάδες κατακόρυφα, δυο προς ένα. Αν μπορούμε να βρούμε οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, δεν είναι απαραίτητες οι συντεταγμένες. Σου υπενθυμίζω ότι κλίση είναι η κατακόρυφη μετατόπιση ανά μονάδα οριζόντιας μετατόπισης.

Βρες, κοιτώντας, τις κλίσεις των τμημάτων a, b, c, d, e, f, g.



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Για το τμήμα a, 2 οριζόντια, 1 κατακόρυφα, κλίση $\frac{1}{2}$.

Το ίδιο και για τα τμήματα b,e. Για το τμήμα c, $\frac{4}{8}$, ξανά $\frac{1}{2}$, γιατί $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Για το d, $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, για το f, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Για το g; Συντεταγμένες για το «αριστερά» σημείο (3,2), αλλά για το δεξιότερο;

Δ. Για το δεξιότερο: (3,5, 2,25).

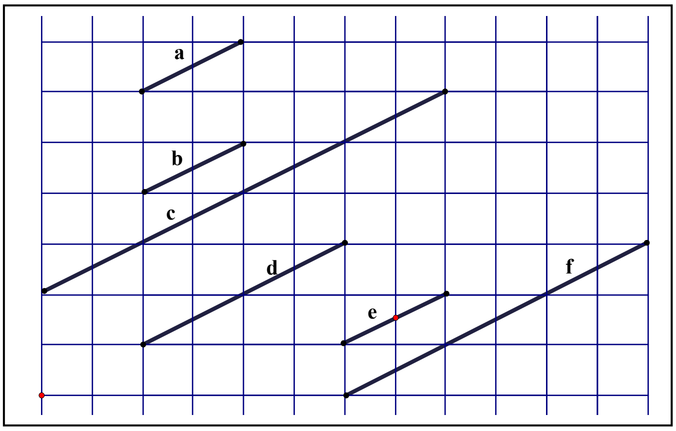
Μ. Τότε κλίση $\frac{0,25}{0,5}=\frac{25}{5}=5$.

Δ. Κάποια διόρθωση μόνο στο g; Δες το σχέδιο. Δεν πρέπει να διαφέρει πολύ από τις κλίσεις των άλλων τμημάτων.

Μ. Το παρατήρησα, αλλά σκέφτηκα μήπως είναι οι σχεδιαστικές ανακρίβειες, $\frac{0,25}{0,5}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, διαισθητικά περισσότερο, όχι μετρώντας.

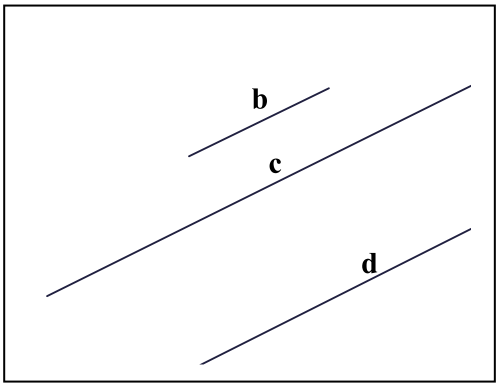
Τελικά όλα τα τμήματα έχουν την ίδια κλίση.

Δ. Αν αφαιρέσω τους άξονες, οι σκέψεις για τις κλίσεις είναι ίδιες με τις προηγούμενες. Αφαίρεσα και το τμήμα «g».



Μ. Ναι, σωστά, για τα a,b,c,d,e,f δεν μου χρειάστηκαν συντεταγμένες. Βρήκα τις κλίσεις από τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετακινήσεις.

Δ. Αφαιρώ το πλέγμα, τα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων και τα a,e,f. Μπορείς να βρεις την κλίση κάθε τμήματος από τα b, c, d;



Μ. Είναι τα προηγούμενα;

Δ. Ναι.

Μ. Την γνωρίζω, $\frac{1}{2}$.

Δ. Αν είναι ανεξάρτητα από τα προηγούμενα;

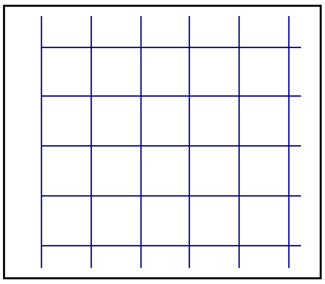
Μ. Δύσκολο. Πως θα μετρήσω οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση;

Δ. Μπορείς να κάνεις κάποια παρατήρηση για τις κλίσεις; Για τα τμήματα;

Μ. Οι κλίσεις σίγουρα θετικές.

Τα τμήματα μάλλον είναι παράλληλα.

Δ. Στο πλέγμα μπορείς να σχεδιάσεις τμήματα με συγκεκριμένες κλίσεις;

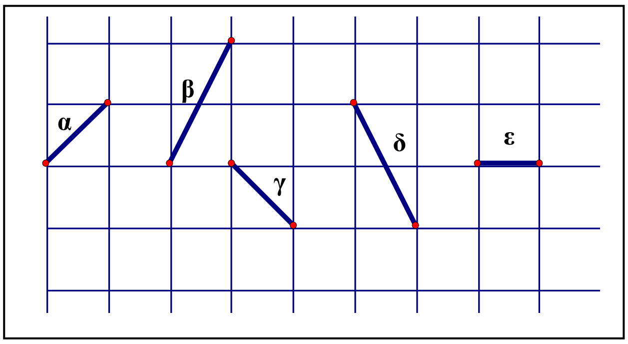


Π.χ. 1,2, -1, -2, 0;

Μ. Στο πλέγμα είναι πολύ εύκολο, (α, 1), (β, 2),(γ,-1), (δ, -2), (ε, 0), τα έγραψα «διαταγμένα ζεύγη».

Σκέφτομαι:

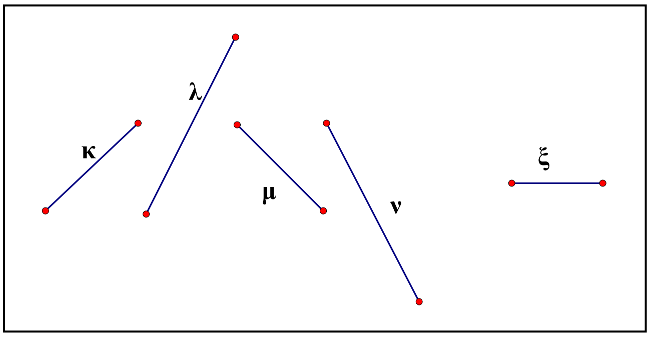
μια μονάδα οριζόντια και μετά πάνω ή κάτω ανάλογα με το πρόσημο, ή 0 για το ε.



Δ. Θαυμάσια, **διατεταγμένα** ζεύγη.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

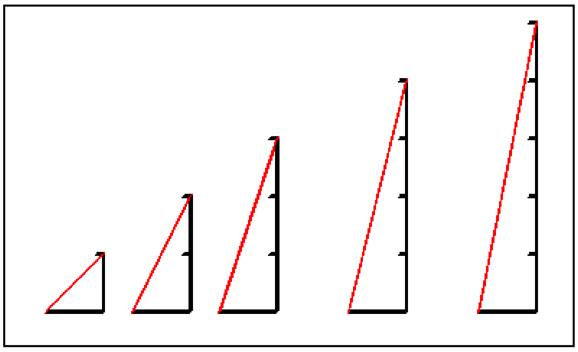
Δ. Να συγκρίνεις τις κλίσεις των τμημάτων κ, λ, μ, ν, ξ.



Μ. Βοήθεια;

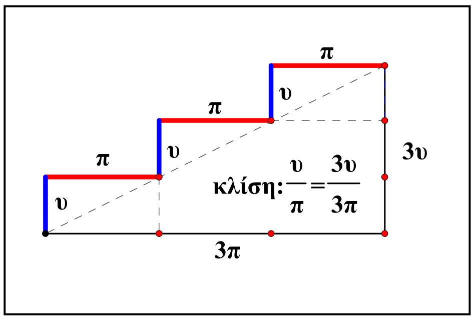
Δ. Βλέπω 0, «+», «-».

Μ. Το τμήμα ξ έχει κλίση 0, τα κ, λ ανεβαίνουν, θετική κλίση, τα μ, ν αρνητική, κατεβαίνουν, σύμφωνα πάντα με το «άνω-κάτω μηχάνημα». Το «λ» ανεβαίνει πιο απότομα από το «κ». Μέχρι τώρα, για τις κλίσεις: ξ < κ < λ. Έλυσα τα τρία πέμπτα. Στους αρνητικούς αυξημένη προσοχή, το «μ» κατεβαίνει πιο «ομαλά», τελικά, για τις κλίσεις : ν < μ < ξ < κ < λ.



Δ. Εξαιρετικά! Μπορείς να δεις τις κλίσεις των τμημάτων στην διπλανή εικόνα;

Μ. Δεν έχουμε πλέγμα, αλλά οι μετακινήσεις φαίνονται, κλίσεις 1,2,3,4,5, με την σειρά σχεδίασης, από αριστερά προς τα δεξιά. Πανεύκολο. Είναι σαν να βάζουμε μια σκάλα στον τοίχο!



Δ. Η κλίση μιας σκάλας είναι $\frac{υ}{π}$, «υ» είναι το ύψος του μετώπου κάθε σκαλοπατιού και «π» είναι το πλάτος του σκαλοπατιού.

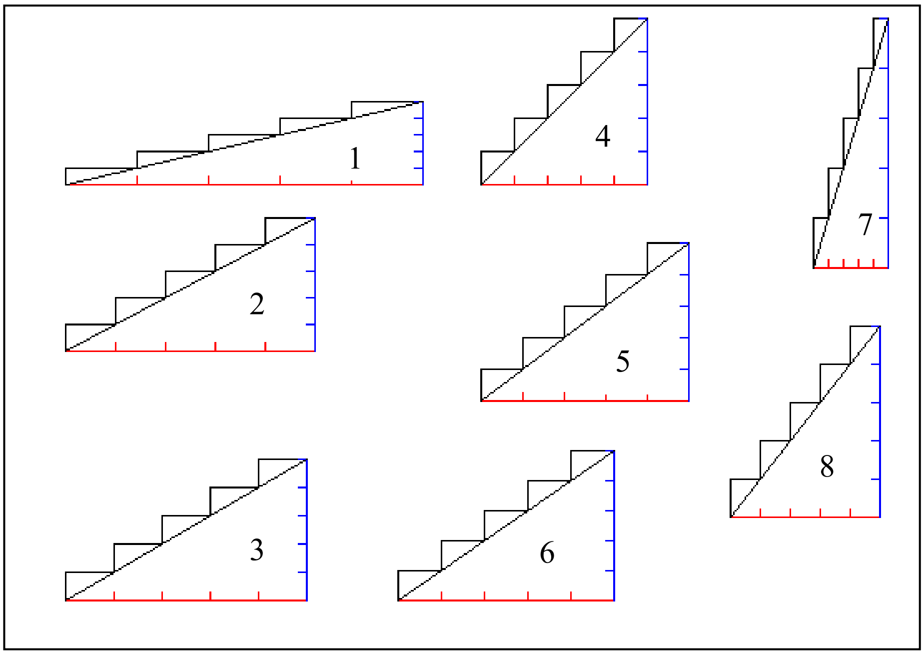
Οι μηχανικοί προτείνουν[9] κάποιες «ιδανικές» κλίσεις:

1- σκάλες κήπων: $\frac{10}{43}$, 2-θέατρα: $\frac{16}{30}$, 3-σχολεία: $\frac{17}{29}$,

4 -αποθήκες: $\frac{20}{20}$, 5-μονοκατοικίες: $\frac{19}{25}$, 6- κατοικίες: $\frac{18}{26}$,

7-βοηθητικοί χώροι : $\frac{30}{9}$, 8-πλοία: $\frac{23}{18}$.

Στο πλαίσιο είναι 5 σκαλοπάτια για κάθε σκάλα, οι μονάδες στους άξονες είναι ίδιες, ορθοκανονικό σύστημα: για την σκάλα «1», το ύψος κάθε σκαλοπατιού είναι 10 μονάδες, το πάτημα 43 μονάδες, για την σκάλα «2» ύψος 16, πάτημα 30...



Μ. Ας δούμε την σκάλα «1», σκάλες κήπων: $\frac{10}{43}$, να συνεχίσω;

Δ. Ποια είναι η απορία σου;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Οριζόντια μετακίνηση 43 μέτρα, ανεβαίνουμε 10μ., σωστά;

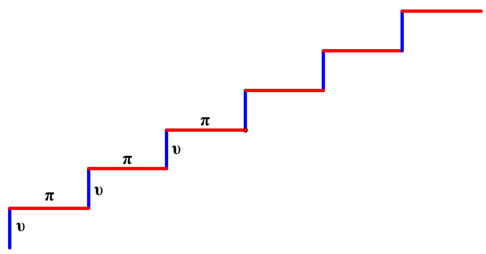
Δ. Σωστά.

Μ. Και που υπάρχει τέτοια σκάλα κήπου;

Δ. Η **κλίση** είναι $\frac{10}{43}$, ανάγωγο, παράδειγμα σκάλας με 5 σκαλοπάτια: σε 2,15μ ανεβαίνουμε 0,5μ, 215 εκατοστά οριζόντια, 50εκ.κατακόρυφα, $\frac{10}{43}=\frac{10\cdot 5}{43\cdot 5}=\frac{50}{215}$.

Κατασκευάζουμε σκάλα στον χώρο που διαθέτουμε.

Για κάθε είδος σκάλας μπορείς να σκεφτείς ότι υπάρχουν…άπειρα σκαλοπάτια και παίρνεις όσα χρειάζεσαι. Οι τιμές των «υ, π» τροποποιούνται κατάλληλα, καλό είναι να «γειτονεύουν» με τις ιδανικές.



Μπορείς να συγκρίνεις τα κλάσματα, δηλ. τις κλίσεις;

Μ. Πρέπει ομώνυμα, να πάρω την εργασία για τις διακοπές του Πάσχα, ή καλύτερα του καλοκαιριού;

Δ. Σύγκριση θέλουμε, αλλά αν επιμένεις για ομώνυμα, τότε σου κάνω δώρο την ανάλυση των παρονομαστών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

43: πρώτος, 29: πρώτος, 30=2*3*5, 26=2*13, 25=5^2, 20=2^2*5, 18=2*9, 9=3^2.

Μ. Are you kidding me? ΕΚΠ;

Δ. Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη.

Μ. Δωράκι;

Δ. ΕΚΠ(43,30,29,26,25,20,18,9) = 2^2*3^2*5^2*13*29*43, απλό.

Μ. Και πόσο κάνει;

Δ. Αριθμομηχανή, 9*13*29*43= 145899, επί 100, τελικό:14589900

Μ. Το 3^2 = 3*3= 9 καλά, αλλά βλέπεις κάποιο 100 στην παράσταση $2^2*3^2*5^2*13*29*43$;

Δ. $2^2*5^2 = 4*25 =100$

Μ. Διαιρέσεις, καπελάκια; Να πάω να πιω νερό;

Δ. Όχι. Μπορείς να αποφύγεις τις πολλές πράξεις. Δες τα σχήματα. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο «διαίρει και βασίλευε». Υπάρχει η μονάδα. Χώρισέ τα σε δύο ομάδες: τα μικρότερα και τα μεγαλύτερα της μονάδας.

Σύγκρινε μόνο τις περιπτώσεις που «δεν φαίνονται».

Μ. Καλά. Μονάδα είναι το $\frac{20}{20}$. Μεγαλύτερα της μονάδας τα $\frac{30}{9}, \frac{23}{18}$. Συγκρίνω αυτά, εύκολο, $1=\frac{20}{20}<\frac{23}{18}<\frac{30}{9}$, γιατί $\frac{30}{9}=\frac{60}{18}$.

Δ. Οπότε έμειναν τα μικρότερα της μονάδας: $\frac{18}{26}, \frac{10}{43}, \frac{16}{30}, \frac{19}{25}, \frac{17}{29}$

Μ. Λίγη βοήθεια;

Δ. Σύγκρινε τα κλάσματα με ίδιο αριθμητή.

Μ. Βάλε τα γυαλιά σου, δεν έχει κλάσματα με ίδιο αριθμητή.

Δ. Βλέπω τα $\frac{16}{30}, \frac{17}{29}$.

Μ. Καλά εντάξει, σε είδαμε χθες το βράδυ στο λιμάνι. Το κρασί επηρεάζει και την επόμενη μέρα.

Δ. Σκέψου το $\frac{17}{30}$.

Μ. Δεν υπάρχει $\frac{17}{30}$. Να πάω στο κυλικείο να σου φέρω καφεδάκι;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Δεν υπάρχει, δημιουργούμε. Είναι όπως οι θέσεις στάθμευσης. Όταν δεν βρίσκουμε, σταθμεύουμε στη γωνία του δρόμου, ή στο πεζοδρόμιο, ή στη στάση του λεωφορείου, ή μεταφέρουμε τους κάδους… .

Η επιστημονική εξέλιξη ήρθε από ιδέες που δεν υπήρχαν και τις δημιούργησε ο άνθρωπος.

Φανταζόμαστε λοιπόν το $\frac{17}{30}$, $\frac{16}{30}<\frac{17}{30}<\frac{17}{29}$. Τα $\frac{16}{30},\frac{17}{30}$ ομώνυμα, επομένως συγκρίνουμε τους αριθμητές. Για τα $\frac{17}{30},\frac{17}{29}$: γνωρίζουμε ότι από δυο κλάσματα με ίδιο αριθμητή μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μικρότερο παρονομαστή. Το $\frac{17}{30}$ δεν υπάρχει, δεν το χρειαζόμαστε άλλο, οπότε το επιστρέφουμε στην φαντασία μας, $\frac{16}{30}<\frac{17}{29}$.

Άλλος τρόπος για την ίδια σύγκριση;

Μ. Χρησιμοποιούμε το $\frac{16}{29}$, $\frac{16}{30}<\frac{16}{29}<\frac{17}{29}$, πετάμε το $\frac{16}{29}$.

Δ. Συνέχισε με την ίδια τεχνική για το $\frac{19}{25}$, σκέψου το $\frac{17}{25}$.

Μ. Εύκολο, $\frac{16}{30}<\frac{17}{29}...<\frac{17}{25}<\frac{19}{25}$, πετάμε το $\frac{17}{25}$, $\frac{16}{30}<\frac{17}{29}<\frac{19}{25}$.

Δ. Μπορείς να συγκρίνεις τα $\frac{19}{25},\frac{18}{26}$;

Μ. Παιχνίδι, $\frac{19}{25}>\frac{18}{25}>\frac{18}{26}$.

Δ. Σύνοψη για τα μικρότερα της μονάδας;

Μ. Έχουμε, $\frac{16}{30}<\frac{17}{29}<\frac{19}{25}$, $\frac{19}{25}>\frac{18}{26}$, τελικά, $\frac{16}{30}<\frac{17}{29}<\frac{19}{25}$

Problem με το $\frac{19}{25}$

Δ. Why?

Μ. Είναι μεγαλύτερο και από το $\frac{18}{26}$ και από το $\frac{17}{29}$.

Δ. Τότε don't worry. Σύγκρινε τα $\frac{17}{29}$, $\frac{18}{26}$.

Μ. Να κάνεις και μια σύγκριση εσύ, γιατί το μυαλό σου έμεινε 3000 δέκατα του δευτερολέπτου σε αδράνεια.

Δ. Εντάξει, $\frac{17}{29}<\frac{18}{26}$.

Μ. Γιατί;

Δ. Το $\frac{18}{26}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{17}{29}$ γιατί έχει μεγαλύτερο αριθμητή και μικρότερο παρονομαστή.

Μ. Και καλά μεγαλύτερο!

Δ. Είναι η προηγούμενη μέθοδος: $\frac{17}{29}<\frac{18}{29}<\frac{18}{26}$, πετάμε το $\frac{18}{29}$.

Προσπάθησε για το $\frac{10}{43}$.

Μ. Περίμενε λίγο, να συνέλθω… . Έμειναν τα $\frac{10}{43}$, $\frac{16}{30}$

$\frac{10}{43}<\frac{16}{43}<\frac{16}{30}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Τελικά $\frac{10}{43}<\frac{16}{30}<\frac{17}{29}<\frac{18}{26}<\frac{19}{25}<\frac{20}{20}<\frac{23}{18}<\frac{30}{9}$. Αν για τις κλίσεις γράψουμε σκ1 για την κλίση της σκάλας «1», σκ2, κλπ., τότε:

σκ1 < σκ2 < σκ3 < σκ6 < σκ5 < σκ4 < σκ8 <σκ7

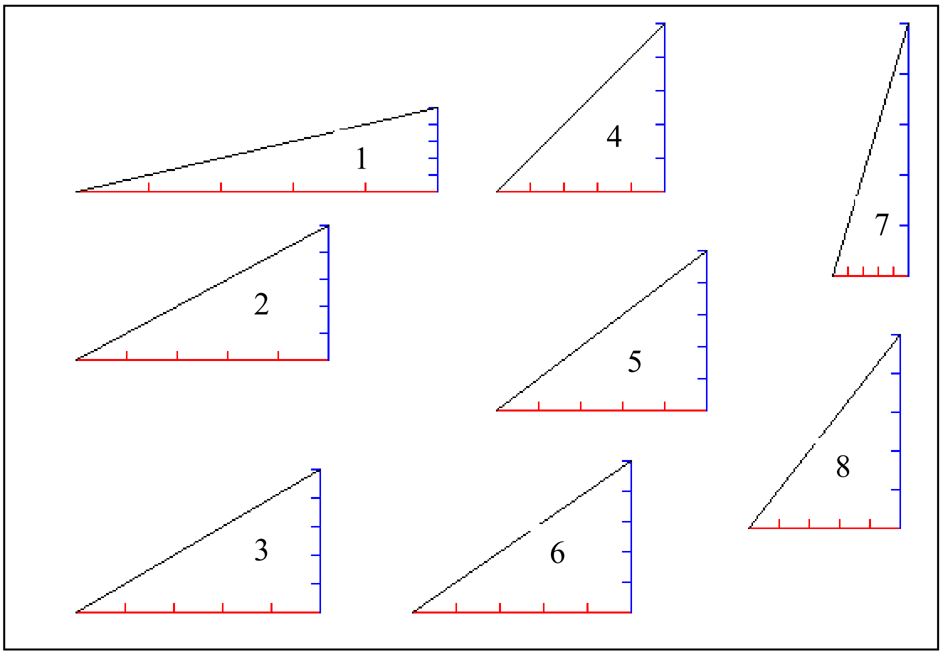
Είδαμε μια διαδικασία σύγκρισης, αρκετά κουραστική, αλλά αποφύγαμε να κάνουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα, που είναι μέθοδος εντελώς «τυπική» και οπωσδήποτε περισσότερο χρονοβόρα.

$$\frac{10}{43}=\frac{3393000}{14589900}<\frac{16}{30}=\frac{7781280}{14589900}<\frac{17}{29}=\frac{8552700}{14589900}\ldots\text{κλπ.}$$

Μ. Υπάρχει κάτι πιο σύντομο;

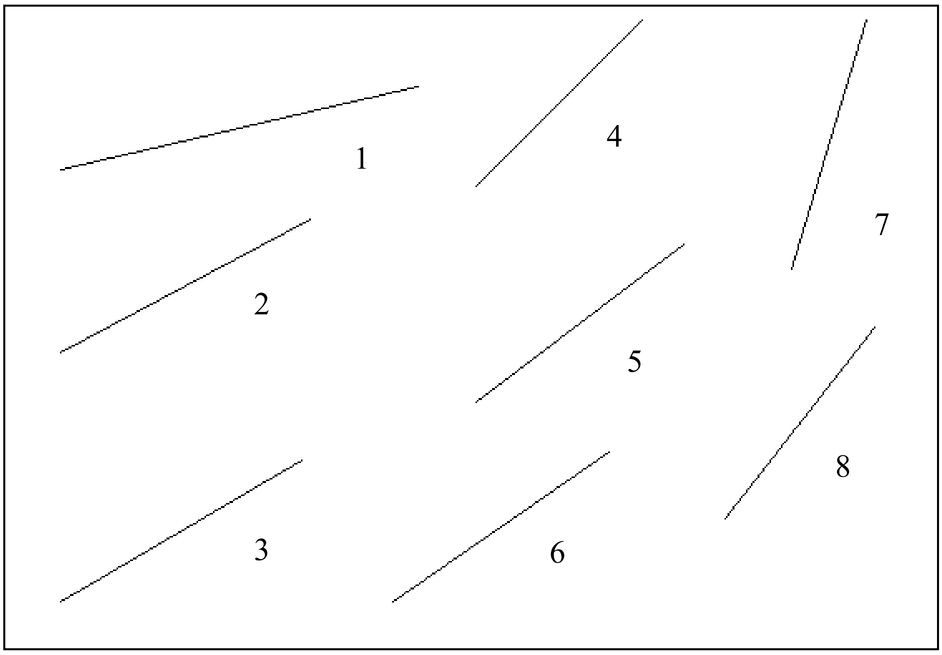
Δ. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τις εικόνες, «μια εικόνα ισοδυναμεί με χίλιες λέξεις», οκτώ εικόνες, αποφεύγουμε 8000 λέξεις!

Αφαιρούμε πρώτα τα σκαλοπάτια, μένουν τα «τρίγωνα κλίσης». Κάποιο κοινό χαρακτηριστικό;



Μ. Όλα ορθογώνια.

Δ. Μετά «αφαιρούμε» τα ορθογώνια τρίγωνα και μένει το πλαίσιο κειμένου με τα ευθύγραμμα τμήματα, για να αναπτύξουμε τη φαντασία μας!



Μπορείς να δεις το τμήμα με την μικρότερη και το τμήμα με την μεγαλύτερη κλίση;

Μ. Μικρότερη κλίση έχει το «1», μεγαλύτερη το «7». Μπορώ να δω ότι κλ1 < κλ4 < κλ7. Για τα υπόλοιπα;

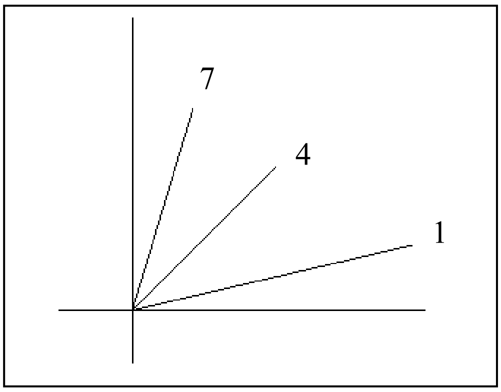
Είναι ανάμεσα στις κλ1 και κλ7, αλλά πως θα τα συγκρίνω; Μήπως κάναμε πολλές «αφαιρέσεις»; Να κάνουμε και καμιά πρόσθεση;

Δ. Γνωρίζουμε τις κλίσεις των ευθ.τμημάτων, γράφω (τμήμα, κλίση) : $\left(1,\frac{10}{43}\right),\left(2,\frac{16}{30}\right),\left(3,\frac{17}{29}\right),\left(6,\frac{18}{26}\right),\left(5,\frac{19}{25}\right),\left(4,\frac{20}{20}\right),\left(8,\frac{23}{18}\right),\left(7,\frac{30}{9}\right)$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

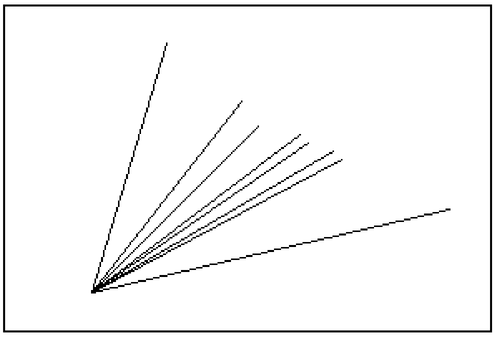
Μπορούμε να σχεδιάσουμε «αντίγραφα» των τμημάτων με κοινή αρχή, π.χ. την αρχή των αξόνων. Σχεδιάζουμε τα τμήματα «1», «4», «7».

Προσθέτουμε τους άξονες. Η διάταξη των κλίσεων είναι ξεκάθαρη;



Μ. Για τα τμήματα «1», «4», «7» είναι φανερή. Το πλέγμα;

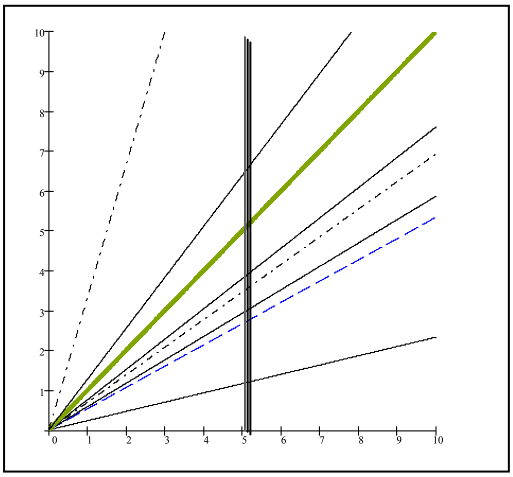
Δ. Το «αφαίρεσα». Οι κλίσεις των τμημάτων αυτών είναι θετικές. Μεγαλύτερη κλίση σημαίνει και μεγαλύτερη «απόκλιση» από την οριζόντια διεύθυνση, από την διεύθυνση του χ΄χ.



Μ. Μετά;

Δ. Συγκέντρωση στην αρχή όλων των τμημάτων.

Μ. Μήπως μπορείς να αναρτήσεις τις ετικέτες 1 έως 8, για να τα ξεχωρίζω;



Δ. Βεβαίως, σου κάνω δώρο και το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων! Για καλύτερη ορατότητα αλλάζω το μέγεθος της μονάδας και το λογισμικό.

Κάνω και τα κλάσματα ομώνυμα.

Μ. Ξέχασες την «ανάρτηση».

Ομώνυμα; Πότε έγινε αυτό;

Δ. Ομώνυμα με την $\chi = 5$.

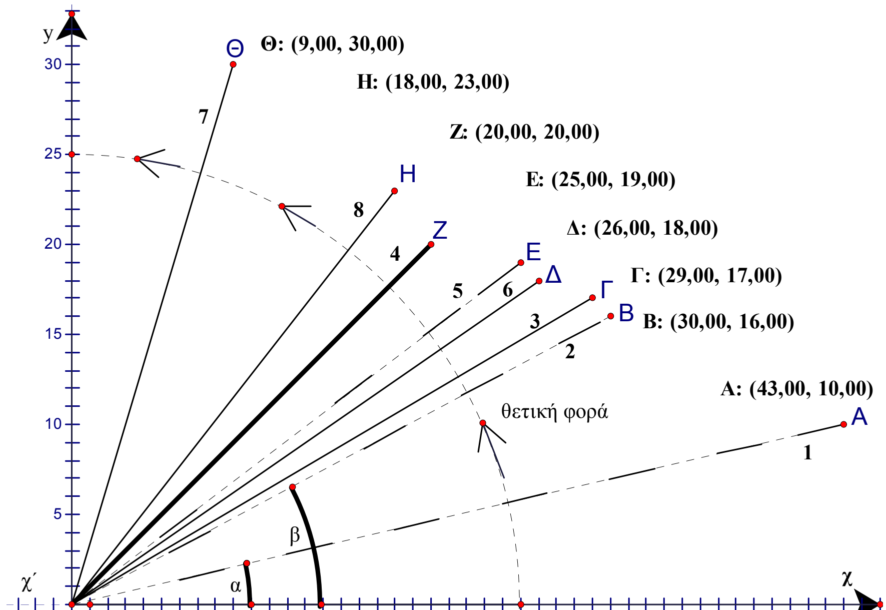
Οι οριζόντιες μετακινήσεις όλες 5 μονάδες. Η διάταξη των κλίσεων των τμημάτων είναι 1, 2, 3, 6, 5, 4, 8, 7. Βλέπουμε τον ημιάξονα Οχ, κίνηση κατά την θετική φορά περιστροφής. Η ανάρτηση στο παρακάτω σχέδιο.

Κάποια γεωμετρική έννοια που έχει σχέση με αυτό;

Μ. Γεωμετρική; Λίγη γεωμετρική βοήθεια;

Δ. **Γωνία**.

Μ. Ναι! Γωνία. Πως δεν το σκέφτηκα!



Δ. Έχω σχεδιάσει όλα τα τμήματα με αρχή το (0,0). Το δεξιότερο σημείο κάθε τμήματος έχει τις «ιδανικές» συντεταγμένες (π, υ) για κάθε είδος σκάλας, π.χ. για την σκάλα κήπων: Α(43,10) κλπ. Η γωνία $\chi\widehat{O}A = \hat{\alpha}$ είναι η «γωνία κλίσης» του ΟΑ, η γωνία $\hat{\beta}$ είναι η γωνία κλίσης του ΟΒ κλπ.

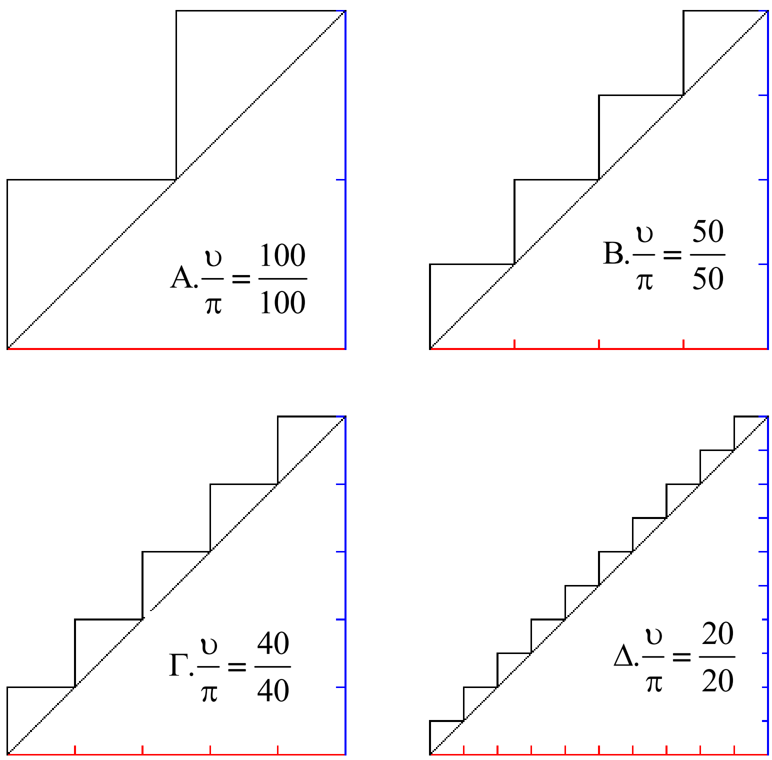
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Για λίγη ξεκούραση, να στρώσουμε υποθετική μοκέτα[10] σε υποθετική σκάλα;

Μ. Με τα πραγματικά προβλήματα υπάρχει πρόβλημα, με τα υποθετικά δεν πληρώνουμε, αν είναι λάθος το σβήνουμε. Ακούω το πρόβλημα!

Δ. Θέλουμε να αγοράσουμε μοκέτα για να στρώσουμε στις παρακάτω νοητικές σκάλες. Σε κάθε σκάλα φαίνονται η κλίση και ο αριθμός των σκαλοπατιών. Για ποια σκάλα θα χρειαστούμε μοκέτα μεγαλύτερου μήκους; Προσπάθησε να «διατάξεις» τα μήκη των μοκετών για τις σκάλες.

Ποιο θα είναι το συνολικό μήκος της μοκέτας για κάθε σκάλα;



Μ. Μεγαλύτερο μήκος για την σκάλα «Δ», μικρότερο για την «Α».

Και η διάταξη εύκολη, από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο μήκος μοκέτας: Α < Β < Γ < Δ.

Το συνολικό μήκος:

Για την σκάλα Α: 100+100+100+100 = 400,…τι μονάδα έχουμε;

Δ. Εκατοστό.

Μ. Για την Α, 400cm, δηλ. 4 μέτρα.

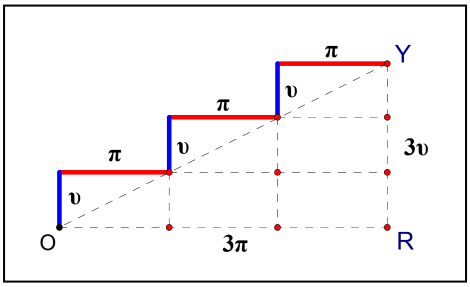
Για την σκάλα Β: 4*50 οριζόντια και 4*50 κατακόρυφα, 200+200=400, 4 μέτρα, μήπως κάτι δεν πάει καλά;

Για την Γ: 5*40 τα «ύψη» και 5*40 τα «πατήματα», ξανά 400cm, 4 μέτρα.

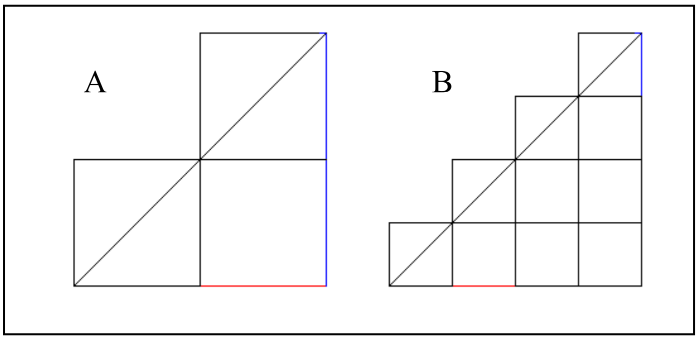
Για την Δ: 10*20 τα ύψη, 10*20 τα πατήματα, 4 μέτρα!

Είναι σωστά;

Δ. Πολύ σωστά.



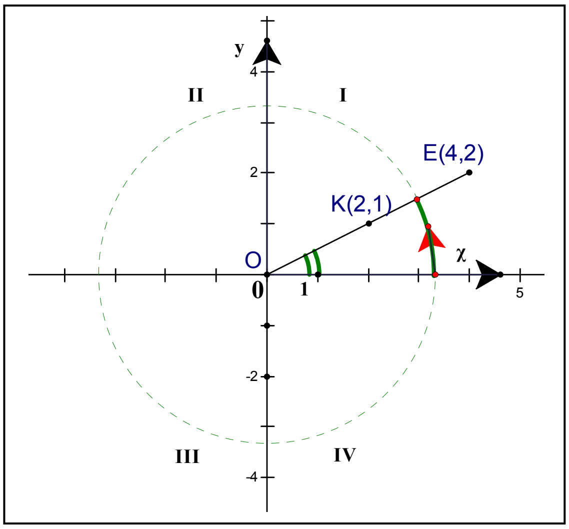
Το συνολικό μήκος των «πατημάτων» είναι η οριζόντια απόσταση, OR, το συνολικό μήκος των υψών των σκαλοπατιών μεταφέρεται στην κατακόρυφη απόσταση, RY. Το μήκος της μοκέτας δεν εξαρτάται από το πλήθος των σκαλοπατιών, αλλά από τις αποστάσεις OR και RY. Στο υποθετικό πρόβλημα, 2 μέτρα οριζόντια, 2 κατακόρυφα, επομένως 4m για κάθε σκάλα.

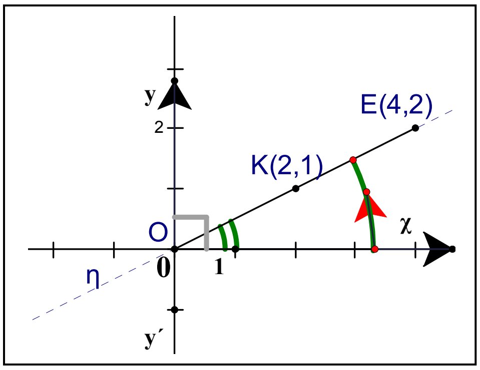


ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Κάποιες ακόμα διευκρινήσεις για την γωνία κλίσης;

Δ. Το τμήμα ΟΚ, ή το ΟΕ έχει κλίση $\frac{1}{2}$. **Γωνία κλίσης** είναι η **μικρότερη θετική** γωνία που σχηματίζει το τμήμα με τον θετικό ημιάξονα Οχ. Είναι η γωνία $\chi\hat{O}K$, που είναι ίδια με τη γωνία $\chi\hat{O}E$. Ίδια γωνία κλίσης έχει και η ευθεία «η», ευθεία που καθορίζεται από το τμήμα ΟΚ, η ευθεία που διέρχεται από την αρχή, από το σημείο(0,0), και ανεβαίνει 1 μονάδα για κάθε δυο μονάδες οριζόντιας μετατόπισης.





Μ. Θετική γωνία;

Δ. Η γωνία που σχηματίζεται ο θετικός ημιάξονας όταν περιστραφεί κατά τη **θετική φορά**, μέχρι να συναντήσει το τμήμα, ή την ευθεία.

Μ. Έχουμε και ευθείες χωρίς γωνίες κλίσης, τις κατακόρυφες.

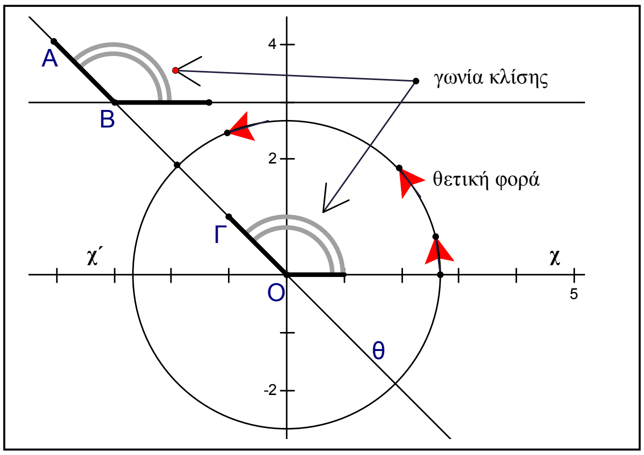
Δ. Οι **κατακόρυφες** είναι ευθείες **χωρίς κλίση**, η γωνία κλίσης είναι ορθή. Ο θετικός ημιάξονας Οχ σχηματίζει γωνία 90 μοιρών με τον y΄y. Γωνία κλίσης έχουμε για κάθε τμήμα ή ευθεία.

Μ. Αν το τμήμα «κατεβαίνει»; Αν είναι οριζόντιο;

Δ. Αν κατεβαίνει, τμήμα ή ευθεία, σχηματίζει γωνία κλίσης αμβλεία., π.χ. τα τμήματα ΑΒ, Γ0 και η ευθεία «θ». Αμβλείες γωνίες, αρνητικές κλίσεις.

Μ. Αν το τμήμα δεν «αρχίζει» από το σημείο (0,0);

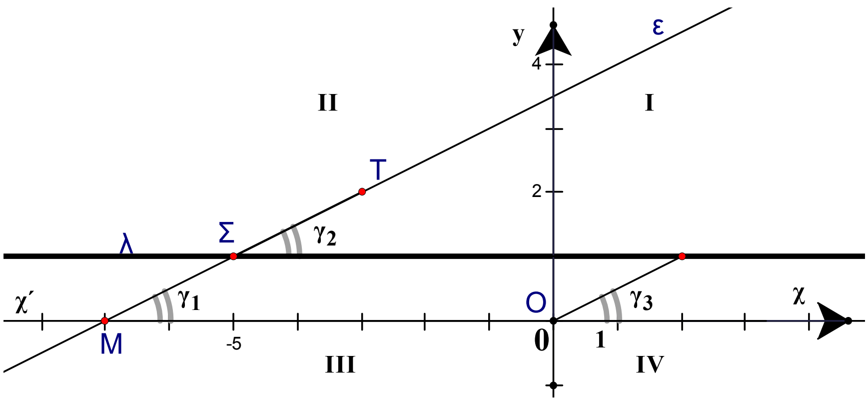
Δ. Διάφοροι τρόποι για τη γωνία κλίσης:



ι. Προεκτείνουμε το τμήμα ΣΤ μέχρι να «συναντήσει» τον χ΄χ, εδώ στο σημείο Μ. Γωνία κλίσης είναι η $\chi\hat{M}\Sigma$, η γ_1, είναι η γωνία που διαγράφει ο άξονας χ΄χ όταν στραφεί γύρω από το Μ κατά τη θετική φορά, μέχρι να «βρει» την ε, την ευθεία που καθορίζει το τμήμα ΣΤ. Παρατήρησε το παρακάτω σχήμα.

ιι. Σχεδιάζουμε τμήμα με κλίση 1/2 με αρχή την αρχή των αξόνων, οπότε βρίσκουμε την «γ_3».

ιιι. Μπορούμε να φέρουμε από το Σ την λ, ώστε λ//χ΄χ. Περιστρέφουμε την «λ» γύρω από το Σ, θετική φορά πειστροφής, βρίσκουμε την γωνία γ_2.



Η «οριζόντια» ευθεία λ, δεν τέμνει τον χ΄χ, όσο και να προεκταθεί. Είναι ευθεία με γωνία κλίσης μηδέν μοιρών και κλίση μηδέν.

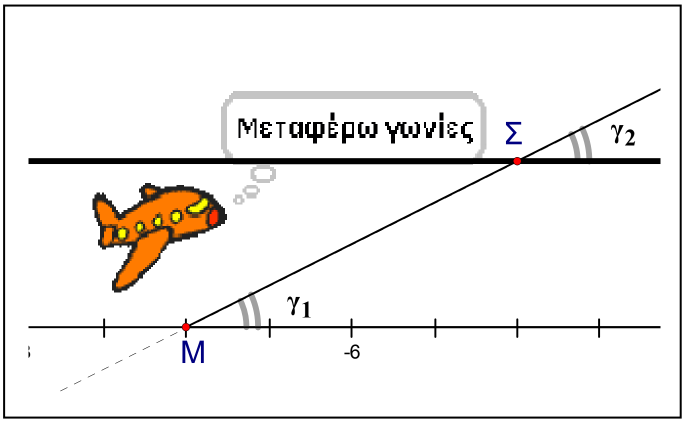
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Οι γωνίες γ_1 και γ_2 είναι ίσες;

Δ. Ίσες, «γραφείο μεταφοράς» γωνιών.

Μ. Τι;

Δ. Γραμμές παράλληλες, χ΄χ // λ, οι παράλληλες



μεταφέρουν[11] γωνίες σε άλλες θέσεις. Μεγάλωσα λίγο το σχέδιο.

Μ. Ναι! Παράλληλες! Τελικά, δεν είμαι καλός στα μαθηματικά.

Σύμβολα, παράλληλες, γωνίες!

Δ. Είσαι πολύ καλός και με λίγη προσπάθεια και εξάσκηση ακόμα μπορείς να γίνεις άριστος. Οι, κατά γενική ομολογία, εξελιγμένοι Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούσαν σε έκταση γωνίες, αλλά πουθενά δεν αναφέρεται η έννοια, η λέξη «γωνία[12]».

Ο όρος βρίσκεται για πρώτη φορά στους αρχαίους Έλληνες.

Οπωσδήποτε **οι έννοιες** δεν είναι απλές.

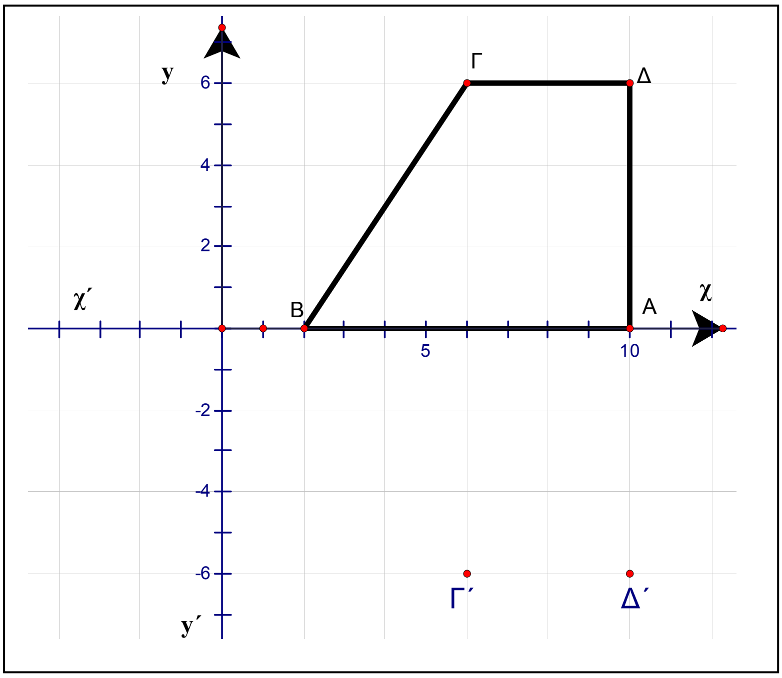
Η διαμόρφωση μιας έννοιας είναι το πιο δύσκολο πράγμα στα μαθηματικά και όχι μόνο[13]. Είναι η συσσωρευμένη εμπειρία και η συμπυκνωμένη ιστορία της, το σημείο κατάληξης μιας μακρόχρονης και εξαντλητικής διανοητικής πορείας προς τον ακριβή προσδιορισμό της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι το «μισό» ενός πενταγώνου που έχει άξονα συμμετρίας τον χ΄χ. Μπορείς να ολοκληρώσεις το σχέδιο; Τι πολύγωνο θα προκύψει; Θα είναι κυρτό; Βρες τις συντεταγμένες των συμμετρικών των σημείων Γ(6,6) και Δ(10,6) ως προς τον άξονα χ΄χ. Υπολόγισε την κλίση του ΒΓ και την κλίση του συμμετρικού του ΒΓ ως προς τον χ΄χ, του ΒΓ΄.



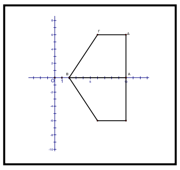
Μ. Για το Δ΄: ο άξονας χ΄χ πρέπει να είναι μεσοκάθετος στο τμήμα ΔΔ΄, επομένως το συμμετρικό του Δ, Δ΄ θα είναι το (10,-6). Ίδια σκέψη για το συμμετρικό του Γ, θα είναι το σημείο Γ΄(6,-6).

Τα σημεία Α και Β βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας, δεν μετακινούνται.

Προκύπτει κυρτό πεντάγωνο.

Δ. Για τις κλίσεις;

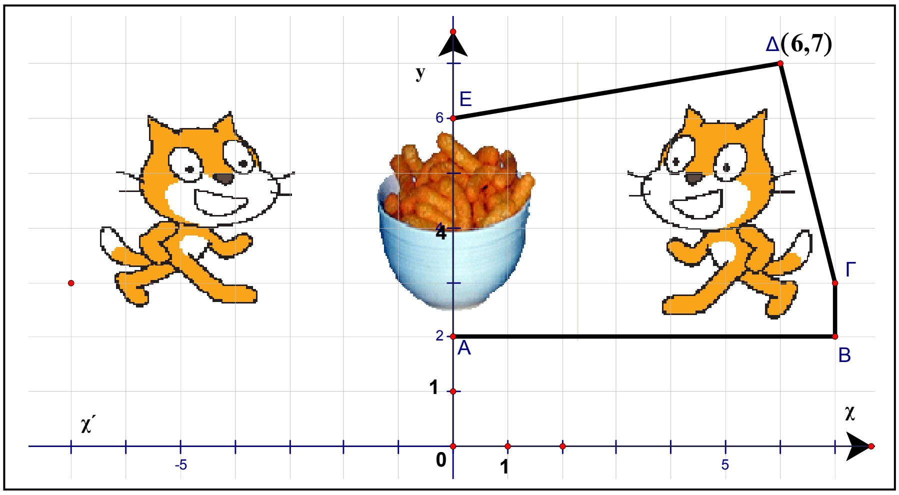
Μ. Πολύ εύκολο, κλίση του ΒΓ, τη βλέπω στο σχέδιο, 4 οριζόντια, ανεβαίνω 6 μονάδες, 6/4, για το ΒΓ΄, 4 οριζόντια, κατεβαίνω 6 μονάδες, $\frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$, θα ολοκληρώσω το σχέδιο στο σπίτι.



Δ. Το παρακάτω πεντάγωνο είναι το «μισό» από ένα μη κυρτό επτάγωνο που έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Μπορείς να ολοκληρώσεις το σχέδιο[1];

Βρες τις συντεταγμένες του Δ΄, του συμμετρικού του Δ ως προς τον y΄y.

Υπολόγισε την κλίση του ΕΔ και την κλίση του ΕΔ΄.



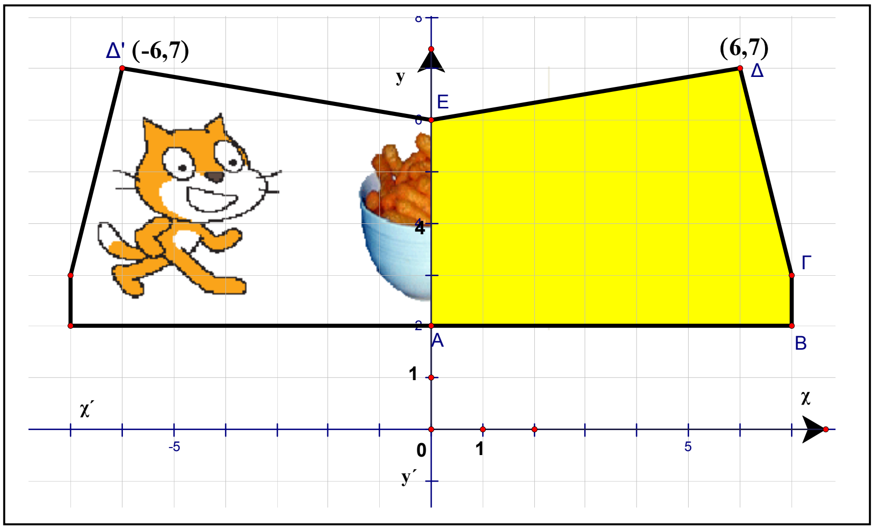
Μ. Κλίση του ΕΔ, φαίνεται, $\frac{1}{6}$, αλλά ας ακολουθήσω τυπική διαδικασία:

Ε(0,6), Δ(6,7): Συμπληρώνω πρώτα τις συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται «δεξιότερα»:

τετμημένη στον παρονομαστή, τεταγμένη στον αριθμητή,

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{7-\ldots}{6-\ldots} =, \qquad \frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{7-6}{6-0} = \frac{1}{6}.$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Κλίση του Δ΄Ε, το Δ΄ θα είναι το σημείο (-6,7), Ε(0,6):

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}}=\frac{6-...}{0-...},\ \frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}}=\frac{6-7}{0-6}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6},$$

πλην δια πλην = «+» , αυτοματισμός, σωστός;

Τι; Δεν σε βλέπω ενθουσιασμένο!

Δ. Κάτι δεν πάει καλά. Και στα δυο τμήματα βρήκες την ίδια κλίση.

Δες το Δ΄Ε, ανεβαίνει ή κατεβαίνει; Θετική ή αρνητική κλίση;

Μ. Κλίση 1/6 βρήκα, σύμφωνα με τον αριθμό θα έπρεπε να ανεβαίνει, στο σχήμα κατεβαίνει, γάτες, γαριδάκια, χρησιμοποιείς ακεραίους για να προσανατολίσεις την σκέψη μου στις ιδέες, να μην δαπανώ πολύτιμη φαιά ουσία για ανιαρούς υπολογισμούς, αλλά η σκέψη μου από τις εικόνες οδηγήθηκε στον Βίκτωρα.

Δ. Φίλος;

Μ. Ο καλύτερος, ο αγαπημένος μου σκύλος. Σκέφτηκα ότι η γάτα θα πρέπει να ρίξει πολύ ιδρώτα για να του ξεφύγει, και θα μας μείνουνε και τα γαριδάκια.

Δ. Οι γάτες δεν ιδρώνουν, ούτε ο Βίκτωρας, δεν το έχεις παρατηρήσει;

Μ. Το πρόσεξα στον Βίκτωρα, όταν ζητά να βγούμε για τρέξιμο. Εγώ γίνομαι μούσκεμα, αυτός τίποτα! Εξηγείται;

Δ. Σαρκοφάγο, δεν έχει ιδρωτοποιούς αδένες.

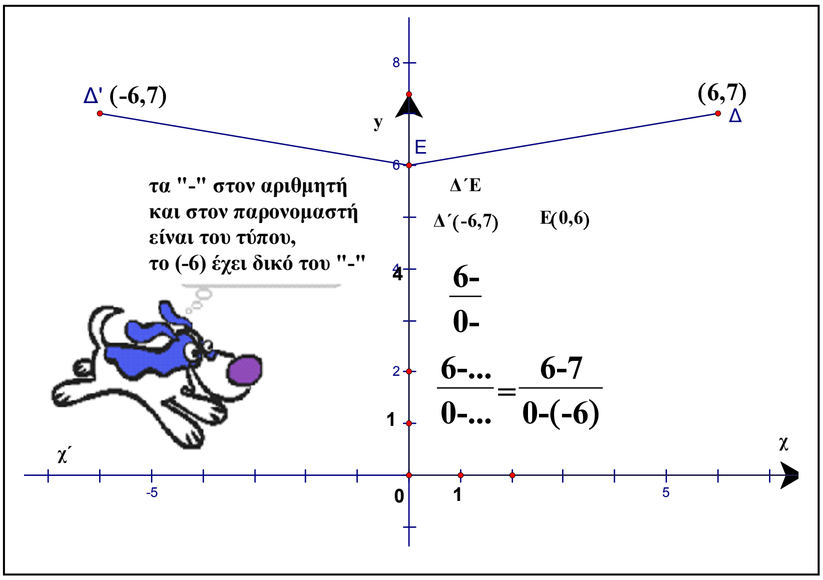
Πως σου ζητά το τρέξιμο ο Βίκτωρας;

Μ. Διαβάζω τη σκέψη του. Ο άνθρωπος ιδρώνει. Φυτοφάγο;

Δ. Απορίες στην κ. Ελπίδα, την βιολόγο, να σου γνωρίσει τον κ. Δαρβίνο, η θεωρία του για την εξέλιξη μέσω της φυσικής επιλογής, «η καταγωγή των ειδών», θα σου αρέσει, δεν περιέχει ούτε μία εξίσωση[2]. Που νομίζεις ότι βρίσκεται το πρόβλημα, στο σχήμα ή στους υπολογισμούς;

Μ. Πιστεύω ότι καλά σχεδίασα το συμμετρικό. Ας δούμε την κλίση.

Δ. Διάβασε την σκέψη[3] του Βίκτωρα.



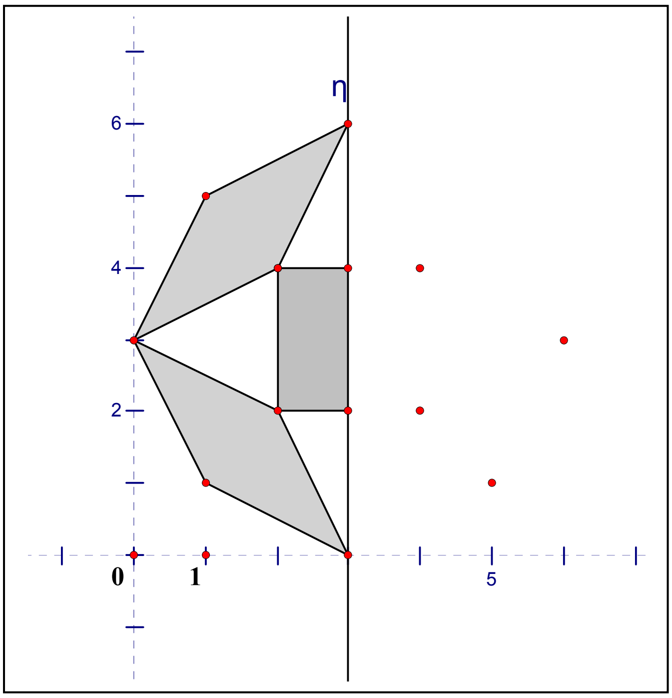
Μ. Α! ναι!, πως δεν το πρόσεξα!

$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{6-7}{0-(-6)} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$, κλίση αρνητική.

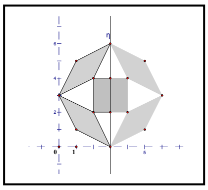
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Το τμήμα Δ΄Ε κατεβαίνει, κλίση συμβατή με το σχήμα. Και στα δύο τμήματα η οριζόντια μετατόπιση είναι 6 μονάδες, για το ΕΔ, ανεβαίνω 1, για το Δ΄ Ε κατεβαίνω 1 μονάδα, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$, αντίθετοι αριθμοί.

Δ. Η ευθεία «η» είναι άξονας συμμετρίας του «γκρι» σχήματος.



Ολοκλήρωσε το σχέδιο.
Υπάρχουν βοηθητικά σημεία.
Μ. Εύκολο.
Θα κάνω την εργασία στο σπίτι.

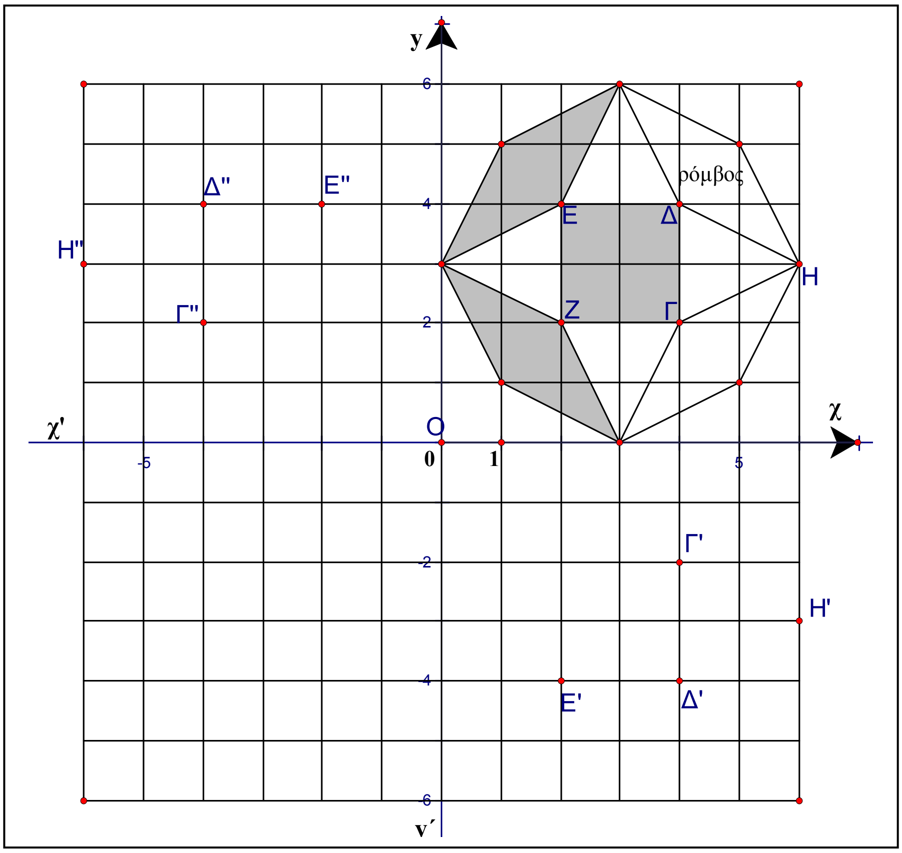


Δ. Στο σχήμα της διπλανής σελίδας, βρες τις συντεταγμένες των σημείων Γ, Δ, Ε, Ζ, Η. Υπολόγισε την κλίση των τμημάτων ΕΔ, ΓΔ, ΓΗ, ΔΗ. Σχεδίασε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Υπολόγισε τις κλίσεις των συμμετρικών των τμημάτων ΕΔ,ΓΔ, ΓΗ και ΔΗ ως προς τον χ΄χ, σημεία με τόνους, και ως προς τον y΄y, σημεία με δυο τόνους.

Ο Ρόμβος έχει ίσες πλευρές.

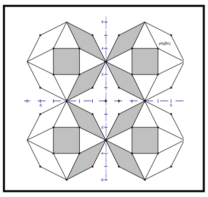
Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει 4 ορθές γωνίες.

Το τετράγωνο ΓΔΕΖ έχει ίσες πλευρές και ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο και ρόμβος ταυτόχρονα, δυο σε ένα.



Μ. Κλίσεις: ΕΔ:0, ΓΔ: χωρίς κλίση, ΓΗ: $\frac{1}{2}$, ΔΗ: $-\frac{1}{2}$

Συμμετρία ως προς χ΄χ, τα «δεξιά- αριστερά» σημεία ίδια: Ε΄Δ΄:0, Γ΄Δ΄: χωρίς κλίση, Γ΄Η΄: $-\frac{1}{2}$, Δ΄Η΄: $\frac{1}{2}$.



Ως προς y΄y, τα «δεξιά – αριστερά» άκρα των τμημάτων εναλλάσσονται, Δ΄΄ Ε΄΄: 0, Γ΄΄Δ΄΄: χωρίς κλίση, Η΄΄ Γ΄΄: $-\frac{1}{2}$, Η΄΄ Δ΄΄: $\frac{1}{2}$.

Στην απάντηση βλέπω και ένα αντίγραφο του αρχικού στο 3^{ο} τεταρτημόριο.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μήπως ξέχασες κάποια ερώτηση;

Δ. Ναι! Καλά που το παρατήρησες! Μια συμμετρία ακόμα, ως προς την αρχή των αξόνων, ως προς το σημείο (0,0).

Μ. Περιστροφή γύρω από το Ο κατά 180 μοίρες.

Δ. Σχεδίασε λοιπόν και το συμμετρικό του σχήματος ως προς το σημείο Ο. Υπολόγισε τις κλίσεις των συμμετρικών των τμημάτων ΕΔ, ΓΔ, ΓΗ, ΔΗ, ως προς το σημείο Ο.

Μ. *Οχ! Τι ήθελα να το αναφέρω. Και μου είπε ο παππούς: πολλά μπορώ να καταφέρω μιλώντας, αλλά τα περισσότερα θα τα καταφέρω σιωπώντας. Στα νιάτα του ήταν και γιόγκι, μάθημα 1^o: αυτοσυγκέντρωση και σιωπή.*

Δ. Με ποιόν μιλάς πάλι;

Μ. Τίποτα, ετοιμάζω τα εργαλεία. Θα πρέπει να ενώσω το Ο με το Ε, μετά κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΕ, αντικείμενη ημιευθεία της ΟΕ, τέμνει τον κύκλο στο… Πως θα ονομάσω τα συμμετρικά ως προς το (0,0);

Δ. Με **τρεις** τόνους.

Μ. Θα μου τελειώσουν και οι τόνοι. Πέντε σχήματα, 4 ρόμβοι και το τετράγωνο, επί τέσσερα, 20 σημεία, χρειάζομαι 20 κύκλους και 60 τόνους!

Δ. Κύκλοι 12, τόνοι 36.

Μ. Γιατί;

Δ. Οι κορυφές των τετραγώνων, είναι κορυφές και κάποιου από τους 4 ρόμβους, 20-4 =16 κύκλοι, αλλά και οι ρόμβοι ανά δυο έχουν ένα σημείο κοινό, επομένως 4 κύκλοι μετρώνται δυο φορές, 16-4=12. Θέλουμε 12 συμμετρικά σημεία, επί 3, 36 τόνοι.

Μ. Σίγουρα υπάρχει κάτι ποιο γρήγορο.

Δ. Αφόρμηση;

Μ. Τι;

Δ. Τι σε οδήγησε να το σκεφτείς;

Μ. Παρατήρησα ότι συνηθίζεις να με ταλαιπωρείς, αλλά τελικά μου δείχνεις έναν πιο σύντομο δρόμο.

Δ. Η συντόμευση έχει μια διαφορετική μέθοδο σκέψης, another point of view στη γλώσσα μας. Χρειάζεται να κατανοήσεις πρώτα πολύ καλά τον «μακρύ» δρόμο και μετά αναζητάς συντομεύσεις.

Μ. Εδώ;

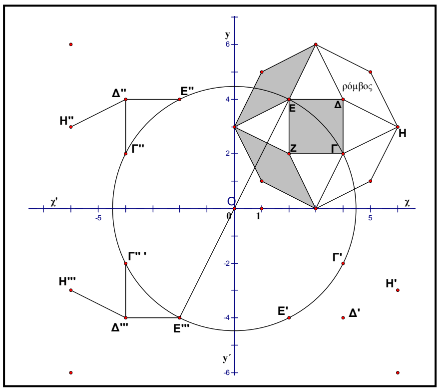
Δ. Βρίσκεις το συμμετρικό ως προς τον y΄y , γράμματα με 2 τόνους, και μετά το **συμμετρικό του συμμετρικού**, ως προς τον χ΄χ. Το τελικό αποτέλεσμα, το συμμετρικό του σχήματος ως προς δυο κάθετους άξονες, είναι το ζητούμενο, συμμετρία ως προς το σημείο τομής των αξόνων.

Μ. Οι κλίσεις;

Δ. Η συμμετρία ως προς τον y΄y δίνει κλίση τον αντίθετο αριθμό π.χ. για τα ΓΗ: $\frac{1}{2}$, ΔΗ: $-\frac{1}{2}$, έχουμε, Η΄΄ Γ΄΄: $-\frac{1}{2}$, Η΄΄ Δ΄΄: $\frac{1}{2}$. Ως προς τον χ΄χ και πάλι αντίθετο. Ο **αντίθετος του αντιθέτου** είναι ο αρχικός αριθμός.

Οι κλίσεις ίδιες με των αρχικών: Δ΄΄΄Ε΄΄΄: 0, Γ΄΄΄Δ΄΄΄: χωρίς κλίση,

Η΄΄΄ Γ΄΄΄: $\frac{1}{2}$, Η΄΄΄ Δ΄΄΄: $-\frac{1}{2}$



Μ. Εξηγήσεις;

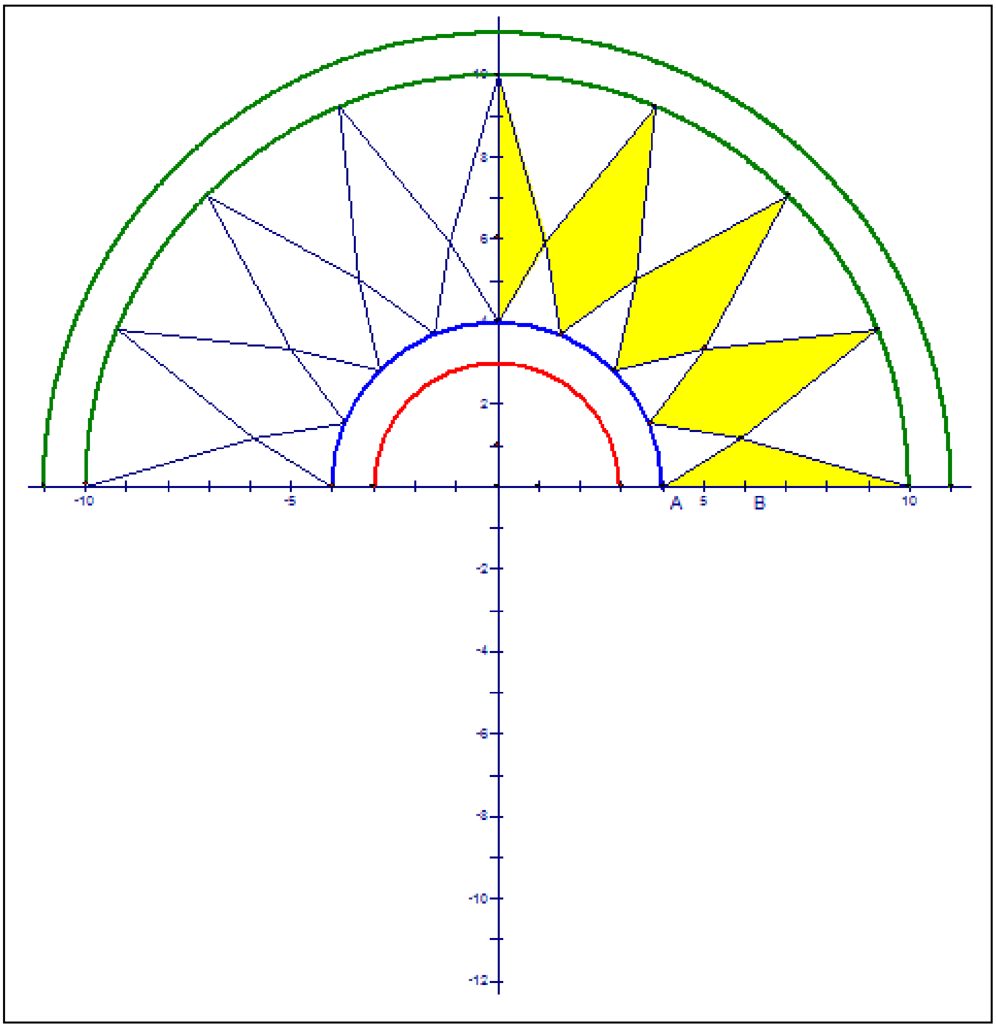
Δ. Σπόρος.

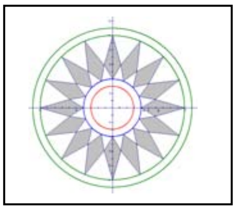
Μ. Τι σπόρος;

Δ. Μακροπρόθεσμος. Θα φυτρώσει και θα κατανοηθεί μελλοντικά, πιθανόν και χωρίς εξηγήσεις από τον δάσκαλο! Μια μικρή βοήθεια το…μικρό σχήμα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Το παρακάτω σχήμα[4] έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Σχεδίασε το συμμετρικό του ως προς τον χ΄χ. Προαιρετικά.

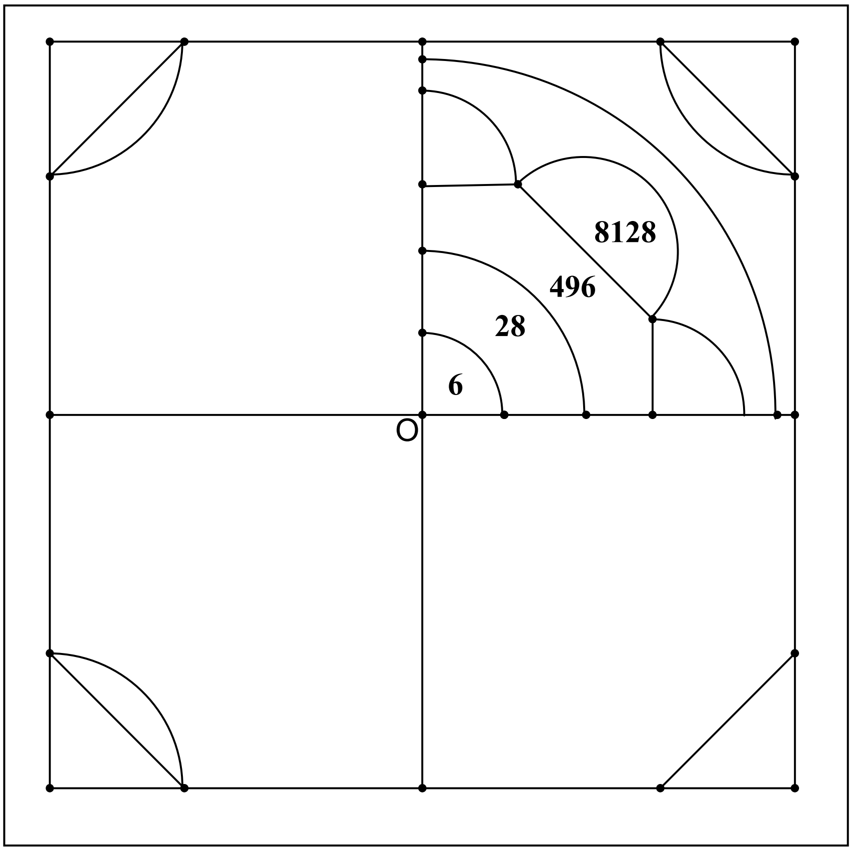


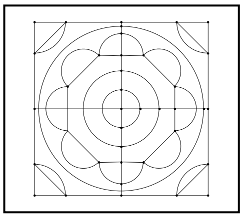


Μ. Άσκηση θέλησης για το σπίτι;

Δ. Ναι. Καθημερινά θα πρέπει να κάνεις και κάτι που δεν είσαι υποχρεωμένος. Εξασκείς τον ανθρωπισμό σου. Αλλά θα πρέπει να ετοιμάζεις και τις υποχρεωτικές ασκήσεις.

Δες την παρακάτω: Ολοκλήρωσε την κατασκευή των συμμετρικών ως προς του άξονες και ως προς το σημείο Ο στο παρακάτω σχέδιο.





Θα έχεις ένα τέλειο πλακάκι κουζίνας[5] :

Μ. Οι αριθμοί;

Δ. Τέλειοι, όπως και το πλακάκι.

Μ. Τέλειοι; Τι είναι πάλι αυτό; Και γιατί δεν τους έγραψες με τη σειρά;

Δ. Με τη σειρά είναι. Σπάνιοι. Όπως οι τέλειοι άνθρωποι. **Τέλειος** είναι ο φυσικός αριθμός που είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του, δηλ. των διαιρετών που είναι μικρότεροί του. Διαιρέτες του 6;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Διαιρέτες του 6, εύκολο, 1, 2, 3, 6. Μικρότεροι του 6 είναι οι 1,2,3. Άθροισμα 1+2+3 = 6!

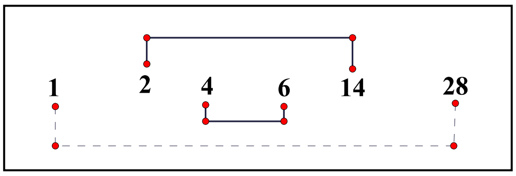
Δ. Για τον 10, διαιρέτες: 1,2,5,10. Άθροισμα γνήσιων: 1+2+5=8, ο 10 δεν είναι τέλειος. Παρατήρησε ότι αν βρεις έναν διαιρέτη, π.χ. τον 2, παίρνεις δώρο και έναν ακόμα, το πηλίκο της διαίρεσης 10:2, τον 5. Ένα συν ένα δώρο. Το γινόμενο 2*5 = 10, σου δίνει ένα ζεύγος διαιρετών, (2,5), λέγονται **συζυγείς διαιρέτες** του 10.

Διαιρέτες του 28;

Μ. Του 28, τους γράφω ζευγάρια, (1,28), (2, 14), (4, 7). Άθροισμα των διαιρετών που είναι μικρότεροι του 28: 1+2+4+7+14= 28, ο 28 τέλειος!

Δ. Κάθε ζευγάρι συζυγών διαιρετών περιέχεται στο προηγούμενο.

Μ. Διευκρίνιση;



Δ. Ο 2 είναι διαιρέτης του 28. Συζυγής ο 14. Αν υπάρχουν άλλοι διαιρέτες είναι ανάμεσα στο ζεύγος (2,14). Βρίσκουμε τον 4 και τον συζυγή του, τον 6. Ανάμεσα στους 4 και 6 είναι ο 5, που δεν διαιρεί τον 28. Τελειώσαμε, τους βρήκαμε όλους. Δοκίμασε για τον επόμενο τέλειο, τον 496.

Μ. Και καλά συζυγείς! Για να δούμε, (1,496), αυτό απλό, (2, 248), 248 είναι το μισό του 496, ο 3; εξετάσεις 4+9+6=19, ο 3 δεν «περνά», δεν διαιρεί τον 19, επομένως ούτε και τον 496, ο 4 διαιρεί τις εκατοντάδες, τον 500, 496…, λείπουν ακριβώς 4, κάνω τη διαίρεση 496:4=124, ζεύγος συζυγών (4,124), συνεχίζω,

…κάτι βλέπει στο βιβλίο, βγάζω κομπιουτεράκι, πράξεις…, 8…πηλίκο 496:8=62, ζεύγος (8,62), συνεχίζω…,(16,31)…τέλος!

Δ. Τι γίνεται;

Μ. Έτοιμος! 1,2,4,8,16,31,62,124,248,496. Πρόσθεση των γνήσιων: 1+2+4+8+16+31+62+124+248=496! Πράγματι! Ο επόμενος τέλειος είναι ο 8128; Και μετά;

Δ. Τέλειος με 8 ψηφία, ο 33550336, ανακαλύφθηκε τον 15^{o} αιώνα μ.Χ., επόμενος 10 ψηφία, ο 8589869056, γύρω στο 1600 από τον Pietro Cataldi. Η έρευνα συνεχίζεται[6]. Μερικά παραδείγματα: το 1772 ο Euler ανακοίνωσε άρτιο τέλειο με 19 ψηφία, το 1961 ο Hurwitz με 2663 ψηφία, το 1999 οι Hajratwala-Woltman-Kurowski ανακοίνωσαν τέλειο με 4197919 ψηφία.

Μ. Τους προηγούμενους τέλειους ποιος τους βρήκε;

Δ. Γνωστοί στους αρχαίους, π.Χ. Η πρόταση 36 του $9^{ου}$ βιβλίου του Ευκλείδη χαρακτηρίζει και κατασκευάζει τους άρτιους τέλειους. Οι 6, 28, 496, 8128, 33550336, όπως και οι υπόλοιποι τέλειοι που έχουν βρεθεί μέχρι σήμερα είναι όλοι άρτιοι. Οι Μαθηματικοί δεν κατάφεραν να αποδείξουν ακόμα ότι δεν υπάρχουν περιττοί τέλειοι.

Άλυτο πρόβλημα!

Μ. Άλυτο; Δεν το κατάφεραν οι Μαθηματικοί; Και ποιος θα το λύσει;

Δ. Ίσως εσύ ή κάποιος άλλος στο παρόν ή στο μέλλον. Τα άλυτα προβλήματα είναι η πηγή παραγωγής νέων ιδεών και εξέλιξης στην επιστήμη των μαθηματικών.

Μ. Υπάρχει και άλλο άλυτο πρόβλημα;

Δ. Πολλά. Π.χ. είναι προς το παρόν αναπόδεικτο ότι υπάρχουν άπειροι δίδυμοι πρώτοι.

Μ. Δίδυμοι;

Δ. Δίδυμοι είναι οι πρώτοι που διαφέρουν κατά 2, π.χ. οι 17 και 19 είναι δίδυμοι πρώτοι, όπως και οι 41 και 43.

Μ. Πόσοι πρώτοι υπάρχουν;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Άπειροι, η απόδειξη δόθηκε πριν από 23 περίπου αιώνες. Είναι η πρόταση 20 του 9^{ου} βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Μ. Πόσα βιβλία έγραψε ο Ευκλείδης;

Δ. Δεκατρία, γύρω στο 300 π.Χ. Τα 7^{ο}, 8^{ο} και 9^{ο} είναι βιβλία «αριθμητικής» κατά τους αρχαίους, «θεωρίας αριθμών» στη σύγχρονη ορολογία. Τα υπόλοιπα διαπραγματεύονται γεωμετρικά θέματα.

Θα «κατασκευάσεις» το πλακάκι στο σπίτι; Τρία συμμετρικά του σχεδίου που είναι στο πρώτο τεταρτημόριο.

Μ. Με ότι μέθοδο θέλω;

Δ. Ναι.

Μ. Δεν θα υπάρξουν επιπτώσεις;

Δ. Τι επιπτώσεις;

Μ. Τιμωρίες και πολλές ασκήσεις.

Δ. Όχι. Τι σκέφτεσαι;

Μ. Τον παππού. Θα τον στείλω να φωτοτυπήσει το φύλλο εργασίας, 3 φωτοτυπίες, και…αποκοπή επικόλληση, copy-paste, κάπως θα ταιριάζουν, τα συμμετρικά είναι ίσα σχήματα.

Δ. Πιθανόν να χρειαστεί κάποια περιστροφή. Ποια σχήματα είναι ίσα;

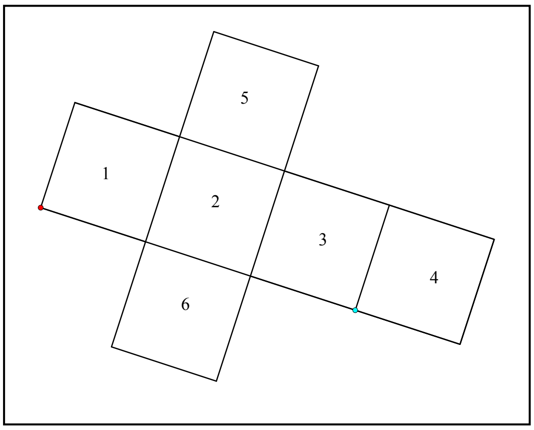
Μ. Ίσα είναι αυτά που συμπίπτουν, όταν τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο με κατάλληλο τρόπο. Έχουμε ίσα και εκτός συμμετρίας;

Δ. Ισχύει αυτό που είπες, αν συμπίπτουν είναι ίσα. Για παράδειγμα, μπορείς να σκεφτείς πότε δυο τετράγωνα είναι ίσα; Τι χαρακτηρίζει ένα τετράγωνο;

Μ. Το μήκος της πλευράς. Βέβαια έχει 4 πλευρές, αλλά όλες ίσες. Οι γωνίες ορθές. Αν λοιπόν τα τετράγωνα κατασκευάζονται με το ίδιο μήκος πλευράς, τότε οπωσδήποτε εφαρμόζουν, είναι ίσα.

Δ. Στο σχήμα της διπλανής σελίδας έχουμε 6 ίσα τετράγωνα.

Είναι οι 6 έδρες που αποτελούν το «τυπικό» ανάπτυγμα ενός γνωστού σου στερεού. Ποιού;

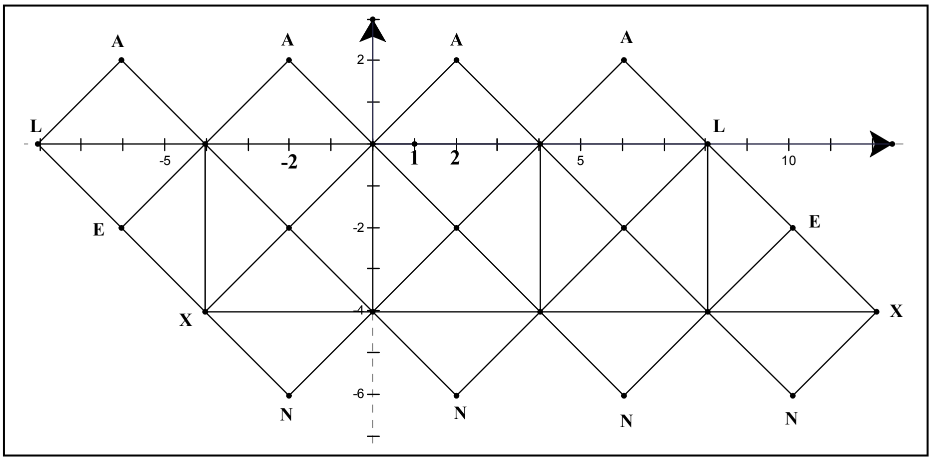


Μ. Κύβος. Λίγο λοξά είναι.

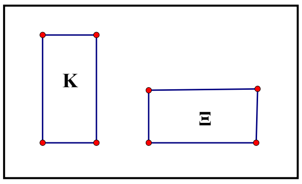
Δ. Αν τα τετράγωνα έχουν το ίδιο μήκος πλευράς, τότε είναι ίσα. Η «στάθμευση» δεν έχει καμιά σημασία.

Μ. Έχει και ανάπτυγμα που δεν είναι τυπικό;

Δ. Ναι. Απαιτεί μεγαλύτερη προσπάθεια για τις «συγκολλήσεις»



Μπορείς να σχεδιάσεις γρήγορα το ανάπτυγμα σε τετραγωνισμένο χαρτί. Προτίμησε «οριζόντια», **Ξ**, όχι «κατακόρυφα».



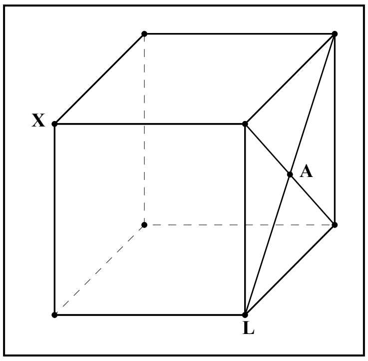
Με τα βέλη σου δείχνω τους άξονες.

Για «Α» πάρε τα σημεία:(-6,2),(-2,2),(2,2),(6,2), «L» τα σημεία (-8,0), (8,0), «Ε»: (-6,-2), (10,-2). Τα υπόλοιπα θα τα βρεις.

Μ. Τι είναι πάλι αυτά; Γιατί δεν έβαλες διαφορετικά γράμματα;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Είναι βοήθεια. Τα ίδια γράμματα αντιστοιχούν στις κορυφές του αναπτύγματος που καθορίζουν τις πλευρές που πρέπει να ενωθούν για να σχηματιστεί ο κύβος. Τα γράμματα είναι αρχικά του Alexandrov, ρώσου μαθηματικού[7] που το 1939 ανακάλυψε το θεώρημα το οποίο μας βεβαιώνει για την κατασκευή, χωρίς να απαιτείται να βλέπουμε το διπλανό σχήμα.

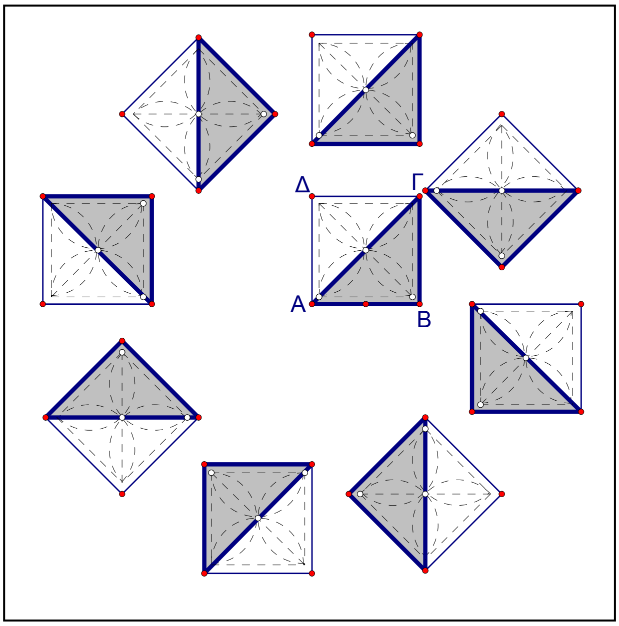


Άσκηση θέλησης. Τα συναισθήματα από την ολοκλήρωση της κατασκευής οδηγούν σε μια εκκωφαντική σιωπή και όχι στη μάζα των λέξεων.

Στο επόμενο σχέδιο έχουμε ίσα με το ΑΒΓΔ τετράγωνα σε διάφορες θέσεις στο επίπεδο. Σου κάνω δώρο και τα «γκρι» τρίγωνα. Τα λουλουδάκια είναι για να ομορφαίνουν την ατμόσφαιρα, δώρο και αυτά.

Μ. Ευχαριστώ!

Δ. Κάποια παρατήρηση για το είδος των γκρι τριγώνων;



Μ. Ορθογώνια, …και ισοσκελή, …και ίσα. Αν τα τοποθετήσουμε έτσι ώστε να εφαρμόσουν οι ορθές γωνίες, επειδή οι κάθετες πλευρές είναι ίσες σε όλα, θα εφαρμόσει και η τρίτη πλευρά, που είναι απέναντι από την ορθή γωνία. Σωστά;

Δ. Εξαιρετικά!

Για τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα; Φτάνει ένας αριθμός;

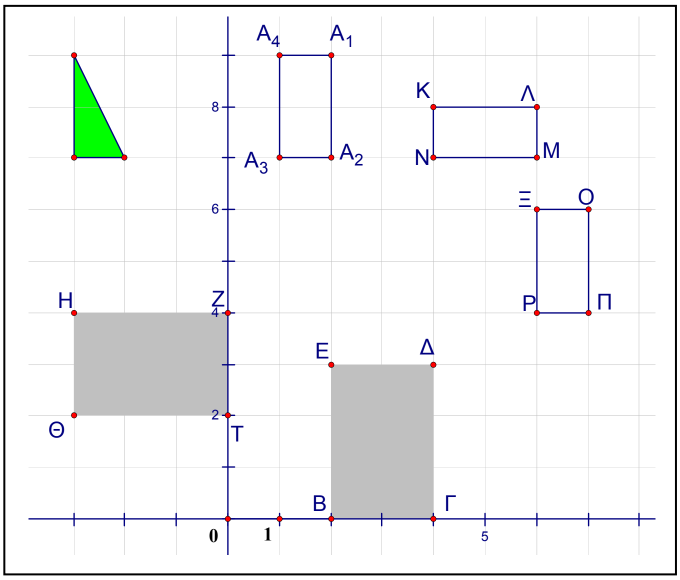
Μ. Δυο. Αν έχουμε τις διαστάσεις, το κατασκευάζουμε. Οι γωνίες ορθές. Δυο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με ίδιες διαστάσεις είναι ίσα.

Δ. Ομάδες ίσων;

Μ. Ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΒΓΔΕ, ΖΗΘΤ

Δ. Γιατί;

Μ. Είναι δυο επί τρία, γωνίες ορθές, είναι το ίδιο σχήμα σε δυο διαφορετικές θέσεις. Ίσα είναι και τα ΞΟΠΡ, ΚΛΜΝ, A_1 A_2 A_3 A_4, όλα δυο επί ένα. Τελείωσαν τα γράμματα και άρχισες τους δείκτες;



Δ. Το τρίγωνο; Ποιο είναι το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες; έχει κάποια σχέση με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο A_1 A_2 A_3 A_4;

Μ. Δεν έχει άλλο τρίγωνο, δεν χρειάζεται να σκεφτώ για ίσα σχήματα. Ως προς τις γωνίες, ορθογώνιο τρίγωνο, ως προς το ορθογώνιο, είναι το μισό.

Δ. Ξέρεις τις ονομασίες των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου;

Μ. Βάλε γράμματα στις κορυφές.

Δ. Χωρίς γράμματα. Περιγραφή.

Μ. Κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι οι πλευρές της ορθής γωνίας. Η «λοξή»; Την συναντήσαμε και πριν, διαγώνιος στα λουλουδάτα τετράγωνα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Τη βαφτίσανε; Πήγες; Ή πάλι απέφυγες τα κοινωνικά και έμεινες κλεισμένος στον ιδεατό κόσμο των μαθηματικών;

Δ. Υποτείνουσα. Πως θα σχεδιάσουμε ίσα με αυτό τρίγωνα;

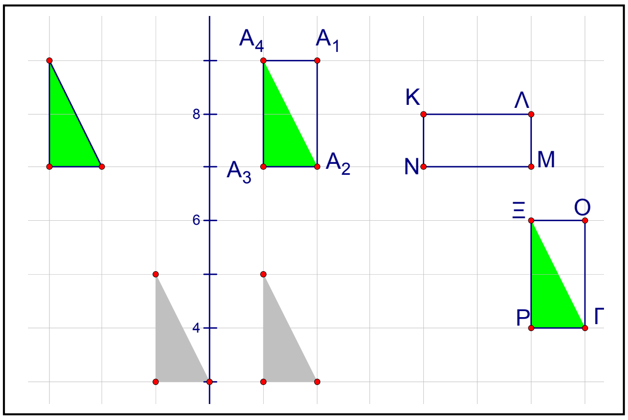
Μ. Απλό. Κάθετες με μήκη 2, 1. Σχεδιάζω διαγώνιες σε 2 επί 1 ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ή και κατευθείαν, ορθή γωνία με κάθετες πλευρές 1, 2 και την υποτείνουσα. Στο τετραγωνισμένο χαρτί είναι πολύ εύκολο.

Δ. Σχεδίασε.

Μ. Σου έκανα και μερικά δώρα!

Δ. Ευχαριστώ. Στο ορθογώνιο ΚΛΜΝ;

Μ. Ναι.



Μπορούμε και εκεί, κάθετες 2 επί 1, χρειάζεται κάποια μετακίνηση, ίσως και περιστροφή, αλλά είναι σίγουρο ότι θα εφαρμόσει το 2 επί 1.

Δ. Ίσα είναι τα σχήματα που συμπίπτουν, που εφαρμόζουν, με κατάλληλη τοποθέτηση. Αν εφαρμόσουμε τις ορθές γωνίες, τις μικρότερες κάθετες, με μήκος 1 και τις μεγαλύτερες κάθετες πλευρές, με μήκος 2, θα υποχρεωθεί και η υποτείνουσα να εφαρμόσει με μια διαγώνιο.

Μ. Με μια διαγώνιο; Είναι αυτή μαθηματική έκφραση; Με ποια ακριβώς;

Δ. Πόσες διαγώνιες έχουμε;

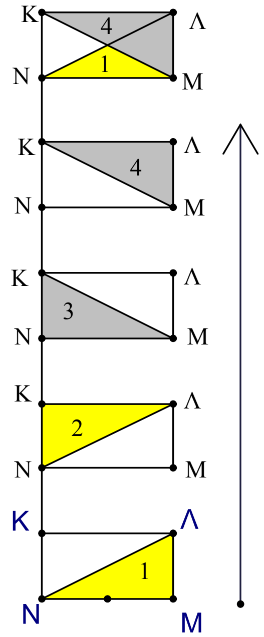
Μ. Δύο, την ΛΝ και την ΚΜ.

Δ. Με την ΛΝ.

Μ. Οπότε έχουμε και το ΚΛΝ, αλλά και το ΝΜΛ. Μπορούμε να σχεδιάσουμε όσα ορθογώνια τρίγωνα θέλουμε, όλα ίσα, αρκεί οι κάθετες πλευρές να έχουν μήκη 1 και 2 μονάδες.

Δ. Αν σκεφτώ τη διαγώνιο ΚΜ;

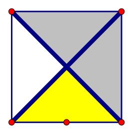
Μ. Δηλαδή;



Δ. Στο ΚΛΜΝ υπάρχουν 4 ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 1 και 2 μονάδες. Δες τα σχήματα από κάτω προς τα πάνω. Είναι «φωτοτυπίες» του ΚΛΜΝ. Τα τρίγωνα «1», «2», «3» και «4» είναι ίσα. Στο πιο πάνω ορθογώνιο έχω σχεδιάσει τα «1» και «4» μαζί. Συμπέρασμα για τις διαγώνιες ΚΜ και ΛΝ;

Μ. Θα πρέπει να είναι ίσες, αφού είναι υποτείνουσες ίσων ορθογωνίων τριγώνων, ουσιαστικά του ίδιου τριγώνου σε άλλη θέση.

Δ. Στο τετράγωνο που είδαμε πριν, ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα. Τα τρίγωνα και πάλι ορθογώνια. Ως προς τις πλευρές;



Μ. Στο τετράγωνο θα είναι ορθογώνια και ισοσκελή.

Δ. Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο και για τις διαγώνιες τετραγώνου;

Μ. Ναι, το τετράγωνο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ίσες πλευρές. Οι διαγώνιες τετραγώνου είναι ίσες, είναι υποτείνουσες σε ισοσκελή ορθογώνια με ίσες κάθετες πλευρές.

Αυτό ισχύει και σε τρίγωνα που δεν είναι ορθογώνια; Ευκλείδης;

Δ. Αυτό; Ποιο ακριβώς;

Μ. Για τα ίσα τρίγωνα, δύο πλευρές και μια γωνία.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Ναι, δύο **ίσες πλευρές** και τις **περιεχόμενες** σε αυτές **γωνίες ίσες**, που φυσικά δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθές.«Κριτήριο ισότητας τριγώνων».

Είναι η 4η πρόταση του 1ου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Στο παράδειγμα που εξετάσαμε, στο τρίγωνο ΛΜΝ, η ορθή γωνία $\hat{\mathrm{M}}$ περιέχεται μεταξύ των πλευρών ΛΜ και ΝΜ.

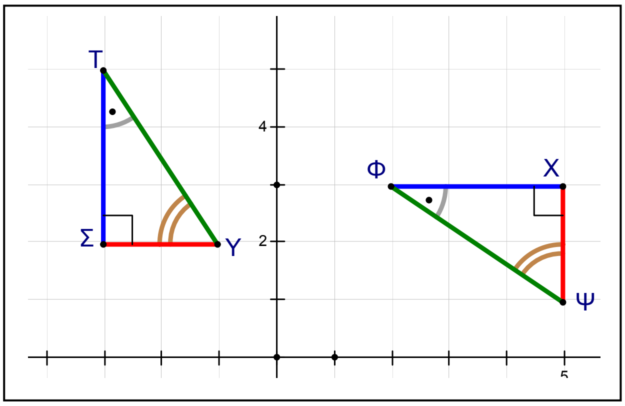
Τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα;

Μ. Είναι. Ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες 3 και 2 μονάδες.

Δ. Ποια γράμματα θα εφαρμόσουν;

Μ. Σ με Χ, Τ με Φ και Υ με Ψ.

Δ. Αν διαπιστώσουμε ισότητα τριγώνων, καλό είναι να γράφουμε τα γράμματα με τη σειρά που εφαρμόζουν, ΣΤΥ=ΧΦΨ.



Δ. Γράψε τις 6 ισότητες.

Μ. Έξη;

Δ. Πλευρές και γωνίες

Μ. Ναι. Εύκολο. Προσέχω το σχήμα:

Πλευρές: ΣΤ = ΧΦ,

ΣΥ = ΧΨ, ΤΥ = ΦΨ.

Δ. Αν γράψεις την ισότητα τριγώνων με τη μορφή ΣΤΥ=ΧΦΨ, τότε μπορείς να γράψεις τις ισότητες των πλευρών χωρίς να προσέχεις το σχήμα: όποια γράμματα παίρνεις από το ΣΤΥ, πρώτο δεύτερο, πρώτο τρίτο, δεύτερο τρίτο, τα ίδια παίρνεις και από το ΧΦΥ. Γωνίες;

Μ. Γωνίες: ορθές ίσες, οι μικρότερες ίσες μεταξύ τους και οι μεγαλύτερες ίσες μεταξύ τους, γράφω με τρία γράμματα, το γράμμα της κορυφής στη μέση, $\Sigma\hat{\mathrm{T}}\Upsilon = \mathrm{X}\hat{\Phi}\Psi$, $\mathrm{T}\hat{\Upsilon}\Sigma = \Phi\hat{\Psi}\mathrm{X}$, $\Upsilon\hat{\Sigma}\mathrm{T} = \Psi\hat{\mathrm{X}}\Phi$.

Δ. Πως καταλαβαίνουμε τις μικρότερες;

Μ. Βλέπουν την μικρότερη πλευρά. Έβαλα μια τελίτσα για «μάτι».

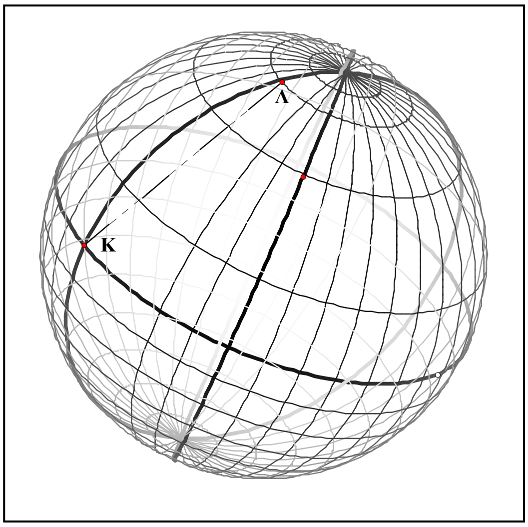
Δ. Αν $\Sigma\hat{T}\Upsilon = X\hat{\Phi}\Psi = 34^o$, πόσες μοίρες είναι οι $T\hat{\Upsilon}\Sigma$, $\Phi\hat{\Psi}X$.

Μ. Άθροισμα γωνιών τριγώνου 180^o, η ορθή 90^o, αφαιρώ τις 90, αφαιρώ και τις 34^o, 180-90-34=56, 56 μοίρες είναι οι $T\hat{\Upsilon}\Sigma$, $\Phi\hat{\Psi}X$. Και κατευθείαν, 90-34=56, οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

Δ. Πολύ καλά. Το 180^o;

Μ. Παγκόσμια σταθερά, το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 180^o.

Δ. Δυο ορθές, 180^o. Παγκόσμια «επίπεδη» σταθερά.



Μ. Επίπεδη;

Δ. Σε σφαιρική επιφάνεια[8] το άθροισμα είναι μεγαλύτερο.

Μ. Παράδειγμα;

Δ. Πως σχηματίζουμε τρίγωνο στο επίπεδο;

Μ. Απλό, ενώνουμε τρία σημεία.

Δ. Με τι τα ενώνουμε;

Μ. Με ευθείες, με ευθύγραμμα τμήματα.

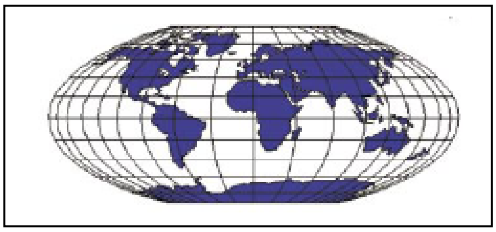
Δ. Η έννοια του σημείου σε μια σφαίρα δεν δημιουργεί προβλήματα, π.χ. τα σημεία Κ και Λ, αλλά η «ευθεία» που γνωρίζουμε στο επίπεδο δεν μας εξυπηρετεί. Για να ενώσουμε τα σημεία Κ και Λ θα πρέπει να κινηθούμε στην επιφάνεια της σφαίρας, όχι στο εσωτερικό της. Είναι αδύνατον να κινηθούμε κατά μήκος της διακεκομμένης γραμμής, του ευθ.τμήματος ΚΛ.

Θα πρέπει να ακολουθήσουμε το τόξο ΚΛ.

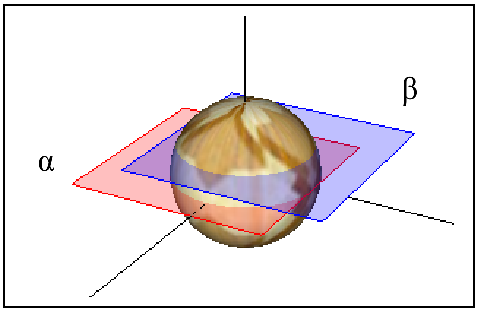
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Μεσημβρινοί και παράλληλοι, γεωγραφικές συντεταγμένες, στην προηγούμενη εικόνα είναι η υδρόγειος;

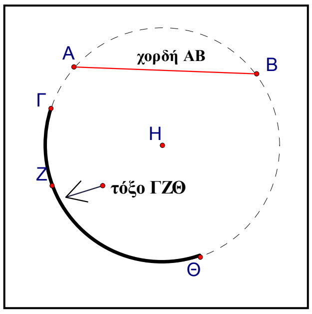
Δ. Η υδρόγειος είναι ένα απλουστευμένο μοντέλο της Γης. Το αληθινό σχήμα της Γης, γεωειδές, είναι μάλλον πολύπλοκο, αν και πλησιάζει το σχήμα ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, εξογκωμένου στον ισημερινό και πεπλατυσμένου στις πολικές περιοχές. Ας έχουμε στη φαντασία μας την υδρόγειο σφαίρα.



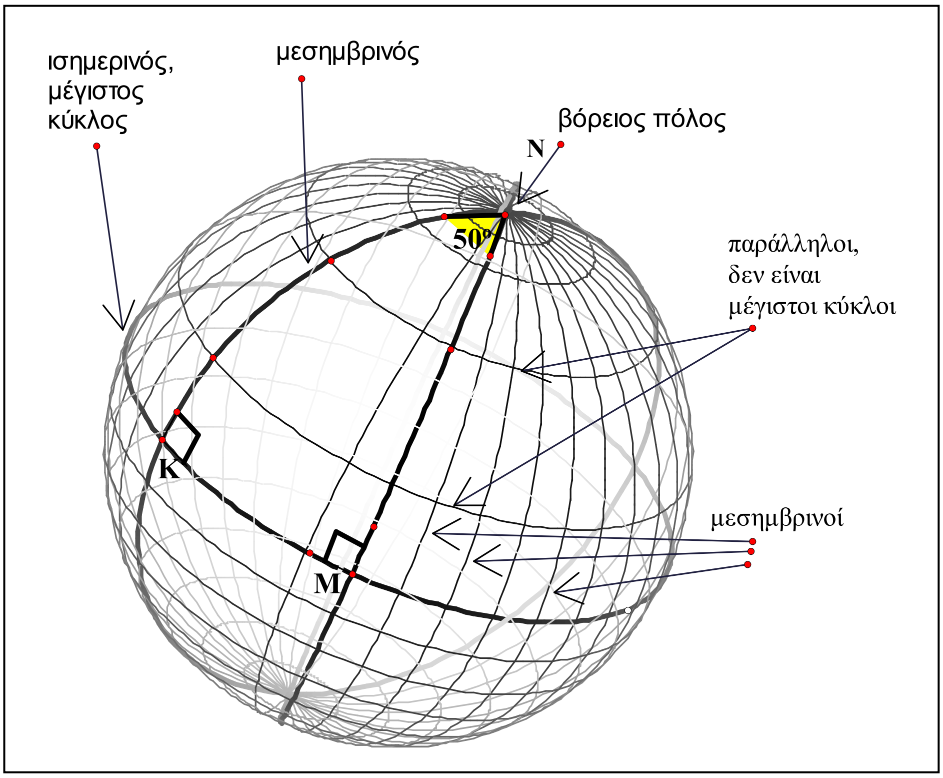
Αρχίζουμε από «σφαιρικές» σκέψεις και είμαστε σε εγρήγορση για να διορθώνουμε τυχών ασυμφωνίες με τη γήινη πραγματικότητα[9].



Η ευθεία στην επιφάνεια της σφαίρας είναι τελικά τόξο κύκλου, ακριβέστερα τόξο μεγίστου κύκλου, κύκλου του οποίου το επίπεδο τομής με τη σφαίρα διέρχεται από το κέντρο της, π.χ. το «α», όχι το «β». Αν τεντώσουμε ένα κομμάτι σχοινί μεταξύ δυο σημείων πάνω στο επίπεδο του θρανίου, έχουμε την ευθεία που γνωρίζουμε, αλλά αν κάνουμε το ίδιο μεταξύ δυο σημείων πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, τότε η γραμμή που προκύπτει θα είναι τόξο κύκλου. Η μικρότερη απόσταση ανάμεσα στα δυο αυτά σημεία, π.χ. για τα Γ και Θ το τόξο ΓΖΘ, είναι τόξο μεγίστου κύκλου. Αυτή είναι και η έννοια της ευθείας: η γραμμή της μικρότερης απόστασης μεταξύ των δυο σημείων.



Ένα τρίγωνο στο επίπεδο αποτελείται από τρία σημεία, τις κορυφές, και από τρία ευθύγραμμα τμήματα, τις πλευρές, τα οποία ενώνουν ανά δυο τις κορυφές. Ένα τρίγωνο στην επιφάνεια της σφαίρας, ένα σφαιρικό τρίγωνο, αποτελείται από τρεις κορυφές που συνδέονται ανά δυο με τόξα μεγίστων κύκλων. Το τρίγωνο ΚΜΝ δημιουργείται από τα τόξα ΚΝ και ΜΝ δυο μεσημβρινών και το τόξο ΚΜ του ισημερινού. Άθροισμα γωνιών;



Μ. Άθροισμα, 90+90+50=230 μοίρες**!**

Δ. Η ποσότητα 230-180 = 50 κατά την οποία το άθροισμα 230 υπερβαίνει τις 180 μοίρες, ονομάζεται «υπεροχή» του τριγώνου, «σφαιρική υπεροχή».

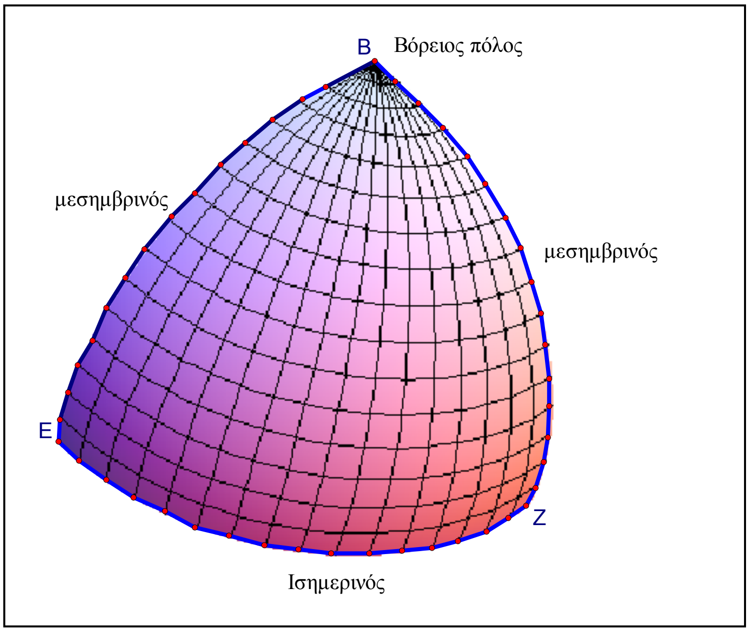
Μ. Και καλά υπεροχή!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

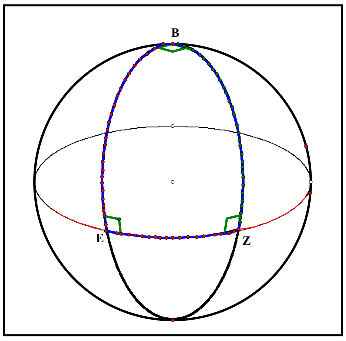
Δ. Αν αντικαταστήσουμε το τόξο ΚΜ με το ΕΖ, το ένα τέταρτο του κύκλου του ισημερινού, τότε το ΕΖ και τα τόξα ΒΕ, ΒΖ των μεσημβρινών δημιουργούν το σφαιρικό τρίγωνο ΒΕΖ, ορθές και οι τρεις γωνίες του.

Μ. Άθροισμα γωνιών 270^o!

Δ. Τρείς ορθές. Υπεροχή: $270-180=90^o$.



Το άθροισμα των γωνιών των σφαιρικών τριγώνων είναι πάντοτε μεγαλύτερο από 180 μοίρες, δηλ. 2 ορθές, και μικρότερο από 6 ορθές. Εξαρτάται από το μέγεθος του τριγώνου. Στα μικρά τρίγωνα μόλις και υπερβαίνει τις 180 μοίρες.



Στο σχήμα, το ΒΕΖ είναι ένα μεγάλο ισόπλευρο τρίγωνο με τρείς ορθές γωνίες: κάθε πλευρά ισούται με το 1/4 ενός μεγίστου κύκλου στη νοητή σφαίρα.

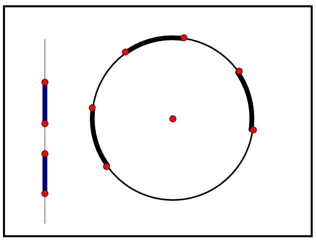
Μ. Στη νοητή;

Δ. Το μήκος του μεγίστου κύκλου της Γης στον ισημερινό είναι 40064 χιλιόμετρα, ενώ όταν διέρχεται από τους δυο πόλους είναι 39995 χιλιόμετρα, οπότε τα τόξα δεν έχουν το ίδιο ακριβώς μήκος.

Θυμόμαστε 40000 χιλιόμετρα. **Αν** η Γη ήταν σφαιρική τότε και τα τρία τόξα ΒΕ,ΒΖ, ΕΖ θα είχαν μήκος ακριβώς 10000 χιλιόμετρα. Ο ισημερινός θα ήταν κύκλος στην **επιφάνεια** της σφαίρας με κέντρο τον Βόρειο πόλο, σημείο της **επιφάνειας**, και ακτίνα αυτά τα 10000χιλ.

Μ. Κύκλος με **κέντρο** τον Βόρειο πόλο;

Δ. Γνωρίζουμε ότι κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ, μια δεδομένη απόσταση, είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που βρίσκονται σε απόσταση «ρ» από το σημείο Ο. Το ίδιο ισχύει σε κάθε επιφάνεια. Με τη λέξη «απόσταση» δυο σημείων εννοούμε το μήκος της συντομότερης διαδρομής που τα συνδέει. Στην σφαιρική επιφάνεια είναι το **μικρότερο** από τα δύο τόξα του μεγίστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία.



Μ. Ευθείες και κύκλοι παντού!

Έχουν κάτι ιδιαίτερο;

Δ. Στα μαθηματικά αναζητούμε την απλότητα. Οι ευθείες και οι κύκλοι είναι σχήματα απλά. Οποιοδήποτε[10] μέρος τους μπορεί να τοποθετηθεί πάνω σε κάθε άλλο μέρος του.

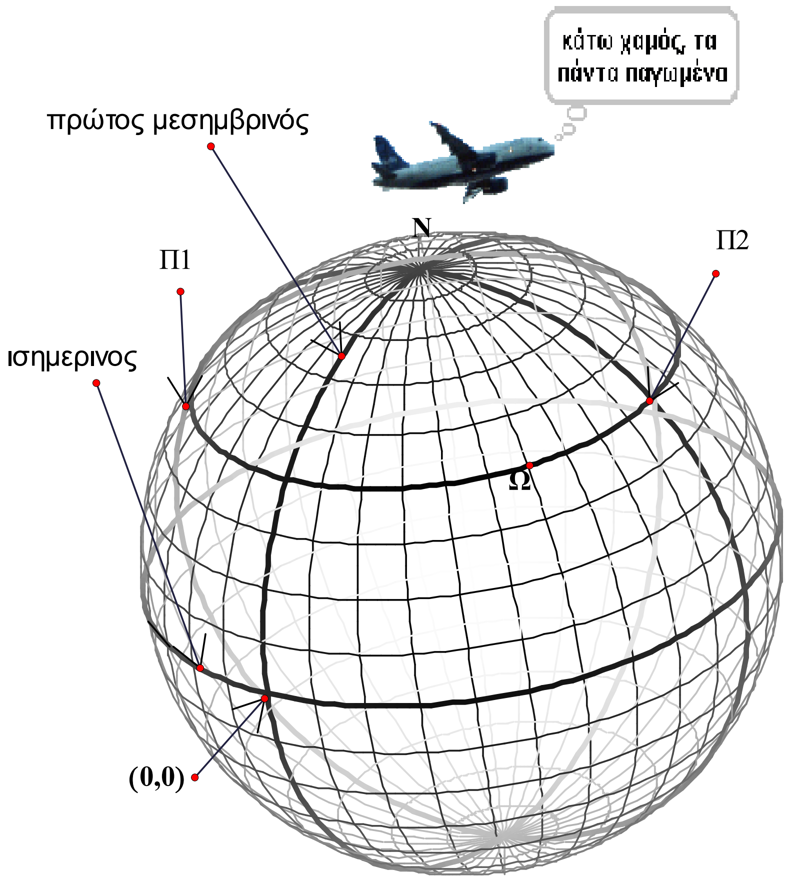
Μ. Και καλά απλότητα!

Ο ναυτικός παππούς μου έκανε διαδρομές σε τόξα μεγίστων κύκλων;

Δ. Οι μέγιστοι κύκλοι, οι συντομότερες διαδρομές, προτιμώνται για την αεροπλοΐα. Η συντομότερη διαδρομή[11] από την πόλη Π1 στην Π2 δεν είναι το τόξο του «παραλλήλου» Π1-Ω-Π2, αλλά το τόξο Π1-Ν-Π2 του μεγίστου κύκλου, αρκετά βορειότερα. Δες το σχήμα στην επόμενη σελίδα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σου υπενθυμίζω ότι το γεωγραφικό πλάτος ενός σημείου της γης είναι ένα μέτρο της απόστασής του από τον ισημερινό. Το μετράμε σε μοίρες από 0^o στον ισημερινό έως 90^o στους πόλους. Οι γεωγραφικοί παράλληλοι είναι κύκλοι, παράλληλοι προς τον ισημερινό, που τα σημεία τους χαρακτηρίζονται από το ίδιο γεωγραφικό πλάτος. Αν οι παράλληλοι κύκλοι είναι ανά 10^o, τότε οι πόλεις Π1 και Π2 έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος, 40 μοίρες Βόρειο. Αν και οι μεσημβρινοί είναι ανά 10 μοίρες, τότε οι συντεταγμένες της πόλης Π2 είναι: (100^oΕ, 40^oΝ), δηλ. 100 μοίρες ανατολικό γεωγραφικό μήκος, 100^oΕ, 40^o βόρειο γεωγραφικό πλάτος, 40^oΝ.



Στη ναυσιπλοΐα προτιμώνται οι «λοξοδρομίες», διαδρομές που δεν ακολουθούν πιθανόν το μέγιστο κύκλο, αλλά, αποφεύγουν το προβληματάκι με τους πόλους και άλλα πιθανά, για τα οποία οι αεροπόροι αδιαφορούν. Τα τρίγωνα που δημιουργούνται με γραμμές πλεύσης μπορεί να έχουν άθροισμα γωνιών 2 ορθές, 180 μοίρες. Οι γραμμές πλεύσης δεν είναι απαραίτητα τόξα μεγίστων κύκλων, δηλ. δεν είναι απαραίτητα «ευθείες» της επιφάνειας της σφαίρας.

Μ. Ζαλίστηκα! Ίλιγγος. Να σταματήσουμε για λίγο.

Δ. Ίλιγγος; Από την σφαιρική υπεροχή;

Μ. Όχι. Από τη Γη.

Δ. Δηλαδή;

Μ. Η Γη είναι μετέωρη στο χάος και περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με τεράστια ταχύτητα. Έχω και υψοφοβία! Ποια είναι η ταχύτητα περιφοράς;

Δ. Η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο με ταχύτητα σχεδόν 107000 χλμ. την ώρα. Εντάξει, διάλλειμα, αλλά ας αφήσουμε τις εξυπνάδες.

Μ. Να φέρω παγωτά;

Δ. Έχεις χρήματα;

Μ. Εσύ έχεις; Για να τα δω; Χμ…Το δίκιο είναι να δώσω εγώ τα μισά χρήματα, νεαρός και άνεργος!

Αν μου δώσεις τα χρήματα που βλέπω ότι έχεις και προσθέσω και τα μισά από τα δικά μου, τότε αγοράζουμε δύο παγωτά.

Δ. Καλά, …περίμενε λίγο. Αν προσθέσω τα μισά από τα δικά μου χρήματα στα δικά σου, τότε πόσα παγωτά[12] αγοράζουμε;

Μ. Να κάνω τους υπολογισμούς… .Μόνο ένα!... . Επισείετε ποινή;

Δ. Όχι. Πολύ καλή σκέψη. Συγχαρητήρια! Μπορούσες να μου πεις ότι δεν έχεις χρήματα, το παγωτό θα στο προσφέρω!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Σκέφτηκα να μην σε επιβαρύνω. Τα έσοδά σου είναι ελάχιστα και πιθανόν να έχεις οικονομικά προβλήματα.

Δ. Τα οικονομικά προβλήματα δεν δημιουργούνται από την έλλειψη εσόδων.

Μ. Από τι δημιουργούνται;

Δ. Από τα έξοδα! Από την υπερβολή των αγαθών. Περιορισμός των εξόδων οδηγεί σε αύξηση των εσόδων. Έχει το κυλικείο παγωτά;

Μ. Όχι, τηλεφωνούμε στις «1000 παγωμένες γεύσεις» και έρχεται ο ντελιβεράς.

Δ. Ο ποιος;

Μ. Το μηχανάκι, delivery στη γλώσσα μας.

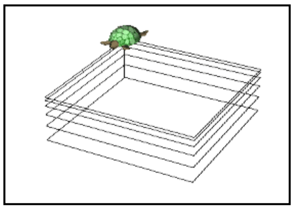
Δ. Με τι τηλεφωνείται;

Μ. Αστείο;

Δ. Όχι. Με τι τηλεφωνείται;

Μ. Με το τηλέφωνο. Εσύ είδες κανέναν να τηλεφωνεί με τον μαρκαδόρο;

Δ. Κινητό; Αφού δεν επιτρέπεται στο σχολείο.



Μ. Ούτε η επανάσταση!

Δ. Ποια επανάσταση;

Μ. Η επανάσταση, 1821, που τη χρησιμοποιείς σε όλα τα παραδείγματα. Οι τούρκοι δεν την επέτρεπαν, ο Κολοκοτρώνης δεν έδωσε σημασία, και έτσι ξεκίνησε η απελευθέρωση της χώρας! Τι είναι αυτή η εικόνα;

Δ. Η χελώνα ετοιμάζει επίπεδα για να κόψουμε νοητούς μέγιστους κύκλους από την ιδεατή γήινη σφαίρα.

Μ. Οχ! Πηγαίνω για τα παγωτά!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

**Με πλάγια είναι οι σκέψεις του μαθητή*

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Μπορείς να γράψεις ένα ρητό κλάσμα;

Μ. Κλάσμα; Η ειδικότητά μου: $\frac{2}{3}$. Ρητό; Είναι απαραίτητη αυτή η λέξη ή λέγεται για εντυπωσιασμό;

Δ. Συνηθίζουμε να λέμε «κλάσμα», το «ρητό» δεν ακούγεται. Ας γνωρίζουμε όμως ότι ο όρος «κλάσμα» χρησιμοποιείται για οποιαδήποτε έκφραση με αριθμητή και παρονομαστή, π.χ. $\frac{17}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{-3}{e}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{10}{x}$. Τα $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$ είναι σύμβολα **αριθμών** που δεν είναι ρητοί, το x εξαρτάται τι αντιπροσωπεύει. Σου υπενθυμίζω ότι ρητός αριθμός[1] ή ρητό κλάσμα είναι ο αριθμός που μπορεί να **τεθεί** στη μορφή $\frac{a}{b}$, με a,b ακεραίους και b≠0.

Π.χ. $\frac{-3}{4}, \frac{4}{-3}, \frac{-2}{-5}, \frac{1821}{2014}, \frac{2,25}{10}, \frac{5}{2,5}, \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$. Γιατί γελάς;

Μ. Ά ναι. Κάτι Θυμάμαι! Βλέπω όμως ότι έχεις κάτι λαθάκια. Αλλά δεν χρειάζεται να στεναχωριέσαι. Μαθαίνουμε διορθώνοντας τα λάθη μας. Αν φοβόμασταν τα λάθη, τότε δεν θα μαθαίναμε ποτέ να περπατάμε[2]. Και το κυριότερο: τα λάθη μετράνε μόνο όταν γίνονται από μαθητές, οπότε δεν θα σου αφαιρέσω βαθμούς!

Δ. Ας αφήσουμε τις φιλοσοφίες και δείξε μου το λάθος.

Μ. Στα τρία τελευταία κλάσματα οι αριθμοί 2,25 και 2,5 δεν είναι ακέραιοι. Ας μην αναφερθώ και στο τελευταίο τερατούργημα! Μάλλον είσαι σε νοητικό ταξίδι. Κερδίζω (+2) βαθμούς στην αξιολόγηση!

Δ. Γιατί;

Μ. Μου έχεις πει ότι αν σου βρω λάθος θα έχω (+2) βαθμούς.

Δ. Σωστά. Αλλά είναι η μισή πρόταση. Τη θυμάσαι ολόκληρη;

Μ. Αν σου βρω λάθος θα έχω (+2) βαθμούς και αν κάνω λάθος για το λάθος, τότε η βαθμολογία δεν αυξάνεται. Με συμφέρει, αλλά είναι δίκαιο αυτό; Μήπως θα έπρεπε να μειώνεται;

Δ. Δίκαιο είναι. Μαθαίνεις διορθώνοντας τα λάθη σου. Ο δάσκαλος αγαπά τους μαθητές του. Δεν τους τιμωρεί.

Μ. Τους αγαπά; Τι είναι αγάπη;

Δ. Αγάπη είναι να δίνεις χωρίς αντιπαροχή, χωρίς όρους.

Να χαίρεσαι με τη χαρά του αγαπημένου σου προσώπου και να στενοχωριέσαι με τη λύπη του, να το παρακολουθείς διακριτικά και να το βοηθάς να ξεπεράσει τις δυσκολίες με τον τρόπο που εκείνο κρίνει. Αγάπη είναι αυτό που δίνεις στον παππού Βαγγέλη όταν παίζεις μαζί του.

Του χαρίζεις την μέγιστη ικανοποίηση, την ικανοποίηση της αποδοχής της χωρίς όρους αγάπης σου.

Μ. Αντιπαροχή τι είναι;

Δ. Να περιμένεις να πάρεις κάτι ανάλογο με αυτό που έδωσες, λογική αντιπαροχή, ή κάτι πολύ περισσότερο από αυτό που έδωσες.

Έχεις λοιπόν κάνει λάθος για το λάθος. Σκέψου το «μπορεί να τεθεί…»

Μ. Με βοηθάς;

Δ. Ευχαρίστως.

$\frac{2,25}{10}=\frac{225}{1000}=\frac{45}{200}=\frac{9}{40}$. Μπορείς να κάνεις το ίδιο και για το $\frac{5}{2,5}$;

Μ. Θα προσπαθήσω: $\frac{5}{2,5}=\frac{50}{25}=\frac{10}{5}=\frac{2}{1}=2$.

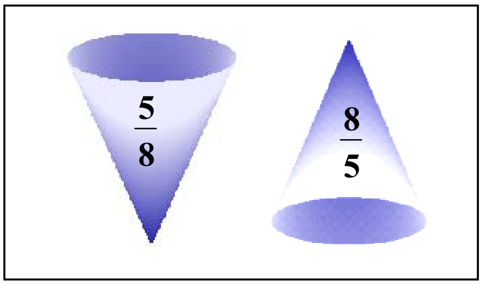
Πολλαπλασιάζω επί 10 και έτσι οι όροι του κλάσματος γίνονται ακέραιοι. Μετά απλοποιώ διαιρώντας δια 5 και ξανά δια 5.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Αν και θα μπορούσα να διαιρέσω δια 25, πιστεύω να μην σε πειράζει που δεν είδα αμέσως ότι ΜΚΔ(25,50) = 25. Και όταν ο παρονομαστής είναι ένα, τότε το κλάσμα είναι ακέραιος, ο 2. Σωστά;

Δ. Πολύ σωστά! Διάφοροι τρόποι. Π.χ. θα μπορούσες να πολλαπλασιάσεις επί 2, γιατί 2*2,5=5, οπότε φτάνεις στο 10/5.

Μ. Με το $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ θα ασχοληθούμε;



Δ. Αυτό είναι σύνθετο κλάσμα, παριστάνει τη διαίρεση $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$, μπορείς να συνεχίσεις;

Μ. Και καλά σύνθετο! *Ενώ τα άλλα είναι απλά!*

Πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$.Τέλειο;

Έχω αναπτύξει τον αυτοματισμό, πράγμα απαραίτητο για την μαθηματική μου εξέλιξη, αλλά δεν έχω κατανοήσει γιατί λειτουργεί αυτή η περίεργη τεχνική. *Η αναπαράσταση με τα χωνάκια θα με βοηθούσε περισσότερο, αν περιείχαν και το κατάλληλο παγωτό. Οι δάσκαλοι νομίζουν ότι σκέφτομαι αυτό που έχουν στο κεφάλι τους.* Με την ευκαιρία, πως διαβάζεται αυτό το κλάσμα;

Δ. Τρία τέταρτα προς πέντε όγδοα. Μπορούμε φυσικά να διαβάσουμε και το $\frac{5}{8}$: πέντε προς οκτώ. Προτιμούμε όμως το «πέντε όγδοα», γιατί;

Μ. Για να φαίνεται ότι ο παρονομαστής είναι επίθετο, προσδιορίζει το μέγεθος της κλασματικής μονάδας: όγδοο.

Δ. Εξαιρετικά! Ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη διαδοχικών προσθέσεων και η διαίρεση πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων.

Ας δούμε μερικές προσθέσεις φυσικών: 6+5+8 = 19, 6+7+7+2+2+2 = 26, 3+3+3+3+3 = 15, 6+6+6+6+6+6+6+6 = 48.

Παρατήρησε τις δύο τελευταίες προσθέσεις.

Σ΄ αυτές οι προσθετέοι αποτελούν επανάληψη του ίδιου αριθμού (του 3 και του 6 αντίστοιχα). Για την τελευταία πρόσθεση μπορούμε να γράψουμε πιο σύντομα : 6 Χ 8 = 48 ή 6*8=48 ή $6 \cdot 8 = 48$. Το σύμβολο για τον πολλαπλασιασμό εξελίχθηκε: Χ….*…..•. Πολλαπλασιασμός είναι μια τέτοια πρόσθεση, μια πρόσθεση του ίδιου αριθμού στον εαυτό του πολλές φορές, 6 Χ 8 = 6+6+6+6+6+6+6+6. Αν πάλι πάρουμε τον 4 ως προσθετέο 5 φορές, το άθροισμα αυτό είναι ταυτόχρονα και ένας πολλαπλασιασμός: 4+4+4+4+4 = 4 Χ 5=20.

Όπως προσθέσαμε τον 4 πολλές φορές, δεν γίνεται και να αφαιρέσουμε τον 4 πολλές φορές; Πόσες φορές αφαιρείται ο 4 από τον 20;

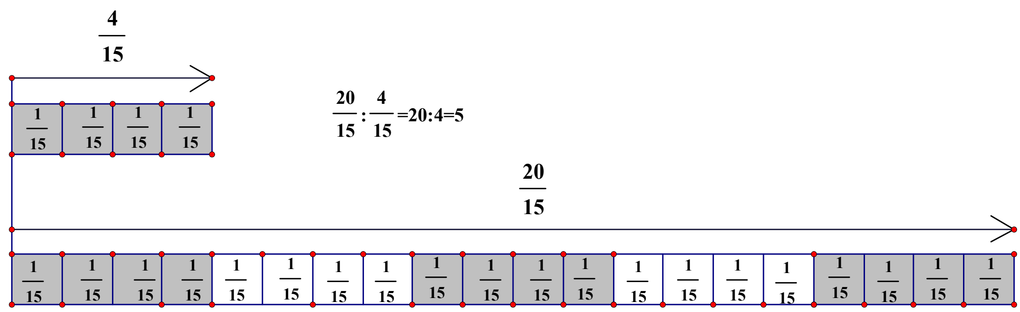
Μ. Θυμάμαι την περίπτωση της διαίρεσης ακεραίων, 20:4 = 5, το ακριβές πηλίκο 5 είναι το πλήθος των αφαιρέσεων[3] του 4 από το 20:

20-4=16($1^η$ αφαίρεση), 16-4=12($2^η$), 12-4=8($3^η$), 8-4=4($4^η$), 4-4=0($5^η$).

Αλλά τι σχέση έχει αυτό με την διαίρεση κλασμάτων;

Δ. Το ίδιο πηλίκο, το ίδιο πλήθος αφαιρέσεων, θα βρεις και στην διαίρεση $\frac{20}{15}:\frac{4}{15}$. Αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα, τότε το πλήθος των αφαιρέσεων του κλάσματος που είναι διαιρέτης από το κλάσμα που είναι διαιρετέος είναι το ίδιο με το πλήθος των αφαιρέσεων των αριθμητών.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Μ. Να κάνουμε μερικά παραδείγματα ακόμα;

Δ. Πόσα «2» περιέχονται στον «10»;

Μ. Πέντε.

Δ. Το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης 10:2, $\frac{10}{2}$

Δ. Πόσα «4» περιέχονται στον «30»;

Μ. Μάλλον 4,5.

Δ. Το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης 30:4, $\frac{30}{4}$

Γράψε με τον πιο σύντομο τρόπο το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης 1821:3

Μ. *Νάτο πάλι το 1821.Ο δάσκαλος είναι κολλημένος με την εποχή του. Χάσμα γενεών!*

Δ. Με ποιον μιλάς;

Μ. *Αν του πω με τον Κολοκοτρώνη θα με τιμωρήσει με καμιά 50άδα ασκήσεων, να μην βγω έξω όλο το Σαββατοκύριακο…* Σκέφτομαι αν ο 3 διαιρεί ακριβώς αυτήν την επαναστατική χρονιά, κριτήριο:1+8+2+1=12 , ο 3 διαιρεί τον 12, οπότε και τον 1821, (1800+21):3, 600+7, το βρήκα, 607.

Δ. Σωστό. Μπορούμε όμως να γράψουμε αμέσως $\frac{1821}{3}$. Δηλώνουμε την πράξη, αλλά και το αποτέλεσμα, το 607.

Γράψε το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης $4:\frac{1}{2}$.

Μ. Αυτοματισμός, 4 επί τον αντίστροφο του διαιρέτη, 4*2=8.

Αλλά σου υπενθυμίζω ότι δεν το καταλαβαίνω!

Δ. Ο παππούς έχει κινητό;

Μ. Έχει, αλλά παίζει κάποιο ρόλο;

Δ. Τηλεφώνησέ του.

Μ. Εννοείται ότι εγώ δεν έχω το κινητό στο σχολείο, αλλά και να το έχω είναι κλειστό.

Δ. Τηλεφώνησέ του.

Μ. Και τι να του πω;

Δ. Ρώτησέ τον γιατί η ποιότητα του κρασιού εξαρτάται από τις βροχές!

Μ. ………………………………………………………Το ξέρει!

Μου είπε ότι αν η χρονιά είναι βροχερή, τότε η παραγωγή σταφυλιών θα είναι αυξημένη, αλλά τα αρωματικά τους συστατικά μειωμένα[4]!

Δ. Τηλεφώνησε ξανά και ρώτησέ τον πως κατορθώθηκε η επικοινωνία, αν καταλαβαίνει γιατί μπορεί να συνομιλήσει με οποιονδήποτε στον κόσμο, απλά πατώντας 10-12 αριθμούς στο κινητό.

Μ. Και που να ξέρει το γιατί. Ούτε εγώ το ξέρω!

Δ. Πάτησε το διακόπτη, συννέφιασε και δεν βλέπουμε καλά.

Μ. Για ποιο θέμα συζητάμε;

Δ. Για την κατανόηση. Πάτησε το διακόπτη…………βγήκε φως! Γιατί;

Μ. …Τι έπρεπε να βγει;

Δ. Σκοτάδι! Πατάμε το διακόπτη και βγαίνει …σκοτάδι[5].

Μ. Γίνεται αυτό;

Δ. Αν αρχίσουμε να φωνάζουμε όλοι μαζί μέσα στην αίθουσα τι θα γίνει;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

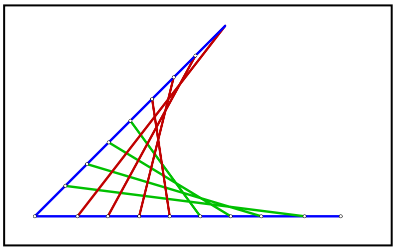
Μ. Θα έρθει ο διευθυντής, 2-3 αποβολές, εσύ πάντα τη γλυτώνεις!

Δ. Είναι δυνατόν να φωνάξουμε όλοι μαζί και να δημιουργηθεί σιωπή;

Μ. *Είναι σίγουρο ότι κάτι δεν πάει καλά σήμερα.* Μήπως ξέχασες τα χάπια της πίεσης; Εισπνοές[6] με τον «γνώμονα» για τον «εκπαιδευτικό βήχα»; Κολλύριο για τα μάτια; Η ινσουλίνη είναι ρυθμισμένη; Παλμοί ανά λεπτό;

Δ. Σε βλέπω απορημένο, αλλά δυο ήχοι μπορούν να δημιουργήσουν σιωπή. Δυο φωτεινές πηγές μπορούν να δημιουργήσουν σκοτάδι, όπως επιδεικνύεται στο πείραμα δυο οπών του Young ή σ' ένα συμβολόμετρο Michelson, διευκρινήσεις στον κ. Λεωνίδα, τον φυσικό.

Καθημερινά χρησιμοποιείς πάρα πολλά, ακατανόητα προς το παρόν. Πιθανόν να δυσκολεύεσαι να αφομοιώσεις πλήρως κάποιες έννοιες ή τεχνικές, είναι όμως χρήσιμο να ενημερωθείς και να τις εφαρμόζεις. Η έννοια ωριμάζει στο μυαλό σου προοδευτικά, με τη χρήση και την εφαρμογή[7]. Τακτικά θα πρέπει να επιστρέφεις στα βασικά. Η κατανόηση, όχι μόνο στα μαθηματικά, είναι μια αργή, ίσως ανιαρή και συχνά επίπονη διαδικασία.



Η υποχρέωσή σου είναι τα αλλεπάλληλα «γιατί». Μην σταματάς τις ερωτήσεις. Οι δυσκολίες θα ξεπεραστούν με τη βοήθεια του δασκάλου και φυσικά με την δική σου προσωπική ενασχόληση.

Επιστροφή στην πορεία. Πόσα $\frac{1}{2}$ αφαιρούνται από το 4;

Μ. Δυο μισά είναι ένα ολόκληρο, 2 για κάθε μονάδα, 4 μονάδες, 2-4-6-8, 8 είναι το πλήθος των $\frac{1}{2}$ που μπορεί να αφαιρεθεί από τον 4.

Δ. Το 4 είναι κλάσμα;

Μ. Ναι, παρονομαστής ένα: $\frac{4}{1}$.

Δ. Κάνε την αφαίρεση $4 - \frac{1}{2}$.

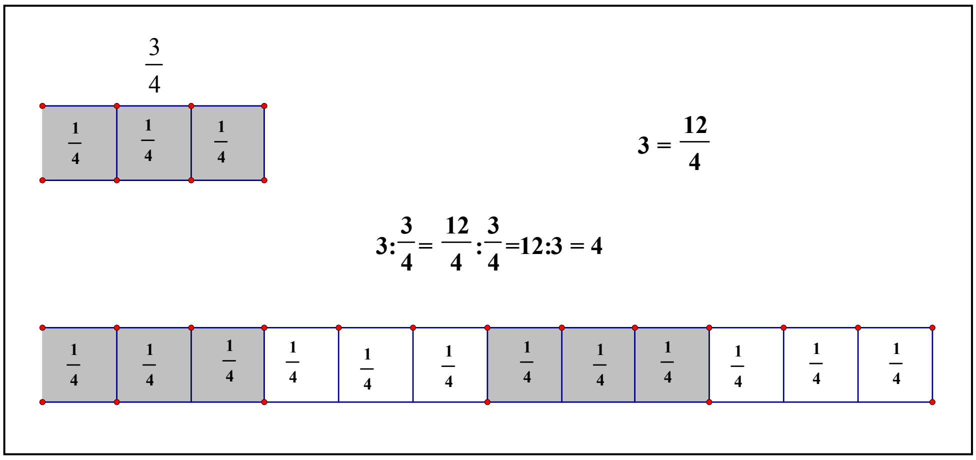
Μ. Εύκολο, ομώνυμα… $4 - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Δ. Αφαιρέσαμε ένα «$\frac{1}{2}$», συνεχίζουμε. Αν κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα, τότε η διαίρεση $\frac{4}{1}:\frac{1}{2} = \frac{8}{2}:\frac{1}{2}$ παριστάνει το πλήθος των (1/2) που αφαιρούνται από τον 4. Αυτό είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης 8:1.

Μ. Να κάνουμε και άλλο συγκεκριμένο παράδειγμα, μήπως με βοηθήσει να ξεφύγω από την εποπτεία και να οδηγηθώ σε αφηρημένους συλλογισμούς;

Δ. Με ειρωνεύεσαι, αλλά εγώ θα σου δείξω τον δρόμο. Η διδασκαλία είναι ηθική πράξη. Η ταπεινότητα το μέγιστο προσόν της.

Στην παρακάτω εικόνα κάθε τετραγωνάκι παριστάνει το $\frac{1}{4}$:



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Τα κλάσματα έχουν γίνει ομώνυμα, το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης $3:\frac{3}{4}$ είναι 12:3, $\frac{12}{3}$. Ο παρονομαστής «τέταρτα» αχρηστεύεται[8] για την συγκεκριμένη διαίρεση. Το πλήθος των αφαιρέσεων του 3/4 από το 12/4 είναι το ίδιο με το πλήθος των αφαιρέσεων του 3 από το 12.

Μ. Ένα παράδειγμα ακόμα;

Δ. Πόσα 3/16 αφαιρούνται από το 9/4; Για τον κοινό παρονομαστή χρησιμοποίησε το 4*16.

Μ. Ομώνυμα, $\frac{3\cdot 4}{16\cdot 4}$, $\frac{9\cdot 16}{4\cdot 16}$, ας σκεφτούμε, έχουμε εξηκοστά τέταρτα.

Το πλήθος των αφαιρέσεων του $\frac{3\cdot 4}{16\cdot 4}$ από το $\frac{9\cdot 16}{16\cdot 4}$ είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης των αριθμητών, $\frac{9\cdot 16}{4\cdot 3}$, $\frac{9\cdot 16}{4\cdot 3}=\frac{144}{12}=12$.

Δ. Καταλήγουμε στον αυτοματισμό της διαίρεσης κλασμάτων: πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη, $\frac{9}{4}:\frac{3}{16}=\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{3}$. Για το $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$ θα έχουμε: $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}=\frac{6}{8}:\frac{5}{8}=\frac{6}{5}$. Το κλάσμα $\frac{6}{5}$ είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης $\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$. Όταν τα κλάσματα γίνουν ομώνυμα, ο κοινός παρονομαστής είναι άχρηστος για την διαίρεση, οπότε τον παραλείπουμε. Θυμήσου ότι ο παρονομαστής είναι ένας προσδιορισμός, προσδιορίζει το μέγεθος της κλασματικής μονάδας.

Έχουμε πει ότι: αν χρησιμοποιήσουμε κλάσματα, τότε όλες οι διαιρέσεις είναι τέλειες. Για το παράδειγμα των ακεραίων που ανέφερες θα μπορούσαμε να γράψουμε $20:4=\frac{20}{1}:\frac{4}{1}=\frac{20}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{20}{4}$.

Μετά να κάνουμε απλοποίηση, 5, αν γίνεται. Όπως και στο παράδειγμα 1:7, γράφουμε άμεσα $1:7=\frac{1}{7}$, ακριβές πηλίκο της διαίρεσης ένα δια 7.

Για να βρούμε το πηλίκο δυο αριθμών, διαιρετέος δια διαιρέτης, διαιρέτης διαφορετικός από το 0, πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη, καλύπτει και την διαίρεση ακεραίων, όλες τις διαιρέσεις.

Μ. Άλλο ένα παράδειγμα;

Δ. $\frac{3}{7}:\frac{4}{17}=\frac{3\cdot 17}{7\cdot 17}:\frac{4\cdot 7}{17\cdot 7}=\frac{3\cdot 17}{4\cdot 7}=............=\frac{3\cdot 17}{7\cdot 4}=\frac{3}{7}\cdot\frac{17}{4}=\frac{51}{28}$

Μ. Οι τελείες σου ξέφυγαν;

Δ. Ο πολλαπλασιασμός είναι αντιμεταθετικός, $4\cdot 7=7\cdot 4$ στους παρονομαστές μεταξύ των τελειών, δεν μου ξέφυγαν, έμφαση.

Μετά χωρίζω και τα κλάσματα για να καταλήξω στον αυτοματισμό.

Τα κλάσματα γίνονται ομώνυμα, $\frac{3\cdot 17}{7\cdot 17}:\frac{4\cdot 7}{17\cdot 7}$ και το αποτέλεσμα της διαίρεσης $\frac{3}{7}:\frac{4}{17}$ είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα της διαίρεσης 51:28, $\frac{3}{4}:\frac{4}{17}=\frac{3}{4}\cdot\frac{17}{4}=\frac{3\cdot 17}{4\cdot 7}=\frac{51}{28}$.

Μ. Ξέρεις κάποια πράξη που δεν είναι αντιμεταθετική; Ένα παράδειγμα;

Δ. Η Πέμπτη μαθηματική πράξη[9].

Ύψωση ενός αριθμού σε κάποιον εκθέτη (δυνάμεις):

$3^2=3\cdot 3=9$, ενώ $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$, δες και το σχήμα στην επόμενη σελίδα. Επίσης: $4^5=4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=16\cdot 4\cdot 4\cdot 4=64\cdot 4\cdot 4=256\cdot 4=1024$, ενώ

$$5^4=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=25\cdot 5\cdot 5=125\cdot 5=625$$

Μ. Πέμπτη;

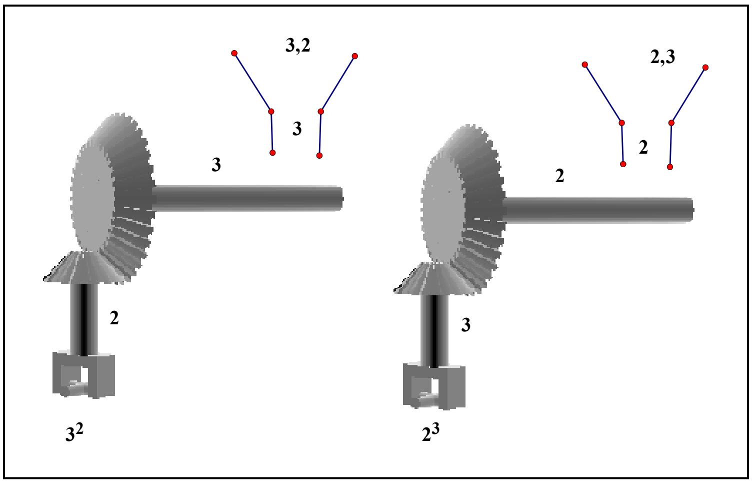
Πόσες μαθηματικές πράξεις υπάρχουν;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Επτά.

Μ. Εξηγήσεις;

Δ. Είναι η πέμπτη και οι δυο αντίστροφές της. Εύρεση της βάσης και εύρεση του εκθέτη.



Μ. Διευκρινήσεις;

Δ. Η «μηχανή των δυνάμεων[10]», δέχεται πρώτα τον 3, τον τοποθετεί «βάση» της δύναμης, μετά δέχεται τον 2, τον τοποθετεί «εκθέτη» και δίνει αποτέλεσμα 9, $3^2=3*3=9$. Αν αλλάξουμε τη σειρά, αν ρίξουμε στη μηχανή πρώτα τον αριθμό 2 και μετά τον 3, θα δώσει $2^3=2*2*2=8$.

Στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό δεν μας ενδιαφέρει η σειρά: 2+3=3+2, 2*3=3*2

Δ. Ο «3», ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στην 2η δίνει 9, είναι η **τετραγωνική ρίζα** του 9, συμβολικά: $\sqrt{9}=3$. Και το σχήμα $\sqrt{\ }$ είναι αποτέλεσμα της εξέλιξης των συμβόλων,

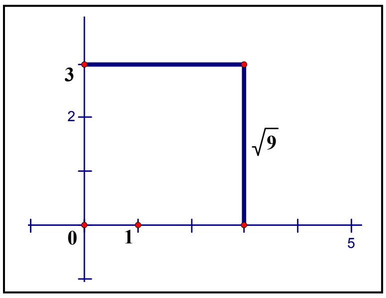
Μ. Δαρβίνος;

Δ. Όχι. Χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά[11] το 1525 από κάποιον Christoff Rudolff στο βιβλίο «Die Coss».

Μ. *Καλύτερα θα ήταν «Die pupil»*

Αλλά και $(-3)\cdot(-3)=(-3)^2=9$. Σωστά;

Δ. Σωστά, αλλά τετραγωνική ρίζα λέμε τον θετικό, τον 3.



Πολλές φορές λέμε και 3 στο τετράγωνο ίσον 9. Τετραγωνική ρίζα του 9 είναι η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 9 τετραγωνικές μονάδες. Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 3 είναι $3*3=3^2$. Κάποιο άλλο σύμβολο για τον αριθμό 3;

Μ. Άπειρα, σου γράφω δυο και ένα δώρο: $\frac{27}{9}, \frac{300}{100}$ και δώρο το (10-7).

Δ. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτά τα σύμβολα για τον 3, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $\left(\frac{27}{9}\right)^2, \left(\frac{300}{100}\right)^2$, $(10\text{-}7)^2$, διαφορετικά σύμβολα του αριθμού 9. Αν χρησιμοποιήσουμε το «νέο» σύμβολο για την πλευρά του τετραγώνου, το «$\sqrt{9}$», τότε για το εμβαδόν γράφουμε: $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}=9$. Αν δεν έχουμε συγκεκριμένο τετράγωνο, τότε για την πλευρά χρησιμοποιούμε έναν «αριθμητικό αντιπρόσωπο», ένα γράμμα, π.χ. «α», «β», «γ».

Μ. Το «α» είναι όποιος αριθμός θέλουμε;

Δ. Όποιος θέλουμε από τους αριθμούς που είναι δυνατόν να είναι πλευρές τετραγώνου, θετικός αριθμός, ακόμα και το μηδέν, αλλά όχι αρνητικός. Δεν δεχόμαστε τετράγωνο με μήκος πλευράς π.χ.(-2)cm. Όταν χρησιμοποιούμε κάποιο γράμμα, ανάλογα με το πρόβλημα που μελετάμε, καθορίζουμε τους αριθμούς που μπορεί να «εκπροσωπήσει». Οριοθετούμε[12] τις δυνατές αριθμητικές τιμές του γράμματος πριν ασχοληθούμε με τη λύση.

Μ. Επιπλέον διευκρινήσεις;

Δ. Πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με τον εαυτό του και βρίσκουμε 9. Ποιος είναι ο αριθμός;

Μ. Ο 3, μισό…και ο (-3).

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Έχουμε ένα τετράγωνο με εμβαδόν $9cm^2$. Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του;

Μ. Είναι το ίδιο πρόβλημα.

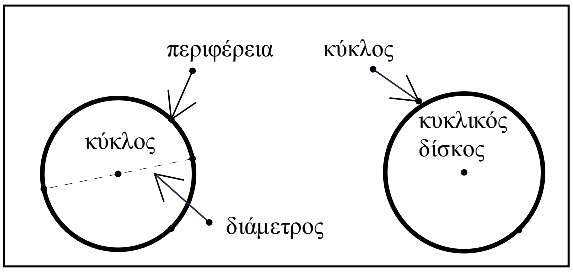
Δ. Δεν απάντησες.

Μ. Ο 3 ή ο (-3), αλλά όχι, δεν γίνεται αρνητική πλευρά, μόνο ο αριθμός 3.

Δ. Στο πρώτο πρόβλημα αναζητούμε τον κατάλληλο, αν υπάρχει, από όλους τους αριθμούς που έχουμε μάθει. Στο δεύτερο πρόβλημα δεν θέλουμε τους αρνητικούς, δεχόμαστε μόνο θετικές υποψηφιότητες, ή και το μηδέν.

Μ. Γιατί δεν επιλέγουμε το αρχικό της πλευράς, το γράμμα «π», για την πλευρά του τετραγώνου;

Δ. Αποφεύγουμε το «π» για πιθανή σύγχυση. Υπάρχουν ελάχιστα γράμματα, όπως π.χ. τα «π» , «φ», «e», που **είναι αριθμοί**. Το σύμβολο «π», πρώτο γράμμα της λέξης «περιφέρεια» εισήγαγε το 1706 ο William Jones. Στην εποχή μας η περιφέρεια μετονομάστηκε σε κύκλο και ο κύκλος σε κυκλικό δίσκο. Γνωρίζουμε ήδη τον αριθμό 180, «πανεπίπεδη» σταθερά για το άθροισμα των γωνιών τριγώνου. Ο Ιπποκράτης ο Χίος, γύρω στο 400 π.Χ., βρήκε μια «παν-κύκλια» σταθερά: για οποιονδήποτε κύκλο, μικρής ή μεγάλης ακτίνας, ο λόγος του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του είναι σταθερός αριθμός, ο ίδιος για όλους τους κύκλους, αυτός, που αργότερα συμβολίσαμε με «π».



Μ. Λόγος; Δηλ. είναι κάποιο κλάσμα;

Δ. Λόγος, κλάσμα, αλλά όχι ρητό κλάσμα, δεν είναι δυνατόν να γράψουμε τον «π» σαν πηλίκο ακεραίων, δεν είναι ρητός αριθμός[13].

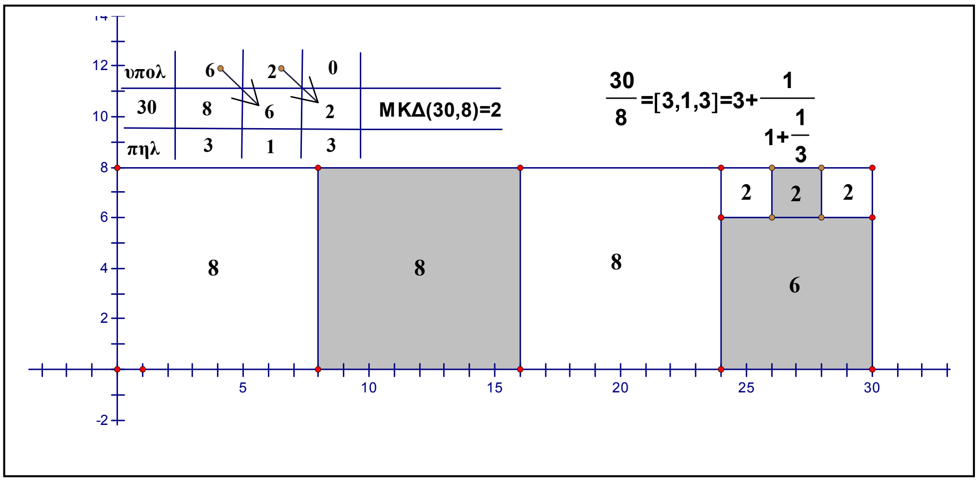
Είναι άρρητος. Η πρώτη απόδειξη δόθηκε στα τέλη του $18^{ου}$ αιώνα από τον γερμανοελβετό μαθηματικό J.H.Lampert, με την βοήθεια των συνεχών κλασμάτων.

Μ. Των «συνεχών»;

Δ. Εκτός από τα συνήθη κλάσματα, έχουμε και τα συνεχή[14].

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης έχει τα γνωστά πλεονεκτήματα, αλλά ίσως επικεντρώνεται στα αποτελέσματα των μετρήσεων και επισκιάζει τις **διαδικασίες μέτρησης** που μας προσφέρουν τα κλάσματα. Η έννοια του συνεχούς κλάσματος προκύπτει φυσιολογικά όταν προσπαθούμε να μετρήσουμε έναν αριθμό Α με τον Β ή ένα μέγεθος Α με το Β.

Θα δούμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Προσπαθούμε να «μετρήσουμε» τον αριθμό 30 με τον αριθμό 8. Σχεδίασα ορθογώνιο 30 επι 8 και αφαιρώ τετράγωνα για καλύτερη αναπαράσταση. Στην γραμμή «πηλ» είναι τα μερικά πηλίκα της διαίρεσης 30:8, στην γραμμή «υπολ» τα μερικά υπόλοιπα. Αφαιρούνται τρία οκτάρια, πρώτο μερικό υπόλοιπο το 6.



Στην προσπάθεια μέτρησης του 8 με τον 6, μια αφαίρεση, δεύτερο μερικό υπόλοιπο 2, τρίτη προσπάθεια, μέτρηση του 6 με τον 2, ακριβώς 3.

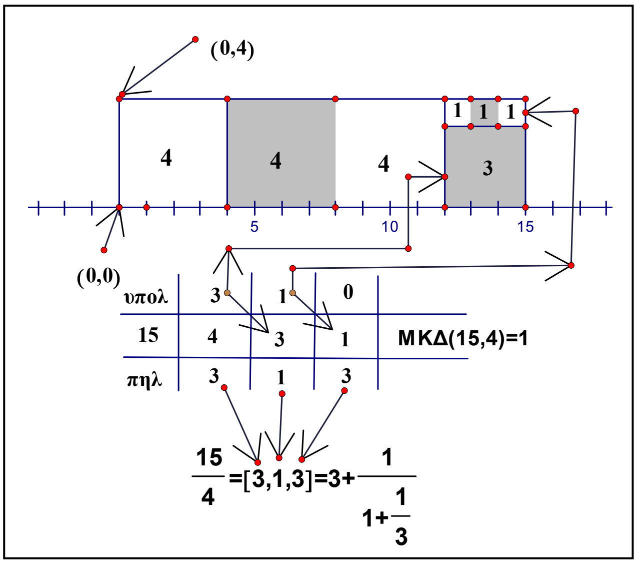
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Τους 30 και 8 μετρά φυσικά η μονάδα, αλλά και ο αριθμός 2, ο ΜΚΔ των 30 και 8. Το σχήμα [3,1,3] έχει συμπυκνωμένη την προσπάθεια μέτρησης του 30 με τον 8, είναι το πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα $3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}$. Οι αριθμοί 3,1,3, τα μερικά πηλίκα, είναι οι όροι του συνεχούς κλάσματος. Αν θέλουμε να μεταμορφώσουμε το συνεχές σε συνήθη κλασματική μορφή, για τους υπολογισμούς θα πρέπει να κινηθούμε «ανάποδα»:

$$3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}=3+\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}=$$

$$=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}}=$$

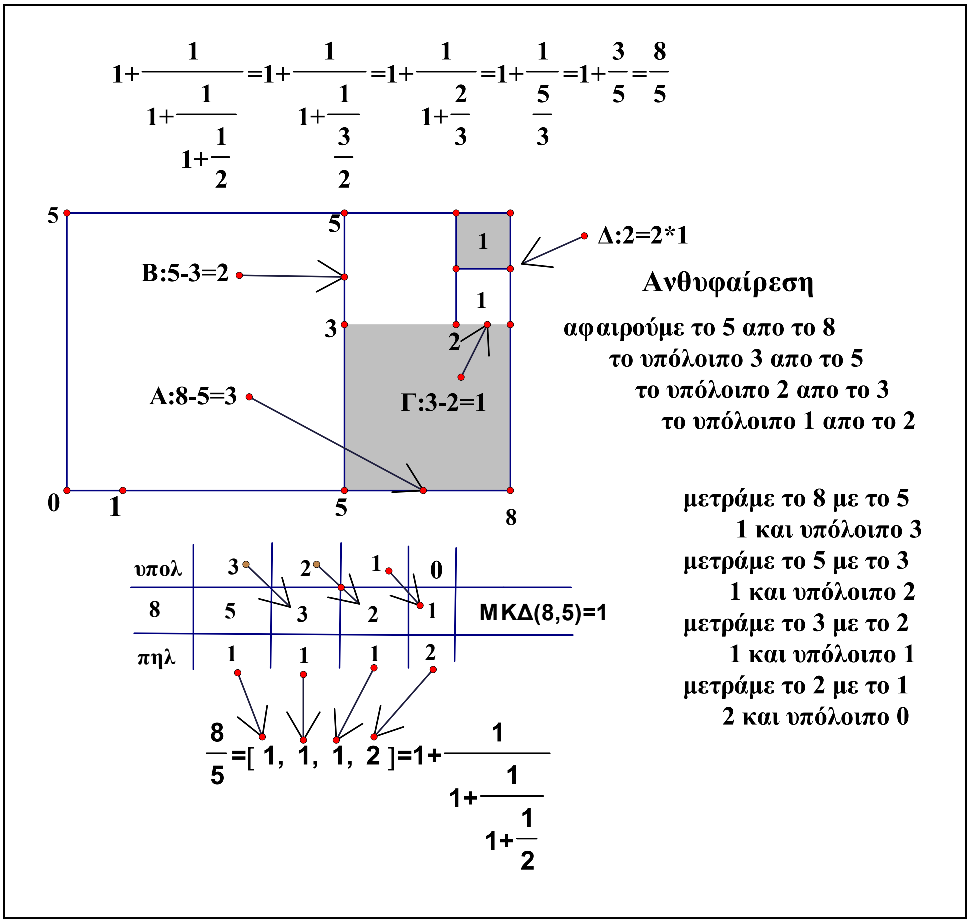
$$=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}.$$



Βρίσκουμε το ανάγωγο ισοδύναμο του $\frac{30}{8}$, $\frac{30}{8}=\frac{2\cdot 15}{2\cdot 4}=\frac{15}{4}$. Για τα κλάσματα $\frac{15}{4},\frac{30}{8}$ τα μερικά πηλίκα είναι ίδια, γιατί όταν πολ/ζουμε διαιρετέο και διαιρέτη επί τον **ίδιο** αριθμό, το πηλίκο δεν μεταβάλλεται. Το υπόλοιπο όμως πολ/ζεται επί τον ίδιο αριθμό, και επειδή ο ΜΚΔ είναι υπόλοιπο, το τελευταίο μη μηδενικό υπόλοιπο, βρίσκουμε ΜΚΔ(30, 8)=2=2*1=2*ΜΚΔ(15, 4).

Το συνεχές κλάσμα [3,1,3] παριστάνει όλα τα κλάσματα που είναι ισοδύναμα με το ανάγωγο 15/4.

Όταν οι αριθμοί είναι ακέραιοι, ακόμα και πρώτοι μεταξύ τους, δηλ. έχουν ΜΚΔ την μονάδα, π.χ. ΜΚΔ(8,5)=1, η διαδικασία, ο «Ευκλείδειος αλγόριθμος», τερματίζεται, η μονάδα μετρά όλους τους αριθμούς. Μελέτησε και επαλήθευσε στο σπίτι ότι $\frac{8}{5} = [1,1,1,2] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$, προαιρετική εργασία, άσκηση θέλησης.



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Στα «μεγέθη» δημιουργούνται προβλήματα. Η προσπάθεια μέτρησης της διαγωνίου τετραγώνου με την πλευρά, οδηγεί στο άπειρο απλό συνεχές κλάσμα $\left[1,2,2,2,...\right]=\left[1,\overline{2}\right]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{...}}}}$

Ο αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ δύο αριθμών είναι ουσιαστικά η μέθοδος που μετατρέπει ένα κλάσμα σε συνεχές κλάσμα και είναι το πρώτο σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της έννοιας του συνεχούς κλάσματος.

Ο Ευκλείδης ονομάζει την μέθοδο για την εύρεση του μεγίστου κοινού διαιρέτη δυο αριθμών, «κοινού μέτρου» κατά τους αρχαίους Έλληνες, «Ανθυφαίρεση». Επειδή, κατά την φιλοσοφική αντίληψη των Πυθαγορείων, η μονάδα δεν είναι αριθμός, αριθμός είναι πλήθος μονάδων, η μονάδα είναι μια οντότητα από την οποία παράγονται οι αριθμοί, διατυπώνει και αποδεικνύει ξεχωριστά τις προτάσεις VII.1, VII.2 που αφορούν το μέγιστο κοινό μέτρο δυο **αριθμών**.

Ο Ευκλείδης επανέρχεται στην ανθυφαίρεση στο βιβλίο X, με την πρόταση X.2, όπου από ανθυφαίρεση δύο ανίσων αριθμών, πηγαίνει σε ανθυφαίρεση δυο ανίσων μεγεθών[15], μεγέθη, π.χ. ευθ. τμήματα, επιφάνειες.

Όμως, ενώ στους φυσικούς αριθμούς η διαδικασία τερματίζεται, δυο αριθμοί μετρώνται οπωσδήποτε από την μονάδα, αλλά, πιθανόν να έχουν και άλλο κοινό μέτρο, π.χ. ο 5 μετρά τους 15 και 35 με αποτελέσματα μετρήσεων 3 και 7, για τα μεγέθη υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

ι)αν η διαδικασία τερματίζεται, τότε έχουμε βρει κοινό μέτρο των μεγεθών, τα μεγέθη αυτά είναι «σύμμετρα», ενώ, ιι)αν δεν τερματίζεται, αν είναι άπειρη, δηλ. αν στην προσπάθεια μέτρησης του μεγαλυτέρου από το μικρότερο μέγεθος, το υπόλοιπο που κάθε φορά απομένει **δεν** μετρά το προηγούμενο του, αν «ανθυφαιρείται» συνεχώς το μικρότερο από το μεγαλύτερο, τότε τα δύο μεγέθη είναι «ασύμμετρα». Η άπειρη ανθυφαίρεση, αποτελεί ένα **κριτήριο ασυμμετρίας**.

Σε σύγχρονη ορολογία, έχουμε βρει έναν άρρητο αριθμό, αυτόν που εκφράζει το μέγεθος που προσπαθούμε να μετρήσουμε.

Αλλά το ρεύμα μας παρασύρει. Θα επανέλθουμε στους «γνώμονες»

Μ. Ποιο ρεύμα; Για ποιο θέμα συζητάμε;

Δ. Θαλάσσιο ρεύμα, δεν έχεις ακούσει; Ενώ κολυμπάς προς την ακτή, το ρεύμα σε οδηγεί προς στην αντίθετη κατεύθυνση. Θα πρέπει να κολυμπάς παράλληλα προς την ακτή! Ας ολοκληρώσουμε την αναφορά στον «**π**».

Το 1882 ο Carl Lious Ferdinard Lindemann, Λίντεμαν, βελτίωσε μια μέθοδο του γάλλου Hermit και απέδειξε ότι ο «π» ανήκει στην κατηγορία των πιο δυσνόητων αρρήτων, των «υπερβατικών» αρρήτων.

Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιούμε «ρητές» προσεγγίσεις. Όπως είπαμε και στη συζήτηση για τον «άξονα», συνήθως χρησιμοποιούμε τα δυο πρώτα δεκαδικά, «14», δηλ. προσεγγιστικά $\pi \approx 3{,}14$. Ο Αρχιμήδης, 287-212π.Χ., είναι ο πρώτος που περιέγραψε μια διαδικασία με την οποία βρίσκουμε όποια προσέγγιση του «π» θέλουμε. Ακριβέστερα ο Αρχιμήδης βρήκε ότι $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, δεκαδικοί: $3{,}140845070422... < \pi < 3{,}\overline{142857}$.

Μ. Ξέχασες την παύλα.

Δ. Ναι! $\ldots 3{,}\overline{14084507042253521126760563380281690} < \pi < 3{,}\overline{142857}$

Μ. Οχ! Τι είναι αυτό;

Δ. Το 223/71 έχει περίοδο 35 ψηφίων, το 22/7 μικρότερη, 6 ψηφία.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Και πως έβρισκε τόσα ψηφία ο Αρχιμήδης;

Δ. Κλάσματα έβρισκε, **εμείς** τα «μεταφράζουμε» σε δεκαδικούς αριθμούς. Αν θέλουμε «καλύτερη» προσέγγιση, για παρονομαστή μικρότερο του 100 χρησιμοποιούμε το κλάσμα $\frac{311}{99}$. Ο ρητός $\frac{355}{113} = 3{,}14159...$, περίοδος 112 ψηφίων, είναι η «βέλτιστη» προσέγγιση του «π» μεταξύ όλων των κλασμάτων με παρονομαστή που δεν υπερβαίνει[16] τον 16603. Μερικές φορές βλέπουμε $\pi = 3{,}14159...$. Τα ψηφία «14159» είναι μέρος της **περιόδου στο κλάσμα**, στον «π» δεν υπάρχει περίοδος. Επόμενη το κλάσμα $\frac{52163}{16604}$. Μελλοντικά θέματα. Σπόρος. Για να βλαστήσει απαιτεί εξαιρετική προσπάθεια. Η συζήτηση ήταν περί πλευράς τετραγώνου.

Μ. Μερικές ερωτήσεις ακόμα; Επιτρέπονται;

Δ. Επιβάλλονται. **Πρέπει** να ρωτάς. Μαθαίνεις από τις ερωτήσεις σου.

Από τα αλλεπάλληλα γιατί. Η εξέλιξή σου σταματά όταν αρχίζεις να θεωρείς φυσικά αυτά που συμβαίνουν γύρω σου, όταν ακολουθείς, χωρίς διερεύνηση, αυτά που σου επιβάλλει η καθημερινότητα και η συνήθεια.

Μ. Οι άρρητοι είναι ανακάλυψη του Ευκλείδη;

Δ. Όχι. Ο Ευκλείδης έγραψε τα «Στοιχεία» περίπου το 300π.Χ.

Η «δημοσιοποίηση» αρρήτων έγινε 200 χρόνια νωρίτερα, ενεδεχομένως από τον Ίππασο, μαθηματικό στη σχολή του Πυθαγόρα. Η έρευνα συνεχίστηκε, ιδίως από τον Θεόδωρο τον Κυρηναίο[17], περίπου 430π.Χ., και τον μαθητή του Θεαίτητο.

Μ. Μερικά ακόμα παραδείγματα αρρήτων;

Δ. Με τα σημερινά σύμβολα, π.χ. οι αριθμοί $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, πλευρές τετραγώνων με εμβαδά 2,3,5 τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα.

Μ. Και με τον «π» ασχολήθηκε ο Αρχιμήδης, ας πούμε 250 π.χ.

Δ. Ποια είναι η απορία σου;

Μ. Πως δεν απέδειξαν οι αρχαίοι ότι και ο «π» είναι άρρητος και φτάσαμε στον $18^{ο}$ αιώνα;

Δ. Οι αρχαίοι οδηγηθήκαν σε αρρητότητες από τις αποτυχημένες προσπάθειές τους να μετρήσουν **ακριβώς** μεγέθη τα οποία κατασκεύαζαν με **κανόνα,** δηλ. χάρακα χωρίς υποδιαιρέσεις για μετρήσεις, και **διαβήτη**, τα εργαλεία για τις κατασκευές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Οι προσπάθειες γινόταν με την διαδικασία της ανθυφαίρεσης, περιπτώσεις ι και ιι που είδαμε προηγουμένως.

Ο «π» **δεν κατασκευάζεται** με κανόνα και διαβήτη, το θεώρημα του Lindemann το αποδεικνύει[18], όχι η αρρητότητά του.

Μ. Ο $\sqrt{2}$ κατασκευάζεται;

Δ. Ότι είπαμε λίγο πριν για τον $\sqrt{9}$ ισχύει και για τον $\sqrt{2}$. Ο $\sqrt{2}$ είναι η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικές μονάδες.

Μ. Και δεν μπορώ να βρω έναν αριθμό, να τον πολλαπλασιάσω επί τον εαυτό του και το γινόμενο να είναι 2;

Δ. Ρητό όχι. Υπάρχουν πολλές αποδείξεις με διάφορα μαθηματικά «εργαλεία». Ακόμα και για την σχεδίαση τετραγώνου με εμβαδόν 2 cm^2 θα πρέπει να είσαι προσεκτικός.

Μ. Μα πως θα το σχεδιάσω, αφού δεν γνωρίζω το μήκος της πλευράς;

Δ. Κατασκευάζεται εύκολα, δες στου «γνώμονες».

Μ. Η τετραγωνική ρίζα ισχύει και για κλάσματα;

Δ. Με το ίδιο ακριβώς νόημα: $\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$, γιατί $\frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{25}$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$\sqrt{0,01}=\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{10}=0,1$, γιατί $0,1\cdot 0,1=0,01$, $\sqrt{0,36}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\frac{6}{10}=0,6$ γιατί $0,6\cdot 0,6=0,36$.

Μ. Και η έβδομη πράξη;

Δ. Σε ποιον εκθέτη πρέπει να υψώσω τον 3 για να πάρω 9;

Μ. Απάντηση: 2, $3^2=3\cdot 3=9$.

Δ. 0 «2» είναι ο λογάριθμος του 9 με βάση 3, σύμβολο $2=\log_3 9$.

Ας αφήσουμε προς το παρόν αυτά τα θέματα.

Ο Μαραθώνιος είναι 42195 μέτρα, αλλά αρχίζεις από το πρώτο βήμα, από το πρώτο μέτρο, μετά το δεύτερο,… και αφού καλύψεις τα 195 μέτρα, θα πρέπει να καλύψεις τη μισή απόσταση, και μετά την άλλη μισή, τα 21097,5 μέτρα.

Θα ολοκληρώσεις τον αγώνα εφόσον έχεις ασκηθεί καθημερινά, για μεγάλο χρονικό διάστημα, με ποικιλία ασκήσεων και προπονητικών μεθόδων. Εκπτώσεις δεν υπάρχουν. Για να τερματίσεις είναι απαραίτητο να καλύψεις και το τελευταίο μισό μέτρο.

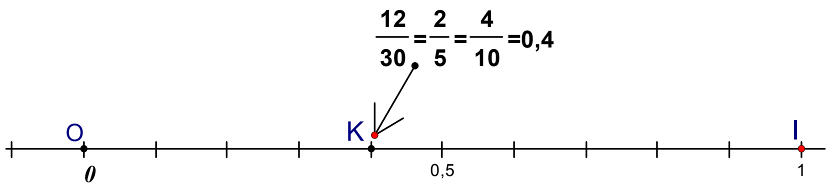
Μ. Τόσα χιλιόμετρα, μπορεί να συμβεί κάτι έκτακτο και να μην τερματίσω, μια σύμπτωση.

Δ. Οι συμπτώσεις είναι η δικαιολογία των απροετοίμαστων, ανατολική φιλοσοφία.

Μ. No problem! Συνεχίζουμε κλασματικά.

Δ. Μπορείς να τοποθετήσεις σ' έναν άξονα το 0,4;

Μ. Πολύ απλό, στο Κ, σου γράφω το ανάγωγο και μερικά από τα άπειρα ισοδύναμα δώρο!



$\frac{2}{5}=\frac{20}{50}=\frac{200}{500}=\frac{2000}{5000}=\frac{20000}{50000}=\frac{200000}{500000}$. Τι δεν σου αρέσουν;

Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε τους όρους και με κλάσματα;

Δ. Τι εννοείς;

Μ. Για ισοδύναμα πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε τους όρους του κλάσματος μόνο με φυσικούς, ή με ότι αριθμό θέλουμε;

Δ. Με όποιον αριθμό θέλεις. Πολλαπλασίασε π.χ. και τους δύο όρους του κλάσματος $\frac{2}{5}$ επί τον ρητό $\frac{3}{4}$.

Μ. Απλό: $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{4}$, $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$, $\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{5\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{6}{4}}{\frac{15}{4}}=\frac{6}{4}:\frac{15}{4}=\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{6\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 15}=\frac{6}{15}$.

Δ. Είναι το αποτέλεσμα ισοδύναμο με το 2/5 ;

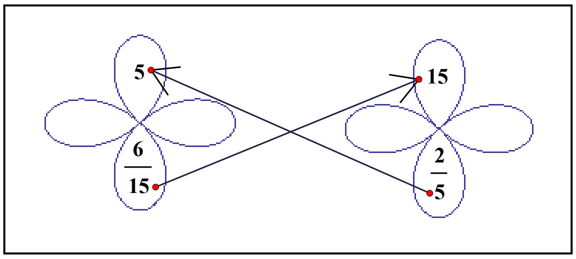
Μ. Απλοποίηση, διαιρώ δια 3 και τους δύο όρους, βρίσκω 2/5, είναι.

Δ. Μπορείς να δεις χωρίς απλοποίηση αν το $\frac{6}{15}$ είναι ίσο με το $\frac{2}{5}$;

Μ. Ναι, για να τα συγκρίνω, πρέπει ομώνυμα, καπελάκια, δεν χρειάζεται να ψάχνω ΕΚΠ, αρκεί ένα κοινό πολλαπλάσιο, για δύο κλάσματα εύκολο, παίρνω το γινόμενο των παρονομαστών: $\frac{6}{15}=\frac{6\cdot 5}{15\cdot 5}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 15}{5\cdot 15}$, αριθμητές 30, παρονομαστές $5\cdot 15$ και στα δυο, ομώνυμα με ίσους αριθμητές, ίσα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Σου κάνω δώρο την εποπτεία:



Μ. Ευχαριστώ, είσαι πολύ γενναιόδωρος!

Δ. Τα άπειρα ισοδύναμα με το $\frac{2}{5}$ είναι αδύνατον να τα γράψουμε, μπορούμε όμως να τα σχεδιάσουμε.

Μ. *Κάτι δεν πάει καλά με το δάσκαλο, πως θα σχεδιάσω άπειρα κλάσματα; Έχω ακούσει για την αύξηση της ηλικίας συνταξιοδότησης, αλλά η ζωή εξακολουθεί να είναι πεπερασμένη…εκτός εάν άλλαξε κάτι, χθες δεν άκουσα ειδήσεις, με ζόρισε ο Βαγγέλης στο σκάκι…, λες να ξέρει κάτι ο παππούς;*

Δ. Με ποιον μιλάς πάλι;

Μ. Τίποτα, έκανα αυτοαξιολόγηση! Πως θα γίνει αυτή η σχεδίαση, αφού όλα είναι ίσα με το $\frac{2}{5}$, στον άξονα θα έχουν το ίδιο παραστατικό σημείο, το Κ που είδαμε πριν. Πως θα ξεχωρίζω τα ισοδύναμα;

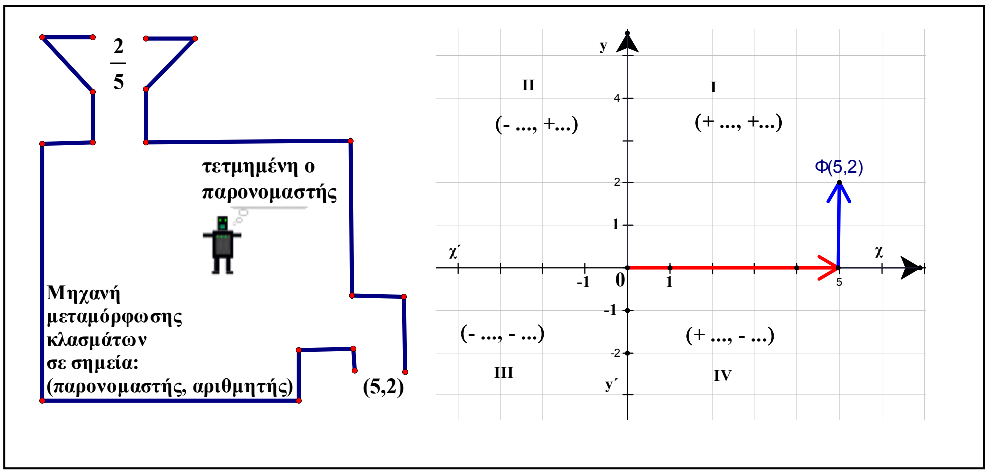
Δ. Θα χρησιμοποιήσουμε το σύστημα συντεταγμένων.

Μ. Συντεταγμένες; Σημεία (χ, y), μετατοπίσεις οριζόντιες και κατακόρυφες;

Δ. Το κλάσμα αποτελείται από τον αριθμητή που είναι «πάνω» και τον παρονομαστή που είναι «κάτω». Παριστάνουμε το $\frac{2}{5}$ με το σημείο Φ(5, 2).

Μπορείς να το θυμάσαι: η γραμμή του κλάσματος είναι σαν τον άξονα χ΄χ. Ο αριθμητής είναι πάνω από τη γραμμή, η απόλυτη τιμή του αριθμητή είναι η απόσταση από τον χ΄χ, το «πάνω – κάτω» καθορίζεται από το πρόσημο, + ή - , είναι κίνηση στον κατακόρυφο άξονα, δηλ. τεταγμένη. Μεταμορφώνουμε το κλάσμα στο σημείο (**παρονομαστής, αριθμητής**).

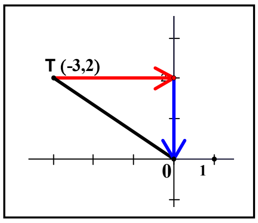
Πρόσεξε αυτή τη λεπτομέρεια: Ο παρονομαστής είναι η τετμημένη και ο αριθμητής η τεταγμένη. Μπορείς να βρεις την κλίση του τμήματος με άκρα τα σημεία (0,0) και Φ(5,2);



Μ. Δεξιότερα το Φ(5,2), $\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{2-0}{5-0} = \frac{2}{5}$. Όταν το ένα άκρο είναι η αρχή, γλιτώνουμε και τις αφαιρέσεις, η κλίση είναι το κλάσμα που μεταμορφώνεται στο σημείο Φ.

Εκτός αν…, αν η αρχή (0,0) είναι δεξιότερα. Να κάνουμε ένα παράδειγμα;

Δ. Ας πάρουμε το $\frac{2}{-3}$. Παραστατικό σημείο το T(-3, 2). Κλίση του τμήματος με άκρα (0,0) και (-3,2):



$\frac{0-2}{0-(-3)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$. Είναι το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης ετεροσήμων, 2:(-3), $\frac{2}{-3} = \frac{+2}{-3} = -\frac{2}{3} = \frac{-2}{+3}$.

Μ. Και με τα άπειρα ισοδύναμα τι γίνεται;

Δ. Ας δοκιμάσουμε ένα κλάσμα με μικρούς θετικούς όρους, π.χ. το 1/2.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Θα μικρύνω και τη μονάδα μέτρησης για να αποτυπώσουμε περισσότερα σημεία-κλάσματα. Μπορείς να γράψεις μερικά ισοδύναμα με το 1/2 ;

Μ. Εύκολο: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = ...$

Δ. Και μερικά με αρνητικούς όρους;

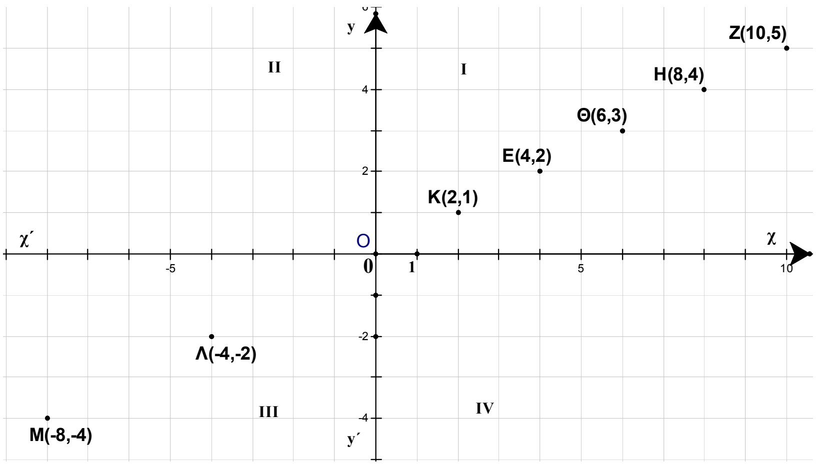
Μ. Αμέσως: $\frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{-3}{-6} = \frac{-4}{-8} = \frac{-5}{-10} = ...$ καλό; Αυτοματισμός, $- : - = +$

Δ. Εξαιρετικό! Στο παρακάτω σχήμα μπορείς να βρεις ποια κλάσματα παριστάνουν τα σημεία Ζ, Η, Θ, Ε, Κ, Λ, Μ;

Μ. Είπαμε αριθμητής… το πάνω-κάτω, τεταγμένη , παρονομαστής η τετμημένη, επομένως:

$$\mathrm{Z} : \frac{5}{10}, \; \mathrm{H} : \frac{4}{8}, \; \mathrm{K} : \frac{1}{2}, \; \mathrm{M} : \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \; \Lambda : \frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \; \Xi = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2},$$

όλα ισοδύναμα, ανάγωγο το 1/2.



Δ. Ξέχασες τα Θ, Ε.

Μ. Και συ ξέχασες να ονομάσεις «Ξ» το σημείο (-2, -1). Δικαιούμαι να ξεχάσω περισσότερα. Είμαι μαθητής!

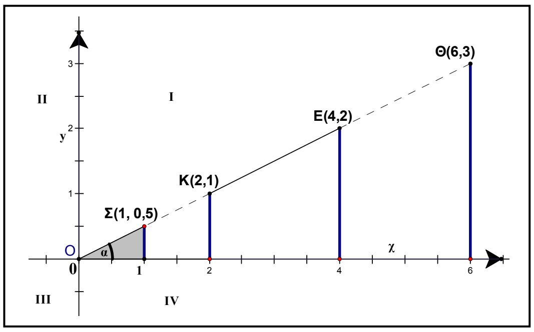
Δ. Εντάξει! Υπολόγισε τις κλίσεις των τμημάτων ΚΕ, ΚΘ, ΜΛ, ΜΖ, ΟΚ,ΟΕ,ΟΘ, ΟΗ, ΟΖ, ΛΟ, ΜΟ.

Μ. Κλίση, για το ΚΕ, $\dfrac{\text{δφρ τεταγμένων}}{\text{δφρ τετμημένων}} = \dfrac{2-...}{4-...}$, $... = \dfrac{2-1}{4-2} = \dfrac{1}{2}$.

Για τη διαφορά έγραψα μόνο τα σύμφωνα, τα φωνήεντα εννοούνται… Για το ΚΘ, το Θ δεξιότερα, $\dfrac{3-1}{6-2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. ΜΛ: προσέχουμε τα « - », $\dfrac{-2-(-4)}{-4-(-8)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, ΜΖ: $\dfrac{5-(-4)}{10-(-8)} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{1}{2}$, ΟΗ: $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, ΛΟ: $\dfrac{0-(-2)}{0-(-4)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, …όλες οι κλίσεις είναι 1/2.

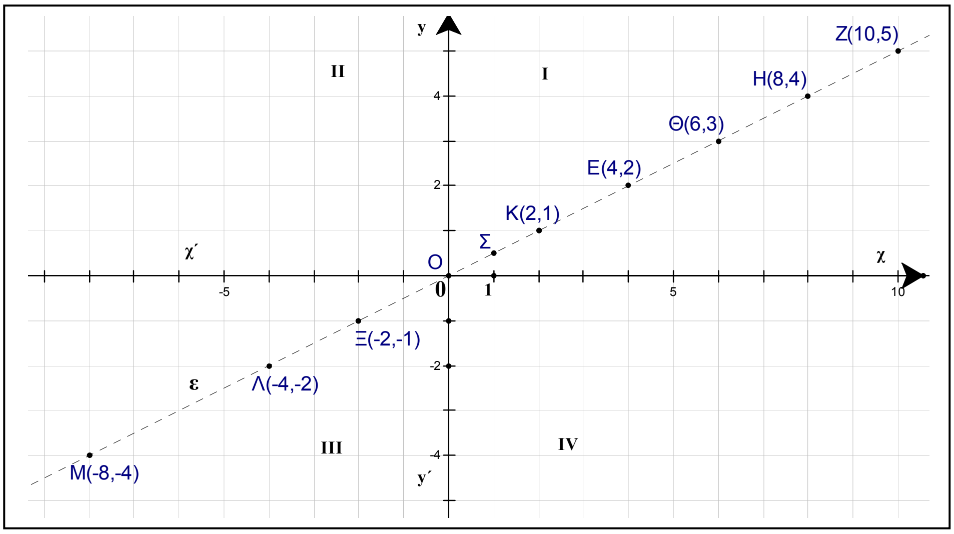
Δ. Για τα τμήματα ΟΚ, ΟΕ, ΟΘ οι οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις αλλάζουν, αλλά το πηλίκο $\dfrac{\text{κατακόρυφη}}{\text{οριζόντια}}$ είναι σταθερό, $\dfrac{1}{2}$.

Τα τμήματα δημιουργήθηκαν με αρχή το Ο: ΟΚ, ΟΕ, ΟΘ. Και στα τρία τμήματα, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι μισή μονάδα για κάθε μονάδα οριζόντιας μετατόπισης. Αν κινηθούμε από το σημείο (0,0) μια μονάδα κατά την θετική κατεύθυνση του χ΄χ, «ανεβαίνουμε» μισή μονάδα για να συναντήσουμε το ΟΚ, είτε το ΟΕ, είτε το ΟΘ. Ονομάζουμε Σ το σημείο (1, 0,5). Τα σημεία Κ, Ε και Θ είναι στην προέκταση του τμήματος ΟΣ. Το τμήμα ΟΣ καθορίζει **την** ευθεία που διερχόμενη από το Ο ανεβαίνει μισή μονάδα για κάθε μονάδα οριζόντιας μετατόπισης.



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Υποχρεώνονται και τα σημεία Η και Ζ καθώς επίσης και τα Ξ, Λ, Μ να βρίσκονται πάνω σ' αυτή την ευθεία, την «ε», γιατί και τα τμήματα ΟΗ, ΟΖ, ΞΟ, ΛΟ και ΜΟ έχουν κλίση $\frac{1}{2}$.



Βλέπουμε τα σημεία, φανταζόμαστε τα κλάσματα.

Αριθμητές οι τεταγμένες, παρονομαστές οι τετμημένες.

Κάποια παρατήρηση για την αριθμητική σχέση τετμημένης – τεταγμένης σε κάθε κλάσμα;

Μ. Οι τετμημένες είναι διπλάσιες από τις τεταγμένες.

Δ. Οι τεταγμένες;

Μ. Οι τεταγμένες είναι μισές.

Δ. Πιο επιστημονικά;

Μ. Κάθε τεταγμένη είναι το $\frac{1}{2}$ της αντίστοιχης τετμημένης.

Δ. Πολύ καλά! Κάνε ένα πίνακα αντιστοίχων τιμών τετμημένης, «χ», και τεταγμένης, «y».

Μ.

τεταγμένες	5	4	3	2	1	-2	-4	…	1	y
τετμημένες	10	8	6	4	2	-4	-8		2	χ

Μπορούμε να γράψουμε τις τετμημένες στην πρώτη γραμμή του πίνακα;

Δ. Μπορούμε, προσέχουμε όμως να αλλάξουμε και τα σύμβολα, «χ» οι τετμημένες, και «y» οι τεταγμένες.

τετμημένες	10	8	6	4	2	-4	-8		2	χ
τεταγμένες	5	4	3	2	1	-2	-4	…	1	y

Από τον πίνακα των αντιστοίχων τιμών παρατηρούμε ότι κάθε τετμημένη είναι διπλάσια από την αντίστοιχη τεταγμένη ή ότι κάθε τεταγμένη είναι το $\frac{1}{2}$ της αντίστοιχης τετμημένης. Με οποιαδήποτε από τις δυο αυτές ερμηνείες μπορούμε στον πίνακα να συμπληρώσουμε και το (0,0). Φυσικά ο πίνακας μπορεί να συμπληρωθεί με άπειρα ζευγάρια τιμών, αλλά η ζωή είναι πεπερασμένη, κατά την «αυτοαξιολόγηση» που έκανες πριν, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε σύμβολα για να τον περιγράψουμε.

Μ. *Το άκουσε! Δεν βλέπει καλά, αλλά η ακοή…σπέσιαλ! Ο Βαγγέλης έχει δίκιο, όταν αδυνατίζει η όραση, δυναμώνει η ακοή…*

Δ. Έχει επικρατήσει η συνήθεια να περιγράφουμε πως προκύπτει η τεταγμένη από την αντίστοιχη τετμημένη, οπότε ο πίνακας περιγράφεται από την έκφραση : $\text{τεταγμένη} = \frac{1}{2}\text{της αντίστοιχης τετμημένης}$.

Οι τετμημένες αναζητούνται στον άξονα χ΄χ, αντιπρόσωπος οποιασδήποτε τετμημένης είναι το σύμβολο «χ».

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σύμβολο για την τυχαία, μη συγκεκριμένη τεταγμένη είναι το y. Σημείο (χ, y). Η προηγούμενη έκφραση γράφεται συμβολικά: $y=\frac{1}{2}\chi$.

Ας πάρουμε ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{1}{2}$, π.χ. το $\frac{150}{300}$ Ονομάζουμε Ω το παραστατικό του σημείο, το (300, 150). Το τμήμα ΟΩ έχει κλίση $\frac{1}{2}$, και με τις ίδιες σκέψεις, συμπεραίνουμε ότι το σημείο Ω βρίσκεται πάνω στην ευθεία που καθορίζεται από το ΟΣ, ή το ΟΚ, ή το ΟΕ Όλα τα σημεία που παριστάνουν τα ισοδύναμα με το 1/2 κλάσματα βρίσκονται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από το (0,0) με κλίση $\frac{1}{2}$.

Μ. Το βλέπω αυτό, αλλά αν γράψω $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\ldots\ \frac{0}{0}$ θα έχουμε προβλήματα. Ξέρω ότι οι μαθηματικοί αντιπαθούν τα κλάσματα με παρονομαστή 0. Βέβαια εμένα δεν με πειράζει, το 0 μου είναι συμπαθητικός αριθμός, ούτε «+», ούτε « - » , ούτε μετακινήσεις στους άξονες.

Δ. Ίσως είναι σωστότερη έκφραση να πούμε ότι αποφεύγουν τον αριθμό «0» για παρονομαστή. Τα σημεία που παριστάνουν τα ισοδύναμα με το $\frac{1}{2}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία «ε». Η ευθεία αυτή διέρχεται και από το σημείο (0,0). Δεν μπορούμε να γράψουμε $\frac{1}{2}=\frac{0}{0}$, αλλά μπορούμε να σκεφτούμε ότι το (0,0) «φιλοξενείται» σ' αυτή την ευθεία. Η περιγραφή $y=\frac{1}{2}\chi$, τεταγμένη ίση με το 1/2 της αντίστοιχης τετμημένης καλύπτει και την περίπτωση του σημείου (0,0).

Μ. Στην ευθεία ε φιλοξενούνται και σημεία με δεκαδικούς ή κλάσματα;

Δ. Παράδειγμα;

Μ. Όλα τα σημεία που είναι πάνω στην «ε» έχουν ακέραιες συντεταγμένες;

Δ. Είδαμε το Σ(1, 0,5). Εξέτασε το σημείο με τετμημένη 2,5. Γράψε το κλάσμα και «μετέφρασε» σε ακέραιους τους όρους του.

Μ. Αν η τετμημένη είναι 2,5, η τεταγμένη είναι το μισό: 1,25. Τεταγμένη προς τετμημένη, $\frac{1,25}{2,5}$. Είναι αυτό το κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{1}{2}$;

Δ. Εσύ θα το διαπιστώσεις!

Μ. Καλά. $\frac{1,25}{2,5}=\frac{1,25\cdot 4}{2,5\cdot 4}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

Θα μπορούσα φυσικά να ακολουθήσω πιο «τυπική» πορεία:

$$\frac{1,25}{2,5}=\frac{\frac{125}{100}}{\frac{25}{10}}=\frac{125\cdot 10}{25\cdot 100}=\frac{125\cdot 1\cancel{0}^{1}}{25\cdot 10\cancel{0}^{10}}=\frac{12\cancel{5}^{5}}{2\cancel{5}^{1}\cdot 10}=\frac{5}{10}$$, αλλά δεν είναι απαραίτητο να ακολουθούμε κατά γράμμα τους νόμους!

Δ. Το εκτιμώ! Οι μη τυπικές διαδικασίες οδηγούν σε καινούργιες ιδέες. Που το σκέφτηκες αυτό με τους νόμους;

Μ. Τέλης, πολιτικά, Politica στη γλώσσα μας!

Δ. Τέλης;

Μ. Αριστοτέλης, το έκανα κοσμικότερο.

Δ. Τι; Διαβάζεις Αριστοτέλη;

Μ. Όχι. Μας το είπε η φιλόλογος, η κ. Ειρήνη. Να βρω το τετράδιο, το έχω γράψει στα αρχαία[19]: δοκοῦσι δὴ τοῖς νομίζουσι συμφέρειν βασιλεύεσθαι τὸ καθόλου μόνον οἱ νόμοι λέγειν, ἀλλ' οὐ πρὸς τὰ προσπίπτοντα ἐπιτάττειν, ὥστ' ἐν ὁποιᾳοῦν τέχνῃ τὸ κατὰ γράμματ' ἄρχειν ἠλίθιον·

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Στο σχολείο έχει και άλλα μαθήματα, δεν το έχεις παρατηρήσει; Το σχολείο δεν είναι μόνον επιστημονικό, είναι κυρίως κοινωνικό, έχει στόχο την ομαλή μου ένταξη στο κοινωνικό σύνολο!

Δ. Αριστοτέλης;

Μ. Όχι. Κυρία Ευγενία, οικιακή οικονομία.

Δ. Συνεχίζουμε; Ονομάζουμε D το σημείο (1,25, 2,5). Κλίση του OD;

Μ. Η κλίση του τμήματος OD είναι 1/2.

Δ. Το σημείο D(1,25 , 2,5) είναι πάνω στην ε, στην ευθεία που διέρχεται από το O με κλίση 1/2. Το μισό του 3/4;

Μ. $\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$. Σημείο $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{8}\right)$, κλάσμα $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, απλό, αφού το 3/8 είναι το μισό του 3/4.

Δ. Η ευθεία «ε» δεν κατοικείται λοιπόν μόνο από σημεία με ακέραιες συντεταγμένες, το είδος των σημείων της το δείχνει η «ταυτότητά» της, $y=\frac{1}{2}\chi$, σημεία που έχουν τεταγμένη το 1/2 της τετμημένης. Οπωσδήποτε όμως στεγάζει **όλα** τα παραστατικά σημεία των κλασμάτων που είναι **ισοδύναμα** με το 1/2, δηλ. είναι η κατοικία του ρητού 1/2.

Μ. Έχει και άλλα σημεία;

Δ. Ένα ήδη γνωρίζεις, τη συμπάθειά σου.

Μ. Α! ναι! Το (0,0). Άλλο;

Δ. Στη συζήτηση για τον άξονα είπαμε για την ύπαρξη και κάποιων αριθμών που δεν είναι ρητοί, των «αρρήτων». Έχουμε και σημεία (άρρητος, μισός άρρητος). Ας το αφήσουμε προς το παρόν.

Μπορούμε όμως να σκεφτούμε ότι κάθε **ρητός** αντιστοιχεί σε μια **ευθεία που διέρχεται από την αρχή**, η οποία τον δέχεται για **κλίση** της, αλλά **δεν παραχωρεί αποκλειστικότητα** σε «ρητές» συντεταγμένες.

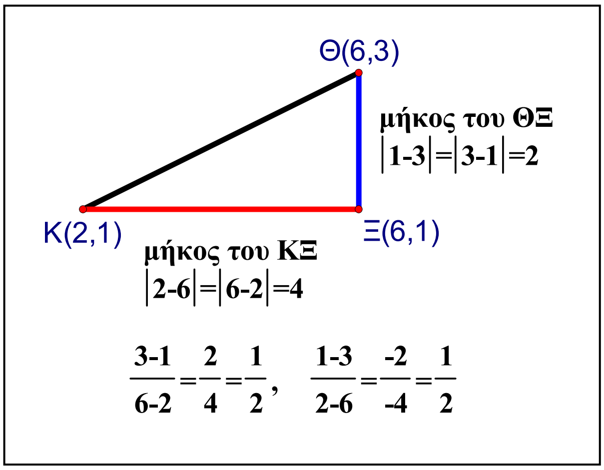
Μ. Καλά. Μήπως μπορώ να γλιτώσω το δεξιό άγχος για την κλίση;

Δ. Τι εννοείς;

Μ. Αν δεν προσέξω ποιο σημείο είναι δεξιότερα, τι επιπτώσεις θα έχω;

Δ. Με λίγη προσοχή δεν θα έχεις επιπτώσεις. Ας δούμε για παράδειγμα το τμήμα ΚΘ. Γράφουμε «ανάποδα» τις διαφορές στον αριθμητή **και** στον παρονομαστή:

$\frac{1-3}{2-6}=\frac{-2}{-4}=+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Ίδια κλίση. Απαραίτητο είναι να βάλουμε στη θέση του μειωτέου, **και στον αριθμητή και στον παρονομαστή**, συντεταγμένες του **ίδιου** σημείου. Οι διαφορές αλλάζουν πρόσημο, **και οι δύο**, οπότε προκύπτει αποτέλεσμα το ίδιο με το προηγούμενο.



Μ. Άλλο ένα παράδειγμα;

Δ. Να βρούμε την κλίση του τμήματος ΑΒ, Α(-1,2), Β(2,-2).

Ας μη σχεδιάσουμε προς το παρόν.

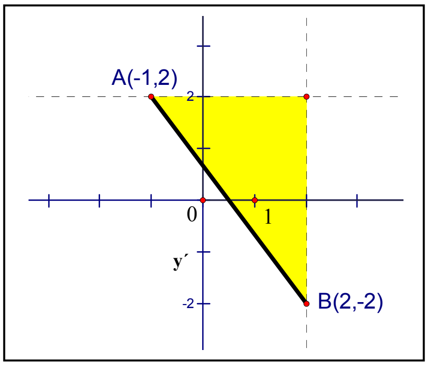
Αν χρησιμοποιήσουμε το δεξιό άγχος, το Β έχει μεγαλύτερη τετμημένη, θα έχουμε $\frac{-2-...}{2-...}=\frac{-2-2}{2-(-1)}=\frac{-4}{+3}=-\frac{4}{3}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Αν αρχίσουμε με τις συντεταγμένες του σημείου Α, τότε: $\frac{2-...}{-1-...}=\frac{2-(-2)}{-1-2}=\frac{+4}{-3}=-\frac{4}{3}$, ίδια κλίση.

Οπωσδήποτε η κλίση είναι $\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}}$, προσέχουμε όμως στη θέση του μειωτέου να είναι οι συντεταγμένες του **ίδιου** σημείου. Αν έχουμε να αφαιρέσουμε τους αριθμούς 10 και 20, θα βρούμε 10-20=-10, ή 20-10=+10. Στη δεύτερη περίπτωση, για την κλίση, αλλάζει το πρόσημο και του αριθμητή και του παρονομαστή,

$\frac{-4}{+3}$, $\frac{+4}{-3}$, οπότε βρίσκουμε το ίδιο πρόσημο στο κλάσμα. Η απόλυτη τιμή είναι ίδια. Θυμήσου τον αυτοματισμό της απόστασης.



Δεν είναι απαραίτητη η εικόνα, αλλά αν σχεδιάσουμε, τότε βλέπουμε την κλίση **και** από το σχήμα: για 3 μονάδες οριζόντια μετατόπιση, κατεβαίνουμε 4, κλίση του ΑΒ: $\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}$.

Μ. Η ευθεία που καθορίζεται από το ΑΒ ποιον ρητό στεγάζει; Τον $-\frac{4}{3}$;

Δ. Όχι. Δεν περνά από την αρχή. Ας δούμε το κλάσμα $-\frac{4}{3}$ σαν πηλίκο $\frac{-4}{+3}$.

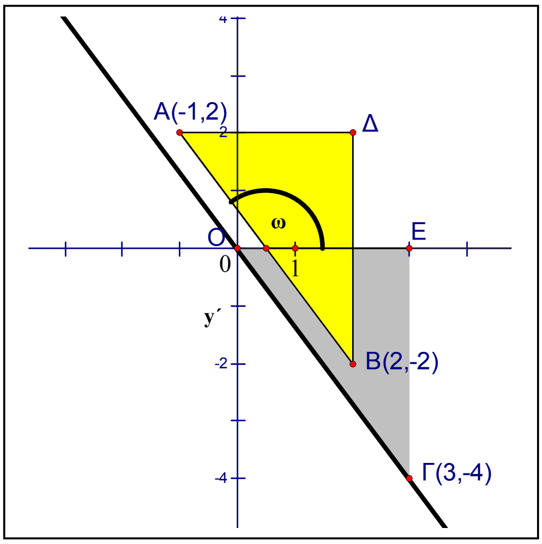
Είναι εξυπηρετικό να έχουμε θετικό παρονομαστή.

Ο ρητός $-\frac{4}{3}$ φιλοξενείται στην ευθεία που καθορίζεται από το τμήμα ΟΓ, Γ είναι το σημείο (3,-4). Δες το σχήμα στην επόμενη σελίδα.

Μ. Φτάνει ένα σημείο για να καθορίσουμε την ευθεία;

Δ. Ένα δεν φτάνει, αλλά έχουμε **δυο,** το (0,0) και το Γ(3,-4). Μπορείς να πεις κάτι για τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΟΓΕ;

Μ. Ναι, ίσα, ορθογώνια με ίσες κάθετες πλευρές, 3 και 4 μονάδες. Οι ευθείες ΑΒ και ΟΓ είναι παράλληλες;



Δ. Έχουν ίσες γωνίες κλίσης, «ω».

Γράψε 10 αντιπροσώπους του ρητού 1. Κλάσματα και «μεταμορφώσεις» σε σημεία. Σχεδίασε την κατοικία του ρητού 1.

Μ. $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{10}{10}=\frac{-1}{-1}=\frac{-2}{-2}$. Κλάσματα ίσα με 1, ίδιος αριθμητής και παρονομαστής, τεταγμένη ίση με την τετμημένη, y=χ, πολύ απλό.

Σημεία: (1,1), (2,2), (10,10), (-1,-1), (-2,-2).Επιτρέπονται και δεκαδικοί;

Δ. Αν είναι ίσοι, τότε το κλάσμα είναι 1. Γράψε μερικά παραδείγματα.

Μ. $\frac{1,5}{1,5}=\frac{2,3}{2,3}=\frac{1,05}{1,05}=\frac{-1,5}{-1,5}=\frac{-2,7}{-2,7}$.

Σημεία: (1,5, 1,5), (2,3, 2,3) κλπ, πολλά κόμματα.

Δ. Μπορούμε να αποφύγουμε τα κόμματα. Γράφουμε τους δεκαδικούς με κλασματική μορφή: $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),\left(\frac{23}{10},\frac{23}{10}\right),\ldots$

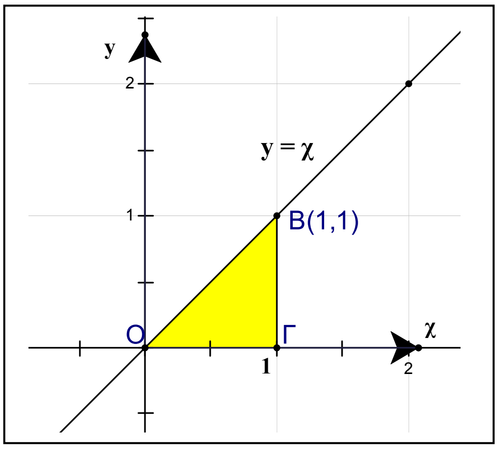
Μ. Δεν πειράζει, προσέχω, ξεχωρίζω το κόμμα του δεκαδικού 1,5 από το κόμμα που χωρίζει την τετμημένη από την τεταγμένη.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Ένα σημείο, παίρνω το Β(1,1), ενώνω με το (0,0), έτοιμο!

Δ. Ταυτότητα της ευθείας; Κάποια παρατήρηση για το τρίγωνο ΟΒΓ;

Μ. Τετμημένη = τεταγμένη, y = χ. Το τριγ.ΟΒΓ ορθογώνιο σίγουρα, κάθετες πλευρές 1-1, ισοσκελές.



Δ. Η γωνία κλίσης $\hat{ΓOB}$;

Μ. Ισοσκελές, ΟΓ = ΟΒ, βάση ΟΒ, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, έχουμε την ορθη,180-90, 90:2 =45, 45 μοίρες.

Δ. Ποια είναι η θέση της ημιευθείας ΟΒ ως προς την γωνία $χ\hat{O}y$;

Μ. Η $χ\hat{O}y$ είναι 90 μοίρες, η γωνία $χ\hat{O}B$ είναι η $Γ\hat{O}B$, 45^o, τα μήκη των πλευρών δεν μας ενδιαφέρουν, διχοτόμος.

Η ευθεία y = χ φιλοξενεί και άρρητους;

Δ. Αν τετμημένη και τεταγμένη είναι ίσες, τότε το σημείο (άρρητος, ίδιος άρρητος) είναι πάνω στην ευθεία y = χ. Να σχεδιάσουμε και την κατοικία του ρητού -1; Γράψε μερικά κλάσματα.

Μ. Βάζουμε ένα « - » στα κλάσματα που παριστάνουν το 1: $-\frac{1}{1}=-\frac{2}{2}=-\frac{10}{10}=-\frac{-1}{-1}=-\frac{-2}{-2}$ κλπ.

Δ. Μετέφρασε τα κλάσματα σε σημεία.

Μ. Πρέπει να διαλέξω που θα βάλω το πλην, πάνω ή κάτω;

… Θα το βάλω μια πάνω και μια κάτω, (-1,1), (2,-2).

Δ. Όπως και να σκεφτείς, η κλίση «-1» και το σημείο (0,0) καθορίζουν το σπίτι του ρητού (-1). Σκέψου για την ταυτότητα της ευθείας, αλλά και για την γωνία κλίσης. Συνηθίζουμε να γράφουμε πως προκύπτει η τεταγμένη, y, όταν έχουμε την τετμημένη, χ.

Μ. Τετμημένη, τεταγμένη, αντίθετοι αριθμοί.

Αν ήταν ίσοι θα γράφαμε y = χ, αλλά δεν είναι.

Δ. Τα αριθμητικά παραδείγματα θα σε οδηγήσουν.

Μ. Έχουμε τα σημεία (-1,1) και (2, -2). Για το (2,-2) , (χ, y), θα γράψουμε: y = -2 = - (2)= -χ, εύκολο τελικά. Μάλλον y = -χ.

Για το σημείο (-1,1), problem, εδώ δεν ταιριάζει η προηγούμενη ταυτότητα. Μάλλον θα πρέπει να βγάλουμε νέα!

Δ. Δοκίμασες;

Μ. Ναι, γιατί το 1 είναι θετικός, δεν ταιριάζει να είναι –χ, ο –χ είναι αρνητικός.

Δ. Γιατί είναι αρνητικός;

Μ. Γιατί έχει πλην, πλην χ, αρνητικός.

Δ. Ο -2 είναι αρνητικός, όπως και ο -1, αλλά για τον –χ πως το ξέρεις; Θυμήσου την «μηχανή αρνητικής ενέργειας». Αν ο αριθμός είναι θετικός, π.χ. (+2), τότε ο –(+2) είναι αρνητικός, αλλά αν είναι αρνητικός, π.χ. (-1), τότε ο – (-1) είναι θετικός. Το πρόσημο του «-χ» εξαρτάται από ποιον αριθμό αντιπροσωπεύει ο χ. Το σύμβολο «–» μπροστά από το γράμμα χ δηλώνει τον αντίθετο του χ, που δεν είναι πάντα αρνητικός.

Μ. Και καλά! Δεν είναι πάντα!

Δοκιμάζω, y = 1 = -(-1). Ταιριάζει τέλος πάντων.

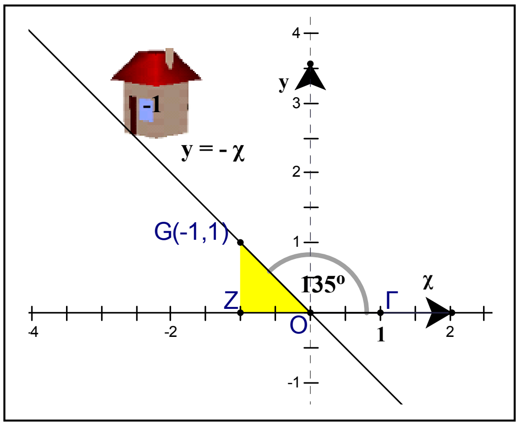
Δ. Γωνία κλίσης;

Μ. Δεν τελειώσαμε ακόμα με το σπίτι του (-1);

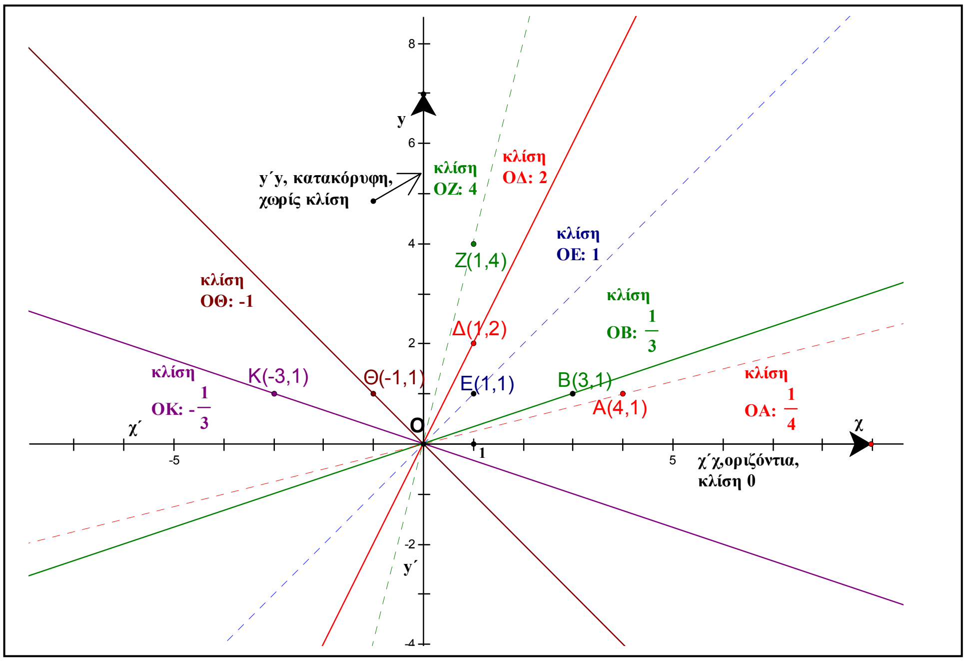
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Τρίγωνο OZG, OZ =1…

Μ. Κάθετες OZ, OG, 1-1, ορθογώνιο και ισοσκελές, $Z\hat{O}G = 45^o$, η γωνία κλίσης είναι η παραπληρωματική της, 180-45=135 μοίρες.



Δ. Για την εξαιρετική σου προσπάθεια σου δίνω αμοιβή μερικές κατοικίες ρητών στο καρτεσιανό σύστημα συνταγμένων. Σου υπενθυμίζω ότι κατοικία του ρητού είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή, από το σημείο (0,0) και τον δέχεται για κλίση της.



Μ. Το όνομα «κλίση» ποιος το επινόησε;

Δ. Εικασία;

Μ. Τι είναι πάλι αυτό;

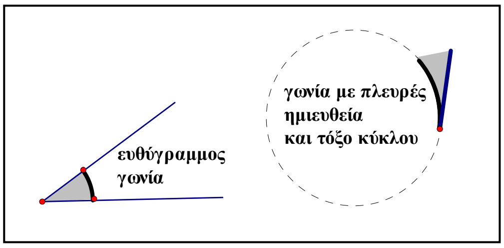
Δ. Ένα όνομα που υποθέτεις, αλλά διατηρείς μια μικρή αμφιβολία.

Μ. Καρτέσιος;

Δ. Ευκλείδης!

Μ. Αν θυμάμαι καλά, είπες ότι οι συντεταγμένες είναι του Καρτέσιου, 17^{ος} αιώνας μ.Χ.

Δ. Πολύ καλά θυμάσαι. Οι συντεταγμένες είναι του Καρτέσιου, η **κλίση** είναι όνομα-επινόηση του Ευκλείδη: Χρησιμοποιεί τη λέξη «κλίση» στον ορισμό της γωνίας, είναι ο 8^{ος} ορισμός του πρώτου βιβλίου[20] των «Στοιχείων»: «Ἐπίπεδος δε γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν **κλίσις**»: Επίπεδη γωνία είναι η κλίση μεταξύ δυο γραμμών του επιπέδου που τέμνονται χωρίς να αποτελούν ευθεία. Συνεχίζει με τον 9^{ο} ορισμό: «Ὅταν δε αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία»: όταν οι γραμμές που περιέχουν τη γωνία είναι ευθείες, η γωνία καλείται ευθύγραμμη. Ο Ευκλείδης δεν θεωρεί επίπεδη γωνία την ευθεία γωνία, αλλά εκτός από την «ευθύγραμμη γωνία», θεωρεί γωνίες π.χ. και αυτές που σχηματίζονται μεταξύ ευθειών και τόξων, μεταξύ «γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων».



Μ. Εμείς έχουμε πει ότι η κλίση είναι αριθμός, όχι γωνία.

Δ. Η κλίση που έχουμε πει είναι αριθμός που χαρακτηρίζει την γωνία κλίσης. Έχουν περάσει 23 αιώνες από την εποχή του Ευκλείδη. Θα πρέπει να ενημερωθείς για την συναρπαστική πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών εννοιών, αλλά και για τα σύγχρονα θέματα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Ζαλίστηκα! Να βγω έξω για αναπνοές, για οξυγόνο;

Αναπνέουμε από τη μύτη φυσικά, το στόμα είναι για να τρώμε, το αντίστροφο θα είχε πολύ γέλιο, να τρώμε από τη μύτη και να αναπνέουμε από το στόμα! Το οξυγόνο καταστρέφει τις τοξίνες, διεγείρει το νευρικό σύστημα και αυξάνει τη ζωτικότητα. Διαφωνείς;

Δ. Όχι. Το διάβασες κάπου;

Μ. «Ο δρόμος της ευτυχίας»,Victor Pauchet[21]. Είναι βιβλίο του παππού, απορώ, έχει γυρίσει όλο τον κόσμο και ακόμα ψάχνει τον δρόμο αυτής της ευτυχίας. Μήπως δεν υπάρχει; Του εξήγησα ότι δεν είναι σωστό από μαθηματική άποψη.

Δ. Δεν είναι σωστό;

Μ. Εσύ δεν είπες ότι πρώτα εξετάζουμε αν υπάρχει κάτι, και **αν υπάρχει**, **τότε** ψάχνουμε να το βρούμε;

Θυμάμαι το παράδειγμα με το νερό.

Δ. Συνέχισε…

Μ. Πρώτα εξετάζουμε **αν υπάρχει** νερό στο υπέδαφος του κτήματος και **μετά** πληρώνουμε το γεωτρύπανο. Διαφορετικά, σκάβοντας, μπορεί να βγούμε από την άλλη πλευρά της Γής, αν και δεν υπάρχει τέτοιο γεωτρύπανο, αλλά μιλάμε θεωρητικά.

Δ. Τα μαθηματικά σου δημιουργούν τοξίνες;

Μ. Επειδή δεν δημιουργούν πάντα τοξίνες, απαντάμε όχι! Για να απαντήσουμε «ναι» σ’αυτήν την ερώτηση, θα πρέπει να μην υπάρχει, έστω και μια εξαίρεση! Και οφείλω να ομολογήσω ότι μερικές φορές τα απολαμβάνω!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Να λύσουμε ένα πραγματικό πρόβλημα;

Μ. Ακούω.

Δ. Ο μισθός, δηλ. η μηνιαία αμοιβή, ενός υπαλλήλου είναι 800€. Ποια θα είναι η αμοιβή του για 5 μήνες;

Μ. Τον υπάλληλο τον γνωρίζουμε; Άνδρας ή γυναίκα;

Δ. Δεν ξέρουμε ποιος είναι, ας πούμε ότι είναι γυναίκα.

Μ. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

Δ. Γιατί;

Μ. Γιατί δεν ξέρουμε αν πηγαίνει στη δουλειά όλες τις εργάσιμες μέρες. Μπορεί να παντρευτεί, μπορεί να μείνει έγκυος, μπορεί να αρρωστήσει, μπορεί να κάνει απεργίες, μπορεί να κλείσει η επιχείρηση, μπορεί να εξαφανιστεί ο εργοδότης…

Δ. Καλά. Άνδρας.

Μ. Εκτός από το «έγκυος» τα υπόλοιπα είναι unisex.

Δ. Ας υποθέσουμε ότι δεν κάνει απουσίες αυτό το πεντάμηνο και η επιχείρηση είναι υγιής.

Μ. Και πάλι μπορεί να μην πληρώνεται, οι έμποροι ποτέ δεν είναι ευχαριστημένοι, «τα έξοδα πολλά, φταίει και το κράτος με την υψηλή φορολογία, το μαγαζί γεμάτο, αλλά κέρδος μηδέν», έτσι λένε, είναι και μια νέα αρρώστια «μετενέργεια» που παθαίνουν οι υπάλληλοι, μειώνεται ο μισθός, το άκουσα στο σπίτι…

Δ. Εντάξει! Υποθετικό πρόβλημα!

Μ. Τότε 5*800=4000€. Αλλά είπες πραγματικό πρόβλημα!

Δ. Ποια είναι τα ποσά σαυτό το πρόβλημα;

Μ. Αμοιβή και χρόνος εργασίας.

Δ. Είναι ανάλογα;

Μ. Στο υποθετικό πρόβλημα είναι. Δύο μήνες, διπλάσιος μισθός, μισός μήνας, ο μισός μισθός.

Δ. Πόσο χρονών είσαι;

Μ. 13. Εσύ μάλλον δεν θυμάσαι.

Δ. Ύψος;

Μ. 162cm, σε μέτρα 1,62m.

Δ. Τι λες στα 26 θα είσαι 3,24 μέτρα;

Μ. Παράλογο!

Δ. Τα ποσά «ηλικία» και «ύψος» είναι ανάλογα;

Μ. Αυτά δεν είναι σίγουρα, ανεξάρτητα από τις υποθέσεις,

Δ. Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 20€. Πόσο κοστίζουν 5 κιλά; 20 κιλά;

Μ. Απλούστατο! Τα 5 κιλά κοστίζουν 10€, τα 20 κιλά κοστίζουν 40€.

Δ. Πως σκέφτηκες;

Μ. Διπλάσιος αριθμός κιλών, διπλάσια χρήματα, δια 2 ο αριθμός κιλών, δια 2 και τα χρήματα, κοινή λογική. Τα ποσά είναι ανάλογα.

Δ. Μπορείς να περιγράψεις τα ποσά;

Μ. Μήλα και ευρώ.

Δ. Καλύτερα είναι να πούμε « μάζα σε κιλά» και « αξία ή κόστος σε €»
Το «μήλα» δεν είναι «ποσόν», είναι φρούτο!

Μ. Φρούτο. Μάζα; Δεν είναι βάρος;

Δ. Χρησιμοποιούμε κιλά για τη μάζα και μόνο Νιούτον για το βάρος. Ας κρατήσουμε το «κιλά», και για τις έννοιες μάζα και βάρος θα συζητήσεις με τον κ. Λεωνίδα, τον φυσικό.

Μ. Προχωρούμε. Στο πρόβλημα μας ενδιαφέρει πόσο θα πληρώσουμε!

Δ. Τα «20€» είναι η αντίστοιχη τιμή των 10 κιλών, το κόστος των 10 κιλών.
Τα «10€» είναι η αντίστοιχη τιμή των 5 κιλών.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μπορούμε να γράψουμε τις αντίστοιχες τιμές σ'ένα πίνακα:

κιλά	10	5	20
αξία	20	10	40

Μ. Γιατί έγραψες στην πρώτη γραμμή τα κιλά;

Δ. Εσύ τι θέλεις;

Μ. Την αξία.

Δ. Εντάξει, γράφουμε τον πίνακα με «αξία» στην πρώτη γραμμή, αντιστρέφουμε τα κλάσματα.

αξία	20	10	40
κιλά	10	5	20

Δ. Μπορούμε να γράψουμε και άλλα ζεύγη αντιστοίχων τιμών;

Μ. Πόσα θέλεις;

Δ. Δέκα

Μ. Εντάξει. Δυο € το κιλό,…

αξία	20	10	40	**2**	4	6	8	12	14	200
κιλά	10	5	20	**1**	2	3	4	6	7	100

Δ. Αν δεν αγοράσουμε θα πληρώσουμε;

Μ. Όχι φυσικά! Εκτός αν υπάρχει νοητικό πρόβλημα.

Δ. Ζεύγος αντιστοίχων τιμών;

Μ. Κιλά μηδέν, αξία μηδέν.

Δ. Αν αγοράσουμε μισό κιλό; $\frac{3}{4}$ του κιλού; 2,5 κιλά; 7,5 κιλά; $2\frac{3}{4}$κιλά;

Μπορείς να συμπληρώσεις τον πίνακα;

Μ. Αμέσως. Συνεχίζω στην πρώτη γραμμή την αξία;

Δ. Όπως θέλεις, αλλά αφού θα διαλέξεις ποιο ποσόν θα βάλεις στην πρώτη γραμμή, το **διατηρείς** στην πρώτη γραμμή.

Μ. Εύκολο, 2€ το κιλό…

αξία	20	10	40	**2**	4	6	8	12	14	200	**0**			
κιλά	10	5	20	**1**	2	3	4	6	7	100	**0**	**0,5**	**2,5**	**7,5**

Συμπληρώνω στην πρώτη γραμμή τα διπλάσια:

αξία	20	10	40	**2**	**0**		**1**	**5**	**15**			
κιλά	10	5	20	**1**	**0**		**0,5**	**2,5**	**7,5**		3/4	2 και 3/4

Δ. Τα κλάσματα τα απέφυγες.

Μ. Συγγνώμη, κάνω αμέσως τους υπολογισμούς.

Το μισό κιλό 1€, $\frac{1}{4}$ του κιλού μισό €, τα $\frac{3}{4}$ θα κοστίσουν 3 μισά €,…

1,5€, τα $2\frac{3}{4}$...,τα 2 κιλά 4€…,4+1,5=5,5€.

Δ. Έχεις βρει πόσο κάνει το κιλό;

Μ. Ναι, 2€.

Δ. Πως θα βρούμε την αξία για οποιαδήποτε αγορά;

Μ. Θα πολλαπλασιάσουμε το 2 επί τον αριθμό των κιλών. Αυτό έκανα.

Δ. Και για τα κλάσματα;

Μ. Για τα κλάσματα, έκανα μικρότερα προβλήματα, έλυσα τα μικρότερα και μετά έδωσα τη λύση για το αρχικό, «διαίρει και βασίλευε», μέθοδος ιστορικά καθιερωμένη!

Εσύ είπες ότι καλό είναι να έχουμε εναλλακτικές λύσεις, αν δυσκολευτούμε στην πορεία μιας λύσης, τότε ακολουθούμε διαφορετικό δρόμο, ευκολότερο, και έτσι πάντα λύνουμε ένα εύκολο πρόβλημα!

Δ. Που δυσκολεύτηκες;

Μ. Καλά, θα πολλαπλασιάσω, …για τα $\frac{3}{4}$ του κιλού: $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Μια ματιά ακόμα; Ο πολλαπλασιασμός είναι συντομογραφία…

Μ. Πρόσθεσης, $2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ …Οχ! Λάθος, έχουμε τέταρτα, 3+3=6,…

$\frac{6}{4}$, $\frac{6}{4}$ είναι το άθροισμα, ομώνυμα, προσθέτουμε τους αριθμητές.

Δ. $\frac{6}{4}$ από τι;

Μ. $\frac{6}{4}$ €…το $\frac{1}{4}$ € είναι 100:4=25 λεπτά, 6*25=150 λεπτά, τελικά 1,5€

Δ. Για τα $2\frac{3}{4}$ κιλά; Τι σημαίνει $2\frac{3}{4}$;

Μ. $2+\frac{3}{4}$, 2 κιλά και 750 γραμμάρια…μισό λεπτό, να δω και τον δεύτερο

πολλαπλασιασμό, … $2\cdot\left(2+\frac{3}{4}\right)=2\cdot2+2\cdot\frac{3}{4}=4+\frac{6}{4}$, 4+1,5=5,5€.

Αλλά, συνήθως ζητάμε ακέραιο αριθμό κιλών, 1,2,3 κλπ.

Δ. Αν διαλέξουμε 10 μήλα για αγορά, ο αριθμός των κιλών πιθανόν να μην είναι ακέραιος.

Μπορούμε να γράψουμε όλα τα δυνατά ζεύγη αντιστοίχων τιμών;

Μ. Λείπουν δεδομένα.

Δ. Τι δεδομένα σου χρειάζονται;

Μ. Ποιος είναι ο έμπορος; Τι αποθήκη έχει; Πόσα κιλά μήλα διαθέτει;

Δ. Ας πούμε 100 κιλά.

Μ. Θα γράψω μόνο τις τιμές για ακέραιο αριθμό κιλών, δηλ. τις τιμές για 0,1,2,3,4,…,98,99,100 κιλά;

Δ. Όχι μόνο για ακεραίους.

Όλες τις περιπτώσεις.

Μ. 1 γραμμάριο, 2 g, …,100g,…,999g,1000g, 1001g…, 100*1000=100000 ζεύγη, μπορείς να πας για καλοκαιρινές διακοπές, μη βιαστείς, απόλαυσε τις μέρες σου και όταν γυρίσεις…

Δ. Πως βρήκες το 100000;

Μ. 1000 γραμμάρια είναι 1 κιλό, ευτυχώς δεν έχουμε μικρότερες υποδιαιρέσεις, λοιπόν, για κάθε κιλό 1000 g, 100 κιλά, 100*1000=100000 ζεύγη, απλό.

Δ. Είναι και το (0,0), τελικά 100001!

Μ. Βρήκα 100000 ζεύγη αντιστοίχων τιμών και μου κάνεις παρατήρηση για το 1; Είναι σωστό αυτό;

Δ. Δεν βρήκες τα ζεύγη, υπολόγισες το πλήθος τους.

Πόσο θα πληρώσουμε για 1 γραμμάριο;

Μ. 1 επί 2 ίσον 2

Δ. Δύο, τι;

Μ. Δυο ευρώ, συμβολικά 2€. Κάτι δεν μου αρέσει εδώ.

Δ. Οπωσδήποτε, θέλει διόρθωση, αφού με 2€ αγοράζουμε 1 κιλό, 1000 γραμμάρια.

Μ. Το βρήκα, το ένα χιλιοστό!

Δ. Ένα χιλιοστό ποιού;

Μ. Με 2€ αγοράζουμε 1000 γραμμάρια, για να βρω πόσο κοστίζει 1 γραμμάριο γράφω το κλάσμα με αριθμητή το 2 και παρονομαστή 1000.

Το κλάσμα εκφράζει ποια ποσότητα του αριθμητή, €, αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή, g, οπότε $\frac{2}{1000} = 0,002$.

Δ. Δυο χιλιοστά από τι;

Μ. Δυο χιλιοστά του €. Τελικά 2 λεπτά.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Γιατί δυο λεπτά;

Μ. Εεεε, δυο χιλιοστά, διαιρούμε το 1€ σε 1000 ίσα μέρη, οχ!, μισό λεπτό, όχι του €, της ώρας, problem! Το 1 λεπτό είναι το ένα εκατοστό του €, το 1 χιλιοστό;

Δ. Υπάρχει υλοποιημένη αυτή η υποδιαίρεση;

Μ. Όχι ακόμα, είναι γνωστό ότι το δημόσιο λειτουργεί με αργούς ρυθμούς και μάλλον η ασθένεια μεταδόθηκε και στην Ευρωπαϊκή Ένωση.

Δ. Δεν έχει και μήλα με μάζα 1 γραμμάριο, 1g είναι η μάζα ενός φιστικιού. Το ένα εκατοστό του κιλού πόσα γραμμάρια είναι;

Μ. 1000:100, 10 γραμμάρια

Δ. Σε κιλά;

Μ. 0,01 κιλά

Δ. Αν κάνουμε ζεύγη αντιστοίχων τιμών ανά 10 g, για 0 έως 100 κιλά, πόσα ζεύγη θα χρειαστούμε; Υποθετικό πρόβλημα, και τα 10g είναι πολύ μικρή τιμή για την μάζα ενός μήλου.

Μ.100 για κάθε κιλό, 100 επί 100, δέκα χιλιάδες ένα. Είναι και το (0,0)!

Και πάλι είναι απαραίτητο να πας διακοπές

Δ. Καλά θα σε βοηθήσω. Σου δωρίζω 100 ζεύγη, (κιλά, €), ανά 0,01 κιλά, δηλ. ανά 10 γραμμάρια, έως 1 κιλό. Γράφω 0.01, αντί 0,01 γιατί υπάρχουν πολλά κόμματα και δημιουργούνται προβλήματα. Επίσης τα αριθμητικά ζευγάρια δεν κατοικούν σε παρενθέσεις (…,…), αλλά σε άγκιστρα {…,…}, αντιγραφή, δηλ. «copy-paste» από το λογισμικό[1]:

```
{0.01,0.02},{0.02,0.04},{0.03,0.06},{0.04,0.08},{0.05,0.1},
{0.06,0.12},{0.07,0.14},{0.08,0.16},{0.09,0.18},{0.1,0.2},
{0.11,0.22},{0.12,0.24},{0.13,0.26},{0.14,0.28},{0.15,0.3},
{0.16,0.32},{0.17,0.34},{0.18,0.36},{0.19,0.38},{0.2,0.4},
{0.21,0.42},{0.22,0.44},{0.23,0.46},{0.24,0.48},{0.25,0.5},
```

```
{0.26,0.52},{0.27,0.54},{0.28,0.56},{0.29,0.58},{0.3,0.6},
{0.31,0.62},{0.32,0.64},{0.33,0.66},{0.34,0.68},{0.35,0.7},
{0.36,0.72},{0.37,0.74},{0.38,0.76},{0.39,0.78},{0.4,0.8},
{0.41,0.82},{0.42,0.84},{0.43,0.86},{0.44,0.88},{0.45,0.9},
{0.46,0.92},{0.47,0.94},{0.48,0.96},{0.49,0.98},{0.5,1.},
{0.51,1.02},{0.52,1.04},{0.53,1.06},{0.54,1.08},{0.55,1.1},
{0.56,1.12},{0.57,1.14},{0.58,1.16},{0.59,1.18},{0.6,1.2},
{0.61,1.22},{0.62,1.24},{0.63,1.26},{0.64,1.28},{0.65,1.3},
{0.66,1.32},{0.67,1.34},{0.68,1.36},{0.69,1.38},{0.7,1.4},
{0.71,1.42},{0.72,1.44},{0.73,1.46},{0.74,1.48},{0.75,1.5},
{0.76,1.52},{0.77,1.54},{0.78,1.56},{0.79,1.58},{0.8,1.6},
{0.81,1.62},{0.82,1.64},{0.83,1.66},{0.84,1.68},{0.85,1.7},
{0.86,1.72},{0.87,1.74},{0.88,1.76},{0.89,1.78},{0.9,1.8},
{0.91,1.82},{0.92,1.84},{0.93,1.86},{0.94,1.88},{0.95,1.9},
{0.96,1.92},{0.97,1.94},{0.98,1.96},{0.99,1.98},{1.,2.}
```

Μ. Τα «συν» της τεχνολογίας.

Δ. Ναι, 1 δευτερόλεπτο.

Ας ξεφύγουμε από τον περιορισμό των 100 κιλών. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν όσα κιλά θέλουμε.

Μ. Ακόμα χειρότερα, δεν μπορούμε να γράψουμε όλα τα ζεύγη αντιστοίχων τιμών, η ζωή είναι πεπερασμένη, έχει αρχή και τέλος!

Δ. Μπορούμε όμως να τα σχεδιάσουμε.

Μ. Σύστημα συντεταγμένων;

Δ. Ναι.

Μ. Αλλά στο σύστημα συντεταγμένων έχουμε κάτι χ, και κάτι y, άξονες, μετακινήσεις οριζόντιες και κατακόρυφες.

Ποια ζεύγη αριθμών θα παραστήσω, ποια θα είναι η οριζόντια μετακίνηση, ποια η κατακόρυφη, με βοηθάς λίγο;

Δ. Ποια είναι η **ερώτηση** στο πρόβλημα;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Είπαμε, πόσο κοστίζουν, αξία, ευρώ!

Δ. Οι αριθμοί στον **κατακόρυφο** άξονα, οι τεταγμένες, τα «y», θα παριστάνουν €, **το ποσόν που ζητείται**. Στον οριζόντιο οι αριθμοί, οι τετμημένες, τα «χ», θα παριστάνουν κιλά, το ποσόν που δίνεται. Μπορείς στον πίνακα να παρεμβάλεις μια ακόμα στήλη όπου να γράψεις τα χ και y δίπλα στα ονόματα των ποσών;

Μ. Απλό.

αξία	**y**	20	10	40	**2**	4		12	14	200	**0**	**1**	**5**	**15**
κιλά	**χ**	10	5	20	**1**	2		6	7	100	**0**	**0,5**	**2,5**	**7,5**

Δ. Κάποια παρατήρηση για τα κλάσματα: $\frac{20}{10}, \frac{10}{5}, \frac{40}{20} \ldots, \frac{y}{\chi}$;

Μ. Ισοδύναμα, όλα 2, σε κλάσμα $\frac{2}{1}$, ανάγωγο, $\frac{y}{\chi} = 2$, y προς χ ίσον 2.

Περίμενε λίγο να σκεφτώ και για τα τελευταία… $\frac{5}{2,5} = 2$, απλό και αυτό, αφού το 5 είναι διπλάσιο του 2,5. Αυτό το «2» τι είναι, κιλά ή ευρώ;

Δ. Ας πάρουμε οποιοδήποτε κλάσμα από τον πίνακα, π.χ. $\frac{40}{20}$

Ο αριθμητής «40» τι εκφράζει;

Μ. Ευρώ.

Δ. Ο παρονομαστής «20»;

Μ. Κιλά.

Δ. Το αποτέλεσμα της διαίρεσης, «2», έχουμε πει ότι δείχνει ποιο ποσόν του αριθμητή αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα: πόσα € αντιστοιχούν σε ένα κιλό, εμπορικότερα, πόσο κάνει το κιλό.

Αν τώρα σκεφτούμε το αφηρημένο κλάσμα $\frac{40}{20}$, τότε το «2» εκφράζει ότι ο αριθμός 40 είναι διπλάσιος από τον 20, είναι ο «λόγος» του 40 προς το 20, δες και στο Κεφάλαιο 3, λόγος, αποτέλεσμα σύγκρισης[2].

Ας ξαναγυρίσουμε στον πίνακα, όλα 2. Οι αντίστοιχες τιμές των αναλόγων ποσών δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο. Το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης «y : χ» είναι 2, λέγεται **συντελεστής αναλογίας**, $\frac{y}{\chi} = 2$.

Μ. Αναλογία;

Δ. Η ισότητα δυο κλασμάτων, δυο λόγων, λέγεται **αναλογία,** π.χ. $\frac{20}{10}, \frac{10}{5}$. Γράψε την ισότητα.

Μ. $\frac{20}{10} = \frac{10}{5}$. Αν δεν πάρουμε το ανάγωγο για το $\frac{y}{\chi}$;

Δ. Ποιο θέλεις;

Μ. Το $\frac{20}{10}$

Δ. Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης: «αριθμητής δια παρονομαστής». Το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης «y:χ» είναι $\frac{20}{10}$, $\frac{y}{\chi} = \frac{20}{10}$.

Απλοποίηση, $\frac{y}{\chi} = 2$, ή και $\frac{y}{\chi} = \frac{2}{1}$.

Μ. Όλα 2, αλλά έχουμε και δύο προβληματάκια.

Δ. Ειδικότητά μου τα προβλήματα μαθηματικών.

Μ. Τα δυσκολότερα!

Δ. Δεν είναι δύσκολα, το είπαμε και σε προηγούμενη συζήτηση.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η δυσκολία, όπως και η φθορά, είναι στις απλές, αλλά «υποχρεωτικές» καθημερινές ασχολίες. Ακούω το **πρώτο πρόβλημα**.

Μ. Βλέπουμε τον πίνακα αντιστοίχων τιμών. Με ποιόν φυσικό πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή του $\frac{12}{6}$ για να πάρουμε το ισοδύναμό του $\frac{14}{7}$;

Δ. Με ποιόν αριθμό θα πολλαπλασιάσω τον 6 για να γίνει 30;

Μ. Με το 5

Δ. Πως το βρήκες;

Μ. Απλό, 5*6=30

Δ. Με ποιόν αριθμό θα πολλαπλασιάσω τον 6 για να γίνει 372;

Μ. Μπορώ να χρησιμοποιήσω αριθμομηχανή;

Δ. Μπορείς

Μ. 62

Δ. Τι πράξη έκανες;

Μ. Δι-αίρεση, 372:6

Δ. Δι-αίρεση; Η παύλα «- » είναι το πρόσημο της λέξης «αίρεση»;

Μ. Όχι, δεν είναι πρόσημο, είναι το σύμβολο της αφαίρεσης, μου θυμίζει ότι η δι-αίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφ-αιρέσεων.

Δ. Καλά. Με ποιόν αριθμό θα πολλαπλασιάσω τον 6 για να γίνει 372372372372372; Χρησιμοποίησε αριθμομηχανή ή το μυαλό σου.

Μ. Μου δίνεις τον υπολογιστή σου;

Δ. Γιατί;

Μ. Γιατί ξέρεις ότι η αριθμομηχανή μου έχει οθόνη 8 ψηφίων και επίτηδες μου έδωσες αυτόν τον τεράστιο αριθμό!

Δ. Το μυαλό σου τι οθόνη έχει; Λίγο πριν βρήκες το πηλίκο της διαίρεσης 372:6. Μπορείς να βρεις το πηλίκο της 372000:6;

Μ. Εύκολο: 372:6=62, (372*1000):6=62000.

Δ. Βρες το πηλίκο της διαίρεσης 372372:6

Μ. (372000+372):6=62000+62=62062, συνεχίζω,

372372372:6=(372000000+372372):6=62000000+62062=62062062

Εντάξει, θα πολλαπλασιάσουμε με τον 62062062062062, πέντε «62» και ανάμεσα 4 μηδενικά, το πηλίκο της διαίρεσης 372372372372372:6.

Δ. Μπορείς να απαντήσεις στην ερώτησή σου;

Με ποιόν φυσικό πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή του κλάσματος $\frac{12}{6}$ για να πάρουμε το ισοδύναμό του $\frac{14}{7}$;

Μ. Με το πηλίκο της διαίρεσης, $\frac{14}{7}:\frac{12}{6}=\frac{14}{6}\cdot\frac{6}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$, με το $\frac{7}{6}$, αλλά κάτι δεν πάει καλά.

Δ. Μερικές φορές το επόμενο λάθος διορθώνει το προηγούμενο, το κλάσμα 7/6 είναι ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό 6 για να γίνει 7, το $\frac{7}{6}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης 7:6, επαλήθευση:

$6\cdot\frac{7}{6}=\frac{\cancel{6}^1\cdot 7}{\cancel{6}^1}=7$ και $12\cdot\frac{7}{6}=\frac{\cancel{12}^2\cdot 7}{\cancel{6}^1}=2\cdot 7=14$.

Μ. Ναι, αλλά ο αριθμός $\frac{7}{6}$ δεν είναι φυσικός.

Δ. Είναι απαραίτητο να πολλαπλασιάσουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον **ίδιο** αριθμό, όχι υποχρεωτικά φυσικό. Το είδαμε και πάλι στα ισοδύναμα κλάσματα.

Η επανάληψη θα σε βοηθήσει να κατανοήσεις κάποια λεπτά σημεία που δεν είχες προσέξει με την πρώτη ματιά.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Ακόμα ένα παράδειγμα;

Δ. $\frac{12}{6}=\frac{12\cdot 1,5}{6\cdot 1,5}=\frac{18}{9}$. Το δεύτερο πρόβλημα;

Μ. Το **«μηδενικό πρόβλημα»:** Έχουμε $\frac{y}{\chi}=2$, $\frac{y}{\chi}=\frac{20}{10}=2$, αλλά $\frac{y}{\chi}=\frac{0}{0}$;

Δ. Θα παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα γράφοντας με διαφορετικό τρόπο[3] την αναλογία, $\frac{y}{\chi}=2$, ή οποιαδήποτε άλλη, π.χ. την $\frac{y}{\chi}=\frac{20}{10}$, αφού και πάλι καταλήγουμε στην $\frac{y}{\chi}=\frac{20}{10}=2$.

Το ακριβές πηλίκο της διαίρεσης «y:χ» είναι 2.

Η δοκιμή είναι διαιρετέος, y, ίσον: πηλίκο, 2, επί διαιρέτης, χ, αριθμητής = πηλίκο επί παρονομαστής, $\frac{y}{\chi}=2$, δοκιμή, y = 2χ.

Περιέγραψε την τελευταία ισότητα με το νόημα των χ και y.

Μ. Αξία διπλάσια από τα κιλά

Δ.Η αξία είναι αριθμός διπλάσιος από τον αριθμό των κιλών.

Και με τις λέξεις τετμημένη, τεταγμένη;

Μ. Τεταγμένες διπλάσιες από τις τετμημένες.

Δ. Καλύπτεται και το ζεύγος των μηδενικών;

Μ. Καλύπτεται, το ένα μηδενικό είναι διπλάσιο του άλλου!

Το «χ» στην y = 2χ είναι ο άγνωστος χ;

Δ. Δεν είναι άγνωστος, είναι μεταβλητή.

Μπορεί να διατρέχει, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αριθμούς που εκφράζουν κιλά μήλα που είναι δυνατόν να αγοράσουμε.

Αν, υποθετικά, δεν έχουμε περιορισμό στην ποσότητα, η μεταβλητή «χ» μπορεί να είναι θετικός αριθμός ή μηδέν.

Το «χ» είναι άγνωστος π.χ. στην εξίσωση: 20 = 2χ.

Μ. Εξίσωση;

Δ. **Υποψήφια** ισότητα. Το «χ» παριστάνει έναν άγνωστο αριθμό, τον οποίο σκοπεύουμε να προσδιορίσουμε. Έναν αριθμό, αν υπάρχει, που αν πάρει τη θέση του «χ» κάνει την «20 = 2χ» αληθινή ισότητα. Ο 7,5 για παράδειγμα δεν επαληθεύει την εξίσωση, δεν είναι λύση της, 20≠2*7,5, 2*7,5=15.

Ποιος αριθμός ταιριάζει;

Μ. Ο 10, 20=2*10.

Δ. Ο αριθμός 10 είναι η λύση της εξίσωσης 20 = 2χ. Μπορείς να διατυπώσεις ένα «πρόβλημα» που λύνει η συγκεκριμένη εξίσωση;

Μ. Εύκολο. Με 20€ πόσα κιλά μήλα αγοράζουμε;

Δ. Λύση της εξίσωσης είναι και η απάντηση ότι είναι «αδύνατη», δηλ. δεν υπάρχει αριθμός που κάνει την υποψήφια ισότητα, αληθινή ισότητα, π.χ. η 0*χ=7 είναι αδύνατη. Θυμήσου την «απορροφητική ιδιότητα» του μηδενός.

Μ. Πως θα καταλαβαίνω αν το «χ» είναι άγνωστος ή μεταβλητή;

Δ. Υποθέτεις ότι το «χ» είναι ένα σύμβολο που υπακούει στους νόμους των μαθηματικών. Μπορεί να προστίθεται, να αφαιρείται, να πολλαπλασιάζεται και ενδεχομένως να διαιρείται με αριθμούς ή άλλα σύμβολα.

Οι χειρισμοί δεν διαφοροποιούν τον άγνωστο[4] από τη μεταβλητή, π.χ. όπως έχουμε 5+5=2*5, 5*5=5^2, 5*(7+8)=5*7+5*8, θα έχουμε και χ+χ=2*χ=2χ, χ*χ=$χ^2$, χ*(7+8)=χ*7+χ*8=7χ+8χ, είτε το «χ» είναι μεταβλητή, είτε είναι άγνωστος.

Για τον πολλαπλασιασμό, συνηθίζουμε να γράφουμε πρώτα τον αριθμό, μετά το «χ», χωρίς το επί, γράφουμε **7χ**, αντί 7 επί χ, 7*χ, ή $7 \cdot χ$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Το y; Μεταβλητή;

Δ. Θυμάσαι το πρόβλημα;

Μ. Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 20€. Πόσο κοστίζουν 5 κιλά;

Δ. Φυσικά η απάντηση είναι απλή και άμεση. Στη συνέχεια διαπιστώσαμε ότι τα ποσά «κιλά» και «αξία» είναι ανάλογα και αναζητήσαμε όλα τα ζεύγη αντιστοίχων τιμών. Η ερώτηση αφορά την «αξία», συμβολίσαμε με «y» την αξία και καταλήξαμε στο συντελεστή αναλογίας «2», η καλύτερα στην y = 2χ. Η μεταβλητή «y» **εξαρτάται** από την επιλογή αριθμού για την μεταβλητή «χ». Οι μεταβλητές χ και y δεν είναι ελεύθερες, έχουν «δεσμό», ο συντελεστής αναλογίας «2» υποχρεώνει την y να είναι διπλάσια από την χ. Με την επιφύλαξη του μηδενός στον παρονομαστή, μπορούμε να σκεφτούμε και τον δεσμό $\frac{y}{\chi} = 2$. Επιλέγουμε αριθμό για την μεταβλητή χ. Ο αντίστοιχος αριθμός για την y είναι πλήρως καθορισμένος και μοναδικός, είναι ο διπλάσιος, y = 2χ.

Λέμε ότι η μεταβλητή y είναι **συνάρτηση** της μεταβλητής χ.

Μ. Συνάρτηση! Τη λέξη την έχουμε δει και στη γλώσσα, Α΄ Γυμνασίου, στο κείμενο «μεσογειακή διατροφή», λέει ότι «η κατανάλωση ψαριών είναι συνάρτηση της απόστασης από τη θάλασσα…».

Δ. Στα μαθηματικά οι λέξεις είναι «ορολογία», καθορίζονται με ορισμούς. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 0,1,2,3,… , ονομάστηκαν «φυσικοί». Οι υπόλοιποι δεν είναι «αφύσικοι»!

Μ. Ακόμα ένα παράδειγμα συνάρτησης;

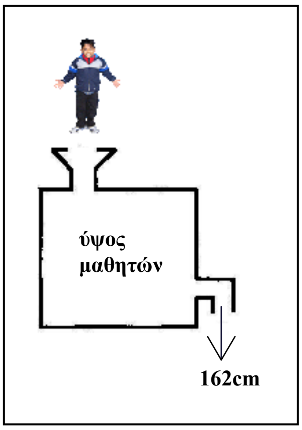
Δ. Μου θυμίζεις πόσο ύψος έχεις;

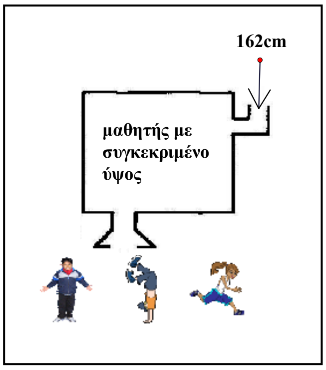
Μ. Το ξέχασες; Ηλικιακά προβλήματα; 162 cm και σε μέτρα 1,62m.

Δ. Είναι και άλλοι μαθητές με το ίδιο ύψος;

Μ. Είναι, αρκετοί, πολλοί.

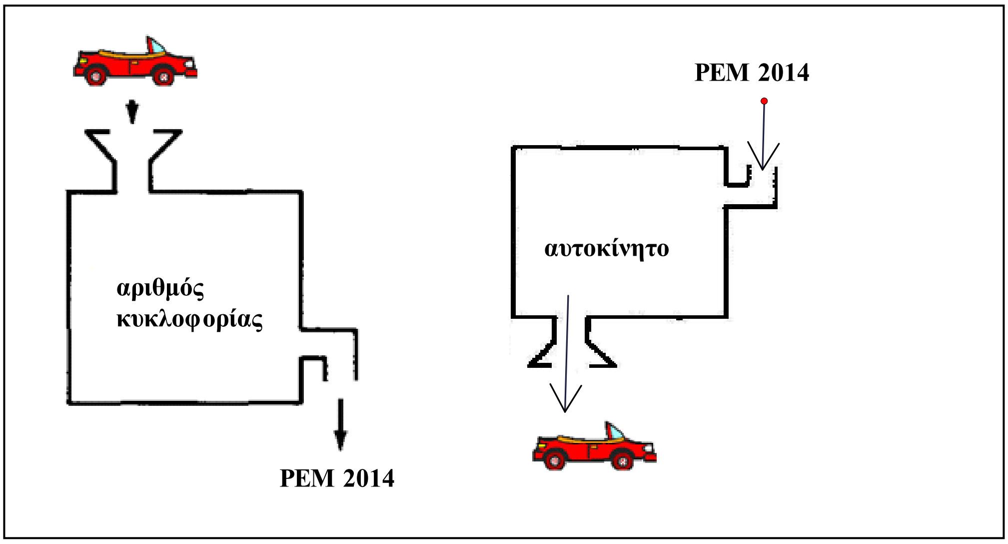
Δ. Η συνάρτηση «ύψος μαθητών», αντιστοιχίζει σε κάθε μαθητή το ύψος του, μια **μοναδική** τιμή. Αυτή η τιμή, π.χ. 162cm, θα είναι η μοναδική αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης «ύψος μαθητών» για τον μαθητή «Α», για τον μαθητή «Β», για τον μαθητή «Γ», για κάθε μαθητή με ύψος 162cm. Η αντίστροφη διαδικασία, «μαθητής με συγκεκριμένο ύψος» αντιστοιχίζει στην επιλογή ύψους, π.χ. 162cm, κάθε μαθητή με ύψος 162cm. Δεν έχει μοναδική έξοδο, είναι «απεικόνιση», αλλά όχι συνάρτηση.





Μ. Γίνεται να είναι και η αντίστροφη συνάρτηση;

Δ. Ναι. Δες το παρακάτω πλαίσιο.

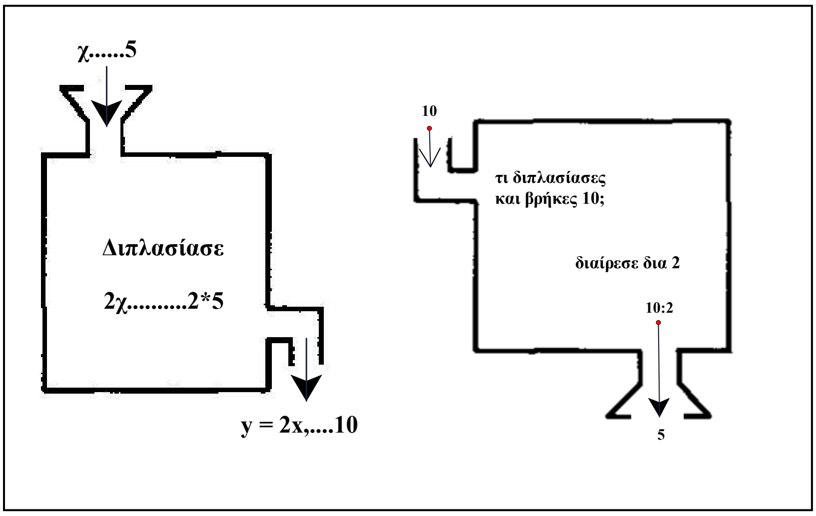


ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σε κάθε αυτοκίνητο αντιστοιχεί μοναδικός αριθμός κυκλοφορίας και σε κάθε αριθμό κυκλοφορίας αντιστοιχεί μοναδικό αυτοκίνητο, τουλάχιστον αυτό επιδιώκει η πολιτεία[5]. Λέγεται συνάρτηση ένα προς ένα, 1-1. Αν η συνάρτηση είναι 1-1, τότε και η αντίστροφη απεικόνιση είναι συνάρτηση.

Μ. Να κάνουμε και ένα παράδειγμα 1-1 με αριθμούς; Γιατί μου δείχνεις γάτες, σκύλους, αυτοκίνητα, αεροπλάνα, διάφορα σχέδια και λογισμικά, όλα ωραία δηλαδή, αλλά μετά μου βάζεις εργασία αριθμητικές ασκήσεις και ζητάς να τις λύσω. Και αν σου φέρω τον Βίκτωρα για λύση, που είναι και live, όχι εικόνα, δεν είναι σίγουρο ότι θα πάω στην άλλη τάξη.

Δ. Ας δούμε την αγοραπωλησία μήλων μόνον «αριθμητικά»:



Για συγκεκριμένη επιλογή κιλών, χ, έχουμε μοναδική τιμή για αξία, y, και αντίστροφα, για συγκεκριμένη αξία, π.χ. 10€, μοναδική τιμή για κιλά, 5Kg.

Αντιλαμβανόμαστε την έννοια της συνάρτησης[6] μιας μεταβλητής σαν μιαν επακριβώς διατυπωμένη οδηγία για το τι πρέπει να κάνουμε στον αριθμό χ έτσι ώστε να πάρουμε τον y.

Μ. Συνάρτηση μιας μεταβλητής; Δηλαδή έχουμε συναρτήσεις και δύο μεταβλητών;

Δ. Έχεις ήδη συναντήσει συναρτήσεις δυο μεταβλητών πολύ πριν από τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Η αρχαιότερη και γνωστότερη είναι η πρόσθεση: ζ = χ + ψ. Αν διαλέξουμε για χ τον αριθμό 7 και για ψ τον 4, τότε η συνάρτηση της πρόσθεσης αντιστοιχίζει στο ζεύγος αριθμών (7,4) τον αριθμό 11. Η τιμή της μεταβλητής «ζ» εξαρτάται από τις τιμές των μεταβλητών «χ» και «ψ».

Μ. Ναι, αλλά και 10+1 = 11, 8 + 3 =11…

Δ. Σωστά. Υπάρχουν διάφοροι συνδυασμοί για την τιμή «11», όμως, για κάθε ζεύγος αριθμών η συνάρτηση «ζ» έχει **μοναδική** απάντηση.

Μετά την πρόσθεση, έμαθες την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση, όλες συναρτήσεις δυο μεταβλητών. Για τη διαίρεση δεν ξεχνάμε την ιδιοτροπία του μηδενός. Διαιρετέος ναι, διαιρέτης όχι. Η «δ», η συνάρτηση της διαίρεσης, αντιστοιχίζει στο ζεύγος (διαιρετέος, διαιρέτης) το πηλίκο τους, π.χ. στο (0, 7), τον αριθμό 0, στο (2, 3) το 2/3, αλλά δεν αντιστοιχίζει κάποιον αριθμό στο ζεύγος (7, 0).

Συνεχίζουμε στα μήλα;

Μ. Ναι. Συναρτήσεις μιας μεταβλητής!

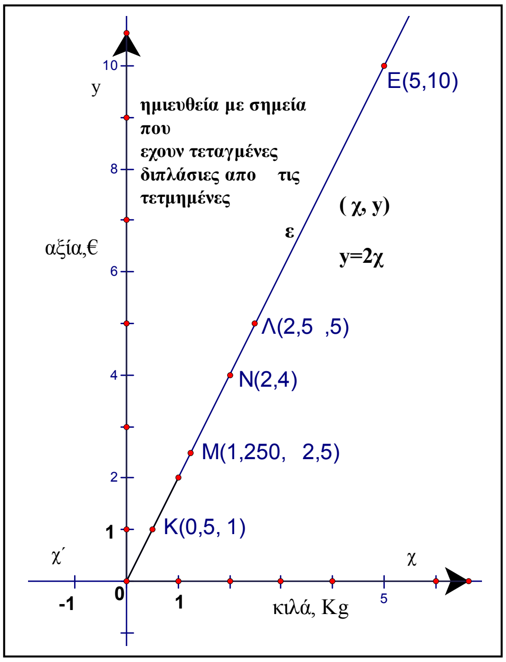
Δ. Αρχίσαμε από το «Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 20€…» και αναζητούμε όλα τα δυνατά ζεύγη αντιστοίχων τιμών… .Οι «ανεξάρτητες» επιλογές για την μεταβλητή «χ», αριθμός κιλών, δημιουργούν αντίστοιχες τιμές για την εξαρτημένη μεταβλητή «y», αξία σε €, τελικά άπειρα διατεταγμένα ζεύγη (χ, y) και οδηγούμαστε στο σύστημα συντεταγμένων και στην γραφική παράσταση ή «γράφημα» της συνάρτησης.

Μ. Διατεταγμένα;

Δ. Ναι, έχει σημασία ποιο θα γράψω πρώτα, (χ, y) , (τετμημένη, τεταγμένη), (χ τα κιλά, y η αξία), προσέχουμε: (χ, y): (1, 2), (5,10), (2, 4), (0,0), (0,5, 1).

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Θυμήσου τα ισοδύναμα κλάσματα…, ευθεία.

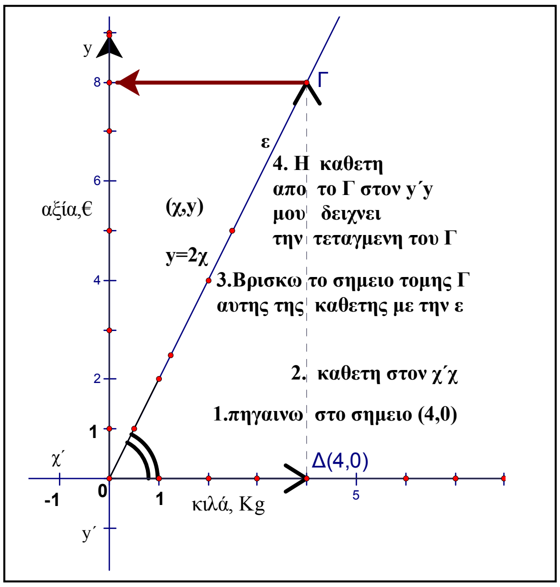


Η ημιευθεία «y = 2χ» περιέχει όλα τα ζεύγη (χ,y) αντιστοίχων τιμών που μπορεί να προκύψουν από αυτό το πρόβλημα.

Για οποιονδήποτε αριθμό κιλών, π.χ. 4, βλέπουμε την απάντηση στο σχέδιο.

Μ. Την βλέπουμε, ή την βλέπεις; Μπορούμε όμως να κάνουμε υπολογισμούς, 2*4=8.

Δ. Θυμάσαι πως βρίσκουμε τα σημεία;



Μ. Ξεκινώ από την αρχή (0,0), 4 οριζόντια, 8 κατακόρυφα.

Δ. Σωστά, από την αρχή, 4 οριζόντια, μια μικρή στάση για ξεκούραση στο (4,0), και συνεχίζουμε κατακόρυφα μέχρι να συναντήσουμε την ημιευθεία «ε». Στάση στο σημείο Γ που είναι πάνω στην ημιευθεία ε. Αναζητούμε την τεταγμένη που αντιστοιχεί στο 4. Την βλέπουμε στον y΄y.

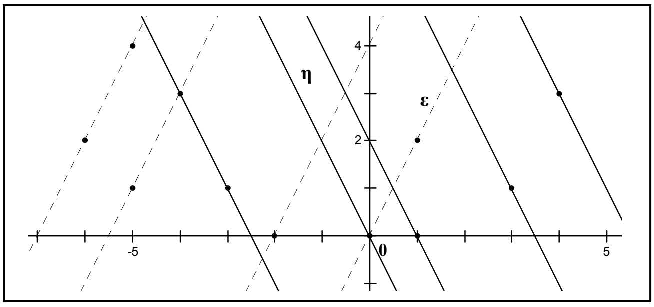
Παρατήρησε τα βήματα 1-2-3-4. Υπολόγισε την κλίση του τμήματος ΟΓ.

Μ. Κλίση του ΟΓ: 2. Οι τόνοι καταργήθηκαν; Η γωνία;

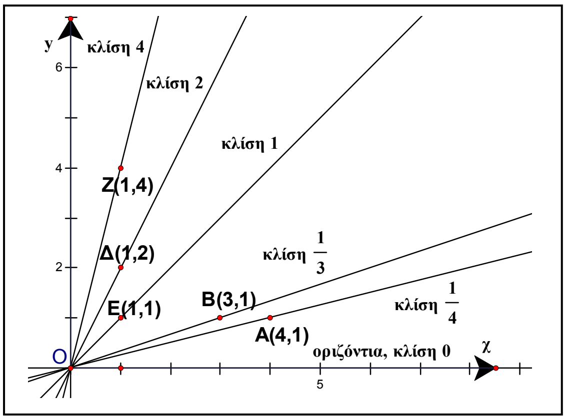
Δ. Οι τόνοι είναι άσκηση για το σπίτι. Η γωνία είναι η γωνία κλίσης του ΟΓ. Ο αριθμός 2 είναι ο **συντελεστής αναλογίας.** Ο συντελεστής αναλογίας 2 είναι η **κλίση** της ημευθείας ε, αλλά και της ευθείας που καθορίζει το τμήμα ΟΓ, λέγεται και **συντελεστής διεύθυνσης** της «ε», καθορίζει και ξεχωρίζει την ε από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή. Είναι **η μοναδική** ευθεία που διέρχεται από το (0,0) με κλίση 2.

Μ. Δεν έχουμε άλλες ευθείες με κλίση 2;

Δ. Μπορούμε να σχεδιάσουμε ευθεία με κλίση 2 από οποιοδήποτε σημείο, αλλά από το (0,0) μια μόνο, την ευθεία «ε».



Όπως και με άλλη κλίση, π.χ. -2, από το σημείο (0,0) διέρχεται μοναδική ευθεία με κλίση -2, η ευθεία «η». Οι διακεκομμένες έχουν κλίση 2, οι συμπαγείς ευθείες κλίση -2.

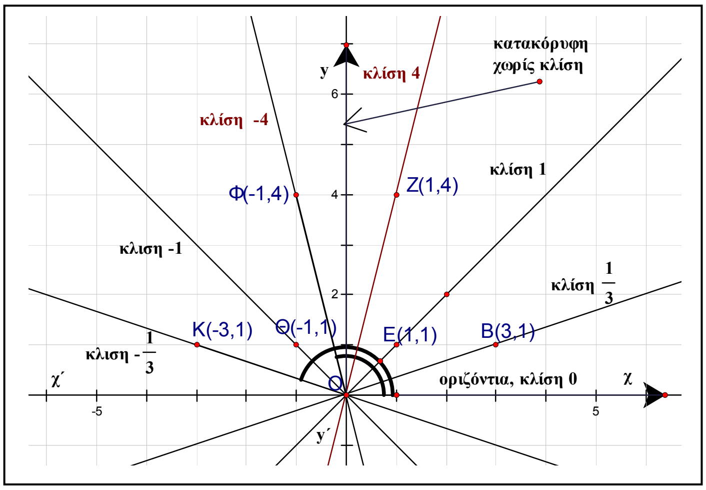


Στο διπλανό σχήμα έχουμε ευθείες που διέρχονται από το (0,0) με διάφορες κλίσεις. Σου υπενθυμίζω ότι οι οριζόντιες ευθείες έχουν κλίση μηδέν. Οι κατακόρυφες είναι ευθείες χωρίς κλίση: για «μηδενική» οριζόντια μετατόπιση, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι «χωρίς πέρας», ά-πειρη.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Το θυμάμαι και από τι σκάλες, όσο μεγαλώνει η γωνία, αυξάνεται η κλίση. Για τις κατακόρυφες μπορούμε να πούμε ότι η κλίση τους είναι το άπειρο;

Δ. Η κλίση είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός και δεν υπάρχει αριθμός που να αντιστοιχεί στην κλίση μιας κατακόρυφης ευθείας. Η κλίση των κατακόρυφων ευθειών είναι μεγαλύτερη από οποιονδήποτε αριθμό, όσο μεγάλος και να είναι, η κλίση είναι «απεριόριστη». Το «άπειρο» δεν είναι αριθμός. Ο συμβολισμός είναι ∞, αλλά δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε αυτό το σύμβολο στην πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση με τον ίδιο τρόπο που χρησιμοποιούμε τους αριθμούς.



Για την αύξηση της κλίσης, θα πρέπει να προσέχουμε την «μετάβαση» από την ορθή σε αμβλεία γωνία κλίσης. Τότε η κλίση είναι αριθμός με μεγάλη απόλυτη τιμή, αλλά αρνητικός, η ευθεία «κατεβαίνει». Η αύξηση και πάλι ισχύει καθώς η γωνία κατευθύνεται από τις 90 στις 180 μοίρες.Όσο πλησιάζουμε την ευθεία γωνία, την γωνία 180 μοιρών, οι κλίσεις αυξάνονται, πρόσεξε ότι συγκρίνουμε αρνητικούς.

Δεν έχουμε γωνία κλίσης 180 μοιρών, οι γωνίες κλίσης είναι από μηδέν έως 180^o, μη συμπεριλαμβανομένων των 180^o.

Όταν η ευθεία γίνει οριζόντια, η γωνία κλίσης είναι 0^o και η κλίση μηδέν. Στο σχήμα: $-4 < -1 < -\frac{1}{3} < ....0$, μηδέν είναι η κλίση του χ΄χ.

Μ. Και όλα ξεκίνησαν επειδή θέλαμε να αγοράσουμε μήλα.

Δ. Η προσπάθειά μας για κατανόηση αποδίδει περισσότερο αν με κάθε ευκαιρία διερευνούμε τις ίδιες έννοιες, τις ίδιες ιδέες, σε διαφορετικό και συνεχώς πλουσιότερο περιβάλλον.

Μ. Να κάνουμε ένα ακόμα παράδειγμα;

Δ. Ναι. Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 15€. Πόσο κοστίζουν 8 κιλά;

Μ. Άλλα φρούτα δεν έχει;

Δ. Δέκα κιλά πορτοκάλια κοστίζουν 15€. Πόσο κοστίζουν 8 κιλά;

Μ. Δεν πειράζει, μήλα! Η ερώτηση «πόσο κοστίζουν» είναι αξία, €, «y».

Δ. Κάνε τη γραφική παράσταση

Μ. Καλά, μη φωνάζεις. Τα Kg δεδομένο, «χ». Να βάλω γατάκια;

Δ. Περιμένω…

Μ. $\frac{y}{\chi} = \frac{15}{10} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{3}{2}$, μετά;

Δ. Τι εκφράζει το κλάσμα;

Μ. Ο λόγος του y προς το χ είναι τρία προς 2…

Δ. Τι εκφράζει το κλάσμα;

Μ. Το ακριβές πηλίκο y:χ, ναι…, δοκιμή, $y = \frac{3}{2}\chi$

Υπάρχει άλλη ερμηνεία του $\frac{3}{2}$;

Μ. Ποιο συγκεκριμένη ερώτηση;

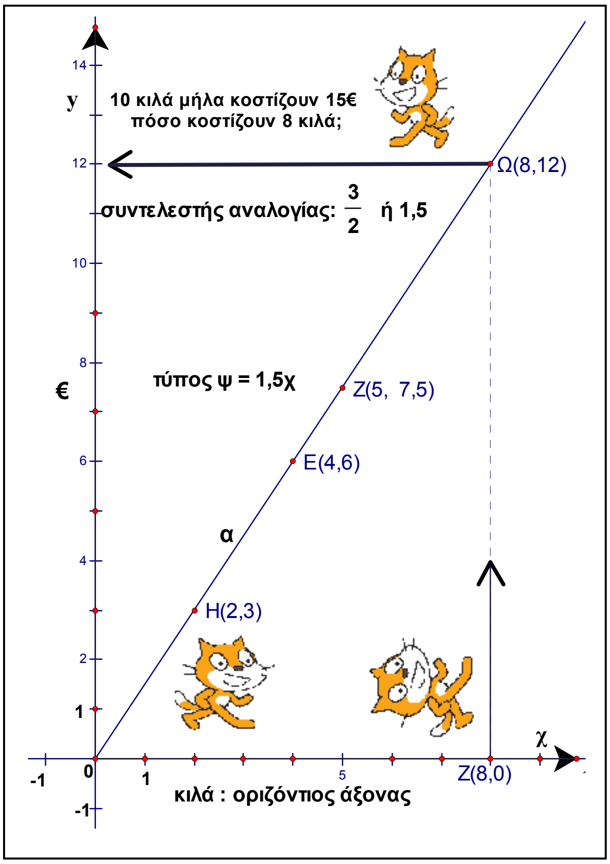
Δ. Πόσο κάνει το κιλό;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. 10 κιλά , 15€, 15:10=1,5 € το κιλό, $\frac{3}{2}=1,5$. Το έμαθα επιτέλους: το κλάσμα εκφράζει ποια ποσότητα του αριθμητή, €, αντιστοιχεί στη μοναδιαία ποσότητα του παρονομαστή, Kg, πόσο κάνει το κιλό.

Δ. Πίνακας τιμών θα σου χρειαστεί;

Μ. Όχι. Η γραφική παράσταση είναι ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μου χρειάζεται ένα ακόμα σημείο. Για χ=4, βρίσκω y=6, το σημείο Ε(4,6). Η ημιευθεία καθορίστηκε, είναι η ημιευθεία «α».



Για να βρούμε πόσο κοστίζουν τα 8 κιλά παρακολουθούμε τη γάτα! Εκκίνηση από την αρχή, από το σημείο (0,0).

Δ. Χωρίς το σχήμα μπορούμε;

Μ. Απλό, ξέρουμε την τιμή του κιλού, πολλαπλασιάζουμε επί $\frac{3}{2}$, επί 1,5 ,…8*1,5=12. Ευθείες, γάτες, περιττά.

Δ. Δεν άκουσα;

Μ. Εντάξει, η ημιευθεία έχει όλες τις περιπτώσεις.

Δ. Οι περιπτώσεις είναι άπειρες, η διαδικασία της γραφικής παράστασης θέλει το χρόνο της. Αν θέλουμε να απαντήσουμε σε μεμονωμένες ερωτήσεις, γράφουμε πρώτα την αναλογία, $\frac{\text{αξία}}{\text{κιλά}} = \frac{3}{2}$.

Το 8 είναι κιλά, ας συμβολίσουμε με «ξ» την αξία των 8 κιλών, τα ποσά αξία και κιλά είναι ανάλογα, ο λόγος αξία προς κιλά είναι γνωστός, $\frac{\xi}{8} = \frac{3}{2}$ και …πράξεις: $\xi = \frac{3}{2} \cdot 8 = \frac{3 \cdot \cancel{8}^{4}}{\cancel{2} \cdot 1} = 12$, ή 8*1,5=12, όπως υπολόγισες προηγουμένως.

Μ. Το ξ είναι ο άγνωστος χ;

Δ. Το ξ είναι ο άγνωστος ξ. Αναζητούμε έναν συγκεκριμένο αριθμό, βάζουμε όποιο σύμβολο θέλουμε, δεν είναι απαραίτητο να ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό πάντα «χ». Μπορούμε να βάλουμε ένα σύμβολο που έχει σχέση με την ονομασία του, π.χ. εδώ αξία… «ξ».

Μ. Και αν η ερώτηση είναι στα κιλά;

Δ. Τι εννοείς;

Μ. Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 15€. Πόσα κιλά αγοράζω με 12€;

Δ. Μεμονωμένη απάντηση ή όλες οι περιπτώσεις;

Μ. Μεμονωμένη.

Δ. Ποια είναι τα ποσά; Είναι ανάλογα;

Μ. Κιλά και αξία, ανάλογα, ναι.

Δ. Ποιος είναι ο λόγος των αντιστοίχων τιμών;

Μ. $\frac{\text{αξία}}{\text{κιλά}} = \frac{15}{10}$, $\frac{\text{κιλά}}{\text{αξία}} = \frac{10}{15}$. Ποιον να διαλέξω;

Δ. Ποιον θέλεις;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. $\frac{\text{αξία}}{\text{κιλά}}$

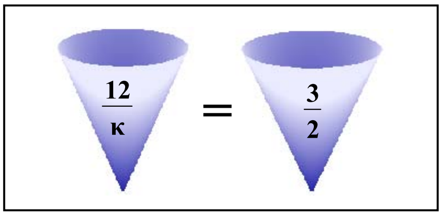
Δ. Στην ερώτησή σου: «Πόσα κιλά αγοράζω με 12€;» Ο άγνωστος είναι κιλά ή αξία;

Μ. Πόσα κιλά αγοράζω…, κιλά.

Δ. Με πόσα €;

Μ. Με 12.

Δ. $\frac{12}{κ}=\frac{3}{2}$. Μπορείς να συνεχίσεις;



Μ. Γιατί έγραψες $\frac{3}{2}$ **;** γιατί κάναμε την απλοποίηση;

Δ. Εντάξει, $\frac{12}{κ}=\frac{15}{10}=1{,}5=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{3}{2}$. Τα $\frac{15}{10}$, $\frac{3}{2}$, $1{,}5$ και άλλα άπειρα, είναι σύμβολα του ίδιου αριθμού. Συνέχεια;

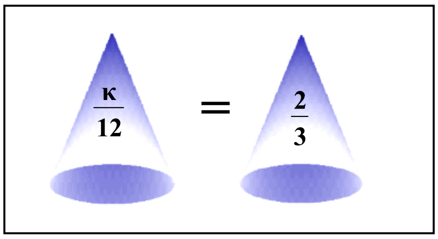
Μ. Ο άγνωστος «κ» είναι κιλά;

Δ. Ναι, το αρχικό γράμμα.

Μ. Και γιατί δεν βάζουμε λ;

Δ. Βάλε «λ».

Μ. Καλά το αφήνω «κ», αλλά είναι στον παρονομαστή.



Δ. Αντιστρέφουμε.

Μ. Βοήθεια;

Δ. $\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$, $\frac{10}{15}=\frac{2\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{2}{3}$. Το κλάσμα $\frac{κ}{12}$ είναι ίσο με το $\frac{2}{3}$, το πηλίκο της διαίρεσης «κ : 12» είναι $\frac{2}{3}$. Γράψε τη δοκιμή της διαίρεσης.

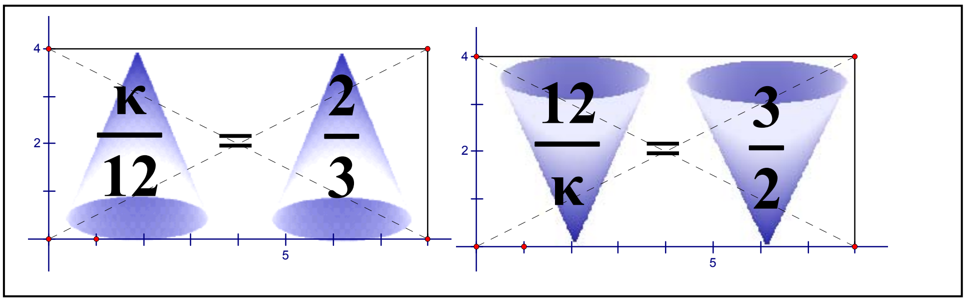
Μ. Διαιρετέος = διαιρέτης επί πηλίκο, $\kappa = 12 \cdot \frac{2}{3} = \frac{12 \cdot 2}{3} = \frac{24}{3} = 8$, μισό λεπτό… θα μπορούσα να απλοποιήσω… $\frac{\kappa}{12} = \frac{2}{3}$, $\kappa = \cancel{12}^{4} \cdot \frac{2}{\cancel{3}^{1}} = 4 \cdot 2 = 8$

Δ. Πολύ σωστά.

Μ. Γίνεται χωρίς να αντιστρέψουμε τα κλάσματα;

Δ. Ναι, χιαστί γινόμενα, είτε τα αντιστρέψεις, είτε όχι, τα χιαστί γινόμενα είναι ίδια: $3 \cdot \kappa = 2 \cdot 12$,οπότε διαιρούμε με το 3 και βρίσκουμε το κ,

$$\kappa = \frac{24}{3} = \frac{2 \cdot 12}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8.$$



Ή από την αναλογία $\frac{\kappa}{12} = \frac{10}{15}$, $15 \cdot \kappa = 10 \cdot 12$, $15 \cdot \kappa = 120$, διαιρούμε δια 15, απλοποιούμε…, $15 \cdot \kappa = 10 \cdot 12$, $\kappa = \frac{10 \cdot 12}{15} = \frac{2 \cdot \cancel{5} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Χρειάζεται ένας πολλαπλασιασμός,10*12=120, και μια διαίρεση, 120:15=8. Είναι καλύτερα όμως να περιγράψουμε το αποτέλεσμα με κλάσμα που δείχνει ποιές πράξεις θα κάνουμε, $\kappa = \frac{10 \cdot 12}{15}$, μετά να αναλύσουμε τους 10, 12 και 15 σε γινόμενα πρώτων παραγόντων και να απλοποιήσουμε.

Ελαχιστοποιούμε τις πράξεις, και αποφεύγουμε τα λάθη που καραδοκούν σε όλους τους υπολογισμούς.

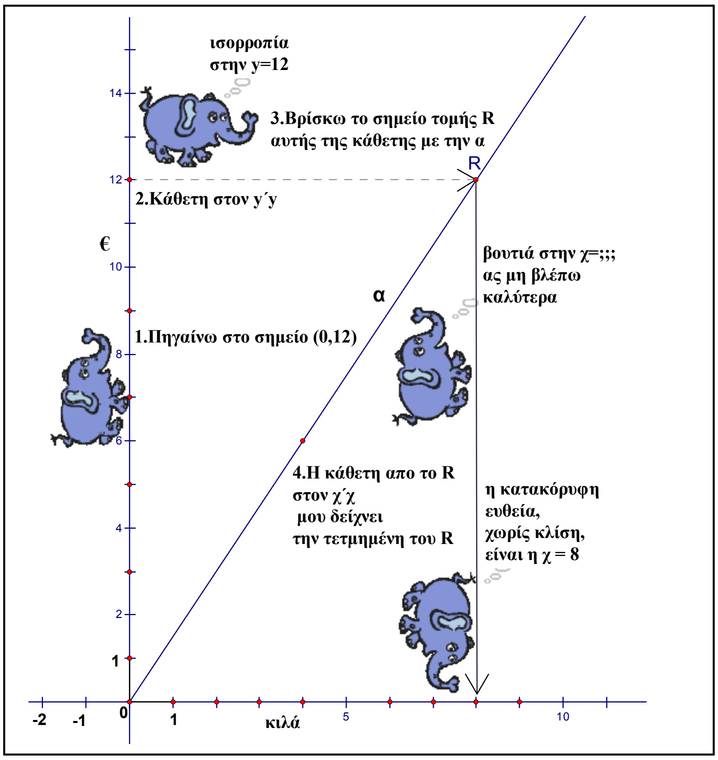
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Από την ευθεία μπορούμε να διαβάσουμε τη λύση;

Δ. Ευθεία; Ποια ευθεία; Από ποιο πρόβλημα;

Μ. Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 15€. Πόσο κοστίζουν 8 κιλά; Μπορώ να διαβάσω την απάντηση στην ερώτηση: πόσα κιλά αγοράζω με 12€;

Δ. Στην γραφική παράσταση που έκανες εσύ, διώχνουμε τη γάτα και φέρνουμε τον Στηβ. Ο αριθμός 12 είναι αξία, €, ξεκινώ από τον y΄y, από το σημείο (0,12), ακολουθώ τον Στηβ, βήματα 1-2-3-4



Μ. Στηβ;

Δ. Το χαρούμενο ελεφαντάκι!

Μ. Τα μαθηματικά τα διδάσκεις για μένα ή για σένα;

Δ. Η **διδασκαλία** είναι για σένα, για τους περισσότερους Μαθηματικούς είναι απόλαυση[7]!

Μ. Χωρίς τον Στηβ γίνεται;

Δ. Το βρήκες πριν, μια σειρά, είναι ασύμφορο να ταΐζουμε τον Στηβ.

Μ. Διαίρεση;

Δ.Με ποιόν αριθμό, χ, θα πολλαπλασιάσω τον 1,5 για να πάρω γινόμενο 12; Εξίσωση: 1,5χ = 12, λύση: χ = 12:1,5 = 8.

Μ. Και αν θέλω όλες τις περιπτώσεις;

Δ. Όλες; Ποιού προβλήματος. Επαναλαμβάνεις το πρόβλημα;

Μ. Το ξέχασες; Δέκα κιλά μήλα κοστίζουν 15€.Ποσα κιλά αγοράζω με 12€;

Δ. Η ερώτηση σε ποιο ποσόν αναφέρεται;

Μ. Κιλά.

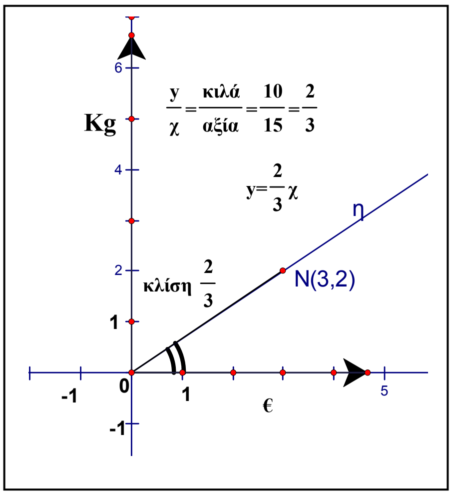
Δ. Κατακόρυφος άξονας τα κιλά, το ποσόν της ερώτησης, το ποσόν που ζητείται. Οριζόντιος τα €, το ποσόν που δίνεται. Με y στο πρόβλημα αυτό θα συμβολίσουμε τα κιλά, με χ τα €. Σημεία (€, Kg).

Κάνε πίνακα τιμών και σχεδίασε την ημιευθεία.

Κιλά, Kg	y	10	20	5	1	1,5	2
αξία	χ	15	30	7,5	1,5	2,25	3

Χρειάζεσαι πολλές τιμές;

Μ. Διέρχεται από την αρχή , από το (0,0). Μου χρειάζεται ένα ακόμα σημείο, παίρνω το (3, 2). Συντελεστής αναλογίας $\frac{10}{15}$, ανάγωγο $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, έτοιμο, ημιευθεία «η», κλίση 2/3.



Διάλλειμα για μήλο!

Δ. Που θα το βρούμε;

Μ. Έχω από το σπίτι

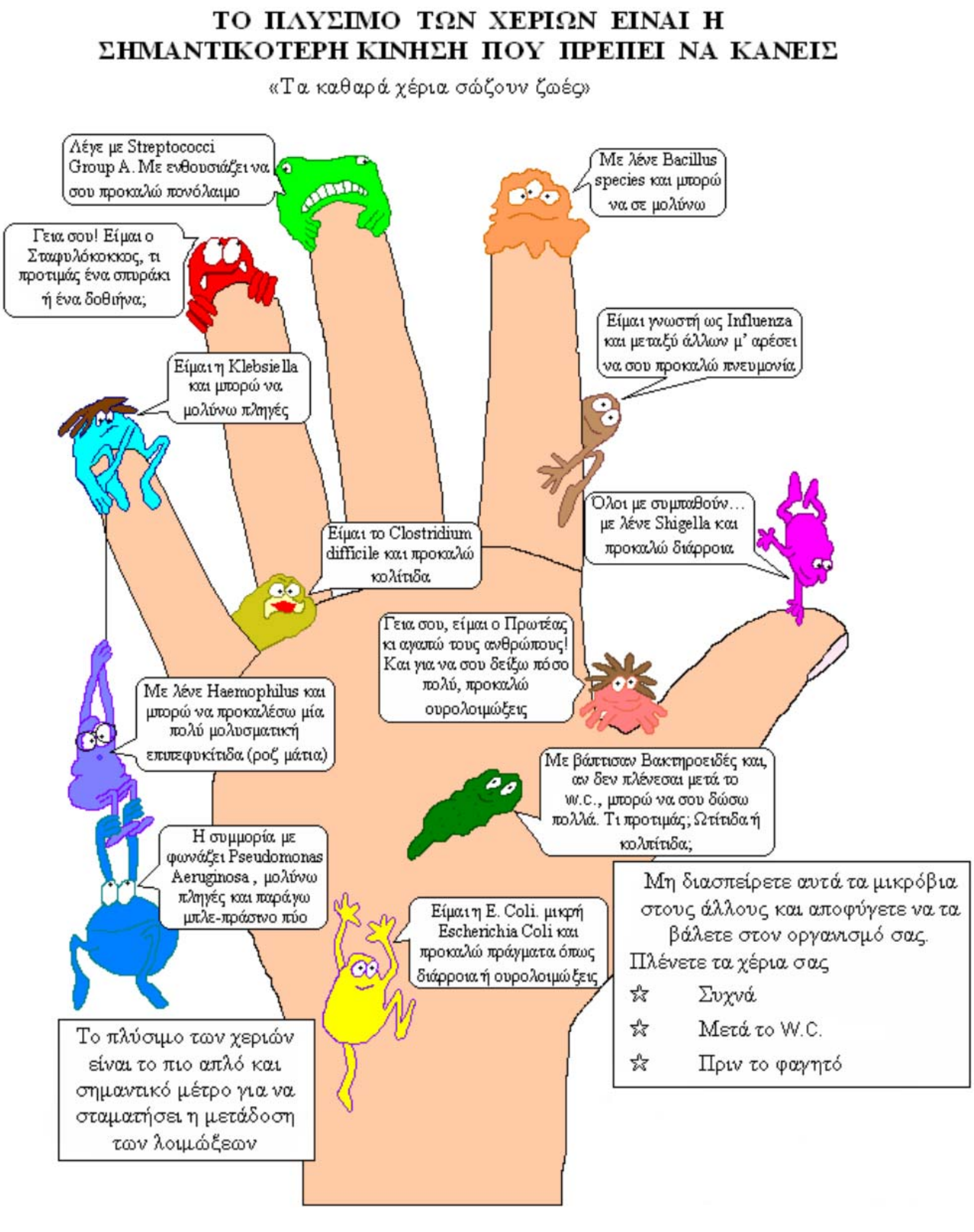
Δ. Καλά, πήγαινε να το πλένεις.

Μ. Το έπλυνε η Χρυσούλα, η μάνα μου

Δ. Τότε πήγαινε να πλένεις τα χέρια σου! Έχω κάτι να σου δείξω για το θέμα αυτό από την επιτροπή Νοσοκομειακών Λοιμώξεων[8].

Μ. Καλά μη φωνάζεις. Πηγαίνω!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΓΝΩΜΟΝΕΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Να εξετάσουμε πρώτα **αν υπάρχει** τετράγωνο με εμβαδόν 2;

Δ. Εμβαδόν δυο τετραγωνικές μονάδες, 2τ.μ.

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο υπάρχει;

Μ. Ορθογώνιο ένα επί δύο.

Δ. Ορθογώνιο με διαφορετικές διαστάσεις και εμβαδόν δύο τ.μ.;

Μ. Όχι, δυο με πολλαπλασιασμό, μόνο ένα επί δυο, ο αριθμός 2 είναι ο μοναδικός σύνθετος που είναι πρώτος, διαιρέτες ακριβώς δύο: 2 και 1.

Δ. Έχουμε και αριθμούς που δεν είναι ακέραιοι, τόσα μαθήματα!

Μ. Το ξέρω, αλλά ήθελα να διαπιστώσω αν με παρακολουθείς! Ορθογώνιο μισό επί τέσσερα: 4*0,5=2.

Δ. Άλλες διαστάσεις για ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν 2τ.μ.;

Μ. Παίζουν και οι δεκαδικοί, 2*1, 4*0,5, 8*0,25. Πολλαπλασιάζουμε τη μια πλευρά, ισοφαρίζουμε διαιρώντας την άλλη!

Δ. Πολλαπλασιάζουμε τη μια πλευρά με έναν αριθμό, «ισοφαρίζουμε» διαιρώντας την άλλη με τον **ίδιο** αριθμό.

Τα μήκη των πλευρών είναι ποσά ανάλογα;

Μ. Ανάλογα όχι. Στα ανάλογα πολλαπλασιάζουμε και τα δυο ποσά με τον ίδιο αριθμό…Το ξέρω! Αντιστρόφως ανάλογα. Το «αντιστρόφως» από πού;

Δ. Το γινόμενο αντιστρόφων είναι ένα, το εμβαδόν διατηρείται σταθερό.

Μ. Άσχετο; Που είδες γινόμενο αντιστρόφων; Ποιο ένα;

Δ.Πολλαπλασιάζουμε τη μια πλευρά με έναν αριθμό, «ισοφαρίζουμε» πολλαπλασιάζοντας την άλλη με τον **αντίστροφο**, η διαίρεση είναι πολλαπλασιασμός με τον αντίστροφο, φέρνουμε τους αντίστροφους «κοντά», βλέπουμε το «1». Πολλαπλασιάζουμε τη μια πλευρά π.χ. επί 4 και διαιρούμε την άλλη δια 4: «4*2=8, $1 \cdot \frac{1}{4} = 0,25$ ».

Δεν βιαζόμαστε να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό «8*0,25», πρώτα τακτοποιούμε τους αριθμούς, αντιμεταθετική και προσεταιριστική, θυμήσου τον Ίππασο, $(4\cdot 2)*\left(1\cdot\frac{1}{4}\right)=...$ $\left(4\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot(2\cdot 1)=2$

Μ. Όλη αυτή η ταλαιπωρία και διάφορες εξυπνάδες για το 8*0,25; Το βρίσκω αμέσως και από μνήμης, δεν έχω ανάγκη και την αριθμομηχανή.

Δ. Το παράδειγμα ήταν εύκολο, για να κατανοήσεις τη διαδικασία, π.χ. αν πολλαπλασιάσουμε τη μια πλευρά επί 123456789 και διαιρέσουμε την άλλη δια 123456789, το νέο ορθογώνιο θα έχει εμβαδόν δυο τ.μ., γιατί

$$(1234546789\cdot 2)*\left(\frac{1}{123456789}\right)=\left(123456789\cdot\frac{1}{123456789}\right)*(2\cdot 1)=2\,.$$

Αν η μια πλευρά **γίνει** 16 ποιες θα είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου;

Μ. Διαλέγω την πλευρά 2, πλευρές 8*2=16, $1\cdot\frac{1}{8}=0{,}125$, και το κόλπο N^{o} 123456789…, $16\cdot 0.125=(8\cdot 2)\cdot\left(1\cdot\frac{1}{8}\right)=...=\left(8\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot(2\cdot 1)=2$

Δ. Αν η μια πλευρά **γίνει** 0,1;

Μ. Πως θα γίνει 0,1, με τι πολλαπλασιάζω;

Δ. Την πλευρά «1» επί ένα δέκατο.

Μ. Διαιρούμε την μια δια 10, πολλαπλασιάζουμε την άλλη επί 10, διαστάσεις, 0,1 και 10*2=20, εμβαδόν 20*0,1=2. Άρχισα να εκνευρίζομαι! Τα απλά τα εξηγείς αναλυτικά και μετά …έρχεται η ακατανόητη καταιγίδα.

Δ. Αν η μια πλευρά πολλαπλασιαστεί επί 0,8888…, άπειρα «8», υπενθυμίζω $0{,}\overline{8}=0{,}88888888888888...$, τι **θα** γίνει για το εμβαδόν;

Μ. Αν πολλαπλασιάσω επί 1, θα μείνει ο ίδιος, αλλά μετά πως θα διαιρέσω;

Δ. Ποια διαίρεση;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. $2:0,\overline{8}$. Τι διαίρεση είναι αυτή;

Δ. Γιατί να κάνουμε τη διαίρεση;

Μ. Πολλαπλασιάζουμε την μια διάσταση επί αυτό το τέρας, διαιρούμε την άλλη δια του τέρατος!

Δ. $\left(1\cdot 0,\overline{8}\right)\cdot\left(2:0,\overline{8}\right)=\left(0,\overline{8}\cdot\frac{1}{0,\overline{8}}\right)\cdot\left(1\cdot 2\right)=1\cdot\left(1\cdot 2\right)=2$. Δεν χρειάζεται να βρίσκουμε αποτελέσματα όταν δεν είναι απαραίτητα. Τα **τελικά** αποτελέσματα θέλουμε, τα ενδιάμεσα **προσπαθούμε** να τα αποφύγουμε.

Μ. Αλλά πως θα κάνουμε τη διαίρεση;

Δ. Ποια διαίρεση;

Μ. $2:0,\overline{8}$.

Δ. Πόσες φορές είπαμε, πολλαπλασιάζουμε επί τον αντίστροφο, $2\cdot\frac{1}{0,\overline{8}}$!

Μ. Εξυπνάδες; Τι **αποτέλεσμα** βρίσκουμε, ποιος αριθμός είναι αυτός;

Δ. Αποτέλεσμα 2,25. Μπορείς να βρεις και συ το αποτέλεσμα. Άλλαξε το ενοχλητικό σύμβολο με κάτι πιο «φιλικό». Απλός περιοδικός…

Μ. Κάπου το έχω ξαναδεί… αλλά δεν θυμάμαι.

Δ. Μην ανησυχείς, όταν φτάσω και εγώ στην ηλικία σου τα ίδια προβλήματα θα έχω!

Μ. Αστειάκι; Δεν έχεις παρατηρήσει ότι με αυτά που πιστεύεις ότι είναι αστεία γελάς μόνον εσύ;

Δ. Καλά, $0,\overline{8}=\frac{8}{9}$, $2:\frac{8}{9}=2\cdot\frac{9}{8}=\frac{\cancel{2}\cdot 9}{\cancel{2}\cdot 4}=\frac{9}{4}=2,25$. Τελικά: $2,25\cdot 0,\overline{8}=2$.

Μ. Και αν πολλαπλασιάσω επί 2 πρώτα, $2\cdot 0,\overline{8}$, τι θα βρω; 0,161616…

Δ. Όχι, πως έκανες τον πολλαπλασιασμό;

Μ. Δυο επί οκτώ ίσον 16.

Δ. Σωστό, αλλά τι σχέση έχει με τον πολλαπλασιασμό $2 \cdot 0,888... = 2 \cdot 0,\overline{8}$;

Μ. Α ναι, 1,6161616…

Δ. Πως το βρήκες πάλι αυτό; Βρες το γινόμενο 2*888.

Μ. Καλά, πρέπει να αρχίσω από το τέλος, από το τελευταίο «8», …ξεκινώ για το …άπειρο, να βρω το τελευταίο «8» του 0,8888888888888…

Δ. Μα σου έδειξα, άλλαξε το σύμβολο για τον αριθμό 0,8888888… .

Μ. $2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{9}$, νάτο το 16, αριθμομηχανη,…1,77777778. Οχ! Που βρέθηκαν τα «7», πως προέκυψε το 8, χάθηκαν και τα 6.

Δ. $\frac{16}{9} = 1 + \frac{7}{9} = 1 + 0,777... = 1 + 0,\overline{7} = 1,\overline{7}$. Η αριθμομηχανή «στρογγυλεύει», δεν μπορεί να δείξει τα άπειρα ψηφία: 1,7777777777777…≈1,77777778

Μ. Και αν δεν θέλω να αλλάξω το σύμβολο;

Δ. Το ανάπτυγμα π.χ. του 888 είναι 8*100+8*10+8=800+80+8.

Μ. Και;

Δ. Επιμεριστική ιδιότητα του πολ/μου για την πρόσθεση:

2*888=2*(800+80+8)………τρεις πολλαπλασιασμοί και κάτι προσθέσεις.

Μ. Το ξέρω αυτό, αλλά το 2*0,888… πως θα γίνει;

Δ. Το ίδιο, $2 \cdot 0,888... = 2 \cdot \left(\frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + ... \right) = 2 \cdot \frac{8}{10} + 2 \cdot \frac{8}{100} + ...$

Μ. Και πάλι ξεκινώ για το άπειρο… από την αρχή. Και θα βρούμε 16/9;

Δ. $1,777... = 1,\overline{7}$. Με τα «απειροσύμβολα», για το εμβαδόν του ορθογωνίου θα γράψουμε την «εξυπνάδα» $\frac{16}{9} \cdot \frac{9}{8} = 1,777... \cdot 1,125 = 1,\overline{7} \cdot 1,124\overline{9} = 2!$.

Μ. Πως βρέθηκε αυτό, για τα «9» κάτι είπαμε, αλλά τα «7» από πού ήρθαν;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Το είπαμε προηγουμένως: $\frac{16}{9}=\frac{9}{9}+\frac{7}{9}=1+0,\overline{7}=1,\overline{7}=1,777...$

Μ. Συνέχεια αυτό κάνεις. Σου ζητώ μια ευθεία εξήγηση και το εξηγείς ανάποδα. **Θέλω** να μου εξηγήσεις πως θα βρω αυτά τα «7» από τον πολ/μο 2*0,88888888…!

Δ. $2\cdot\frac{8}{10}+2\cdot\frac{8}{100}+2\cdot\frac{8}{1000}+2\cdot\frac{8}{10000}...=\frac{16}{10}+\frac{16}{100}+\frac{16}{1000}+\frac{16}{10000}...$

$$=\frac{16}{10}+\frac{16}{100}+\frac{16}{1000}+...=\frac{10}{10}+\frac{6}{10}+\frac{10}{100}+\frac{6}{100}+\frac{10}{1000}+\frac{6}{1000}+...$$

$$=1+\frac{6}{10}+\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{1}{100}+\frac{6}{1000}+...=1+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+...=1,77...$$

Μ. Ποιο είναι το σύμβολο για το άπειρο;

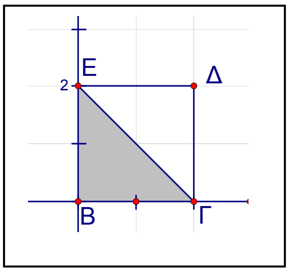
Δ. Το έχουμε δει στις αναλογίες, 8 με «κλίση» 0, σύμβολο: ∞ .

Μ. Καλά, για τις πράξεις ας χρησιμοποιούμε κλάσματα.

Δ. Το κλάσμα 16/9 είναι το «άθροισμα» των άπειρων προσθετέων.

Για τις πράξεις με τους περιοδικούς δεκαδικούς, επιλέγουμε «κλασματική» εξυπηρέτηση: $1,\overline{7}\cdot\left(1:0,\overline{8}\right)=\frac{16}{9}\cdot\left(1:\frac{8}{9}\right)=\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{8}=\frac{16}{8}=2$.

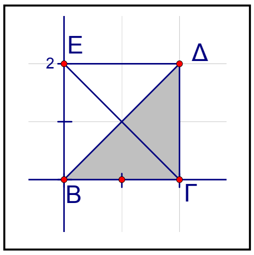
Ας φύγουμε προς το παρόν από την αριθμητική. Ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν 2τ.μ.;



Μ. Ορθογώνιο τρίγωνο… είναι το μισό, μπορούμε να πάρουμε μισό «φυσιο-λογικό» ορθογώνιο 2 επί 2, τελικά μισό τετράγωνο με πλευρά 2 μονάδες.

Δ. Ποιο τρίγωνο από τα δύο να διαλέξουμε;

Μ. Τα τρίγωνα είναι ίσα, ορθογώνια με ίσες κάθετες πλευρές, οπότε και τα εμβαδά των τριγώνων ΕΒΓ, ΕΔΓ θα είναι ίσα.



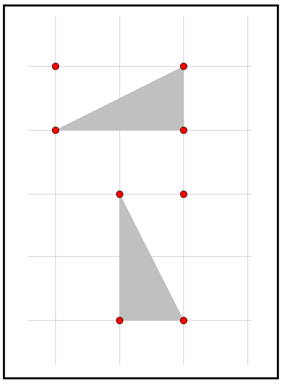
Το τετράγωνο έχει εμβαδόν 4τ.μ, τα τρίγωνα 2τ.μ.

Δ. Αν φέρουμε την άλλη διαγώνιο;

Μ. Το ίδιο, τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, αλλά ίσα και με τα ΕΒΓ, ΕΔΓ, εμβαδόν καθενός 2τ.μ.

Δ. Οι διαγώνιες;

Μ. Οι διαγώνιες στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ίσες, όπως και στο τετράγωνο, προκύπτει από την ισότητα των τριγώνων, το είδαμε στη συζήτηση για τα ίσα σχήματα.



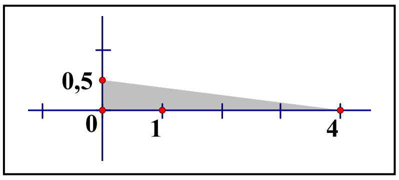
Δ. Οι οξείες γωνίες;

Μ. Ποιες γωνίες;

Δ. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΕΔΒ και ΒΓΔ.

Μ. Όλες 45 μοίρες, 90:2=45, οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

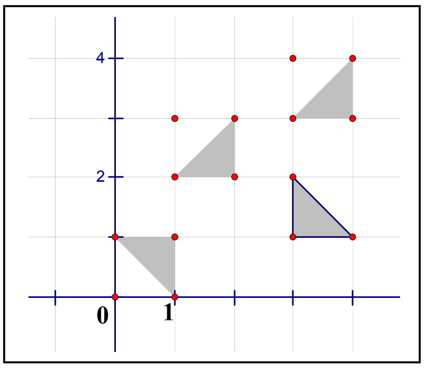
Δ. Ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν μια τετραγωνική μονάδα;



Μ. Μισό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο δύο επί ένα.

Δ. Άλλη δυνατότητα;

Μ. Μισό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις μισό και τέσσερα.



Δ. Τα 4 διπλανά ορθογώνια τρίγωνα;

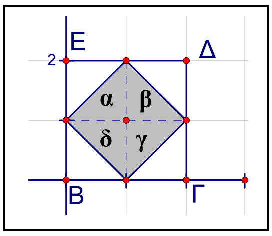
Μ. Ίσα. Κάθετες πλευρές 1 μονάδα, πλευρές των μοναδιαίων τετραγώνων.

Εμβαδόν μισή τετραγωνική μονάδα.

Δ. Τέσσερα μισά;

Μ. Δύο ολόκληρα!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

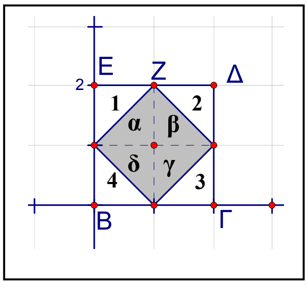


Δ. Άθροισμα εμβαδών των τριγώνων α,β,γ,δ;

Μ. Δύο τ.μ., αλλά το σχήμα είναι τετράγωνο;

Δ. Στα 4 ίσα ορθογώνια τρίγωνα, οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος 1 μονάδα. Για τις υποτείνουσες γνωρίζουμε το μήκος; Θα είναι ίσες;

Μ. Δεν γνωρίζουμε το μήκος, αλλά θα είναι ίσες γιατί είναι υποτείνουσες σε ίσα ορθογ. τρίγωνα.

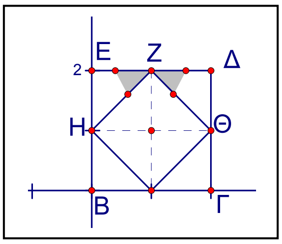


Δ. Τα 8 ορθογώνια τρίγωνα: α,β,γ,δ, και 1,2,3,4 ;

Μ. Ίσα, συνέχεια το ίδιο λέμε. Η πολύ ανάλυση φέρνει τη διάλυση! Άρχισα να εκνευρίζομαι πάλι!

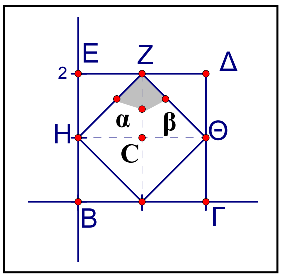
Δ. Το γκρι **τετράγωνο** έχει εμβαδόν 2τ.μ.

Μ. Εμβαδόν Ο.Κ. **Γιατί** είναι τετράγωνο;



Δ. Η ερώτηση αφορά τις γωνίες, για τις πλευρές **εσύ** διαπίστωσες ότι είναι ίσες, υποτείνουσες ίσων ορθογωνίων και ισοσκελών τριγώνων. Οι οξείες γωνίες σε ορθογώνιο και ισοσκελές είναι 45^o, το άθροισμα των γκρι γωνιών με κορυφή το Ζ στα τρίγωνα «1» και «2» είναι 45+45=90^o, οπότε, αν τις αφαιρέσουμε από την ευθεία γωνία $\mathrm{E\hat{Z}\Delta} = 180^o$, μένουν 90^o για την γωνία $\mathrm{H\hat{Z}\Theta}$. Ίδιες ακριβώς σκέψεις και για τις υπόλοιπες γωνίες.

Μπορείς να δείξεις έναν άλλο δρόμο;



Μ. Ναι, απλούστερο, χωρίς αφαίρεση, οι γκρι γωνίες στα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα «α» και «β», 45+45=90^o. Απορώ!

Δ. Για την $\mathrm{H\hat{Z}\Theta}$;

Μ. Απορώ πως δεν το σκέφτηκες εσύ!

Δ. Οι νεαροί παίκτες έχουν καλύτερες ιδέες!

Μ. Ναι, αλλά δεν έχουν πείρα!

Δ. Μη βιάζεσαι να την αποκτήσεις, η ηλικία και η πείρα είναι μεγέθη ανάλογα!

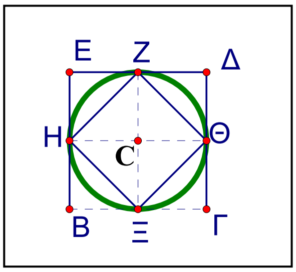
Μ. Η πείρα δείχνει και άλλο μονοπάτι; Βλέπω επιπλέον γράμμα στο σχήμα.

Δ. Ο κύκλος πάντα βοηθά, συνέπεια της πείρας.

Μ. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Δ. Για το συγκεκριμένο.

Μ. Δεν υπάρχει κύκλος. Χθες που ήσουνα; Το ψάρι κάνει καλό, αλλά μάλλον το κρασί δεν βοηθά. Ο παππούς λέει ένα-δύο ποτηράκια φτάνουν!



Δ. Τον βλέπουμε με τη φαντασία, τον σχεδιάζουμε με το διαβήτη. Βαλε με τη φαντασία σου τη βελόνα του διαβήτη στο σημείο «C», κέντρο, ακτίνα CΘ. Από τα μοναδιαία τετράγωνα: CΘ=CZ=CH=CΞ.

Η κορυφή Ζ της γωνίας $\hat{HZΘ}$ είναι σημείο του κύκλου (C,CΘ). Οι πλευρές της ΖΗ και ΖΘ είναι χορδές του κύκλου, η ΘΗ διάμετρος, το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{HΞΘ}$ ημικύκλιο.

Επιστημονικά: «εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο», επομένως ορθή, Θαλής!

Μ. Σκέφτηκα τον Ευκλείδη, βιβλίο, πρόταση…

Δ. Βιβλίο 3^{o}, πρόταση 31. Οι ιστορικοί συμφωνούν ότι η πρόταση ήταν γνωστή πριν τον Ευκλείδη, επινόηση του Θαλή, 600π.Χ.

Μ. Η απόδειξη του Θαλή;

Δ. Δεν τη γνωρίζουμε.

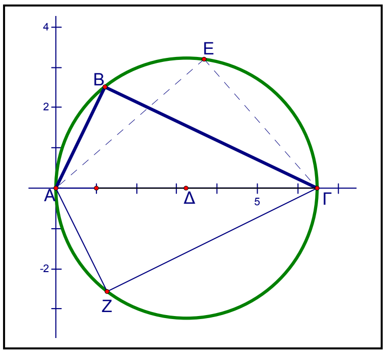
Μ. Να πούμε όμως γιατί; Ξεφεύγουμε πολύ από τον στόχο;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Οι ερωτήσεις του μαθητή έχουν περισσότερο ενδιαφέρον από το τυπικό πρόγραμμα. Βέβαια είναι αδύνατον να σταματάμε σε κάθε λιμάνι. Ακολουθούμε το πρόγραμμα, αλλά όχι «κατά γράμμα», …Αριστοτέλης!

Επιλέγουμε την γωνία $A\hat{B}\Gamma$. Η ακτίνα ΔΒ λύνει το πρόβλημα.

Μ. Που είδες την ακτίνα; Συνεχώς λύνεις τα προβλήματα με τέτοια κόλπα!



Βλέπεις ακτίνες, κύκλους, ευθείες, ενώ δεν υπάρχουν στο σχήμα, βλέπεις ενδιάμεσα κλάσματα, αθροίσματα αντίθετων εκεί που έχουμε μηδέν, γινόμενα αντιστρόφων εκεί που έχουμε 1, εσύ μπορεί να ζεις στο νοητό κόσμο των μαθηματικών ιδεών, να τα φαντάζεσαι όλα αυτά με τα «μάτια του νου», έτσι και αλλιώς με τα άλλα δεν πολυ-βλέπεις, αλλά εγώ ζω στον πραγματικό κόσμο, πως θα τα σκεφτώ όλα αυτά;

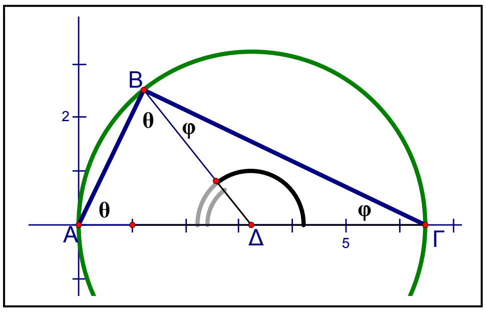
Δ. Διδάσκεσαι, μαθαίνεις. Δρόμος δεν υπάρχει, τον ανοίγεις προχωρώντας. Υπάρχει βέβαια ο ήλιος, ο αέρας, η θάλασσα, αλλά υπάρχουν και κινητά, υπολογιστές, αυτοκίνητα, κτίρια, αεροπλάνα και βαπόρια… άπειρα αντικείμενα που κατασκευάστηκαν πρώτα στο νου και μετά υλοποιήθηκαν.

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές για παράδειγμα σχεδιάστηκαν πρώτα στο μυαλό του Άγγλου μαθηματικού Charles Babbage, αλλά μέχρι το τέλος της ζωής του, 1871, οι μηχανικοί δεν κατάφεραν να υλοποιήσουν τις σκέψεις του. Οι επιστήμονες συνέχισαν τις «φαντασίες» και το 1937 κατασκεύασαν τον πρώτο «ηλεκτρομηχανικό» υπολογιστή. Η κατασκευή του πρώτου **ηλεκτρονικού** υπολογιστή ολοκληρώθηκε το 1946 στην σχολή ηλεκτρολόγων μηχανικών του Πανεπιστημίου της Πενσυλβανίας[1], λεπτομέρειες στον κ. Νίκο, της πληροφορικής.

Δυο τρίγωνα, ΑΔΒ, ΒΔΓ. Άθροισμα γωνιών και των δυο;

Μ. 180+180=360 μοίρες.

Δ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΔΓ είναι ισοσκελή, οι πλευρές ΔΑ,ΔΒ,ΔΓ είναι ακτίνες του κύκλου. Οι σημειωμένες γωνίες με κορυφή το Δ έχουν άθροισμα 180^o. Δυο γωνίες «θ» και δυο γωνίες «φ» έχουν άθροισμα $360\text{-}180=180^o$. Οπότε το άθροισμα μιας «θ» και μιας «φ» είναι 90^o.



Μ. Αλλά δεν ξέρουμε **πόσο ε**ίναι κάθε μία!

Δ. Κάθε μια δεν ξέρουμε, αλλά είμαστε σίγουροι για το άθροισμα. Σκέψου όπως και για το «1», το γινόμενο αντιστρόφων.

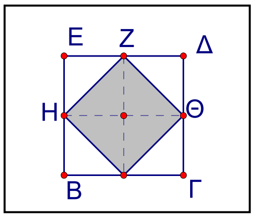
Μην το προσπεράσεις γρήγορα στην επανάληψη!

Τελικά… Ίσες πλευρές, ορθές γωνίες, το γκρι είναι **τετράγωνο**.

Υπάρχει λοιπόν τετράγωνο με εμβαδόν 2τ.μ.! Το κατασκευάσαμε!

Η πλευρά του είναι η υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές 1 μονάδα.

Μπορούμε να πούμε και ότι η διαγώνιος του τετραγώνου με πλευρά 1 μονάδα είναι πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 τετραγωνικές μονάδες.



Ισχύει γενικά.

Οι εκφράσεις είναι: «**η πλευρά**» γιατί οι 4 πλευρές του τετραγώνου είναι ίσες και «**η διαγώνιος**» γιατί οι δυο διαγώνιες τετραγώνου είναι ίσες.

Μ. Καλά αυτό, αλλά τι ισχύει γενικά;

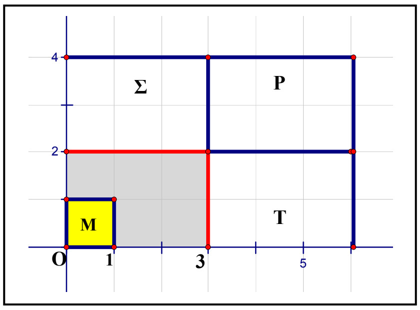
Δ. Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι πλευρά τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Τι; Δεν είναι η διπλάσια πλευρά;

Δ. Αν διπλασιάσουμε την πλευρά, το εμβαδόν τετραπλασιάζεται, δες το προηγούμενο σχήμα, η πλευρά ΒΕ είναι διπλάσια από την ΒΗ, το ΒΕΔΓ έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το μοναδιαίο τετράγωνο. Ισχύει γενικά!

Μ. Ξανά αυτό το γενικά! Μείωσε την ταχύτητα!



Πρώτα να πούμε τι ισχύει **ειδικά**!

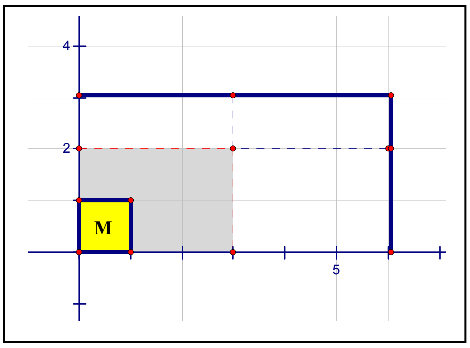
Δ. Το εμβαδόν μεταβάλλεται ανάλογα με το τετράγωνο του συντελεστή αλλαγής των γραμμικών διαστάσεων[2], δεν ισχύει μόνο για τα τετράγωνα.

Στο σχήμα, το γκρι ορθογώνιο είναι 2 επί 3. Διπλασιάζουμε τις πλευρές, το εμβαδόν τετραπλασιάζεται: γκρι -Τ - Ρ – Σ.

Η τετραγωνική μονάδα είναι το τετράγωνο «Μ».

Εμβαδόν είναι το πλήθος των «Μ».

Μ. Αν δεν διπλασιάσουμε και τα δυο; Αν πολλαπλασιάσουμε με διαφορετικούς αριθμούς;

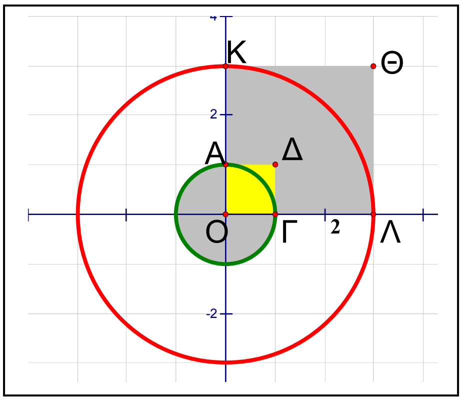


Δ. Το εμβαδόν πολλαπλασιάζεται με το γινόμενο των αριθμών, π.χ. 2*1,5=3, 3*2=6, το αρχικό εμβαδόν είναι 6 τετραγωνικές μονάδες, τ.μ., το νέο γίνεται (2*3)*1,5*2=18τ.μ.

Μ. Ισχύει και για τον κύκλο;

Δ. Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του τετραγώνου ΟΑΔΓ, τότε το εμβαδόν του εννεαπλασιάζεται, τετράγωνο ΟΚΘΛ, δες το επόμενο σχήμα.

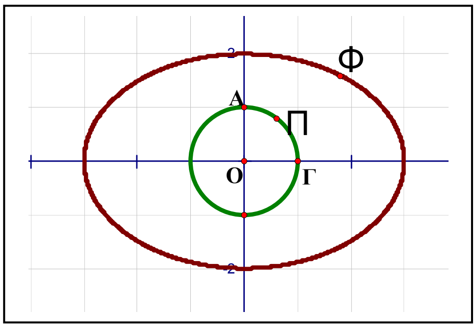
Ας δεχτούμε μονάδα το μήκος του τμήματος ΟΑ.



Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα του κύκλου (Ο, ΟΑ), τότε το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα ΟΚ, ή ακριβέστερα του κυκλικού δίσκου, εννεαπλασιάζεται, κύκλος είναι μόνο η «έντονη» γραμμή.

Μ. Εμβαδόν είναι το πλήθος των «Μ», αλλά πως μετράμε αυτό το πλήθος στον κύκλο; Ευκλείδης; Ακόμα και οι υποδιαιρέσεις είναι τετραγωνάκια, δεν ταιριάζουν στη γωνία, γιατί ο κύκλος, αν πρόσεξες, δεν έχει γωνίες! Και πόσο είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με ακτίνα 1;

Δ. Αρχιμήδης, 287-212π.Χ., «Κύκλου Μέτρησης». Με διαφορετική μέθοδο: Riemann, 1826-1866, ολοκλήρωμα, ή Lebesque, 1875-1941. Το εμβαδόν του κύκλου με ακτίνα 1 είναι …π τετραγωνικές μονάδες[3].



Μ. Πολύ μελλοντική διερεύνηση;

Δ. Λίγο, η μέθοδος του Αρχιμήδη στην Β΄ Λυκείου, το ολοκλήρωμα Riemann στην Γ΄Λυκείου.

Μ. Αν δεν πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό;

Δ. Δες την μεταβολή στο δυο επί τρία ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μ. Η ερώτηση αφορά τον κύκλο!

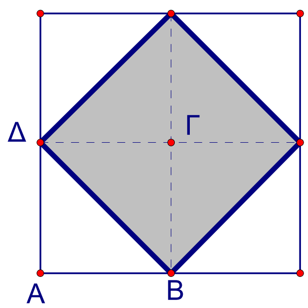
Δ. Αν πολλαπλασιάσουμε π.χ. τις τετμημένες των σημείων του κύκλου (Ο,ΟΓ) επί 3 και τις τεταγμένες επί 2, τότε και πάλι το εμβαδόν …της έλλειψης είναι 2*3=6 φορές το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

Μ. Τελικά πως κατασκευάζουμε το τετράγωνο με το διπλάσιο εμβαδόν;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Η διαδικασία κατασκευής, αλλά και η δικαιολόγηση, είναι ίδια με την κατασκευή του τετραγώνου με εμβαδόν 2 τ.μ. από το τετράγωνο με εμβαδόν 1 τ.μ. Όπως είδαμε προηγουμένως, αν διπλασιάσουμε την πλευρά, το εμβαδόν τετραπλασιάζεται. Το μισό του τετραπλασίου είναι το διπλάσιο.

Μ. Διευκρινήσεις;



Δ. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι ίσο με το εμβαδόν **δυο** γκρι ορθογωνίων τριγώνων, δύο τριγώνων **ίσων** με το ΒΓΔ. Το γκρι τετράγωνο έχει εμβαδόν 4 γκρι ορθογώνια τρίγωνα, ίσα με το ΒΓΔ, επομένως διπλάσιο εμβαδόν από το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Το πλέγμα και οι συντεταγμένες περιττά.

Η συζήτηση είναι τροποποίηση αυτής που υπάρχει στον Μένωνα[4] του Πλάτωνα, περίπου 400π.Χ!

Μ. Οχ! Η παρέα του Ευκλείδη;

Δ. Ο Ευκλείδης φοίτησε στην Ακαδημία του Πλάτωνα, μαθητής μαθητών του Πλάτωνα, η ζωή πεπερασμένη. Οι μελετητές των έργων του Πλάτωνα συμφωνούν ότι τα «Στοιχεία» προέρχονται[5] από την Ακαδημία.

Κατασκευάσαμε λοιπόν τετράγωνο με εμβαδόν 2 τετραγωνικές μονάδες. Να δεχτούμε και το σύμβολο $\sqrt{2}$ για το μήκος της πλευράς του τετραγώνου με εμβαδόν 2; Το έχουμε ήδη αναφέρει…

Μ. Έχεις τύψεις που δεν με ρώτησες για τα χίλια προηγούμενα σύμβολα; Τι χίλια, εκατομμύρια, άπειρα, ∞, και όχι μόνο στα μαθηματικά! Αυτό τουλάχιστον είναι σύμβολο με τον αριθμό «2», δεν είναι η άλφα-βήτα!

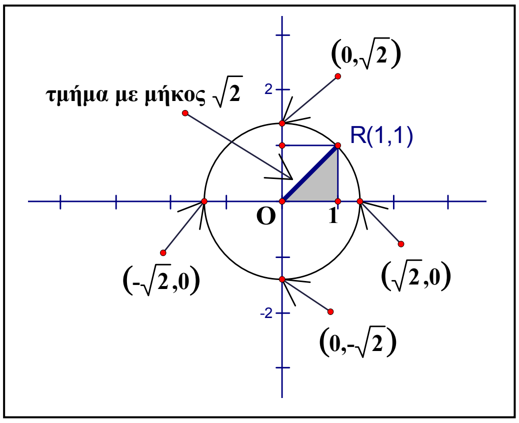
Δ. Έχεις δίκιο. Αλλά έχω καλή δικαιολογία!

Μ. Τι δικαιολογία;

Δ. Δέχεσαι ερωτήσεις… **μετά** τη γέννηση. Πριν, κάπως αδύνατον!

Με τη βοήθεια του κύκλου (O, OR), κέντρο η αρχή (0,0), ακτίνα η διαγώνιος τετραγώνου με πλευρά τη μονάδα, τοποθετούμε στους άξονες τμήματα μήκους $\sqrt{2}$, και αν χρειαστεί και πολλαπλάσια του $\sqrt{2}$.

Μ. Τι τοποθετήσεις; Πως θα βρούμε τα σημεία, πως θα μετρήσουμε; Ακόμα δεν ξέρουμε **ποιος** αριθμός είναι αυτός ο $\sqrt{2}$.



Δ. Διαβήτης, όχι μέτρηση. Δεν θα μετρήσουμε, μεταφέρουμε το τμήμα OR με τον διαβήτη, έχω σχεδιάσει τον κύκλο, δεν χρειάζεται να τον φανταστείς.

Άρχισε η γνωριμία, όταν ολοκληρωθεί θα χάσει το ενδιαφέρον της.

Από τις σκέψεις για την κατασκευή τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ. μπορείς να κάνεις κάποια εκτίμηση για την πλευρά;

Μ. Η πλευρά 1 δίνει εμβαδόν 1τ.μ., πλευρά 2 εμβαδόν 4τ.μ., επομένως είναι κάποιος από τους δεκαδικούς μεταξύ 1 και 2. Ποιον αριθμό συμβολίζει τέλος πάντων, π.χ. για τον παράξενο αριθμό «**π**», αρχικό του «**π**αράξενος», **π**αίρνουμε **π**ροσεγγιστικά, 3,14. Εδώ;

Δ. Ανθυφαίρεση, ή δεκαδικό σύστημα;

Μ. Τι ανθυφαίρεση, σε ποια εποχή ζούμε, δεκαδικό σύστημα, ας υπολογίσουμε επιτέλους αυτόν τον $\sqrt{2}$ να τελειώνουμε!

Δ. Καλά, ας τον υπολογίσουμε! Θα κατασκευάσουμε τετράγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ. με τρόπο που να φαίνεται ο υπολογισμός της πλευράς του.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Ας συζητάμε με τα καθιερωμένα στην εποχή μας, δεκαδικό σύστημα, **μονάδα το μέτρο**, 1m, και **τετραγωνική μονάδα το m^2**.

Μ. Πλευρά 1 m, εμβαδόν $1m^2$. Πλευρά 2m, εμβαδόν $4m^2$, όπως είδαμε προηγουμένως. Θα ψάξουμε ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 2.

Δ. Ποιο κοντά στο 1 ή πιο κοντά στο 2;

Μ. Πώς θα το καταλάβω; Αφού δεν γνωρίζω τον αριθμό. Βοήθεια;

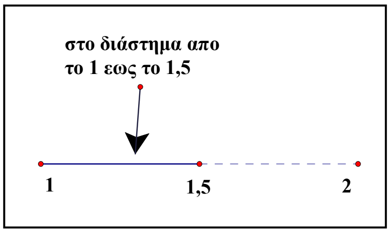
Δ. Σκέψου «τετραγωνικά», με τη βοήθεια των εμβαδών.

Μ. Πλευρά 1m, εμβαδόν $1m^2$, πλευρά 2m, εμβαδόν $4m^2$. Το εμβαδόν «2» απέχει $2m^2$ από το εμβαδόν 4, περισσότερο απ' ότι απέχει το 2 από το 1, ο αριθμός που ψάχνουμε είναι πλησιέστερα στο 1.

Δ. Επιστημονικά $\left|\sqrt{2}-1\right| < \left|\sqrt{2}-2\right|$, θυμήσου τον αυτοματισμό της απόστασης στη συζήτηση για τις πράξεις.

Μ. Να δοκιμάσουμε το 1,5m;

$1,5^2$=1,5*1,5=2,25, ξεφύγαμε!



Δ. Πιο κοντά στο 1 ή στο 1,5;

Μ. Τετραγωνική σκέψη, η απόσταση του 2 από το 1 είναι 1, η απόσταση του 2 από το 2,25 είναι 0,25, πιο κοντά στο 1,5.

Δ. Αν θέλουμε **ακέραια προσέγγιση**, παίρνουμε το 1.

Μ. Και με ένα δεκαδικό το 1,5.

Δ. Γιατί;

Μ. Εσύ γιατί πήρες το 1;

Δ. Ο ακέραιος 2 είναι ο **επόμενος** του 1. Είναι πιο κοντά στον ακέραιο 1 απ' ότι στον επόμενο ακέραιο 2. Οπωσδήποτε μικρότερος από 1,5. Μεταξύ 1 και 1,5 δεν έχουμε αριθμούς;

Μ. Έχουμε πει α-πει-ρους, κάποιος θα είναι αυτό το $\sqrt{2}$

Δ. Γράψε αραιά τους αριθμούς με ένα δεκαδικό ψηφίο, μη βάζεις κόμματα ανάμεσα.

Μ. Αριθμοί με ένα δεκαδικό ανάμεσα στο 1 και στο 1,5: 1,1 1,2 1,3, 1,4 1,5

Δ. Υπολόγισε για κάθε πλευρά το εμβαδόν του αντίστοιχου τετραγώνου.

Μ……..

Δ. Τι συμβαίνει; Το εμβαδόν τετραγώνου είναι πλευρά στο… τετράγωνο!

Μ. Το γνωρίζω,… υπάρχει κάποια δυσκολία.

Δ. Είναι μερικοί που βρίσκουν μια δυσκολία σε κάθε ευκαιρία και…

Μ. Το ξέρω, το λες κάθε μέρα, …και άλλοι που βρίσκουν μια ευκαιρία σε κάθε δυσκολία. Φιλοσοφίες! Τις στριμώχνω στο νοητό δωμάτιο με τα νοητά δώρα και τα φανταστικά μηχανήματα! Ήθελα να ήξερα αν αυτοί που τις λένε εφαρμόζουν κάτι από τα «ρητά» τους.

Δ. Τις λένε για να τις εφαρμόσουν αυτοί που τις ακούνε.

Μ. Οι ίδιοι;

Δ. Όταν τις λένε, τις ακούνε και οι ίδιοι, οπότε μπορούν να τις εφαρμόσουν, αλλά δεν είναι υποχρεωμένοι.

Μ. Μπορώ να χρησιμοποιήσω την αριθμομηχανή;

Δ. Για τη διαδικασία που αρχίσαμε μάλλον επιβάλλεται.

Αλλά βλέπε τα πλήκτρα και πρόσεξε τα λάθη αντιγραφής.

Στις αριθμομηχανές και στα αριθμητικά πληκτρολόγια των υπολογιστών οι αριθμοί είναι τοποθετημένοι «ανάποδα» απ' ότι στα κινητά.

Μ. Ναι! Πως δεν το πρόσεξα!

Γράφω το πινακάκι! Έγραψα και ένα δώρο, το $1,6^2 = 2,56$!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

πλευρά	1,1	1,2	1,3	**1,4**	**......**	**1,5**	1,6
εμβαδόν	1,21	1,44	1,67	**1,96**	**......**	**2,25**	2,56

Δ. Διόρθωσε το $1{,}3^2$

Μ. Το υπολόγισες από μνήμης;

Δ. Όχι, 3*3=9, τελευταίο ψηφίο είναι το «9», ενώ γράφεις 1,67

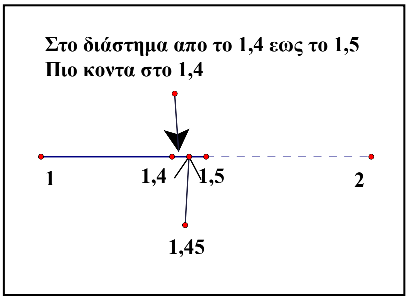
Μ. Δηλ. αν έγραφα 2189 θα το θεωρούσες σωστό;

Δ. Όχι, το αποτέλεσμα είναι δεκαδικός, $10^2=100$, $20^2=400$, 3 ψηφία, 2 μετά την υποδιαστολή, θα είναι μικρότερος του 4, ακόμα και του 2,25, αν έγραφες 1,59 αντί του σωστού 1,69 πιθανόν να μην το πρόσεχα.

Συμπέρασμα για την αναζητούμενη πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν $2m^2$;

Μ. Είναι ανάμεσα στους αριθμούς 1,4 και 1,5.

Δ. Μονάδα;



Μ. Μέτρα, το είπαμε, μέτρα και τετραγωνικά μέτρα για το εμβαδόν.

Δ. Ποιο κοντά στα 1,4m ή στα 1,5m;

Μ. Αυτό πως θα το βρω;

Δ. Είπαμε πριν, τετραγωνική σκέψη.

Μ. Από πινακάκι 2-1,96=0,04, 2,25-2=0,25. Ψηφίζω 1,4.

Δ. Ποιά είναι η απόσταση των 1,4m και 1,5m;

Μ. Ένα δέκατο του μέτρου

Δ. Το μήκος της πλευράς που αναζητούμε «απέχει» από τον αριθμό 1,4 λιγότερο από ένα εικοστό του μέτρου, $\sqrt{2}-1{,}4<0{,}05$.

Πλησιάσαμε σε απόσταση μικρότερη των πέντε εκατοστών.

Μ. Ένα δέκατο είπαμε! Ξέχασες και το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Δ. Ένα δέκατο είναι η απόσταση των 1,4 και 1,5. Ο αριθμός που ψάχνουμε είναι πιο κοντά στον 1,4, επομένως, στον άξονα, είναι «αριστερά» του 1,45 και δεξιά του 1,4. Η απόσταση των 1,4 και 1,45 είναι 0,05, πέντε εκατοστά = ένα εικοστό. Η διαφορά είναι θετική, το σύμβολο περιττό.

Το 1,96 τι είναι;

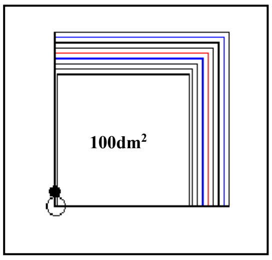
Μ. Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά 1,4 μέτρα.

Δ. Μετάφραση σε μονάδες; Σου υπενθυμίζω ότι χρησιμοποιούμε το μέτρο, «m», για μονάδα μήκους.

Μ. Ένα m^2, 9 τετραγωνικά δέκατα, 6 τετραγωνικά εκατοστά, απλό.

Δ. Τις υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου τις γνωρίζεις;

Μ. Ναι, τετραγωνικά δέκατα **εκατό,** $100dm^2$, ένα dm^2 είναι **εκατό** τετραγωνικά εκατοστά, $1cm^2$ είναι **100** τετραγωνικά χιλιοστά, mm^2, σου έγραψα και τα σύμβολα για να είσαι ευχαριστημένος!

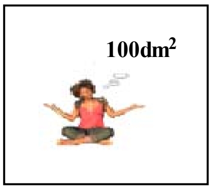


Δ. Μια δεύτερη καλύτερη σκέψη για το 1,96;

Μ….

Δ. Να ενεργοποιήσουμε την εποπτεία και την διαδικασία κατασκευής. Φυσικά δεν μπορούμε να σχεδιάσουμε τετραγωνικό μέτρο στο τετράδιο, τα σχήματα είναι…

Μ. Εντάξει, για να μας βοηθήσουν στους αφηρημένους συλλογισμούς!

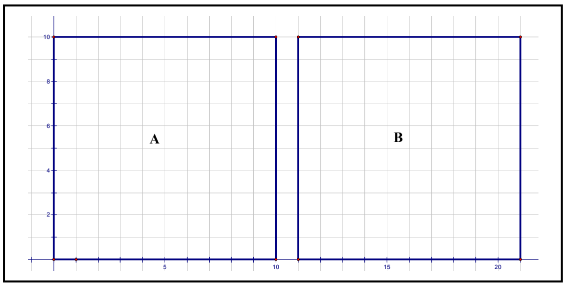


Δ. Φανταζόμαστε τα 2 τετραγωνικά μέτρα, Α και Β. Κρατάμε το Α, και κόβουμε τα 100 τετραγωνικά δέκατα του Β. Εργασία για το **σπίτι**: με την βοήθεια του παππού Βαγγέλη, **σχεδίασε** στο πάτωμα ένα **τετραγωνικό μέτρο**. Μπορείς να κατασκευάσεις με χαρτόνι και τα 100 τετραγωνικά δέκατα[6] του «Β». Κατασκευάζεις **ένα** και με αυτό πρότυπο παράγεις και τα άλλα 99.

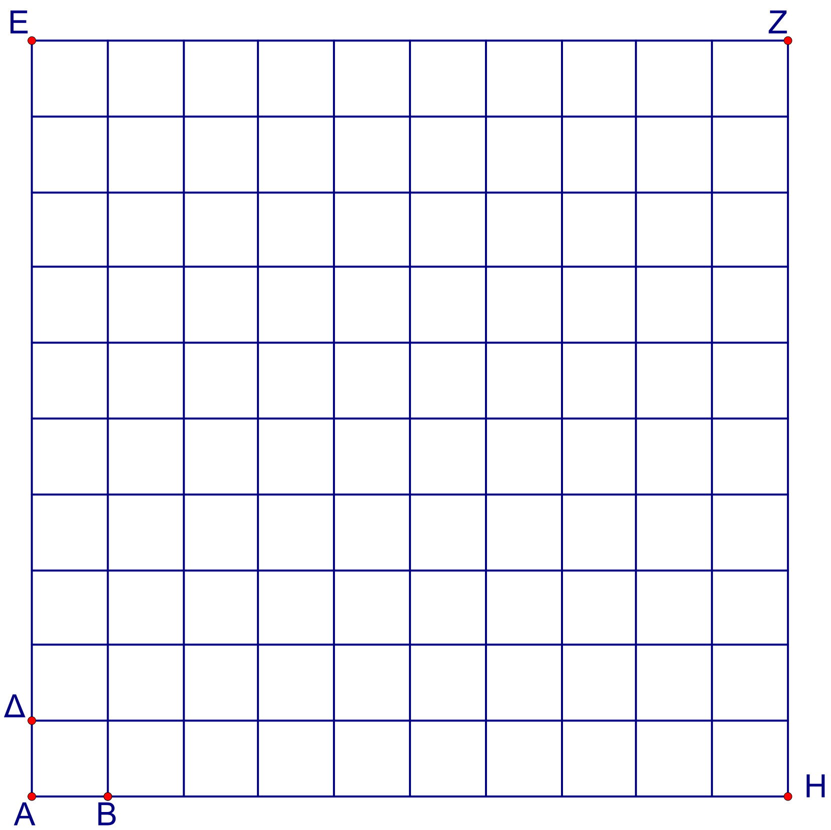
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Να χρησιμοποιήσω τεχνολογία;

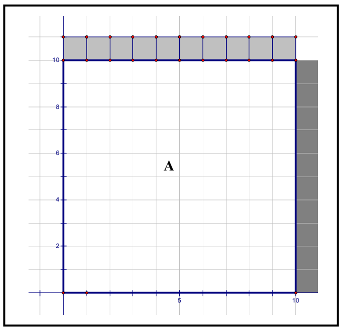
Δ. **Όχι** τεχνολογία, πραγματικές διαστάσεις. Βλέπεις συνέχεια τεχνολογικά τετραγωνικά μέτρα και όταν σε ρώτησα για το εμβαδόν της αίθουσας μου είπες 500 τετραγωνικά μέτρα! Για παράδειγμα δείχνουμε 2 m^2, όπως τα διπλανά «Α» και «Β»,



200dm^2, ενώ παρακάτω έχεις 1 dm^2 σε πραγματικές διαστάσεις.



Με την τεχνολογία και τη φαντασία θα σου δείξω την διαδικασία!

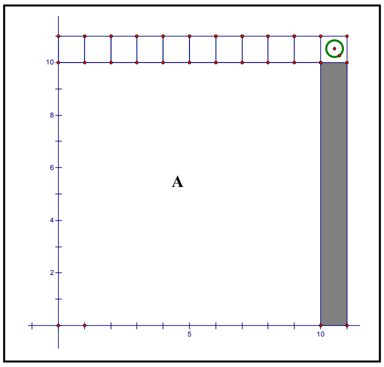


Τοποθετούμε γύρω από το «Α» τετραγωνικά δέκατα από τα κομμάτια του «Β». Πόσα βλέπεις τοποθετημένα γύρω από το Α;

Μ. 10 και 10, 20

Δ. Το νέο σχήμα είναι τετράγωνο;

Μ. Αν βάλουμε και το δώρο στη γωνία, το τετραγωνικό δέκατο με τον κύκλο, τότε γίνεται τετράγωνο με πλευρά 1,1m, ένα μέτρο και ένα δέκατο.



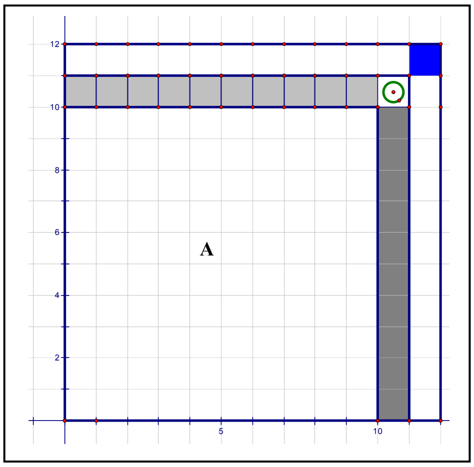
Δ. Εμβαδόν σε dm^2;

Μ. Εκατό του Α και 21 που πήραμε από τα 100 του Β, 121 dm^2.

Δ. Έμειναν dm^2 από το τετράγωνο Β;

Μ. Ναι, 100-21=79

Δ. Τοποθέτησέ τα γύρω από το τετράγωνο με πλευρά 1,1m ώστε να δημιουργηθεί νέο τετράγωνο.



Μην ξεχνάς και τη γωνία! Μέτρησε και αυτά που τοποθέτησες αλλά και πόσα έμειναν.

Μ. Για την δεύτερη σειρά χρειάζομαι 11 πάνω και 11 δεξιά και ένα στη γωνία, 11+11+1=23 dm^2.

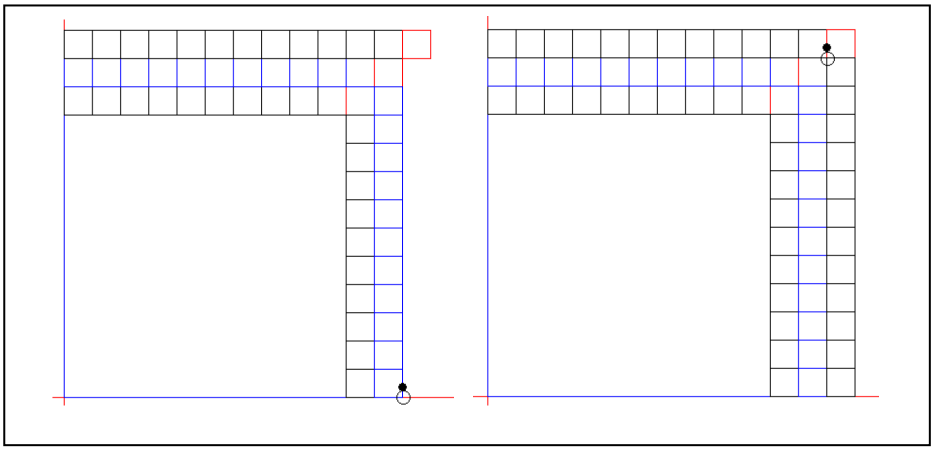
Τοποθετήθηκαν 21+23=44, έμειναν 100-21-23=56.Συνεχίζω;

Δ. Φτάνουν για μια τοποθέτηση ακόμα;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

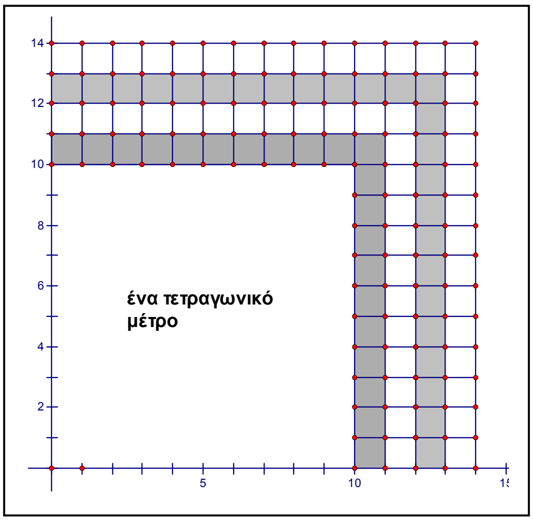
Μ. Φτάνουν, είναι πολλά!

Τρίτη επίθεση, 12+12+1=25, μένουν 56-25=31.



Τέταρτη σειρά πάνω και δεξιά, 13+13+1=27, μένουν 31-27 = $4dm^2$.

Δ. Συνέχισε, γιατί σταμάτησες;



Μ. Χρησιμοποιήθηκαν 21+23+25+27=96 από τα τετραγωνικά δέκατα του τετραγωνικού μέτρου Β.

Έμειναν 4 τετραγωνικά δέκατα, δεν φτάνουν για επόμενη τοποθέτηση γύρω –γύρω.

Δ. Πόσα χρειάζονται:

Μ.14+14+1=29, έχω 4, άλλα 25.

Δ. Σε τί μήκος πλευράς φτάσαμε;

Μ. Να μετρήσω τα «γάμμα», 4, ένα μέτρο και 4 δέκατα.

Δ. Τα «γάμμα» λέγονται γνώμονες[7]…

Μ. Καλά ξέρω Ευκλείδης, πες μου το βιβλίο αλλά ας συνεχίσουμε το παιχνίδι με τα τετράγωνα!

Δ. Δεύτερο βιβλίο, δεύτερος ορισμός.

Εμβαδόν;

Μ. Ένα τετραγωνικό μέτρο και τα 96 τετραγωνικά δέκατα που τοποθέτησα γύρω -γύρω, 196 dm^2 , φαίνεται.

Δ. Χρησιμοποιήθηκε η εποπτεία για να σε βοηθήσει να κατανοήσεις τι είναι το 1,96, που δεν περιέγραψες και τόσο καλά σε προηγούμενη ερώτηση.

Μ. Τι;

Δ. 1,96 m^2, ένα τετραγωνικό μέτρο και 96 τετραγωνικά δέκατα, το τετραγωνικό μέτρο υποδιαιρείται σε 100 τετραγωνικά δέκατα. Το ένα εκατοστό του m^2 είναι το ένα τετραγωνικό δέκατο, το «96» είναι τα 96 από τα 100 τετραγωνικά δέκατα του τετραγωνικού μέτρου.

Σκέψου Ευρωπαϊκά, το 1 εκατοστό του € είναι τό;

Μ. Το λεπτό, το € έχει εκατό λεπτά… σωστό!

Δ. Και το ένα m^2 έχει 100 dm^2!

Αν φανταστούμε άλλον έναν γνώμονα dm^2, φτάνουμε σε πλευρά 1,5 m και εμβαδόν 1,5*1,5= 2,25m^2, δηλ. 2m^2 και 25dm^2, 225 dm^2 , είναι τα 25 τετραγωνικά δέκατα που βρήκες ότι λείπουν για τον 5^o γνώμονα dm^2. Ας ξαναδούμε τον πίνακα της «τεχνολογίας»: τα «21», «44», «69», «96» στη σειρά «εμβαδόν», είναι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των dm^2 που παίρνουμε από το «Β», αφού το «διαμελίσουμε» σε τετραγωνικά δέκατα. Είναι τα dm^2 που τοποθετούμε γύρω από το τετράγωνο «Α» για να σχηματιστεί νέο τετράγωνο.

πλευρά	1,1	1,2	1,3	**1,4**	**……**	**1,5**
εμβαδόν	1,21	1,44	1,69	**1,96**	**……**	**2,25**

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Χρησιμοποιήθηκαν 21+23+25+27=96 dm^2. Έμειναν 4 dm^2. Δεν φτάνουν για επόμενο γνώμονα τετραγωνικών δεκάτων, χρειάζονται 14+14+1=29dm^2. Διαθέτουμε μόνο 4, χρειάζονται ακόμα 25 dm^2. Η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2m^2 θα είναι λοιπόν μεγαλύτερη από 1,4m και μικρότερη από 1,5m. Αν θέλουμε ένα δεκαδικό για την πλευρά;

Μ. Η «1,4m» είναι καλύτερη επιλογή από την «1,5m».

Δ. Στο σχηματισμένο τετράγωνο με πλευρά 1,4m, έχουμε χρησιμοποιήσει 196dm^2. Έχουμε $196 < 200 < 225$ σε τετραγωνικά δέκατα, ή $1{,}96 < 2 < 2{,}25$ σε m^2 για το εμβαδόν. Γράφουμε την «διπλή ανισότητα» για συντομία, αντί για τις δύο: 196<200 και 200<225…

Μ. Τα στοιχειώδη τα γνωρίζω.

Δ. Για την πλευρά σε μέτρα: 1,4<πλευρά, m<1,5 και για την πλευρά σε δέκατα: 14<πλευρα, dm<15. Αν λοιπόν χρησιμοποιήσουμε το καθιερωμένο σύμβολο $\sqrt{\ }$, για την πλευρά τετραγώνου με συγκεκριμένο εμβαδόν, γράφουμε: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ για την ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2m^2. Τα 2m^2 είναι 200dm^2, οπότε για την πλευρά σε δέκατα μπορούμε να γράψουμε: $14 < \sqrt{200} < 15$. Αν χρησιμοποιήσουμε και για τους αριθμούς 14 και 15 το νέο σύμβολο $\sqrt{\ }$: $\sqrt{196} < \sqrt{200} < \sqrt{225}$, γιατί: 14^2=196, 15^2=225.

Είδαμε ότι δεν υπάρχει φυσικός με τετράγωνο 2 και επειδή οι 14, 15 είναι διαδοχικοί φυσικοί, δεν υπάρχει και φυσικός με τετράγωνο 200.

Μ. Τετράγωνο 2 ψάχνουμε.

Δ. Αν βρίσκαμε ακέραιο με τετράγωνο 200, τότε δια 10, θα ήταν αριθμός με ένα δεκαδικό ψηφίο και τετράγωνο 2.

Μ. Εξήγηση;

Δ. Αν είχαμε κάποιον **φυσικό** με τετράγωνο 200, $\varphi \cdot \varphi = \varphi^2 = 200$, τότε αυτός θα ήταν **η πλευρά του τετραγώνου σε δέκατα**, αφού τα 2m^2 είναι 200dm^2. Δια 10, $\frac{\varphi}{10}$, θα ήταν η πλευρά του τετραγώνου σε μέτρα, αριθμός με ένα δεκαδικό ψηφίο. Για το εμβαδόν τετραγώνου, πλευρά επί πλευρά: $\frac{\varphi}{10} \cdot \frac{\varphi}{10} = \frac{\varphi^2}{10^2} = 2$, δηλ **ΘΑ** είχαμε $\frac{\varphi^2}{10^2} = 2$, ο $\frac{\varphi}{10}$ θα ήταν ο αριθμός $\sqrt{2}$.

Μήπως θυμάσαι το νόημα του κλάσματος; Δοκιμή για τον φ^2;

Μ. Ακριβές πηλίκο της διαίρεσης: αριθμητής δια παρονομαστής, $\boldsymbol{\varphi^2=2*10^2}$.

Δ. Έχουμε υπόλοιπο εποπτείας;

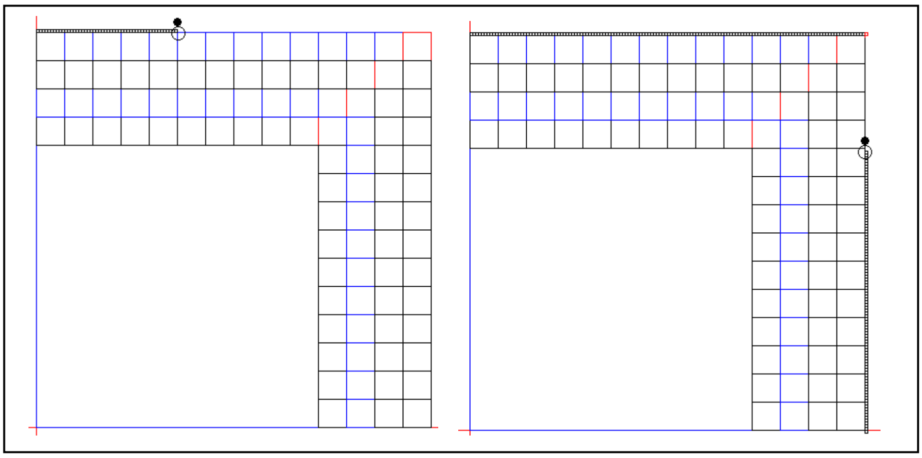
Μ. 4 τετραγωνικά δέκατα, 4 dm^2, 400 τετραγωνικά εκατοστά, 400cm^2.

Δ. Φτάνουν για ένα γύρο;

Μ. 14 δέκατα, 140 τετραγωνικά εκατοστά πάνω, και 140 cm^2 δεξιά, 280.

Δ. Δώρο στη γωνία;

Μ. Α! και ένα στη γωνία, 140+140+1=281 cm^2.



Υπόλοιπο: 400-281=119 cm^2.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Για δεύτερο γνώμονα cm^2 έχουμε προμήθειες;

Μ. Χρειάζονται 141+141+1=283 cm^2, έχουμε 119 cm^2 , δεν φτάνουν.

Δ. Πόσα λείπουν για τον επόμενο γνώμονα τετραγωνικών εκατοστών;

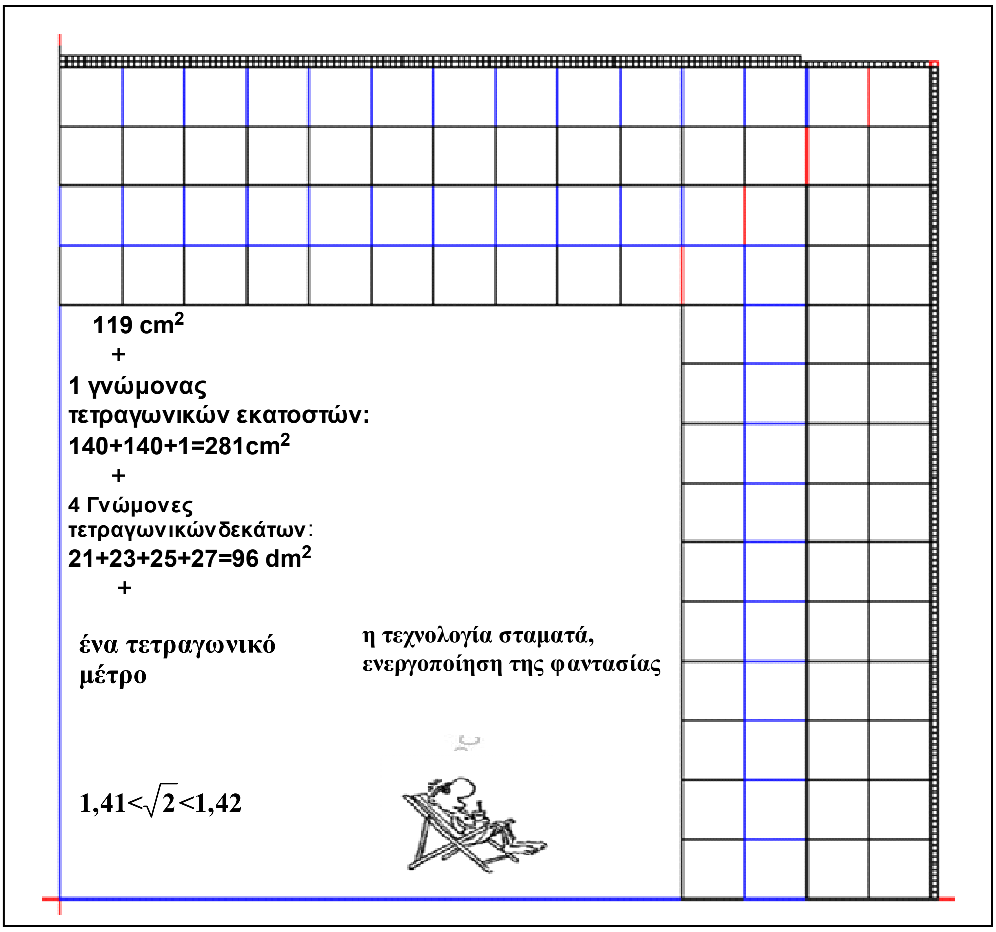
Μ. 283-119=164 cm^2.

Δ. 1,41 ή 1,42;

Μ. 1,41, γιατί 119<164

Δ. Επιστημονική «θέση» από το σχήμα[8], για την πλευρά μέχρι τώρα;

Μ. $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.



Δ. Σε τι μονάδα;

Μ. Σε μέτρα, 1,41 είναι ένα μέτρο και 41 εκατοστά, φαίνεται στο σχήμα.

Δ. Χωρίς σχήμα μπορείς να βρεις τον πιο «καλό» αριθμό με δυο δεκαδικά;

Μ. Το γνωστό κόλπο, στο μέσον μάλλον είναι ο 1,415, στο τετράγωνο; …αριθμομηχανή… 2,02225. Μεγαλύτερος του 2. Επιλέγουμε τον 1,41.

Δ. Πρόσεξε τι αντιγράφεις!

Μ. Τι; Βρήκες το αποτέλεσμα από μνήμης;

Δ. Όχι, μέτρησα τα δεκαδικά, ο 1,415 έχει 3 δεκαδικά, ο 1,415*1,415 πρέπει να έχει 6 και έχεις γράψει 5, «02225».

Μ. Α ναι, σωστός, οθονη…2,002225. Ξέχασα ένα ασήμαντο μηδενικό.

Δ. Τα μηδενικά στο τέλος των δεκαδικών αριθμών είναι ασήμαντα, στην αρχή όμως λειτουργούν «μειωτικά», μειώνουν την αξία των ψηφίων που ακολουθούν, π.χ. το πρώτο «2» μετά τα μηδενικά είναι δυο χιλιοστά, ενώ πριν είχε δεκαπλάσια αξία, «2» εκατοστά.

Μ. Αν έγραφα 2,000666 θα μου έκανες παρατήρηση;

Δ. Ναι, έχεις 6 ψηφία, αλλά το τελευταίο πρέπει να είναι «5», γιατί το τελευταίο ψηφίο του 1,415 είναι 5 και 5*5=25.

Μ. Καλά, συνεχίζουμε, βρίσκουμε την απόσταση: 1,42-1,41=0,01, δια 2, 0,005, ο $\sqrt{2}$ είναι ανάμεσα στους 1,41 και 1,42, πιο κοντά στον 1,41, καλός ο 1,41, κακός ο 1,42. Η απόσταση από τον 1,41 είναι λιγότερο από 0,005.

Τέλεια;

Δ. Εξαιρετικά! «Συμβολικά» δώρα: $\sqrt{2}-1,41<0,005$ και με το σύμβολο της απόλυτης τιμής: $\left|\sqrt{2}-1,41\right|<0,005$ ή $\left|1,41-\sqrt{2}\right|<0,005$, και τα δυο σωστά.

Πλησιάσαμε σε απόσταση μικρότερη των πέντε χιλιοστών.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μπορείς να γράψεις την αντίστοιχη ανισότητα για τα εμβαδά;

Μ. 1,9881<2<2,0164, μονάδα το τετραγωνικό μέτρο.

Δ. Μετάφραση σε τετραγωνικά εκατοστά;

Μ. 1m^2 έχει 100*100=10000cm^2. Αν μεταφράσουμε σε τετραγωνικά εκατοστά τα προηγούμενα, επί 10000: 19881<20000<20164

Δ. Την πλευρά σε εκατοστά;

Μ. $141<\sqrt{2}<142$

Δ. Έλεγχος μονάδων.

Μ. 141 εκατοστά, $\sqrt{2}$ μέτρα,… διορθώνω, $141<\sqrt{20000}<142$.

Δ. Με το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας όλα;

Μ. $\sqrt{19881}<\sqrt{20000}<\sqrt{20164}$

Δ. Τα 119cm^2 είναι η διαφορά του 19881 από το 20000. Αυτά που περίσσεψαν. Αν είχαμε αυτά και άλλα 164, δηλ.119+164=283 cm^2 θα συμπληρώναμε και τον δεύτερο γνώμονα τετραγωνικών εκατοστών, αλλά δεν τα έχουμε! Μπορούμε και εδώ να «αποφύγουμε» τους δεκαδικούς, αν σκεφτούμε όπως προηγουμένως για τον φ/10.

Αναζητούμε φυσικό με τετράγωνο 20000, εκφράζει τα 20000cm^2 των 2 τετραγωνικών μέτρων. Δεν είναι δυνατόν να μετρήσουμε την πλευρά τετραγώνου με την μονάδα, το 1m, ψάχνουμε για κατάλληλη υποδιαίρεση.

Στο δεκαδικό σύστημα: δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά, κλπ. **Αν** υπήρχε φυσικός κ με τετράγωνο 20000, κ*κ=κ^2=20000 , τότε ο $\frac{\kappa}{100}$ θα ήταν η πλευρά του τετραγώνου σε εκατοστά, γιατί τα 2m^2 είναι 20000cm^2.

Για το εμβαδόν, πλευρά επί πλευρά: $\frac{\kappa}{100}\cdot\frac{\kappa}{100}=\frac{\kappa^2}{100^2}=2$, δηλ **θα** είχαμε $\frac{\kappa^2}{100^2}=2$. Σύμφωνα με τα συμφωνηθέντα για το σύμβολο $\sqrt{2}$, ο $\frac{\kappa}{100}$ θα ήταν ο αριθμός $\sqrt{2}$. Όμως δεν υπάρχει, φυσικός με τετράγωνο 20000 γιατί για τους διαδοχικούς 141 και 142 έχουμε: $141^2=19881$, $142^2=20164$. Μια ισότητα για τον κ^2 από την διαίρεση $\frac{\kappa^2}{100^2}=2$;

Μ. Διαιρετέος =διαιρέτης επί πηλίκο, $\boldsymbol{\kappa^2 = 2*100^2}$.

Δ. Συνεχίζουμε;

Μ. Θα γίνει χαμός με τα δεκαδικά.

Δεν υπάρχει κάποιο κόλπο;

Δ. Θα προσπαθήσουμε για λίγο με τα mm^2 και μετά με το «φυσικό» κόλπο θα οδηγήσουμε την αναζήτηση στους φυσικούς.

Μ. Ας μεταφράσω τα $119cm^2$ σε τετραγωνικά χιλιοστά.

Ένα cm^2…, $10*10=100\ mm^2$, $119*100=11900mm^2$.

Δ. Ο τελευταίος γνώμονας είναι τετραγωνικών εκατοστών, πλευρά τετραγώνου 141 εκατοστά.

Ο πρώτος γνώμονας τετραγωνικών χιλιοστών;

Μ. $1410+1410+1=2821mm^2$.

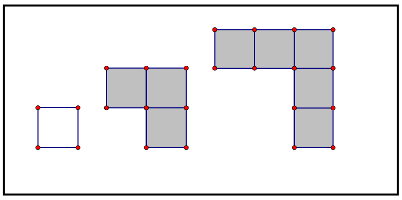
Δ. Συνεχίζουμε.

Μ. 141 εκατοστά, 1410 χιλιοστά, και ένα χιλιοστό, η πλευρά είναι ήδη 1411χιλιοστα. Δεύτερος γνώμονας 1411+1411+1=2823 τετραγωνικά χιλιοστά. Τρίτος …κάνε και μερικούς υπολογισμούς εσύ

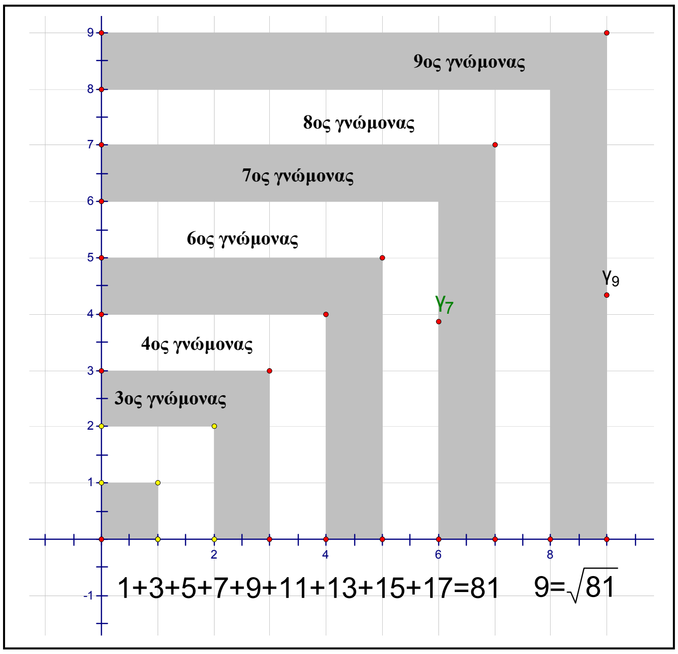
Δ. Τρίτος 2825, τέταρτος 2827

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Πως τα βρίσκεις;



Δ. Προσθέτω δυο στον προηγούμενο γνώμονα. Δεν το έχεις παρατηρήσει μέχρι τώρα; Κάθε επόμενος γνώμονας έχει δυο τετράγωνα περισσότερα από τον προηγούμενο, και αυξάνει την πλευρά του τετραγώνου κατά μία μονάδα.



Αρχίζουμε από το τετράγωνο με πλευρά 1, ο επόμενος γνώμονας έχει 3, ο μεθεπόμενος 5 τετράγωνα κλπ. Δημιουργούνται **τετράγωνοι** αριθμοί, εκείνοι που με τις τετραγωνικές τους μονάδες μπορούν να σχηματίσουν ένα τετράγωνο, χωρίς να περισσέψει τετραγωνική μονάδα, οι 1, 4, 9, 16 κλπ.

Εκκίνηση από τον 1. Σχηματίζουμε τετράγωνους αριθμούς προσθέτοντας «περιττούς γνώμονες», γνώμονες με περιττό αριθμό τετραγώνων, αυξάνοντας κάθε φορά κατά 2 τα τετράγωνα του προηγούμενου γνώμονα και κατά 1 την πλευρά του τετραγώνου.

Επανερχόμαστε στους γνώμονες τετραγωνικών χιλιοστών.

Πρόσθεση δώρο: 2821+2823+2825+2827=11296, μένουν 604 τετραγωνικά χιλιοστά από τα 11900 που προέκυψαν από την μετάφραση των 119cm^2.

Συμπέρασμα;

Μ. 4 γνώμονες τετραγωνικών χιλιοστών, κάθε γνώμονας αυξάνει την πλευρά κατά 1 χιλιοστό, $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, μονάδα το τετραγωνικό μέτρο.

Δ. Για το πλησίασμα θα προτιμήσουμε τον 1,414 ή τον 1,415;

Μ. 1,4145^2=2,00081025, οκτώ δεκαδικά, τελειώνει σε «5», μάλλον καλά είναι, διαφορά 1,415-1,414=0,001, δια 2, 0,0005, $\left|\sqrt{2}-1{,}414\right|<0{,}0005$.

Επιλέγουμε τον 1,414

Δ. Σκέψη με γνώμονες;

Μ. 604 περίσσευμα, 2829 χρειάζονται, λείπουν 2829-604=πανω από 2000, απλό, δεν χρειάζεται να κάνω την αφαίρεση, καλός ο 1,414, κακός ο 1,415.

Δ. 604 mm^2 , πόσα τετραγωνικά δεκάκις χιλιοστά

Μ. Τιιιιιιιι; τετραγωνικά δεκάκις χιλιοστά; Δεν θα πούμε το κόλπο;

Δεν γίνεται να πούμε το «φυσικό κόλπο» τώρα και να πάρω την αφύσικη εργασία με τα τετραγωνικά δεκάκις χιλιοστά, για το σπίτι;

Βοηθά και ο παππούς.

Δ. Να φυσικο-συνο-ψήσουμε για τα mm^2 . Πόσα mm^2 έχει 1m^2;

Μ. 1000 επί 1000 = 1000 000!

Δ. Τα 2 m^2;

Μ. 2000 000mm^2.

Δ. Τι φυσικό θα ψάξουμε;

Μ. Φυσικό με τετράγωνο 2000 000.

Δ. Μονάδα για την πλευρά;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Αυτός θα είναι η πλευρά σε χιλιοστά, δια 1000 θα είναι η πλευρά σε μέτρα.

Δ. Να βάλουμε τα αγαπημένα σου σύμβολα; Όνομα για τον φυσικό;

Μ. Όνομα «τ», αρχικό του τελευταία προσπάθεια!

Δ. Αν υπάρχει φυσικός «τ» με $\tau^2=2000000$, τότε η πλευρά σε μέτρα θα είναι;

Μ. $\frac{\tau}{1000}$, ο $\sqrt{2}$ θα είναι ο $\frac{\tau}{1000}$.

Δ. Για το εμβαδόν: $\frac{\tau}{1000}\cdot\frac{\tau}{1000}=\frac{\tau^2}{1000^2}=2$. Μια ισότητα…

Μ. Εντάξει τη γράφω, $\tau^2=2*1000^2$. Και τώρα θα ψάχνουμε τα τετράγωνα των φυσικών μήπως βρούμε 2000000;

Δ. Ας συνοψίσουμε το «φυσικό» κόλπο: Φυσικός με τετράγωνο 2 δεν υπάρχει, απλό. Αν θέλουμε την πλευρά σε δέκατα, αναζητούμε φυσικό φ, με $\varphi^2=2*10^2$, πλευρά σε μέτρα φ/10. Αν θέλουμε την πλευρά σε εκατοστά, ψάχνουμε φυσικό κ με $\kappa^2=2*100^2$, πλευρά σε μέτρα κ/100, σε χιλιοστά, $\tau^2=2*1000^2$, πλευρά σε μέτρα τ/1000. Αποτελέσματα: μόνον η χαρά του πλησιάσματος. Ψάχνουμε στα δεκαδικά κλάσματα.

Μπορεί να ψάχνουμε σε λάθος μέρος!

Μ. Εξήγηση;

Δ. Να δούμε την απλούστερη περίπτωση, την $\varphi^2=2*10^2$. Να εξετάσουμε, χωρίς διαδοχικούς υπολογισμούς τετραγώνων, αν υπάρχει φυσικός με τετράγωνο 200. Θυμάσαι τα διάφορα είδη φυσικών;

Μ. Άρτιοι περιττοί, πρώτοι, σύνθετοι , κάτι τέλειοι, άλλα δεν θυμάμαι.

Δ. Ο φ^2;

Μ. Πολλαπλάσιο του 2, σίγουρα άρτιος και σύνθετος.

Δ. Ο φ;

Μ. Αυτό πως θα το βρω;

Δ. Κάνε πίνακα με τα τετράγωνα των δέκα ψηφίων.

Σκέψου **τι χαρακτηρίζει** τους άρτιους.

Μ.

Τελευταίο ψηφίο	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Τελ.ψηφίο τετραγώνου	**0**	1	**4**	9	**6**	5	**6**	9	**4**	1

Δ. Ο $φ^2$ είναι άρτιος, ποιες είναι οι δυνατότητες του τελευταίου ψηφίου για τον φ;

Μ. Ο $φ^2$ είναι άρτιος, στη γραμμή των τετραγώνων υπάρχουν άρτιες δυνατότητες οι «0,4,6». Δυνατότητες για τελευταίο ψηφίο του φ: 0,2,4,6,8.

Ο φ θα είναι άρτιος, τελευταίο ψηφίο 0,2,4,6,8, το χαρακτηριστικό των άρτιων.

Δ. Αν ο $φ^2$ τελειώνει στα υπόλοιπα ψηφία, 1,5,9 , συμπέρασμα για τον φ;

Μ. Θα είναι περιττός. Όλες οι περιπτώσεις είναι στον πίνακα, ο φ θα τελειώνει σε 1,3,5,7,9.

Δ. Άλλος τρόπος χαρακτηρισμού των άρτιων;

Μ. Είναι τα πολλαπλάσια του 2: 0,2,4,6,8,10,12,14,…

«2 επί κάτι = άρτιος».

Δ. Ο φ είναι άρτιος, άρα πολλαπλάσιο του 2. Ποιό πολλαπλάσιο;

Μ. Δεν ξέρουμε ποιό, δυο επί κάτι.

Δ. Βαλε σύμβολο για το κάτι, το κάτι είναι το μισό του φ.

Μ. $φ=2χ$.

Δ. Τετράγωνο;

Μ. $2χ*2χ=…$, ιδιότητες ανακατώματος, $…2*2*χ*χ=4*χ*χ=4χ^2$.

Δ. Ξεκινήσαμε από την $φ^2=2*10^2$, με τα νέα δεδομένα: $4χ^2=2*10^2$.

Για τον χ μπορείς να αποφασίσεις αν είναι άρτιος ή περιττός;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Παίρνω τα μισά, $2χ^2=10^2$. Μετά;

Δ. Παράγοντες[9] του 10;

Μ. 10=2*5

Δ. $2χ^2=10*10=2*5*2*5$

Μ. Ο $χ^2$ είναι ο 2*5*5, άρτιος, ο 50.

Δ. Μπορούμε να το δούμε και άμεσα από την $2χ^2=10^2$. Πενήντα = δυο επί;

Μ. Δεν προχώρησε πολύ αυτό το αστείο;

Δ. Τελειώνουμε. Συμπέρασμα για τον χ;

Μ. Ο $χ^2$ είναι άρτιος, άρα και ο χ είναι άρτιος, χ=2ψ. Τέλειο; Σταματώ.

Δ. Ο $χ^2$ είναι ο 2*25, χ άρτιος, χ=2ψ, 2ψ*2ψ=4ψ*ψ, $4ψ^2$ =2*5*5, $\mathbf{2ψ^2=25}$

Δεν χρειάζεται άλλο. Σκέψου την ισότητα $2ψ^2=25$ …ανάποδα.

Μ. Το ήξερα ότι κάτι ανάποδο θα γίνει τελικά, $25=2ψ^2$. Και;

Δ. Ο 25 είναι άρτιος!

Μ. Που το είδες αυτό;

Δ. Είναι το διπλάσιο του φυσικού $ψ^2$!

Μ. Αφού είναι περιττός, τελειώνει σε 5! Αδύνατον. Κάπου έχουμε κάνει λάθος. Να ελέγξουμε τη διαδικασία.

Δ. Ή την αρχική υπόθεση, την $φ^2=2*10^2$.

Η διαδικασία δεν έχει σφάλματα. Αν δεχτούμε όμως αυτή την υπόθεση καταλήγουμε σε κάτι αδύνατο. Πρέπει να την απορρίψουμε!

Μ. Τι πρέπει να απορρίψουμε;

Δ. Ότι υπάρχει φυσικός με τετράγωνο 200. Οι συνέπειες αυτής της παραδοχής μας οδήγησαν στον «άρτιο» 25, που γνωρίζουμε ότι είναι περιττός. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, με περισσότερα βήματα, απορρίπτουμε και τις άλλες υποθέσεις-αναζητήσεις. Δεν υπάρχει φυσικός με τετράγωνο 20000, δεν υπάρχει φυσικός με τετράγωνο 2 000 000.

Περιγράφω σύντομα τη διαδικασία για το αδύνατο της $\kappa^2 = 2 \cdot 100^2$. Τα σύμβολα παριστάνουν φυσικούς. Υπενθύμιση: Με τα σύμβολα 2*α, ή $2 \cdot \alpha$, ή 2α δηλώνουμε τον πολλαπλασιασμό του 2 επί τον αριθμό που συμβολίζουμε με α.Θα πρέπει ο κ^2 να είναι άρτιος, ας ξεκινήσω την άλφα-βήτα από το α, κ=2α, κ^2=2*α*2*α και 100=2*2*5*5. Από την $\kappa^2 = 2 \cdot 100^2$, παίρνω την 2*2*α*α=2*100^2=2*2*2*2*2*5^2*5^2, 4*α^2=4*4*2*25*25, α^2=2*4*25*25, επομένως α^2 άρτιος, οπότε και α άρτιος, α=2β, α^2=2*β*2*β, και η α^2=2*4*25*25 δίνει 4β^2=2*4*25*25. Συνεχίζουμε, β^2=2*25*25, ο β^2 άρτιος, ο β άρτιος, β=2γ. Η β^2=2*25*25 γίνεται 4γ^2=2*25*25, 2γ^2=25*25, ανάποδα, 25*25=2γ^2, ο 25*25 άρτιος, αδύνατον γιατί τελειώνει σε «5». Η αρχική υπόθεση $\kappa^2 = 2 \cdot 100^2$ απορρίπτεται. …Τι έπαθες;

Μ. Να ανοίξω το παράθυρο;

Δ. Μετάφραση σε κλάσματα: δεν υπάρχει κλάσμα φ/10 με παρονομαστή 10 και τετράγωνο 2, δηλ. δεν υπάρχει αριθμός με ένα δεκαδικό και τετράγωνο 2, δεν υπάρχει κλάσμα κ/100 με τετράγωνο 2, δηλ. δεν υπάρχει αριθμός με δύο δεκαδικά ψηφία και τετράγωνο 2 κλπ. Δεν μπορεί η πλευρά του τετραγώνου με εμβαδόν 2τ.μ. να είναι ακέραιος, ούτε δεκαδικό κλάσμα, δηλ. δεκαδικός με πεπερασμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων.

Μ. Τόση προσπάθεια **χωρίς** λόγο;

Δ. **Με** δυο πολύ σημαντικούς λόγους:

Α.Ο αριθμός που ψάχνουμε, αυτός που συμβολίσαμε με $\sqrt{2}$, δεν είναι «πεπερασμένος δεκαδικός» ή καλύτερα δεκαδικό κλάσμα. Έχει σίγουρα άπειρα δεκαδικά ψηφία, όμως, τα δεκαδικά του ψηφία είναι **αδύνατον** να είναι συγκεκριμένου πλήθους. Το τετράγωνο του τελευταίου ψηφίου θα είναι κάποιο από τα 1,4,5,6,9 και ποτέ μηδέν, οπότε θα έχουμε τουλάχιστον ένα δεκαδικό ψηφίο στο αποτέλεσμα και όχι τον ακέραιο 2.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Β. Γνωρίσαμε τα 3 πρώτα δεκαδικά ψηφία αυτού του αριθμού. Η διαδικασία των γνωμόνων και η διερεύνηση του «πλησιάσματος» μας έδωσαν «1,4», «1,41», «1,414», προσεγγίσεις που μας ικανοποιούν για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές!

Μ. Για ποιες δεν είμαστε ικανοποιημένοι;

Δ. Για τις νοητικές, και τα άπειρα δεν φτάνουν.

Μ. Να τηλεφωνήσω στον παππού;

Δ. Τι έγινε πάλι;

Μ. Να του πω τέλος το σκάκι, το αμπέλι, οι βόλτες, να του αναθέσω και την επίβλεψη του Βίκτωρα, θα αφιερώσω την υπόλοιπη ζωή μου στην αναζήτηση δεκαδικών, τα άπειρα δεκαδικά του $\sqrt{2}$, δηλ. τρία λιγότερα από τα άπειρα, αλλά πόσο να κάνει άπειρο πλην τρία;

Δ. 1 000 000.

Μ. Ναι;

Δ. Κάνε τη δοκιμή της αφαίρεσης:

Μ. Άπειρο -3=1000 000, δοκιμή, Άπειρο =1000 003. Μάλλον αστείο είναι, οποιοσδήποτε αριθμός **δεν** ταιριάζει στη δοκιμή.

Δ. Αστείο, άπειρο -3= άπειρο! Να διερευνήσουμε και τους περιοδικούς δεκαδικούς, αυτούς που έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία, δηλ. αυτούς που δεν είναι συνέπεια δεκαδικών κλασμάτων, που προκύπτουν από κλάσματα που οι παρονομαστές τους δεν είναι ή δεν μπορούν να γίνουν 10,100,1000 κλπ.

Μ. Πάλι από την αρχή; Θα αρχίσουμε προσεγγίσεις;

Δ. Όχι, θα εξετάσουμε την ύπαρξη. Προσεγγίσεις **βρήκαμε**. Θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο **φυσικό** κόλπο στα μη δεκαδικά κλάσματα. Επειδή για κάθε κλάσμα έχουμε άπειρα ισοδύναμα θα εξετάσουμε τον απλούστερο αντιπρόσωπο, αν υπάρχει ανάγωγο κλάσμα με τετράγωνο 2.

Ας θυμηθούμε για παράδειγμα την πρώτη προσέγγιση που βρήκαμε με τη βοήθεια των γνωμόνων, είναι η 1,4, δεκαδικό κλάσμα και ανάγωγο;

Μ. $\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$.

Δ. Εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά $\frac{7}{5}$;

Μ. $\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7^2}{5^2}=\frac{49}{25}$.

Δ. Απόσταση από το 2;

Μ. $2-\frac{49}{25}=\frac{50-49}{25}=\frac{1}{25}$.

Δ. $\frac{1}{25}=0,04\ldots$είναι εκείνα τα 4 τετραγωνικά δέκατα που έμειναν μετά τους 4 γνώμονες τετραγωνικών δεκάτων. Σου υπενθυμίζω ότι το εκατοστό του τετραγωνικού μέτρου είναι το τετραγωνικό δέκατο.

Η εξέταση των ανάγωγων κλασμάτων με τετράγωνο 2 περιλαμβάνει και την προηγούμενη με τα δεκαδικά κλάσματα, δηλ. τους «δεκαδικούς» αριθμούς. Κάθε δεκαδικό κλάσμα έχει τον ισοδύναμο «ανάγωγο» αντιπρόσωπο του. Η **διαφοροποίηση** εδώ είναι ότι δεν γνωρίζουμε **και** τον παρονομαστή, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε 2 γράμματα. Ψάχνουμε ανάγωγο κλάσμα με $\frac{(\text{αριθμητής})^2}{(\text{παρονομαστής})^2}=2$. Αν χρησιμοποιήσουμε το «μ» για αριθμητή και το γράμμα «ν» για τον παρονομαστή, εξετάζουμε την ύπαρξη[10] φυσικών μ, ν με $\frac{\mu^2}{\nu^2}=2$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Τελικά ανάγωγο, $\frac{\mu}{\nu}$, με τετράγωνο αριθμητή διπλάσιο από το τετράγωνο του παρονομαστή, $(\text{αριθμητής})^2 = 2 \cdot (\text{παρονομαστής})^2$.

Συμβολικά: $\mu^2 = 2\nu^2$, οπότε θα προκύψει και η ποθητή ισότητα $\frac{\mu}{\nu} = \sqrt{2}$.

Οι σκέψεις είναι ανάλογες με την εξέταση της $\varphi^2=200$. Ο μ περιττός;

Μ. Άρτιος, γιατί $\mu^2=2\nu^2$, δυο επί κάτι.

Το κλάσμα ανάγωγο, ο μ άρτιος, ο ν θα είναι περιττός.

Δ. Ο μ^2 άρτιος, δυο επί κάποιον φυσικό, συγκεκριμένα επί τον …μισό του, ας πούμε, μ=2δ. Θα έχουμε $\mu^2=2*\delta*2*\delta$. Από την $2*2*\delta*\delta=2*\nu^2$, παίρνουμε την $4*\delta^2=2*\nu^2$, $2\delta^2=\nu^2$.

Ανάποδα $\nu^2=2\delta^2$. Συμπέρασμα για τον ν;

Μ. Και ο ν άρτιος, αφού είναι διπλάσιο φυσικού. Αλλά πριν ήταν περιττός.

Δ. Οι φυσικοί είναι ή μόνο άρτιοι ή μόνο περιττοί. Αν δεχτούμε ότι υπάρχει ανάγωγο κλάσμα μ/ν με τετράγωνο 2, καταλήγουμε στο ότι ο φυσικός ν είναι **και** άρτιος **και** περιττός. Αδύνατον.

Δεν υπάρχει κλάσμα με τετράγωνο 2, δηλ ο $\sqrt{2}$ δεν εκφράζεται σαν πηλίκο φυσικών, δεν είναι ρητός αριθμός. Είναι άρρητος.

Μ. Αυτή είναι η απόδειξη του Ευκλείδη;

Δ. Οι ιστορικοί πιστεύουν ότι προέρχεται από του Πυθαγορείους, αρκετά χρόνια πριν τον Ευκλείδη. Ο Αριστοτέλης[11] υπαινίσσεται επανειλημμένα αυτή την απόδειξη.

Δεν ξέρουμε την πρώτη «αρχαία» απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$.

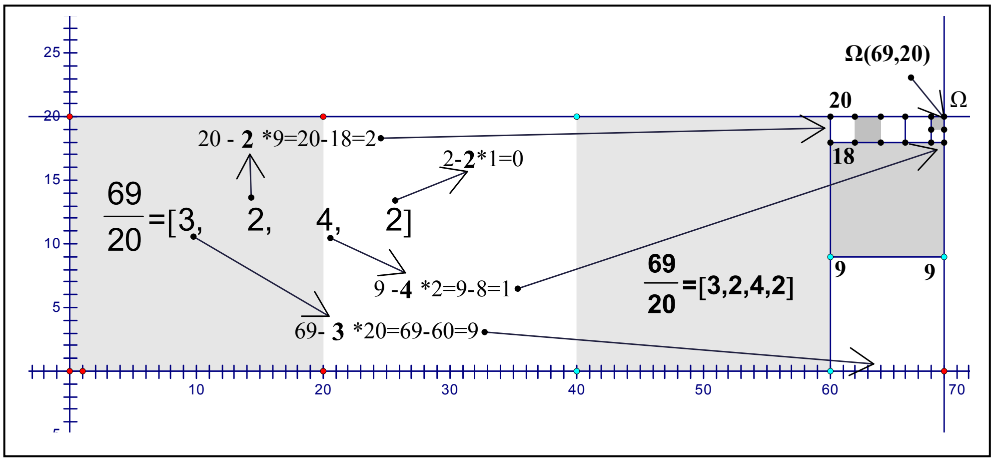
Πιθανόν να ήταν γεωμετρική πιθανόν «αριθμοθεωρητική».

Μ. Γεωμετρική;

Δ. Ανθυφαίρεση. Η αρχαία ελληνική ορολογία είναι γεωμετρική. Θα γνωρίζεις ότι οι διαδικασίες μέτρησης δεν ήταν «δεκαδικές». Η φράση «άρρητος αριθμός» αντικαθίσταται με την «ασύμμετρος προς την μονάδα». Τα δυο μεγέθη, η πλευρά και η διαγώνιος τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο. Αν υπήρχε ένα οσοδήποτε μικρό ευθύγραμμο τμήμα μήκους λ, που μετρά ακριβώς **και** την πλευρά **και** την διαγώνιο του μοναδιαίου τετραγώνου, ας πούμε z «τοποθετήσεις» στην πλευρά και w στην διαγώνιο, τότε $\sqrt{2} = w\lambda$, πλευρά = zλ και ο $\sqrt{2}$ θα ήταν ο «λόγος» ακεραίων w/z.

Ας θυμηθούμε την ανθυφαίρεση για τους ρητούς.

Να «μετρήσουμε» τον 69 με τον 20.



Με τη βοήθεια των εμβαδών: από το ορθογώνιο με διαστάσεις 69 και 20, αφαιρούμε **τρία** τετράγωνα πλευράς 20, από το ορθογώνιο με διαστάσεις 20 και 9, αφαιρούμε **δύο** τετράγωνα πλευράς 9, από το ορθογώνιο με διαστάσεις 9 και 2, αφαιρούμε **τέσσερα** τετράγωνα πλευράς 2, από το ορθογώνιο με διαστάσεις 2 και 1, αφαιρούμε **δύο** τετράγωνα πλευράς 1, τελειώσαμε.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η αριθμητική διαδικασία είναι ο αλγόριθμος του Ευκλείδη για την εύρεση του Μεγίστου Κοινού Διαιρέτη των αριθμών 69 και 20, του ΜΚΔ(69,20):

υπολ	9	2	1	0	
69	20	9	2	1	ΜΚΔ(69,20)=1
πηλ	3	2	4	2	

Ανθυφαίρεση

αφαιρούμε το 20 απο το 69, 3 φορές
το υπόλοιπο 9 απο το 20, 2 φορές
το υπόλοιπο 2 απο το 9, 4 φορές
το υπόλοιπο 1 απο το 2, 2 φορές

μετράμε το 69 με το 20
3 και υπόλοιπο 9
μετράμε το 20 με το 9
2 και υπόλοιπο 2
μετράμε το 9 με το 2
4 και υπόλοιπο 1
μετράμε το 2 με το 1
2 και υπόλοιπο 0

$$c_0=[3]$$

$$c_1=[3,2]=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$c_2=[3,2,4]=3+\frac{1}{2+\frac{1}{4}}=3+\frac{1}{\frac{9}{4}}=3+\frac{4}{9}=\frac{31}{9}$$

$$c_3=[3,2,4,2]=3+\frac{1}{2+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}}=3+\frac{1}{2+\frac{2}{9}}\ \frac{69}{20}$$

Το σχήμα [3,2,4,2], το συνεχές κλάσμα στο οποίο «αναπτύσσεται» ο 69/20, συμπυκνώνει τη διαδικασία και περιγράφει **και** το πλησίασμα **και** την κατάκτηση του 69/20.

Μ. Πλησίασμα και κατάκτηση;

Δ. Αν δεν θέλουμε ακριβές πηλίκο, αλλά προσέγγιση, τότε …αρχίζουμε από το πρώτο πηλίκο, τον 3. Είναι «καλύτερος ακέραιος από τον 4;

Μ. Ο «3» καλύτερος, το «λάθος» είναι 9/20, ενώ αν πάρουμε τον «4», έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα, $4-\frac{69}{20}=\frac{80-69}{20}=\frac{11}{20}$

Δ. Αν θέλουμε καλύτερη προσέγγιση, παίρνουμε τον αριθμό $3+\frac{1}{2}$, πλησιάσαμε σε απόσταση 1/20. Ακόμα μια προσπάθεια, χρησιμοποιούμε τα τρία πρώτα μερικά πηλίκα, 3,2,4 και σχηματίζουμε τον αριθμό $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$.

Πλησιάσαμε σε απόσταση αναπνοής, $\frac{1}{180}$. Αν και πάλι δεν είμαστε ικανοποιημένοι, με ένα βήμα ακόμα, χρησιμοποιώντας όλα τα μερικά πηλίκα [3,2,4,2] «κατακτούμε» τον 69/20, είναι ο αριθμός $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}$.

«Δεκαδική μετάφραση» των αποστάσεων: 0,45, 0,05, $0,555...=0,\overline{5}$, 0.

$$\frac{69}{20}-3=\frac{69}{20}-\frac{60}{20}=\frac{9}{20},\ \left|\frac{69}{20}-3\right|=\frac{9}{20}$$
$$\frac{69}{20}-\frac{7}{2}=\frac{69}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{1}{20},\ \left|\frac{69}{20}-\frac{7}{2}\right|=\left|-\frac{1}{20}\right|=\frac{1}{20}$$
$$\frac{69}{20}-\frac{31}{9}=\frac{69*9-31*20}{20*9}=\frac{1}{180}$$
$$\frac{69}{20}-\frac{69}{20}=0$$

Οι αριθμοί $3,\frac{7}{2},\frac{31}{9},\frac{69}{20}$ περιγράφουν την διαδικασία της πολιορκίας και κατάκτησης, ο 3 μικρότερος, ο 7/2 μεγαλύτερος, ο 31/9 μικρότερος, ο 69/20 ακριβώς. Μετάφραση σε δεκαδικούς: 3, 3,5, $3,4444...=3,\overline{4}$, $3,45=\frac{69}{20}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Αυξηθήκαν και τα σύμβολα για τον 69/20.

Δ. Δεν αυξήθηκαν, είχαμε άπειρα, συν ένα ή δυο, πάλι άπειρα!

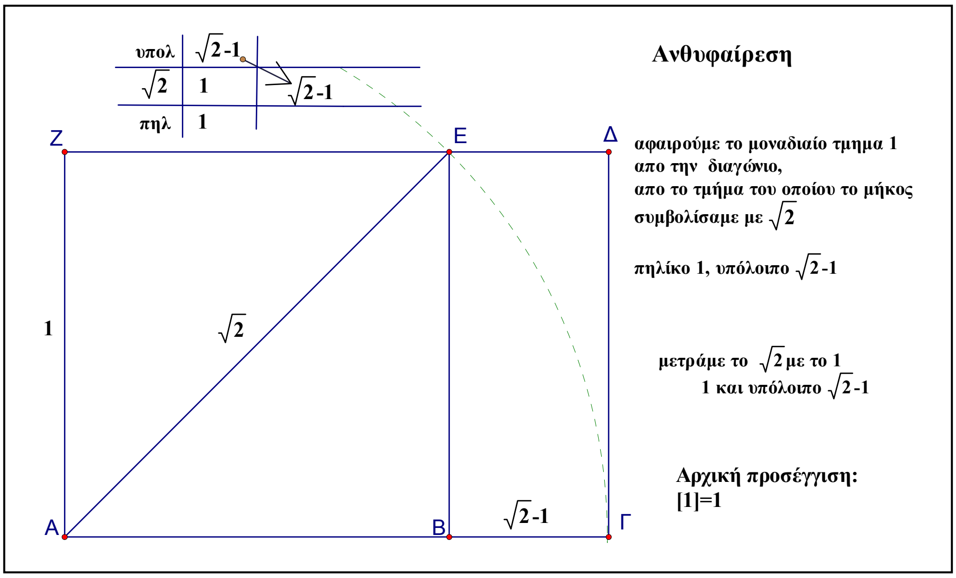
Μ. Και αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι; Θα φτάσουμε στον μηδέν κατά τη διάρκεια της πεπερασμένης ζωής μας;

Δ. Οι φυσικοί έχουν κοινό μέτρο τουλάχιστον τη μονάδα. Θα φτάσουμε. Ο Γάλλος μαθηματικός Gabriel Lame, 1795-1870, απέδειξε ότι για τους φυσικούς, το πλήθος των βηματων[12] στον Ευκλείδειο αλγόριθμο είναι το πολύ πενταπλάσιο από το πλήθος των ψηφίων του μικρότερου αριθμού.

Μ. Για τον $\sqrt{2}$;

Δ. Θα προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την διαγώνιο με μονάδα την πλευρά. Στο σχήμα έχω μεγαλώσει αρκετά τη μονάδα. Οι ιδέες μας ενδιαφέρουν.

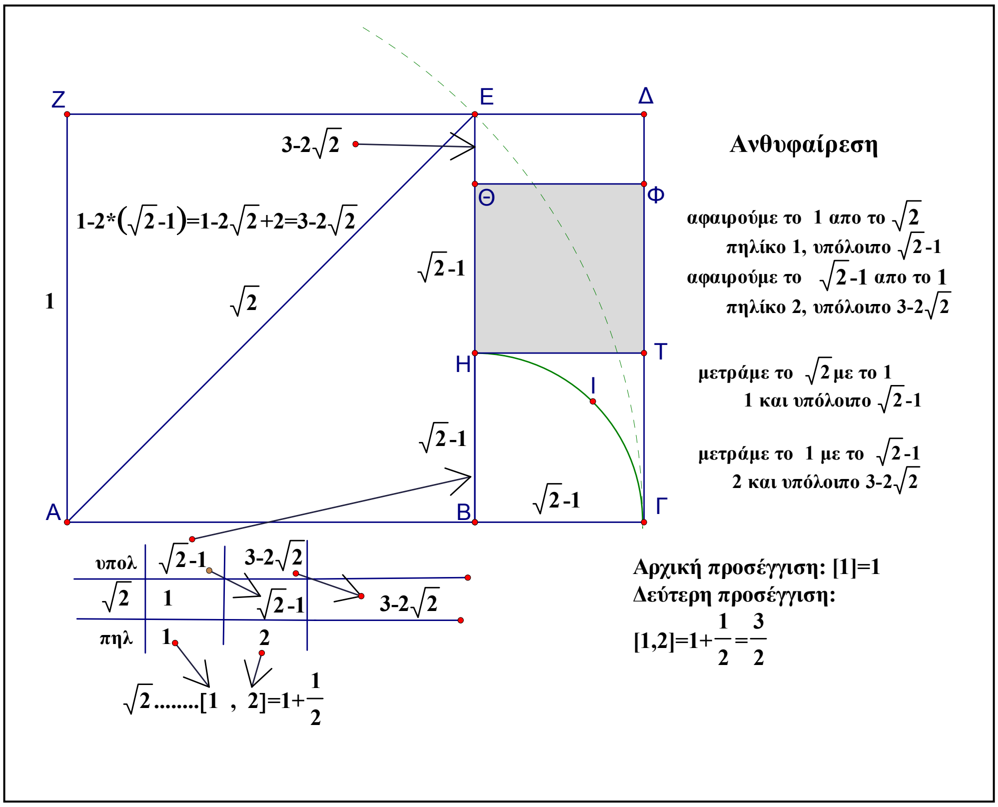
Το ορθογώνιο είναι $\sqrt{2}$ επί 1.



Αφαιρούμε το μοναδιαίο ΑΒ από το τμήμα μήκους $\sqrt{2}$, από το ΑΓ, βρίσκουμε $\sqrt{2}$-1, είναι το μήκος του ΒΓ.

ΒΓ είναι το «υπόλοιπο» της πρώτης μέτρησης.

Το δεύτερο βήμα είναι η προσπάθεια μέτρησης του μοναδιαίου τμήματος ΒΕ, με το ΒΓ, το υπόλοιπο της μέτρησης του $\sqrt{2}$ με το μοναδιαίο.



Μ. Ξέχασες το = μετά το $\sqrt{2}$.

Δ. Δεν είναι =, δεν τέλειωσε η διαδικασία.

Με τη βοήθεια του διαβήτη, διαπιστώνουμε ότι αφαιρούνται δυο τμήματα ΒΓ από το μοναδιαίο ΒΕ, δυο τμήματα με μήκος $\sqrt{2}$-1, από το τμήμα με μήκος τη μονάδα: ΒΕ-ΒΗ-ΗΘ. Υπόλοιπο ΕΘ. Συμβολικά:

$$1-2\left(\sqrt{2}-1\right)=1-2\sqrt{2}+2=3-2\sqrt{2}.$$

Θυμήσου τον αυτοματισμό: πλην επί πλην = συν.

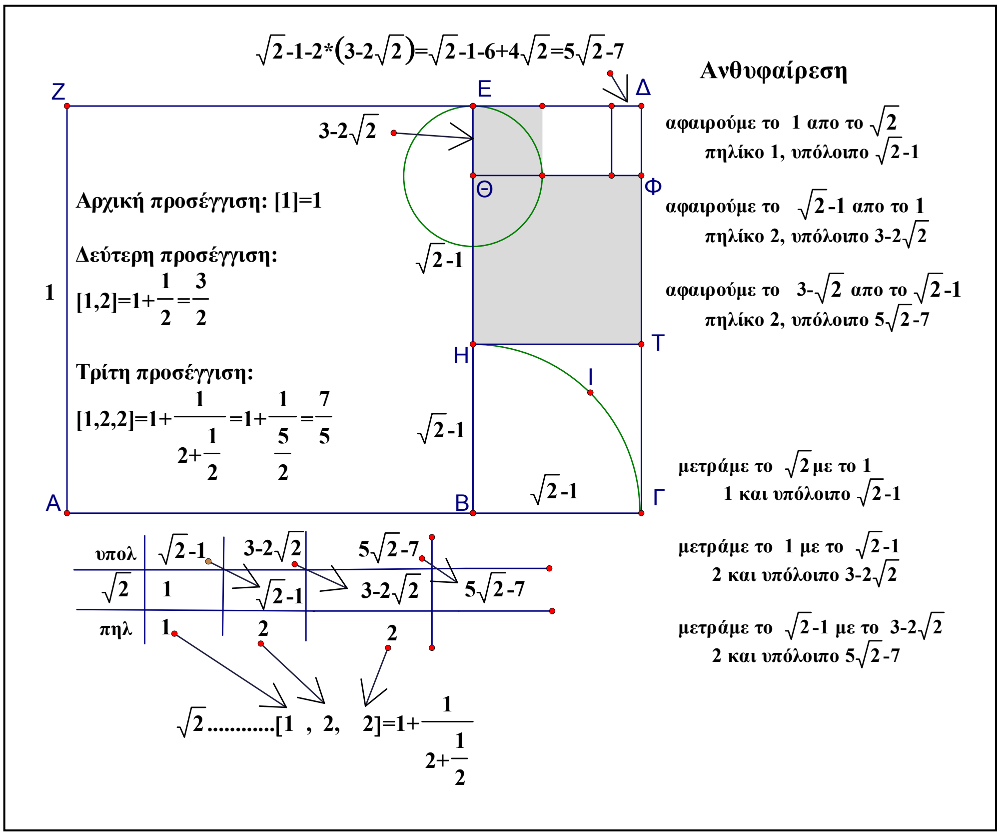
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Το κλάσμα $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ δίνει τη δεύτερη προσέγγιση.

Ο 1 μικρότερος, ο 3/2 μεγαλύτερος, ο 1,5 του δεκαδικού συστήματος. Συνεχίζω;

Μ. Είμαι μαζί σου, αλλά άρχισα να χάνω το παιχνίδι!

Δ. Με το νέο υπόλοιπο ΕΘ, προσπαθούμε να μετρήσουμε το προηγούμενο, το ΘΦ=ΒΓ=$\sqrt{2}$-1. Παρατηρούμε, εργασία με τον διαβήτη, ότι και πάλι τοποθετούνται 2 τμήματα μήκους ΕΘ, αλλά και κάτι μένει.



Μ. Ποιος είναι ο στόχος;

Δ. **Αν** π.χ. το ΕΘ μετρά ακριβώς το ΘΦ, δεν ισχύει, αλλά, υποθέτουμε, **ΑΝ,** π.χ. ΒΓ= ΒΗ=ΗΘ=ΘΦ=κΕΘ, κ τοποθετήσεις, τότε, αντιστρέφοντας τη διαδικασία θα είχαμε: ΒΕ=ΒΗ+ΗΘ+ΘΕ= κΕΘ+ κΕΘ+ΕΘ.

Για την ΑΓ: ΑΓ=$\sqrt{2}$=ΑΒ+ΒΓ=ΒΕ+ΒΓ= κΕΘ+ κΕΘ+ΕΘ + κΕΘ.

Το τμήμα μήκους ΕΘ θα μετρούσε ακριβώς και την πλευρά ΒΕ=ΑΒ και την διαγώνιο ΑΕ=ΑΓ. Τα μεγέθη πλευρά και διαγώνιος θα είχαν κοινό μετρο[13] το μήκος του τμήματος ΕΘ, θα ήταν «σύμμετρα»

Μ. Στις τελείες πότε θα βάλλουμε ίσον;

Δ. Όταν βρούμε υπόλοιπο 0, δηλ ποτέ.

Μ. Θα βρίσκουμε συνέχεια «2»;

Δ. Ναι

Μ. Γιατί;

Δ. Είναι απαραίτητες κάποιες λεπτομέρειες.

Μελλοντικά.

Μπορείς όμως να βάλεις τη βελόνα του διαβήτη στο Η και να χαράξεις κύκλο με ακτίνα ΗΦ.

Θα παρατηρήσεις ότι θα «περάσει» από το Ε. Τα τμήματα ΒΗ και ΗΕ είναι πάλι η πλευρά και η διαγώνιος ενός «μικρότερου» τετραγωνου[14], η διαδικασία επαναλαμβάνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως το πρώτο βήμα, τα «2» άπειρα, τα τμήματα ΑΓ και ΑΒ ασύμμετρα, ο $\sqrt{2}$ άρρητος.

Για τις ρητές προσεγγίσεις, παίρνουμε όσα «2» θέλουμε από το συνεχές κλασμα[15]. Για τη μετατροπή σε σύνηθες είναι απαραίτητες κάποιες πράξεις: π.χ. $\left[1,2,2\right]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$, γνωστό κλάσμα.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

$$[1,2,2,2]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{5}}=1+\cfrac{1}{\frac{12}{5}}=\frac{17}{12},$$

Δεκαδικός $1,41\overline{6}$

Το **συνεχές κλάσμα** είναι περιοδικό, αλλά δεν είμαστε στο δεκαδικό σύστημα. Π.χ. $\frac{11}{9}=\frac{9}{9}+\frac{2}{9}=1+\frac{2}{9}$...μετάφραση, $1,2222...=1,\overline{2}$

Εδώ $[1,2,2,2,...]=[1,\overline{2}]$...μετάφραση, $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{...}}}$

Μ. Για τον π ; Υπάρχει περιοδικό συνεχές κλάσμα; Έχω ακούσει ότι κάποιοι ξέρουν απεξω[16] πολλά ψηφία, αυτό είναι το κόλπο; Ποιο ψηφίο επαναλαμβάνεται;

Δ. Στο ανάπτυγμα του «π» σε συνεχές κλάσμα δεν υπάρχει ψηφίο που επαναλαμβάνεται: $\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{...}}}}}$

Ρητές προσεγγίσεις: $3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$, $3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}}=3+\cfrac{1}{\frac{106}{15}}=3+\frac{15}{106}=\frac{333}{106}$ κλπ.

Μ. Διερεύνηση στο Λύκειο;

Δ. Όχι. Άσκηση θέλησης!

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΕΠΙΝΟΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Τα μαθήματα ολοκληρώθηκαν, έμειναν κάποιες εκδηλώσεις.

Μ. Θέατρο, μουσική, αθλητικές εκδηλώσεις, παιχνίδια, waterland!

Δ. Τι είναι το «waterland»;

Μ. Η αυλή του σχολείου την τελευταία μέρα των μαθημάτων.

Δ. Στην αίθουσα θα ασχοληθούμε με στεγνό νοητικό αθλητισμό!

Μ. Τι είναι πάλι αυτό;

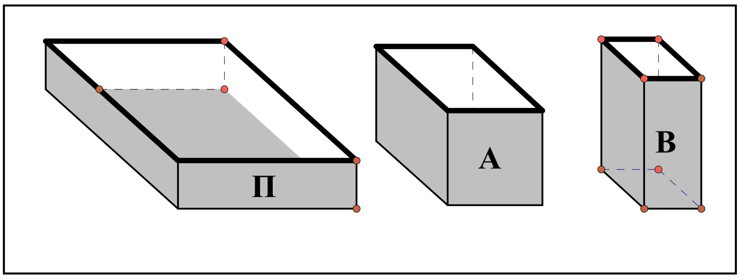
Δ. Παιχνίδι στο σύστημα συντεταγμένων. Σου δίνω δυο αριθμούς, ακολουθείς τις **οδηγίες** και βρίσκεις την **απάντηση** στην ερώτηση.

Μ. Σε ποια ερώτηση;

Δ. Ας αρχίσουμε την προετοιμασία:

Ετοίμασε 3 κουτιά από οποιαδήποτε συσκευασία, π.χ. μπισκότα, σπίρτα, κλπ. Βάλε στο πρώτο ετικέτα με το γράμμα Π, στο δεύτερο Α, στο τρίτο Β.

Γράψε σε ένα κομμάτι χαρτί «Π=0» και βάλε το χαρτί μέσα στο κουτί με το γράμμα Π.



Μ. Τι είναι το Π;

Δ. Μεταβλητή, ο μετρητής του πλήθους των παιχνιδιών, αρχική τιμή Π=0, το παιχνίδι δεν άρχισε ακόμα. Γράψε σε ένα χαρτί: σημείο Α(τετμημένη, 0) και βάλτο μέσα στο κουτί με το γράμμα Α. Τρίτο χαρτί: σημείο Β(0, τεταγμένη) και βάλτο στο κουτί με το γράμμα Β.

Μ. Και το παιχνίδι; Παράδειγμα;

Δ. Δίνεται ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών π.χ. (2,3).

Ακολούθησε με προσοχή τις οδηγίες:

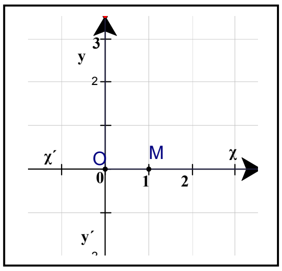
1. Στο χαρτί του «Π», σβήνεις τον αριθμό που βλέπεις και γράφεις τον επόμενο φυσικό. Εναλλακτικά, μπορείς να πετάξεις το παλιό χαρτί και να γράψεις σε νέο την νέα τιμή του Π. Έχουμε λοιπόν Π=1.

Είναι το πρώτο παιχνίδι.

2. Στο χαρτί του κουτιού «Α», σβήνεις την λέξη «τετμημένη» και γράφεις «2», τον πρώτο αριθμό του διατεταγμένου ζεύγους, γίνεται Α(2,0).

Στη συνέχεια…

Μ. Εντάξει, θα σβήσω την «τεταγμένη» στο «Β» και θα γράψω τον δεύτερο αριθμό, το 3, θα έχω Β(0,3).



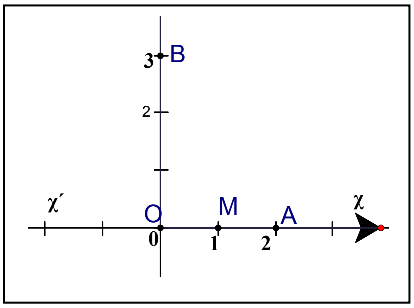
Δ. 3.Σχεδίασε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ονόμασε «Ο» το σημείο (0,0) και Μ το σημείο (1,0).

4. …

Μ. Στον χ΄χ το σημείο Α(2,0) και στον y΄y το Β(0,3), μετά;

Δ. 5. Σχεδίασε το ευθ. τμήμα ΒΜ.

6.Υπολόγισε την κλίση του ΒΜ.



Μπορείς να «δεις» την κλίση στο σχήμα;

Μ. Ας κάνω τους υπολογισμούς:

Δεξιότερα το (1,0), σημεία (1,0) και (0,3),

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{0-...}{1-...},$$

$$\frac{\text{διαφορά τεταγμένων}}{\text{διαφορά τετμημένων}} = \frac{0-3}{1-0} = -3.$$

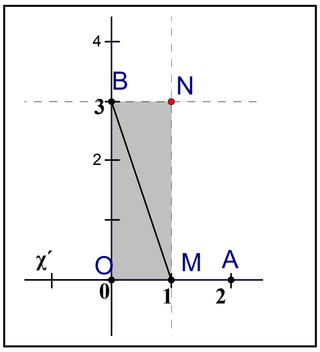
Η κλίση του ΒΜ είναι -3.

Μου υπενθυμίζεις τον «αυτοματισμό» του σχήματος;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

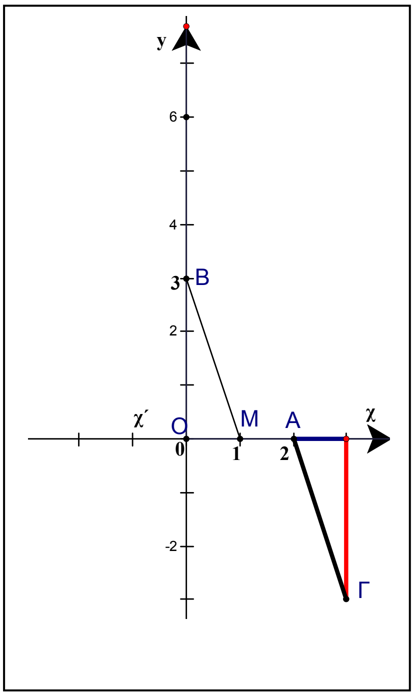
Δ. Φανταζόμαστε τις διακεκομμένες γραμμές του πλέγματος, την οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το Β, την y=3 και την κατακόρυφη που διέρχεται από το Μ, την χ=1.

Φανταζόμαστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΒΝΜ. Η διαφορά τετμημένων εκφράζει την οριζόντια μετατόπιση από το Β στο Ν. Η κλίση της διαγωνίου ΒΜ από το σχήμα: για μια μονάδα οριζόντια μετατόπιση, ΒΝ, «κατεβαίνει» 3 μονάδες για να φτάσει από το Ν στο Μ.



Μ. Η φαντασία της φαντασίας!

Δ. Η σημαντικότερη ιδιότητα του πνεύματος, πειραματίζεσαι, ταξιδεύεις όπου θέλεις, σκέφτεσαι χωρίς προκαταλήψεις, απεριόριστα, κόστος μηδενικό για οποιαδήποτε ενέργεια, αν είναι λάθος αντικαθιστάς την προηγούμενη φανταστική ενέργεια με μια επόμενη μεγαλύτερης φαντασίας.



Μ. Έξη ενέργειες. Τελειώσαμε;

Δ. Όχι.

7.Σχεδίασε τμήμα που έχει την ίδια κλίση με το ΒΜ, με αρχή το Α, μια μονάδα οριζόντια «δεξιά», και μετά πάνω ή κάτω, ανάλογα με την κλίση του ΒΜ, δεξιότερα το σημείο Γ, τμήμα ΑΓ.

8.Το τμήμα ΑΓ καθορίζει μια ευθεία. Σχεδίασε την ευθεία.

9. Οργάνωσε την συνάντηση της ευθείας ΑΓ με τον άξονα y΄y.

Μ. Καλά, την προεκτείνω.

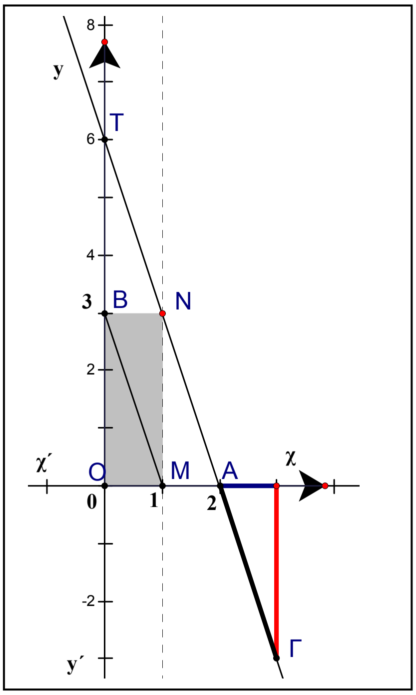
Δ. 10. **Ερώτηση**: Ποιο είναι το σημείο της συνάντησης[1], το σημείο **τομής** της ευθείας αυτής με τον κατακόρυφο άξονα, με τον άξονα y΄y;

Μήπως μπορείς να το φανταστείς;

Μ. Όχι! Θα σχεδιάσω την ευθεία.

Δ. Σου κάνω δώρο το ορθοκανονικό αύστημα!

Μ. Ευχαριστώ. Έχω γεμίσει δώρα, τα περισσότερα νοητά! Μάλλον θα πρέπει να αγοράσω ένα νοητό δωμάτιο, δεν χωράνε στο πραγματικό. Και μια αποθήκη για να μαζέψω τις «μηχανές». Μηχανή αρνητικής ενέργειας, μηχάνημα «άνω-κάτω», μηχανή μεταμόρφωσης κλασμάτων σε σημεία…

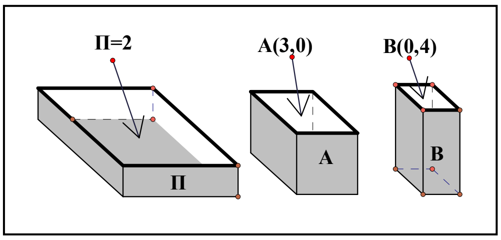


Η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,6), στο Τ, αρχικό της «τομής»! Τελειώσαμε;

Δ. Τέλεια! Το παράδειγμα τελείωσε. Δίνεται το (3,4)

Μ. Ξεκινώ;

Δ. Προσεκτικά.

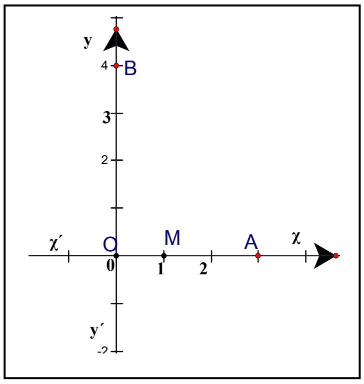


Μ. Αλλάζω τα νούμερα στα κουτάκια, Π=2, ο επόμενος του 1, αλλάζω την τετμημένη στο Α, Α(3,0), την τεταγμένη στο Β, Β(0,4). Βήματα 1 και 2 τέλος. Για τα επόμενα;

Γράμματα ίδια;

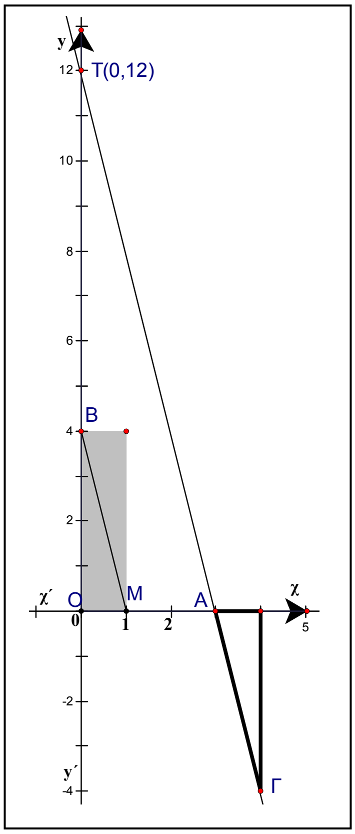
Δ. Ακολουθείς τις οδηγίες. Ίδια.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Μ. Βήματα 3 και 4: σύστημα συντεταγμένων, O, M, A(3,0), B(0,4).

Βήματα 5, 6 και 7, προσοχή στην κλίση, 1 οριζόντια, 4 κάτω, η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «-4». Σχεδιάζω από το Α, τμήμα ΑΓ με κλίση «-4». Ένα οριζόντια, φτάνω στο (4,0), κατεβαίνω 4 μονάδες, Γ είναι το σημείο (4,-4). Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον y΄y το T(0,12). Τέλος το παιχνίδι 2!



Δ. Κάποια σχεδιαστική παρατήρηση;

Μ. ΒΜ // ΑΓ.

Δ. Κάποια υπολογιστική;

Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα ΟΜ έχει μήκος 1 μονάδα, ΟΜ=1μ. Μπορείς να γράψεις τα μήκη των ΟΑ,ΟΒ,ΟΤ;

Μ. Για τα ΟΑ, ΟΒ απλό, αφού δίνονται, ΟΑ=3μονάδες, ΟΒ=4μ. Το ΟΤ=12μ, βρέθηκε από την απάντηση στην ερώτηση του δεύτερου παιχνιδιού, του **Π=2**.

Δ. Για το **Π=1**, θυμάσαι τα μήκη;

Μ. ΟΑ=2μ, ΟΒ=3μ, ΟΤ=6μ.

Δ. (2,3)…6, (3,4)…12

Μ. Τι παίζει; Πολλαπλασιασμός;

Και αν τα Α και Β έχουν δεκαδικούς ή κλάσματα;

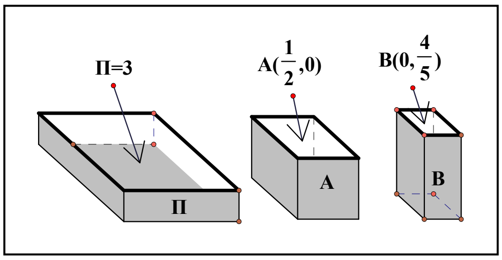
Δ. Παράδειγμα;

Μ. Αν π.χ. έχουμε Α$\left(\frac{1}{2},0\right)$ και Β$\left(0,\frac{4}{5}\right)$.

Δ. Παιχνίδι 3ο, δίνεται το $\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

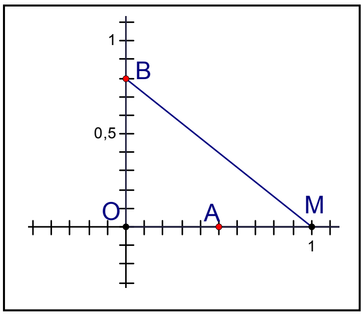
Δώρο οι ενέργειες 1 και 2.

Μεγάλωσε την μονάδα στο σύστημα συντεταγμένων.



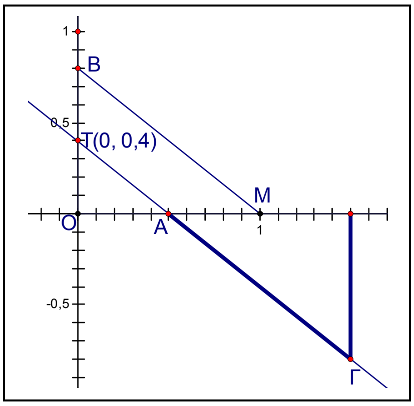
Μ. Βήματα 3 και 4: σύστημα συντεταγμένων, Ο, Μ, Α$\left(\frac{1}{2},0\right)$, Β$\left(0,\frac{4}{5}\right)$.

Βήματα 5, 6 και 7, κλίση του ΒΜ, απάντηση από το σχήμα, 1 οριζόντια, 0,8 κάτω, $\frac{4}{5}=0{,}8$, η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «-0,8».



Σχεδιάζω από το Α τμήμα ΑΓ με κλίση «-0,8». Ένα οριζόντια, φτάνω στο (1,5, 0), κατεβαίνω 0,8 μονάδες, Γ είναι το σημείο (1,5, -0,8).

Ακολουθούν ενέργειες 8,9 και 10: Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον y΄y το Τ(0, 0,4), $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{10}=0{,}4$! Παιχνίδι 3 τέλος.



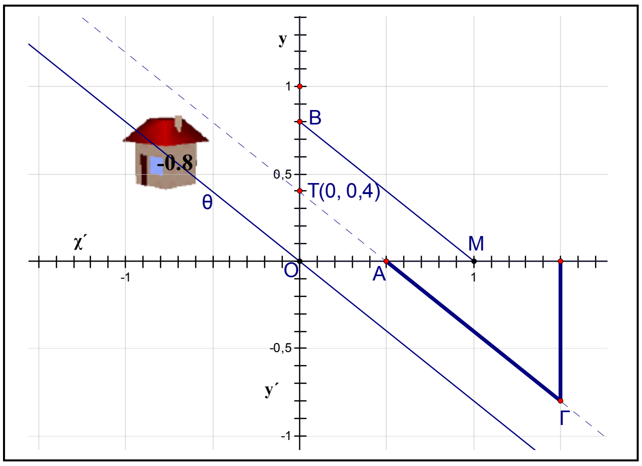
Αυτή η ευθεία «ΑΓ» είναι η κατοικία του ρητού (-0,8) ;

Δ. Η **κλίση** της είναι «-0,8».

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Η κατοικία του (-0,8) είναι η ευθεία «θ» που διέρχεται από την **αρχή** με κλίση «-0,8», με την επισήμανση, ότι η «θ» δεν κατοικείται αποκλειστικά από τα ισοδύναμα με το $-\frac{8}{10}=-0,8$ ρητά κλάσματα.

Ρητά είναι τα κλάσματα που έχουν, πιθανόν και μετά από πράξεις, ακέραιους όρους.



Μ. Παρατηρώ ότι …δεν βρίσκουμε εύκολα τα σημεία στο πλέγμα.

Δ. Τι εννοείς;

Μ. Οι ευθείες που είδαμε μέχρι τώρα διέρχονται από σημεία …ακριβώς.

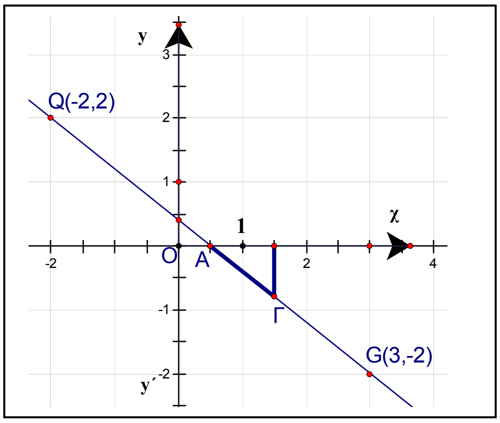
Δ. Στις συζητήσεις των προηγούμενων κεφαλαίων είδαμε μόνο ευθείες που διέρχονται **και** από το σημείο (0,0). «Βρίσκουμε εύκολα το σημείο στο πλέγμα» γιατί οι ευθείες διέρχονται από το (0,0) **και** έχουν κλίση ρητό αριθμό. Μια τέτοια ευθεία διέρχεται από άπειρα σημεία που έχουν ακέραιες συντεταγμένες, lattice points στη γλώσσα μας, ήδη το διαπιστώσαμε από τα ισοδύναμα κλάσματα.

Η ευθεία που αντιστοιχεί στον ρητό «-0,8», η «y=(-0,8)χ», ή καλύτερα η «$y=-\frac{8}{10}\chi$» ή η «$y=-\frac{4}{5}\chi$», περνά από το (0,0), αλλά και π.χ. από τα (10, -8), (-10,8),(5,-4),(-5,4) κλπ. Τα άπειρα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες προκύπτουν άμεσα από τα ισοδύναμα με το $-\frac{8}{10}$ κλάσματα.

Μ. Η ευθεία που καθορίζεται από το τμήμα ΑΓ;

Δ. Αν προεκτείνεις με προσοχή, θα βρεις «κοντά» στην αρχή τα σημεία Q(-2,2) και G(3,-2).

Η ευθεία ΑΓ έχει **ρητή κλίση**, «-0,8», διέρχεται και από ένα τουλάχιστον lattice point, η θεωρία των «Διοφαντικών εξισώσεων» βεβαιώνει[2] ότι διέρχεται από άπειρα.



Μ.Διοφαντικών; Αρχαίος Έλληνας;

Δ. Διόφαντος, γύρω στο 250μ.Χ., όχι τόσο αρχαίος όσο ο Ευκλείδης. Όμως, μια ευθεία, ακόμα και αν έχει κλίση ρητό, μπορεί να μην κατοικείται από κάποιο τέτοιο σημείο. **Αν** περνά από ένα **και** έχει **κλίση ρητό**, τότε φιλοξενεί άπειρα lattice points.

Μ. Δηλαδή, υπάρχει ευθεία που κατορθώνει να μην περάσει από κάποιο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες; Ένα παράδειγμα;

Δ. Άπειρα παραδείγματα. Απάντησε εσύ. Σκέψου απλά.

Μ. Δεν είναι δύσκολο;

Δ. Σκέψου ξαπλωμένος ή όρθιος! Κλίση μηδέν;

Μ. Οριζόντιες;

Δ. Η οριζόντια ευθεία με ταυτότητα y=0,5, ρητή κλίση, μηδέν, κατοικείται από σημεία (τετμημένη, 0,5). Η τεταγμένη «0,5» μας βεβαιώνει ότι δεν περνά από lattice point. Κάθε οριζόντια που **δεν** διέρχεται από σημείο (0, ακέραιος), είναι ευθεία με ρητή κλίση, 0, χωρίς lattice points.

Ίδια σκέψη για τις κατακόρυφες, ευθείες χωρίς κλίση, π.χ. η χ=1,28.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Ναι, αλλά η χ=1,28, διέρχεται από τα (1,28, **0**), (1,28, **5**), (1,28, **-7**)…, όπως και η y=0,5, διέρχεται από τα (**0**, 0,5), (**1821**, 0,5), (**-12**, 0,5)…

Δ. Οι οριζόντιες που περιγράψαμε, αλλά και οι κατακόρυφες, δεν διέρχονται από σημεία που έχουν **και** τετμημένη **και** τεταγμένη ακεραίους αριθμούς. Διέρχονται από σημεία που έχουν **ή μόνο** την τετμημένη **ή μόνο** την τεταγμένη ακεραίους.

Αν κάποια οριζόντια διέρχεται από ένα lattice point, π.χ. η y=7, τότε διέρχεται από άπειρα, (-1,7), (0,7), (15,7), γενική μορφή σημείων (ακέραιος, 7). Ίδια σκέψη για τις κατακόρυφες, π.χ. η χ=7 διέρχεται από τα (7,0), (7,2), (7,-3), κλπ, άπειρα της μορφής (7, ακέραιος).

Μ. Άλλες ευθείες, όχι οριζόντιες ή κατακόρυφες, που δεν διέρχονται από σημεία με ακέραιες συντεταγμένες; Ένα παράδειγμα;

Δ. Κλίση ρητός ή άρρητος;

Μ. Έχει ευθείες με κλίση άρρητο;

Δ. Η κλίση είναι αριθμός, ρητός ή άρρητος.

Μ. Μία και μια δώρο!

Δ. Ας θυμηθούμε την ευθεία, ακριβέστερα την ημιευθεία, της αγοραπωλησίας μήλων, την συνάρτηση y=2χ. Για την ίδια τετμημένη, αυξάνουμε κάθε τεταγμένη κατά 3,5 μονάδες.

Μ. Δηλαδή;

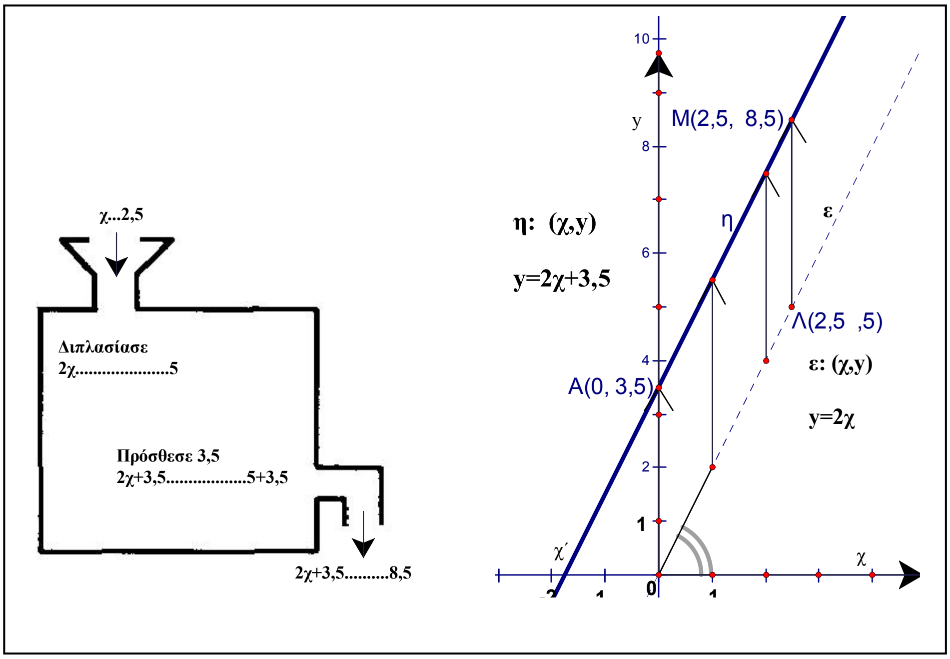
Δ. Δες το σχήμα της διπλανής σελίδας.

Για τετμημένη 2,5, το (2,5, 5) είναι σημείο της «ε». Για την ίδια τετμημένη, το (2,5, 8,5) είναι σημείο της «η». Για να βρίσκουμε τις τεταγμένες των σημείων της «η», προσθέτουμε ένα «γρανάζι» πρόσθεσης, το «πρόσθεσε 3,5», στην συνάρτηση y=2χ, δηλ. στην μηχανή παραγωγής των σημείων της «ε». Η νέα ευθεία δεν έχει lattice point.

Μ. Πως το παρατηρούμε, πως είμαστε σίγουροι;

Δ. Δεν το παρατηρούμε, είναι ελάχιστο αυτό που βλέπουμε.

Αποδεικνύουμε ότι είναι αδύνατο η ευθεία ΑΒ να περιέχει έστω και ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες. Είναι η διαφορά των μαθηματικών από τις παρατηρησιακές επιστήμες.



Μ. Διόφαντος; Είναι πολύπλοκη η εξήγηση;

Δ. Όχι. Η «θεωρία» καλύπτει όλες τις περιπτώσεις, το συγκεκριμένο παράδειγμα όμως θα το εξηγήσουμε:

Αν πάρουμε τετμημένη, χ, ακέραιο, τότε τι εκφράζει το 2χ;

Μ. Τον αριθμό που είναι διπλάσιος αυτού που ονομάσαμε «χ».

Δ. Περιγραφή όλων των 2χ για χ ακέραιο;

Μ. Τα πολλαπλάσια του 2, οι άρτιοι αριθμοί, 0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,… .

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Αν προσθέσουμε άρτιο σε άρτιο;

Μ. Απλό, άρτιος, και αν προσθέσω άρτιο σε περιττό, τότε θα πάρω περιττό, 2+3=5, 4+11=15, ο περιττός είναι άρτιος συν «1», το συν 1 περισσεύει.

Μήπως θα κάνουμε το κόλπο Α-Π, Α-Ρ;

Δ. Ποιο;

Μ. Άρτιο-Περιττό, Άρρητο-Ρητό κόλπο; Αρχικά για να το θυμάμαι!

Δ. Είναι απλούστερο.Το άθροισμα «άρτιος + 3,5» είναι άρτιος ή περιττός;

Μ. Άρτιος και 3,5, …αποτέλεσμα ούτε άρτιος ούτε περιττός,

Δ. Έχουμε άλλο είδος ακεραίων;

Μ. Όχι, ο ακέραιος θα είναι είτε άρτιος είτε περιττός

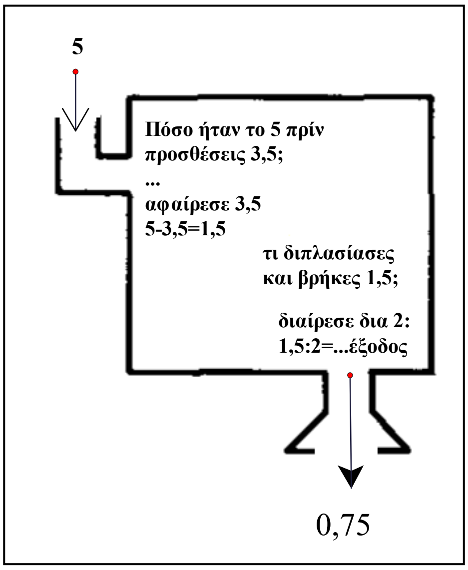
Δ. Αν η τετμημένη είναι ακέραιος, η τεταγμένη της «η», της «y=2χ+3,5» δεν θα είναι ακέραιος, αφού οι ακέραιοι είναι είτε άρτιοι, είτε περιττοί.

Μ. Η τεταγμένη μπορεί να είναι ακέραιος;

Δ. Ποιος για παράδειγμα;

Μ. Ο πέντε.

Δ. Η συνάρτηση y=2χ+3,5 παράγει τεταγμένες «y», εξαρτημένες από τις τετμημένες «χ» που επιλέγουμε, αλλά παράγει και …άπειρες εξισώσεις, αν διαλέγουμε τεταγμένη, π.χ. η 5=2χ+3,5. Υπάρχει τετμημένη που αν τη διπλασιάσουμε και προσθέσουμε 3,5 θα πάρουμε τεταγμένη 5;



Λύνουμε την εξίσωση.

Μ. Πως;

Δ. Γυρίζουμε την μηχανή ανάποδα! Δες την λύση στην εικόνα.

Υποχρεώνουμε τον «5» να γυρίσει πίσω, να μας δείξει ποιος αριθμός ήταν πριν η συνάρτηση 2χ+3,5 τον μεταμορφώσει σε 5.

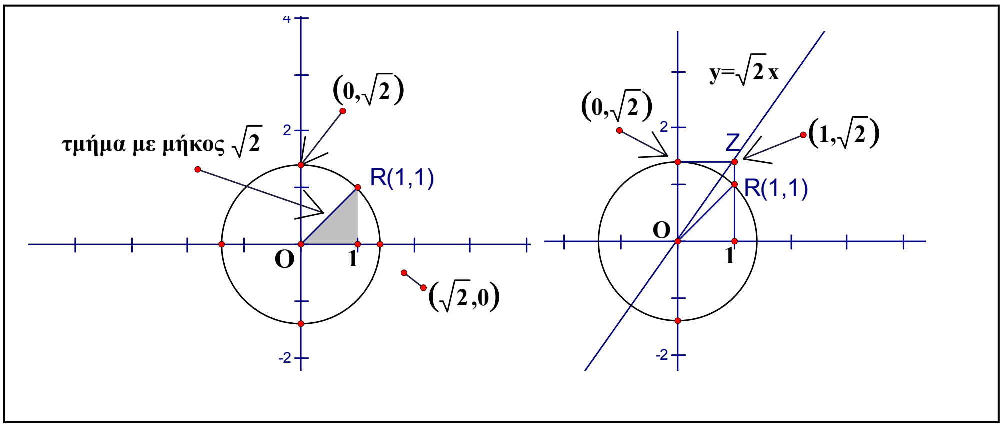
Μ. Μηχανή ανάποδα!

Ευθείες με Άρρητη κλίση;

Δ. Ευθείες με κλίση άρρητο διέρχονται είτε από ένα ακριβώς lattice point, είτε δεν περιέχουν τέτοια σημεία.

Η ευθεία ΟΖ έχει κλίση $\sqrt{2}$ και σημείο με ακέραιες συντεταγμένες μόνο το Ο(0,0). Για μια μονάδα οριζόντιας μετακίνησης ανεβαίνει $\sqrt{2}$ μονάδες. Είδαμε στους «γνώμονες», ότι δεν χρειάζονται μετρήσεις για τον $\sqrt{2}$, κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα OR, O(0,0), R(1,1), οπότε OR=$\sqrt{2}$.

Στη συζήτηση για την μεταμόρφωση των κλασμάτων σε σημεία, στο σύστημα συντεταγμένων, βρήκαμε ότι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή, από το σημείο (0,0), με ρητή κλίση 1/2 είναι η $y=\frac{1}{2}\chi$. Με ίδιες σκέψεις βρίσκουμε ότι η περιγραφή της ευθείας ΟΖ είναι: $y = \sqrt{2}\chi$.



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Αν θυμάμαι καλά, είχαμε πει ότι κάθε **ρητός** αντιστοιχεί σε μια τέτοια ευθεία.

Δ. Πολύ καλά θυμάσαι. Κάθε ρητός φιλοξενείται σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή και τον δέχεται για κλίση της. Θα έχουμε στο μυαλό μας όχι μόνο ένα κλάσμα αντιπρόσωπο του ρητού, π.χ. το 2/5, αλλά ότι η ευθεία $y=\frac{2}{5}\chi$ περιέχει και **όλα** τα σημεία στα οποία μεταφράζονται τα ισοδύναμα με το 2/5 κλάσματα. Δεν είπαμε όμως το αντίστροφο, δηλ. ότι κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή έχει κλίση έναν ρητό αριθμό. Κάτι ανάλογο είδαμε και στη συζήτηση για τον άξονα. Κάθε ρητός αριθμός έχει μια «θέση» στον άξονα, αλλά ο άξονας δεν είναι ιδιοκτησία των ρητών.

Η $y = \sqrt{2}\chi$ διέρχεται από την αρχή, από το (0,0), έχει κλίση $\sqrt{2}$ και δεν περιέχει κανένα άλλο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες.

Μ. Μελλοντική διερεύνηση!

Δ. Όχι. Τωρινή. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή, από το (0,0), και από το (1,2), τι κλίση έχει;

Μ. Διέρχεται από την αρχή, κλίση της είναι το κλάσμα $\frac{2}{1}$, το «αριστερότερο» σημείο είναι (0,0), φαντασία και αυτοματισμός.

Δ. Αν διέρχεται από την αρχή και από το (10, 17).

Μ. Κλίση 17/10, τεταγμένη δια τετμημένη.

Δ. Από την αρχή και από το (-10,17).

Μ. Χρησιμοποιώ το κόλπο της ανεξαρτησίας από το δεξιότερο σημείο, … $\frac{17-0}{-10-0}=-\frac{17}{10}$. Ο εκνευρισμός έρχεται. Γίνεται συχνά: τα απλά τα εξηγείς αναλυτικά και τα δύσκολα περιμένεις να τα καταλάβω με την πρώτη!

Δ. Η κλίση μιας ευθείας είναι ίδια όσο και να την προεκτείνω. Η $y = \sqrt{2}\chi$ περνά από το (0,0) με κλίση $\sqrt{2}$. Αν φιλοξενεί κάποιο σημείο με ακέραιες συντεταγμένες, (τετμημένη, τεταγμένη), τότε $\sqrt{2} = \dfrac{\text{τεταγμένη}}{\text{τετμημένη}}$.

Μ. Και;

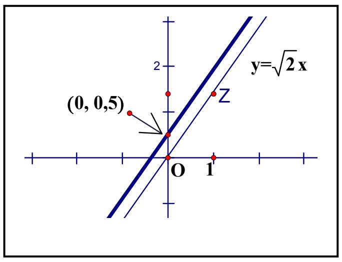
Δ. Το πηλίκο $\dfrac{\text{τεταγμένη}}{\text{τετμημένη}}$ είναι ρητός, αφού οι όροι του κλάσματος είναι ακέραιοι. Είδαμε στους γνώμονες ότι δεν υπάρχει τέτοιο ρητό κλάσμα, ο $\sqrt{2}$ δεν είναι ίσος με κάποιο πηλίκο ακεραίων. Η $y = \sqrt{2}\chi$ είναι αδύνατον να διέρχεται έστω και από ένα ακόμα lattice point.

Μ…

Δ. Στην επανάληψη…

Μ. Εντάξει, δεν θα το περάσω γρήγορα.

Και μια ευθεία με άρρητη κλίση που δεν περνά έστω και από ένα lattice point;



Δ. «Τραβάμε» λίγο προς τα πάνω την $y = \sqrt{2}\chi$, π.χ. σχεδιάζουμε ευθεία με κλίση $\sqrt{2}$ που διέρχεται από το (0, 0,5).

Μ. Αν την τραβήξουμε πολύ προς τα πάνω;

Δ. Όσο θέλουμε, αρκεί να **μην** την «αφήσουμε σε σημείο (0, ακέραιος). Όπως και προηγουμένως, είχαμε την y=2χ και δημιουργήσαμε την y=2χ+3,5. Αν «αφήσουμε» την y=2χ στο σημείο π.χ. (0,3), τότε είναι ευθεία με ρητή κλίση που περνά από ένα lattice point, επομένως από άπειρα

Μ. Αυτή η εξήγηση θα είναι πολύ δύσκολη!

Δ. Περίπου η προηγουμενη[3]. Αλλά ας την αφήσουμε προς το παρόν.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σχετικά με τις ακέραιες συντεταγμένες, τετμημένη και τεταγμένη, έχουμε πεντε[4] ειδών ευθείες:

ευθείες με κλίση	**ευθείες με ρητή κλίση**	**χωρίς lattice points**
		άπειρα
	ευθείες με άρρητη κλίση	**χωρίς lattice points**
		ακριβώς ένα lattice point

Μ. Τέσσερα είδη έχεις γράψει!

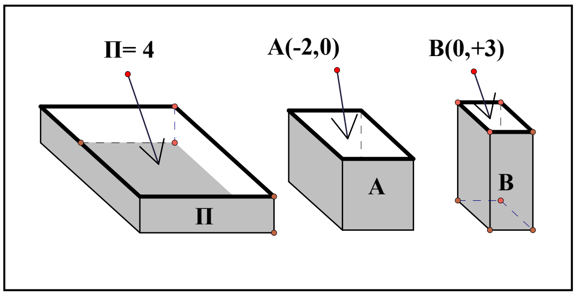
Δ. Έχουμε και τις ευθείες **χωρίς** κλίση, τις κατακόρυφες, που είδαμε πριν.

Μ. Και οι οριζόντιες;

Δ. Ευθείες **με** ρητή κλίση, το «0» είναι ρητός. Είναι στον πίνακα.

Μ. Μήπως να συνεχίσουμε εκείνο το παιχνίδι;

Δ. Ποιο παιχνίδι;



Μ. Που δίνεται ένα διατεταγμένο ζεύγος… και απαντάμε στην ερώτηση;

Δ. Α! ναι! Το ρεύμα, επανερχόμαστε!

Παιχνίδι 4^{o}, δίνεται το (-2,+3).

Μ. Τι; Το παιχνίδι ισχύει και για αρνητικούς;

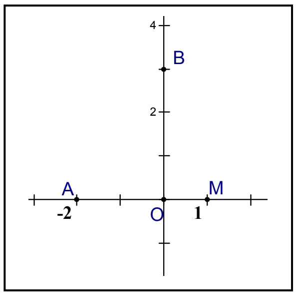
Δ. Ο στόχος του είναι Α-Α.

Μ. Τι Α-Α;

Δ. Αρνητικοί –Άρρητοι!

Μ. Οχ! Δώρο υπάρχει;

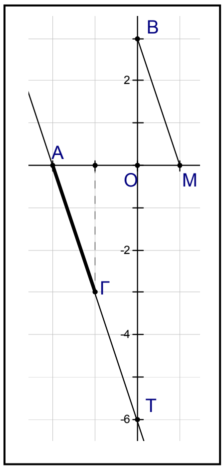
Δ. Τα κουτάκια έτοιμα, ενέργειες 1 και 2.



Μ. Βήματα 3 και 4: σύστημα συντεταγμένων, σημεία Ο και Μ, σημείο Α(-2,0), σημείο Β(0,3). Βήματα 5 και 6, κλίση του ΒΜ, 1 οριζόντια, 3 κάτω, η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «-3».

Ακολουθούν ενέργειες 7,8,9 και 10

Σχεδιάζω από το Α, τμήμα ΑΓ με κλίση «-3». Ένα δεξιά-οριζόντια, φτάνω στο (-1 0), κατεβαίνω 3 μονάδες, Γ είναι το σημείο (-1, -3). Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον y΄y το Τ(0, -6).



Δ. Εξαιρετικά! Συνοψίζουμε σε πίνακα:

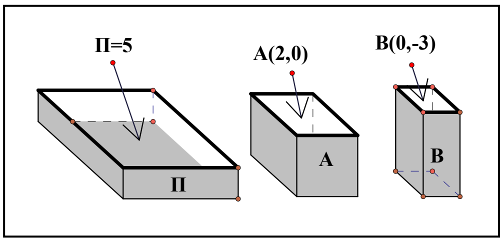
	Π=1	Π=2	Π=3	Π=4
Δεδομένα	(2,3)	(3,4)	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$	(-2,+3)
Απάντηση	6	12	4/10	-6

Μ. Π=5;

Δ. Παιχνίδι 5^{o}, δίνεται το (2,-3).

Μ. Δώρο;

Δ. Δώρο οι ενέργειες 1 και 2.



Μ. Βήματα 3 έως 10 περιττά, το σημείο τομής είναι το Τ(0,-6).

Δ. Γιατί;

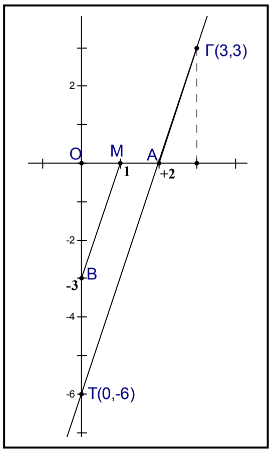
Μ. Αυτοματισμός, δεν έχει γιατί, είναι σωστό;

Δ. Σωστό, αλλά δείξε σύντομα τις ενέργειες.

Μ. Βήματα 3 και 4: σύστημα συντεταγμένων, Ο, Μ, σημείο Α(2,0), σημείο Β(0,-3).

Βήματα 5 και 6, κλίση του ΒΜ, 1 οριζόντια, 3 πάνω, η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «+3».

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



Βήμα 7^{ο} :Σχεδιάζω από το Α, τμήμα ΑΓ με κλίση 3. Ένα οριζόντια, φτάνω στο (3 0), ανεβαίνω 3 μονάδες, Γ είναι το σημείο (3, 3). Ακολουθούν ενέργειες 8,9 και 10: Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον y΄y το Τ(0, -6).

Συνοψίζουμε σε πίνακα;

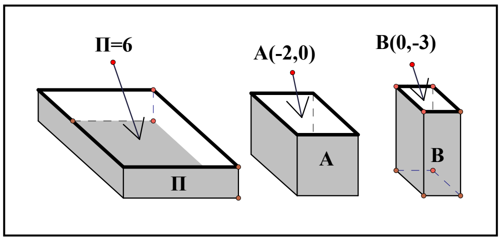
Δ. Ναι!

	Π=1	Π=2	Π=3	Π=4	Π=5
Δεδομένα	(2,3)	(3,4)	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$	(-2,+3)	(2,-3)
Απάντηση	6	12	4/10	-6	-6

Μ. Για το παιχνίδι Π=6, ξέρω!

Δ. Τι ξέρεις;

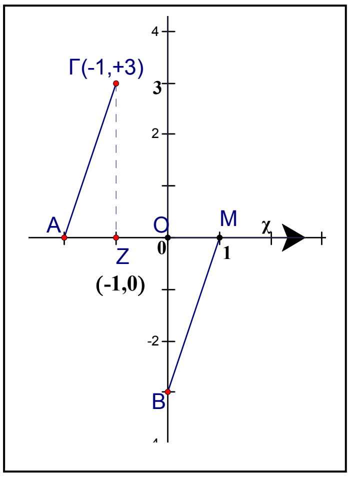
Μ. Δίνεται το ζεύγος (-2,-3). Είμαι **περίεργος**, το Τ θα είναι το (0,6); Γιατί, αυτοματισμός, (-2)*(-3)=+6



Δ. Ξεκίνα!

Μ. Δώρο;

Δ. Ενέργειες 1,2,3,4.



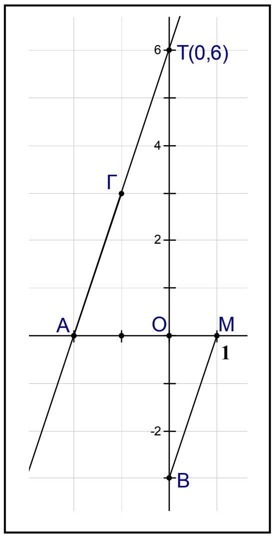
Σύστημα συντεταγμένων, Ο, Μ, σημείο Α(-2,0), σημείο Β(0,-3).

Μ. Συνεχίζω, βήματα 5, 6 και 7: κλίση του ΒΜ, 1 οριζόντια, 3 πάνω, η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «+3». Σχεδιάζω από το Α, τμήμα ΑΓ με κλίση «+3». Ένα οριζόντια δεξιά, φτάνω στο Ζ(-1 0), ανεβαίνω 3 μονάδες, Γ είναι το σημείο (-1, +3).

Ακολουθούν ενέργειες 8,9 και 10: Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον άξονα y΄y το Τ(0, +6),…(-2)*(-3)=+6!

Συνοψίζουμε σε πίνακα;

Δ. Εξαιρετικά! Συνοψίζουμε:



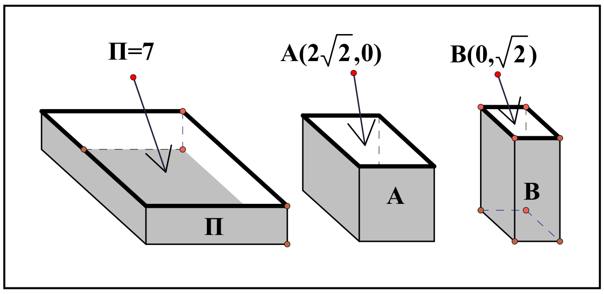
	Π=1	Π=2	Π=3	Π=4	Π=5	Π=6
Δεδ.	(2,3)	(3,4)	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$	(-2,+3)	(2,-3)	(-2,-3)
Απ.	6	12	4/10	-6	-6	+6

Μ. Συνο-ψήσαμε και σταματάμε!

Δ. Μισο-ψήσαμε. Ένα ακόμα, το τελευταίο μου δώρο!

Μ. Τελευταίο; Έχεις πει ότι κάθε τέλος είναι μια καινούργια αρχή!

Ακούω, παιχνίδι 7^{ο}, δίνεται το…

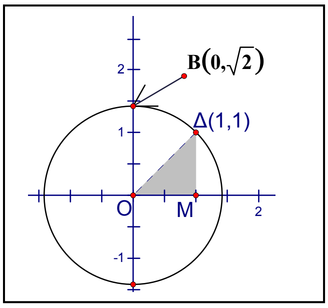


Δ. Στα κιβώτια.

Μ. Παίζουν και οι άρρητοι; Α! Θυμάμαι, στόχος Α-Α!

Δ. Δώρο το Δ(1,1) είναι «βοηθητικό-επαναληπτικό».

Μ. Ενέργειες 3 και 4. Σύστημα συντεταγμένων, Ο(0,0), Μ(1,0). Το τμήμα ΟΔ έχει μήκος $\sqrt{2}$. Διαβήτης,..ο κύκλος (Ο,ΟΔ) είναι «βοηθητικός-επαναληπτικός»…. Το Β στον y΄y, $B\left(0,\sqrt{2}\right)$. Μετά; Πως θα τοποθετήσω το Α;



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Αγωνίστηκα… ολόκληρο κεφάλαιο, «γνώμονες», να σε φέρω στο δεύτερο επίπεδο κατανόησης. Έγιναν «άρρητες» τοποθετήσεις…

Μ. Πρώτο επίπεδο;

Δ. Να κατανοήσεις τα επιχειρήματα.

Μ. Το δεύτερο;

Δ. Να μπορείς να τα επαναλάβεις.

Μ. Έχει και τρίτο;

Δ. Το ανώτερο επιπεδο[5] κατανόησης, …να μπορείς να τα ανατρέψεις!

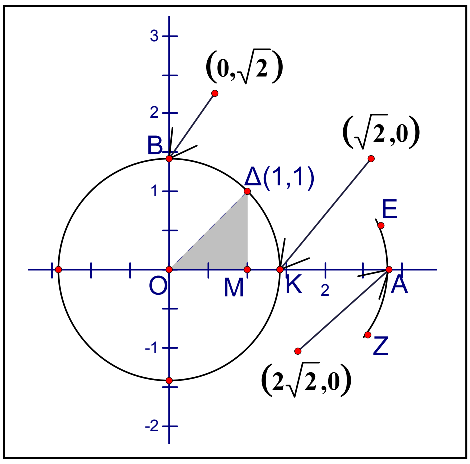
Μ. Εσύ σε ποιο επίπεδο είσαι;

Δ. Στο δεύτερο, επαναλαμβάνω τα επιχειρήματα των άλλων.

Μ. Και πότε θα γίνει η μετάβαση στο ανώτερο επίπεδο;

Δ. Θα έπρεπε να είχε γίνει, δεν ξέρω αν προλαβαίνω, πεπερασμένη ζωή…

Κατασκευάζουμε κύκλους, ή μάλλον τόξα, $2\sqrt{2}$, εύκολο! Σου δωρίζω τον βοηθητικό κύκλο (Κ, ΟΚ), Κ είναι το σημείο $\left(\sqrt{2},0\right)$.



Μ…. Καλά, … Βοηθητικός, αλλά «ακρωτηριασμένος»

Δ. Το τόξο ΖΑΕ είναι του (Κ,ΟΚ), οπότε $ΚΑ=\sqrt{2}$. Έχουμε την τοποθέτηση του $Α\left(2\sqrt{2},0\right)$ στον χ΄χ.

Θα συνεχίσεις;

Μ. Οι ενέργειες είναι 10, μάλλον πήρα τα 4/10 δώρο, ανάγωγο, τα 2/5!

Από κλάσματα σωστός;

Δ. Σωστός, συνέχισε.

Μ. Βήματα 5 και 6, κλίση του ΒΜ, 1 οριζόντια, $\sqrt{2}$κάτω, οχ!, αρνητικός άρρητος, Α-Α, γίνεται αυτό;

Δ. Οι άρρητοι είναι αριθμοί, οι αριθμοί είναι θετικοί ή αρνητικοί.

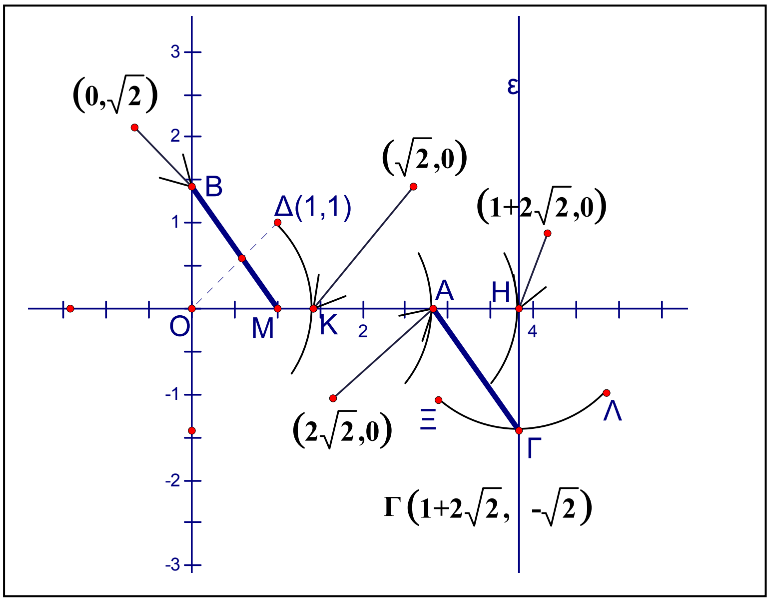
Ένα « - » μετατρέπει τους θετικούς σε αρνητικούς, είτε άρρητοι είναι είτε ρητοί.

Μ.Η κλίση του τμήματος ΒΜ είναι «$-\sqrt{2}$».

Ενέργεια 7^{η} : Σχεδιάζω από το Α, τμήμα ΑΓ με κλίση «$-\sqrt{2}$». Ένα οριζόντια δεξιά, φτάνω στο… δώρα;

Δ. Σχεδιάζω κύκλο με κέντρο Α και ακτίνα το μήκος του τμήματος ΟΜ, την μονάδα, επιστημονικά κύκλο (Α,1). Βρίσκω το Η, $H(1+2\sqrt{2},0)$.

Σχεδιάζω κύκλο με κέντρο το Η και ακτίνα το μήκος του ΟΔ, επιστημονικά κύκλο $(H,\sqrt{2})$. Δες την εικόνα, χίλιες λέξεις!



Μ. Ακατανόητη εικόνα! Χίλιες σιωπές αντί χίλιες λέξεις!

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Το τόξο $\overset{\frown}{\Xi\Gamma\Lambda}$ είναι μέρος αυτού του κύκλου. Βρίσκω το σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία «ε»…

Μ. Που έπεσε από τον… ουρανό!

Δ. Ναι! Περιγραφή της ε; Κατακόρυφη χωρίς κλίση;

Μ. $\chi=1+2\sqrt{2}$

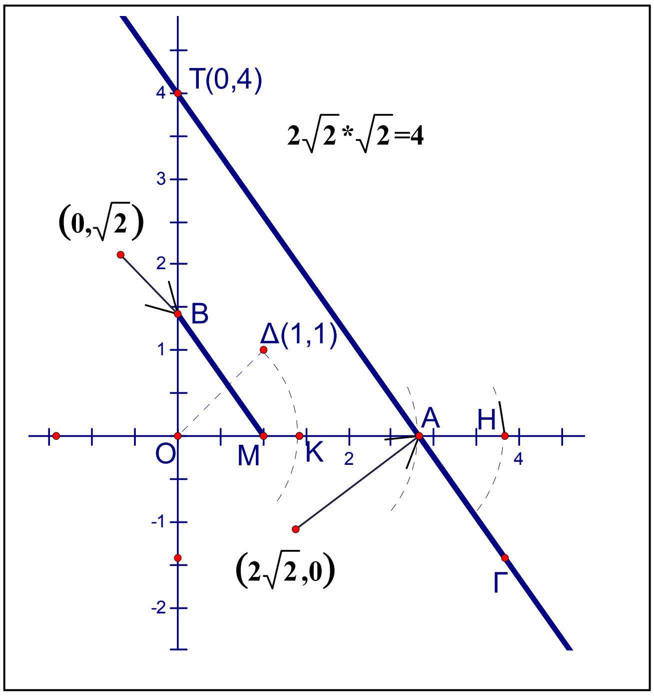
Δ. Εξαιρετικά. Αυτή δεν περιέχει lattice points.

Μ. Καλά, στο παιχνίδι είμαστε, να τελειώνουμε!

Δ. Γ είναι το σημείο $\Gamma(1+2\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Θα συνεχίσεις;

Μ. Ακολουθούν ενέργειες 8,9 και 10:

Ευθεία, προεκτείνω το τμήμα ΑΓ, σημείο συνάντησης με τον y΄y το Τ(0, 4)!, είναι σωστό;



Δ. Από την πλευρά του αυτοματισμού σωστό. Η πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν 2 είναι $\sqrt{2}$, επομένως πλευρά επί πλευρά ίσον δυο, συμβολικά: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ και $2\sqrt{2}*\sqrt{2}=2*2=4$.

Μ. Ρητοί και άρρητοι. Χαμός. Υπάρχουν και άλλοι αριθμοί;

Δ. Οι φανταστικοί και…

Μ. Δηλαδή αυτοί είναι πραγματικοί;

Δ. Οι ρητοί και οι άρρητοι **ονομάζονται** πραγματικοί.

Μ. Αστείο;

Δ. Σοβαρό.

Μ. Μήπως πρέπει η Μαθηματική κοινότητα να ξανασκεφτεί τις ονομασίες; Η εξέλιξη των εννοιών; Τελειώσαμε;

Δ. Πινακάκι, να συνοψίσουμε;

Μ. Εντάξει και το πινακάκι.

	Π=1	Π=2	Π=3	Π=4	Π=5	Π=6	Π=7
Δεδομένα	(2,3)	(3,4)	$\left(\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$	(-2,+3)	(2,-3)	(-2,-3)	$\left(2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$
Απάντηση	6	12	4/10	-6	-6	+6	4

Δ. Δεν έχεις ερωτήσεις για τον αυτοματισμό του σημείου Τ!

Μ. Τι αυτοματισμός; Εξωφρενικό!

Πως προκύπτουν όλα αυτά;

Γιατί πολλαπλασιάζοντας τους δυο αριθμούς βρίσκω το σημείο τομής; Ευκλείδης; Μάλλον όχι, εδώ έχουμε συντεταγμένες, Καρτέσιος;

Αν δεν σε πειράζει…, θα ήθελα να κρατήσω λίγη πνευματική ενέργεια για την επόμενη ώρα, διαγώνισμα στην ιστορία! Τα διαγωνίσματα ποιος τα επινόησε; Δεν έχει άλλο τρόπο αξιολόγησης;

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Δ. Μπορώ να σου εξηγήσω την μαθηματική απορία:

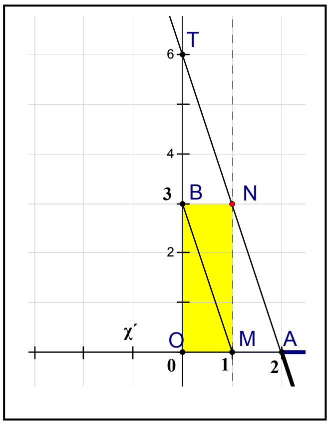
Οι συντεταγμένες …Καρτέσιος, οι αναλογίες είναι η πρόταση 2 του $6^{ου}$ βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, όπως είπαμε γύρω στο 300π.Χ. Κατά την άποψη πολλών ιστορικών ο Θαλής, 600π.Χ., γνώριζε ότι η παράλληλος προς μια πλευρά τριγώνου δημιουργεί αναλογίες και έτσι η πρόταση αυτή ονομάζεται και «Θεώρημα του Θαλή».

Το 1957 ο Μαθηματικός R. Lariviere σκέφτηκε να συσχετίσει το θεώρημα του Θαλή και τις συντεταγμένες του Καρτέσιου με τον «περίεργο» αυτοματισμό του πολλαπλασιασμού ρητών, «$-\cdot-=+$», έτυχε να το διαβάσω, το μετέτρεψα σε «παιχνίδι»....τι έπαθες; Όλα καλά;

Μ. Θαλής, αναλογίες, πολλαπλασιασμός,… εξηγήσεις;

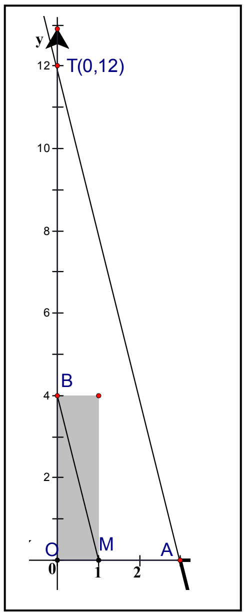
Δ. Ας δούμε τα παιχνίδια «τριγωνικά»:

Στο Π=1, δίνεται το διατεταγμένο ζεύγος (2,3).



Δημιουργήθηκε το τρίγωνο ΟΑΤ. Για τα μήκη των τμημάτων έχουμε ΟΑ=2μ, ΟΒ=3μ, ΟΤ=6μ και ΟΜ=1μ, η μονάδα μέτρησης.

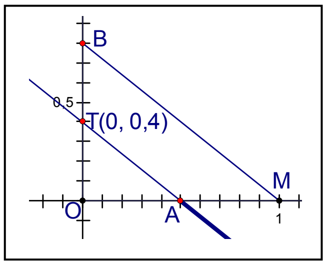
Το τμήμα ΟΑ είναι διπλάσιο του ΟΜ, το τμήμα ΟΤ είναι διπλάσιο του ΟΒ, ή αντίστροφα, το ΟΜ είναι το μισό του ΟΑ, το ΟΒ είναι το μισό του ΟΤ. Όπως και να σκεφτούμε, έχουμε την αναλογία $\frac{2}{1}=\frac{6}{3}$, ή την $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$. Οι αριθμοί είναι τα μήκη των τμημάτων με μονάδα το τμήμα ΟΜ. Αν αντικαταστήσουμε τα μήκη με τα ονόματα των αντίστοιχων τμημάτων μπορούμε να γράψουμε π.χ. για την πρώτη αναλογία: $\frac{OA}{OM}=\frac{OT}{OB}$ ή $\frac{OM}{OA}=\frac{OB}{OT}$ για την δεύτερη.



Επειδή ΟΜ=1μ, τα χιαστί γινόμενα και στις δυο περιπτώσεις δίνουν ΟΤ=ΟΑ*ΟΒ. Γνωρίζουμε ότι ΟΑ=2, ΟΒ=3, οπότε ΟΤ=6 μονάδες.

Συνηθίζουμε να χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο **και** για το ευθύγραμμο τμήμα **και** για το μήκος του, αν και είναι διαφορετικές οντότητες, γεωμετρικό σχήμα και αριθμός αντίστοιχα. Επίσης δεν έχουμε ορίσει πολλαπλασιασμό ευθυγράμμων τμημάτων. Η ισότητα ΟΤ=ΟΑ*ΟΒ αναφέρεται αποκλειστικά στα μήκη των αντίστοιχων τμημάτων.

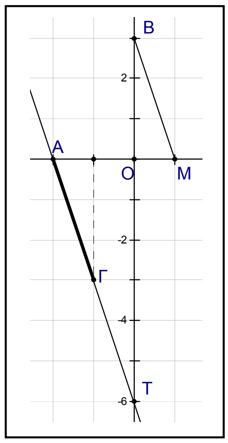
Για το Π=2, ζεύγος (3,4): ΟΑ=3μ, ΟΒ=4μ και ΟΤ=ΟΑ*ΟΑ=12μ. Τ είναι το σημείο (0,12).



Οι αναλογίες του Θαλή μας δίνουν το **μήκος** του τμήματος ΟΤ, οι συντεταγμένες είναι «πρόσφατες» ιδέες.

Για το 3^{o} παιχνίδι έχουμε ανάλογες σκέψεις: $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ και $B\left(0,\frac{4}{5}\right)$, ΟΑ=0,5, ΟΒ=0,8, $\frac{OA}{OM}=\frac{OT}{OB}, \frac{OA}{1}=\frac{OT}{OB}$,

ΟΤ=ΟΑ*ΟΒ=0,5*0,8=0,4. Τ είναι το σημείο (0, 0,4).



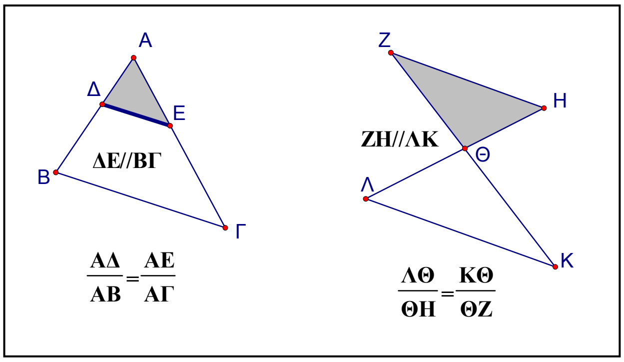
Μ. Στο τέταρτο παιχνίδι είναι κάπως διαφορετικά.

Δ. Στο παιχνίδι βλέπουμε τα ίδια τρίγωνα, τα ΟΜΒ και ΟΑΤ. Οι αναλογίες καθορίζονται από την παραλληλία των ΒΜ και ΑΓ. Η παραλληλία καθορίζεται από την ισότητα των κλίσεων.

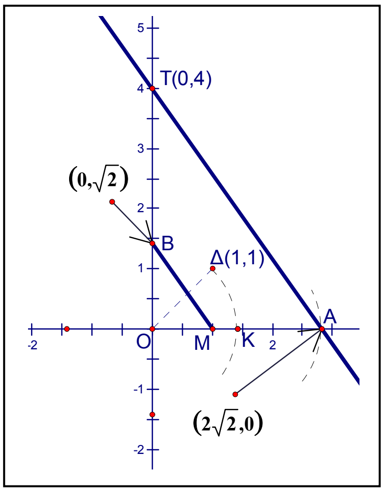
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μ. Λίγες διευκρινήσεις ακόμα για τον Θαλή;

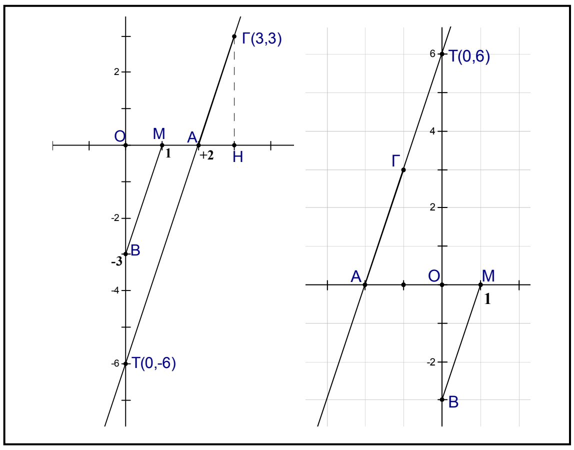
Δ. Το Θεώρημα του Θαλή μας βεβαιώνει ότι η παράλληλος προς μια πλευρά τριγώνου, εσωτερικά ή εξωτερικά, οδηγεί στις αναλογίες που βλέπεις στο διπλανό σχέδιο. Είναι το μέρος του θεωρήματος που χρησιμοποιούμε στο παιχνίδι. Δεν γνωρίζουμε την αριθμητική τιμή, γνωρίζουμε όμως, από το θεώρημα, πως **υπάρχει αναλογία**. Δεν είναι η μέτρηση των τμημάτων που προσδιορίζει την αναλογία, αλλά **η παραλληλία** των ΔΕ και ΖΗ προς τις ΒΓ και ΛΚ αντίστοιχα.



Στο παιχνίδι αλλάζουμε τις συντεταγμένες των Α, Β, αλλά διατηρούμε τα ίδια γράμματα, οπότε έχουμε τρίγωνα με τα ίδια ονόματα, ΟΜΒ και ΟΑΤ. Ο τρόπος κατασκευής του ΑΓ, ίδια κλίση με το ΒΜ, οδηγεί στην παραλληλία των ΒΜ και ΑΓ. Ίσως αυτό δεν είναι πλήρως κατανοητό, λίγη υπομονή μέχρι την Α΄ Λυκείου. Σε κάθε περίπτωση δημιουργείται ένα από τα δυο «πρότυπα» του θεωρήματος του Θαλή.



Το θεώρημα ισχύει και για «άρρητα» μήκη, π.χ. στο άρρητο 7^o παράδειγμα: $\frac{OA}{OM}=\frac{OT}{OB}$, ΟΤ=ΟΑ*ΟΒ, $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$, Τ είναι το (0,4).



Στο πλαίσιο είναι τα παιχνίδια 5,6. Προσέχουμε τους αριθμητές, είναι πλευρές του **ίδιου** τριγώνου, εδώ του ΟΑΤ. Δεν πειράζει αν γράψουμε «ανάποδα» τους λόγους, $\frac{OM}{OA}=\frac{OB}{OT}$, τώρα οι αριθμητές είναι και πάλι του ίδιου τριγώνου, του ΟΜΒ. Καλύτερα να γράφουμε την αναλογία σε τρία βήματα: δυο «αυτόματα», στο τρίτο η σκέψη: **α.** δυο γραμμές κλάσματος, και το = ανάμεσα, $-=-$, αυτόματο βήμα, **β.** πρώτα τους αριθμητές, διαλέγω το ΟΑΤ, $\frac{OA}{\dots}=\frac{OT}{\dots}$, αυτόματο βήμα,

γ. στο «γ» προσέχουμε: στο ίδιο κλάσμα, στον **ίδιο λόγο**, θα έχουμε τμήματα που είναι **απέναντι ίσων γωνιών**, $\frac{OA}{OM}=\frac{OT}{OB}$. Τα τρίγωνα του παιχνιδιού, ΟΜΒ και ΟΑΤ είναι ορθογώνια. Οι ορθές λοιπόν είναι ίσες, οι μικρότερες γωνίες ίσες μεταξύ τους, το ίδιο και οι μεγαλύτερες.

Μπορούμε να καταλάβουμε τις μικρότερες γωνίες, είναι **απέναντι** από τις μικρότερες πλευρές, οπότε παρονομαστής στο κλάσμα με αριθμητή το τμήμα ΟΑ θα είναι το τμήμα ΟΜ, ΟΑ/ΟΜ και …«μονόδρομος» για τον παρονομαστή ΟΒ. Την ισότητα των γωνιών μπορούμε να τη διαπιστώσουμε και από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα κλίσης, ΟΜΒ και ΑΗΓ, ίσες κάθετες πλευρές, δες στο σχήμα του 5^{ου} παιχνιδιού, το «αριστερά» στο παραπάνω πλαίσιο.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε τα μήκη των ΟΑ, ΟΒ, ΟΜ, με μονάδα το τμήμα ΟΜ, «μ», οπότε υπολογίζουμε το μήκος του ΟΤ από την αναλογία: $\frac{OA}{OM}=\frac{OT}{OB}$, $OT=\frac{OA\cdot OB}{OM}=OA\cdot OB$, γιατί ΟΜ=1, (+1).

Στο 6^{o} παιχνίδι, το «δεξιά» στην προηγούμενη σελίδα, για τα **μήκη** των τμημάτων έχουμε: $\frac{2}{1}=\frac{?}{3}$. Προκύπτει το **μήκος** του ΟΤ, ΟΤ = 6μ, δηλ. το θεώρημα του Θαλή μας υποδεικνύει την $OT=OA\cdot OB$ σαν ισότητα απολύτων τιμών. Μετά την «άφιξη» των συντεταγμένων στον νοητό μας κόσμο, το γινόμενο της τετμημένης του σημείου Α επί την τεταγμένη του σημείου Β, δίνει την τεταγμένη του σημείου Τ. Παρατήρησε ότι και τα τρία τμήματα, ΟΑ,ΟΒ,ΟΤ, όπως και το μοναδιαίο, το ΟΜ, «αρχίζουν» από το Ο(0,0). Το σημείο Α έχει τεταγμένη 0, Α(…,0), το σημείο Β έχει τετμημένη 0, Β(0,…), το σημείο Τ έχει τετμημένη 0, Τ(0, τετμημένη του Α*τεταγμένη του Β). Για το 6^{o} παιχνίδι και πάλι: Α(-2,0), Β(0,-3), ΟΤ=(-2)*(-3)=+6.
Το «Τ» είναι το σημείο (0,+6). Οι ελάχιστες λεπτομέρειες που έμειναν…

Μ. Στο μέλλον!

Δ. Κουράστηκες, θα σου κάνω το τελευταίο μου δώρο…

Μ. Όχιιιιιιιιιιιι! Θαλής, Ευκλείδης, Ίππασος, Πυθαγόρας, Καρτέσιος, και κάτι άλλοι, δεν θυμάμαι, συνεχείς ανακαλύψεις και επινοήσεις… εσύ;

Δ. Τι εγώ;

Μ. Εσύ επινόησες κάτι;

Δ. **Μόνο** να σου παρουσιάσω κάποιες από τις εκπληκτικές επινοήσεις του συναρπαστικού κόσμου των Μαθηματικών ιδεών με τέτοιο τρόπο, ώστε να σε οδηγήσω γρήγορα σε άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα!

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</u>

Πρόλογος

1. Συμφωνούμε με την άποψη ότι «*ακόμη και αν δυσκολεύεται κανείς να κατανοήσει πλήρως τις έννοιες, είναι χρήσιμο για την παιδεία του να ενημερωθεί και να νιώσει, άλλος περισσότερο άλλος λιγότερο, πώς η (ελεγχόμενη από τον δάσκαλο) δυσκολία οδηγεί στην υπέρβασή της και στο άνοιγμα νέων πεδίων, νέων οριζόντων. Είναι καλό να ασκηθεί ο μαθητής σε αυτό το είδος δυσκολίας, πριν αντιμετωπίσει την μη-ελεγχόμενη, για την οποία θα έχει πολλές ευκαιρίες στην ζωή του*». Βλ. σελ.254 στο: Παμφίλου, Π.(2011) *Έλασσον Γεωμετρικόν* (ηλεκτρονικό, ανακτήθηκε στις 13/04/2011 από: www.math.uoc.gr/~pamfilos/Z11/GeoBook.pdf*)*.

2. Η συγκεκριμένη λέξη είναι από το: Rucker, R. (2004). *Το Άπειρο και ο νους*, μτφρ. Κώστας Χατζηκυριάκου. ΠΕΚ

3.Aristoteles: De anima(περί ψυχής): 431a10-17,

...καὶ ἔστι τὸ ἥδεσθαι καὶ λυπεῖσθαι τὸ ἐνεργεῖν τῇ αἰσθητικῇ μεσότητι πρὸς τὸ ἀγαθὸν ἢ κακόν, ᾗ τοιαῦτα. καὶ ἡ φυγὴ δ καὶ ἡ ὄρεξις ταὐτό, ἡ κατ' ἐνέργειαν, καὶ οὐχ ἕτερον τὸ ὀρεκτικὸν καὶ τὸ φευκτικόν, οὔτ' ἀλλήλων οὔτε τοῦ αἰσθητικοῦ· ἀλλὰ τὸ ειναι ἄλλο. **τῇ δε διανοητικῇ ψυχῇ τὰ φαντάσματα οἷον αἰσθήματα ὑπάρχει**, ὅταν δ ἀγαθὸν ἢ κακὸν φήσῃ ἢ ἀποφήσῃ, φεύγει ἢ διώκει· **διὸ οὐδέποτε νοεῖ ἄνευ φαντάσματος ἡ ψυχή.**

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

O Αριστοτέλης θεωρούσε απαραίτητες τις «νοητικές εικόνες» (φαντάσματα). Φυσικά δεν σκέφτονται όλοι με τον ίδιο τρόπο. Όμως, «*αν έχουμε μια μικρή πείρα σε σοβαρή μαθηματική εργασία, θα ξέρουμε ότι μπορούμε να κάνουμε αρκετά προχωρημένες σκέψεις, απλώς κοιτάζοντας γεωμετρικά σχήματα ή χειριζόμενοι αλγεβρικά σύμβολα*» , βλ. σελ. 251 στο: Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*, μτφρ.Ξανθή Ψυακκή. Αθήνα: Καρδαμίτσα. Βλέπε επίσης «Τα γρανάζια των παιδικών μου χρόνων», σελ.11-14, του: Papert, S. (1991). *Νοητικές Θύελλες*, μτφρ. Αγνή Σταματίου. Αθήνα: Οδυσσέας. Ο Seymour Papert είναι ο δημιουργός της Logo.

Για μεγαλύτερη ανάλυση βλ. στο: Hadamard, J.(1995, Κεφ.6: Η ανακάλυψη ως σύνθεση. Η βοήθεια των συμβόλων, σελ.73-102). *Η ψυχολογία της επινόησης στα μαθηματικά*,μτφ.Στέλιος Ζαχαρίου. Κάτοπτρο.

«…Οι νόμοι της έντονης σκέψης δεν είναι ίδιοι για όλους και οπωσδήποτε είναι πολύ διαφορετικοί από τους νόμους του κοινού σχηματισμού ιδεών, που είναι και ο μοναδικός που απαντάται συχνά στους μέσους ανθρώπους, και συνήθως είναι αυτός που ελέγχεται από ψυχολογικές έρευνες. Η εσωτερική σκέψη, ειδικά όταν είναι δημιουργική, χρησιμοποιεί ηθελημένα άλλα συστήματα σημείων που είναι περισσότερο ευέλικτα, λιγότερο τυποποιημένα από ότι η γλώσσα και προσφέρουν μεγαλύτερη ελευθερία και περισσότερο δυναμισμό (π.χ. ασαφείς εικόνες μπορεί να αναπαριστούν περισσότερο ακριβείς ιδέες). Σε πολλούς ανθρώπους συμβαίνει κάτι πολύ απλό: η σκέψη τους δεν συνοδεύεται ποτέ από λέξεις. Αυτό είναι ακατανόητο για κάποιον που πιστεύει ότι είναι αδύνατον να φέρει στο νου του την αστραπή, χωρίς πρώτα να σκεφτεί το όνομά της»(η τελευταία πρόταση είναι στη σελ.78).

Πολλοί μαθητές, αλλά και Μαθηματικοί, «αισθάνονται μέσα τους» τις διαδικασίες αλλά δυσκολεύονται στην λεκτική περιγραφή τους. Αυτή η «αίσθηση» όμως δεν είναι προνόμιο των μαθηματικών. Ο διάλογος που ακολουθεί πραγματοποιήθηκε τον Φεβρουάριο του 2009 στο Μουσείο Μπενάκη, βλ. στη σελ. 10 του: Τσιγκάκου, Φ., επιμέλεια, (2011). *Γιάννης Μόραλης «Αρχιτεκτονικές συνθέσεις»*. Αθήνα: Μουσείο Μπενάκη.

Φ: Φανή-Μαρία Τσιγκάκου, **Γ:** Γιάννης Μόραλης:

Φ. -Κύριε Μόραλη, έχετε σπουδάσει αρχιτεκτονική; **Γ**.-Όχι.

Φ.-Στο σχολείο ήσασταν καλός στα μαθηματικά; **Γ**.- Έτσι και έτσι.

Φ.-Σας ρωτώ γιατί, όπως καταλαβαίνετε, απορώ πως έχετε σχεδιάσει τόσο άψογες αρχιτεκτονικές συνθέσεις. **Γ**.-Απλούστατα, με την αίσθηση!

4. «*Η χρησιμοποίηση των χεριών βοηθά το μαθητή να συνειδητοποιήσει τα διάφορα μέρη, τη συναρμογή τους και τις σχέσεις τους με το σύνολο. Η σκέψη δεν σφηνώνεται λοιπόν στο κεφάλι. Υφαίνεται κατά κάποιον τρόπο με το γρήγορο παλινδρομικό της πέρασμα από το χέρι στο κεφάλι και αντίστροφα»*. Βλ.σελ.37 στο: Δαμαλάς, Γ.(1980). *Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα.

Κεφάλαιο 1:Άξονας

1.Ευχαριστώ τον προπονητή ιστιοπλοΐας Λευτέρη Σερκίζη για τον «μνημοτεχνικό» κανόνα των ονομασιών των ανέμων.

2. Πολυδούρης, Β. (1995). Η *Αριθμητική των ακεραίων, ΙΙ*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη: Κεφάλαιο 15.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

3.Καζαντζίδης, Γ. (1977). *Θεωρία αριθμών*. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων: Κεφάλαιο ΙΙ, Διαιρετότης ακεραίων.

4.Βλ. το άρθρο του Barry Mazur «Γιατί οι πρώτοι αριθμοί;» στο περιοδικό «Το φ» (2006), σελ.53-58, μτφρ. Στράτος Μάκρας.

5. Αν τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, τότε το ενδιάμεσο είναι ίσο με αυτά.

6. Σελίδα 156 του σχολικού βιβλίου: «Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού», Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., Οικονόμου, Θ. (2008).Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Κεφάλαιο 2: Πράξεις

1. Δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια ποιος ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, πιθανόν ο Ίππασος, στη σχολή του μαθηματικού και φιλοσόφου Πυθαγόρα, περίπου 550π.Χ.

2.Ο «Αναθέτης» είναι από το: Δανιηλόπουλος, Σ. (1980). *Εισαγωγή στην Υπολογιστική, την Επιστήμη των Αυτομάτων Υπολογισμών*. Ιωάννινα.

3.Οι πληροφορίες για τους ελέφαντες είναι από τα:

Hewitt, P. (2006). *Οι έννοιες της Φυσικής, τόμος Ι*, μτφρ.Ελένη Σηφάκη.Ηράκλειο:ΠΕΚ., Ενότητα «κλιμάκωση μεγεθών», σελ. 197-202

Άρθρο των Eisenkraft, A., Kirpatrick, L. (1998). Τα αυτιά των ελεφάντων. *Quantum*, Τόμος 5, τεύχος 1, σελ. 38-41.

Οι εικόνες των διαφόρων μεγεθών ελεφάντων είναι από το Scratch.

4. Τα γλυκά είναι στη σελ.13 του *Quantum*, Τόμος 3(1996), τεύχος 4.

5.Το ότι ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει δυο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις οφείλεται στο γεγονός ότι δυο διαφορετικά σύνολα πραγματικών μπορούν να έχουν το ίδιο ελάχιστο άνω φράγμα, ενότητα 1.16, σελ.25-28, και ενότητα 9.10, σελ.510-511, στο Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Ι*, μτφρ.Δ.Γκιόκα, Ατλαντίς.

Βλ. επίσης: Κεφάλαιο 4, «Οι πραγματικοί αριθμοί και η Κατάκτηση του Απείρου», στο Wilder, R. (1986). *Εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών*, μτφρ. Δημήτρης Ψυχογυιός. Αθήνα: Κουτσουμπός.

Για μεγαλύτερη ανάλυση: σελ.21-51, στο Niven, I. (1961). *Numbers: Rational and Irrational*. New York: Random House Inc.

6. Η εικόνα της μηχανής αρνητικής ενέργειας είναι στη σελ.167 από το: Σακωνίδης, Χ., κ.ά., Πιλοτικά Προγρ. Ενισχ. Διδασκαλίας, Προσαρμογή από το πακέτο «SMILE».(1992). Α.Π.Θ., Κέντρο Καινοτόμων Εκπ. Προγραμμάτων.

7.Άρθρο του Pluvinage, F.:Η μάθηση των αριθμών στην εποχή των ηλεκτρονικών υπολογιστών, μτφρ. Αθανάσιος Γαγάτσης-Μαριάνα Τζεκάκη. *Διάσταση* 2(1988): 48-58.

8.Αμερικανός υγιεινολόγος, φυσιοθεραπευτής και πατέρας της σύγχρονης Αμερικανικής Φυσικής Αγωγής.

9. Βλ. στη σελ.8 του: Εξυπερύ, Α.(1940). *Ο Μικρός Πρίγκιπας*, μτφρ.Τάκης Κουνέλης. Αθήνα: Γνώση.

Κεφάλαιο 3: Κλίση

1.Υπάρχουν διάφορες ισοδύναμες εκφράσεις, βλ. σελ. 40 στο Θωμαΐδης, Γ.κ.ά.(1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄και Β΄Ενιαίου Λυκείου*.ΟΕΔΒ.

2.Η εικόνα είναι στη σελ.325 του Apostol, T. (1962). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Ι.*

3.Το αυτοκινητάκι είναι από το Scratch.

4. Compiler: μεταφραστικό πρόγραμμα που δέχεται τις εντολές του συμβολικού προγράμματος, Source Program, και τις αντικαθιστά με εντολές της γλώσσας μηχανής, Object Program.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μία εντολή του Source μετατρέπεται συνήθως σε ακολουθία εντολών στο Object. Κάθε συμβολική γλώσσα έχει τον δικό της Compiler. Οι Compilers συνοδεύουν τη μηχανή και γράφονται από τις εταιρίες που κατασκευάζουν ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Ενδιαφέρονται μόνο για την τήρηση των γραμματικών κανόνων της γλώσσας, δείχνοντας τέλεια αδιαφορία για την λανθασμένη λογική που πιθανόν να έχει ακολουθήσει ο προγραμματιστής.

Για μεγαλύτερη ανάλυση Βλ. στο Κιουντούζης, Ε.(1977). Επιστήμη Ηλεκτρονικών Υπολογιστών. Ιωάννινα: Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

5. Ο πυρετός είναι «διασκευή» της «εικόνας» του αρρώστου, που υπάρχει μπροστά στο νοσοκομειακό κρεβάτι.

6.Βλ.Κεφάλαιο Δεύτερο, σελ.10-22, στο: Sawyer, W. (1993). *Τι είναι ο Απειροστικός Λογισμός*, μτφρ.Σ.Λιάτσου-Γ.Τσαπακίδης. Αθήνα: Τροχαλία.

7. Χρυσή έλλειψη, ο λόγος του μεγάλου προς τον μικρό άξονα είναι «φ».

8. Λογισμικό «Elica 5.6»

9. Οι πληροφορίες για τις σκάλες είναι από το:Αθανασόπουλος, Χ.(2007). *Κατασκευή κτιρίων, Σύνθεση και Τεχνολογία.* Αθήνα.

10. Η γνωστή παρανόηση: αν σκεφτούμε ότι καθώς μεγαλώνει το πλήθος των σκαλοπατιών, το μήκος της μοκέτας «προσεγγίζει» το μήκος της διαγωνίου, τότε «αποδείξαμε» ότι $2 = \sqrt{2}$! Βλ. σχετικα το άρθρο του Savin, A. (1996). Μια «μακρά» ιστορία. *Quantum*, Τ 3, τ. 3, σελ. 36-37.

Βλ. Επίσης σελ.73-74 «The staircase paradox» στο: Brian Bolt(1985). *More Mathematical activities-A resourse book for theachers*. Cambridge.

11. Αεροπλανάκι από το scratch.

12. Βλ.σελ.100 στο: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία."* Τόμος Ι. Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.

13. «*Γνωρίζουμε ολόκληρες φυλές ανθρώπων που έχουν π.χ. 40 διαφορετικές λέξεις (όχι συνδυασμούς) για διάφορες καταστάσεις του χιονιού (λέξη για το «χιόνι στο έδαφος», άλλη λέξη για το «χιόνι που πέφτει τώρα» κλπ) αλλά δεν έχουν μια λέξη για το χιόνι, τη «γενική ιδέα», την «έννοια» του χιονιού*», σελ.76 στο: Ζαφρανάς, Α., Κάτσιου Ζαφρανά, Μ.(2000). *Από τον εγκέφαλο στη νόηση*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.

Κεφάλαιο 4: Σχήματα

1. Γάτες και γαριδάκια από το Scratch.

2. Βλ.σελ.18, στο: Farmelo, G. (2004). *Οι μεγάλες εξισώσεις του 20ου αιώνα*, μτφρ. Τεύκρος Μιχαηλίδης. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

3. Η εικόνα του…Βίκτωρα και πάλι από το λογισμικό Scratch.

4. Είναι το σχήμα από ένα ξύλινο σκουλαρίκι.

5. Πραγματικό, όχι υποθετικό.

6. Οι πληροφορίες για τους τέλειους αριθμούς είναι στις σελ.170-176 του : Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία."* Τόμος ΙΙ. Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης.

Βλ.επίσης στην ενότητα: 1.13 Perfect Numbers (p.22-24), στο Posamentier , A.(2003): *Maths Wonders to Inspire Teachers and Students*. USA. ASCD(Association for Supervision and Curriculum Development).

7. «Η ακαμψία των κυρτών πολυέδρων». Άρθρο του Dolbilin, N.(1998) στο *Quantum*, Τόμος 5, τεύχος 6 σελ. 17-21.

8. «Σφαιρική» ενημέρωση από τα:

Κεφάλαιο XIV, Μέτρησις της σφαίρας, σελ.417-435, στο Κανέλλος, Σ. (1975). *Ευκλείδειος Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Μπόζη, Γ.(1967). *Στοιχεία Σφαιρικής Αστρονομίας*. Θεσσαλονίκη.

Γιανναράκη, Ο.(2005).Στερεομετρία: Γεωμετρία στη σφαίρα και κάποιες διδακτικές προεκτάσεις. Διπλωματική Εργασία. Πανεπ. Αθηνών.

Osserman, R.(1995). *Η Ποίηση του Σύμπαντος. Μια μαθηματική εξερεύνηση του Κόσμου*, μτφρ. Γιώργος Κυριακόπουλος.Αθήνα: Κάτοπτρο, Κεφ.II: Περιγράφοντας τη Γη και III: Ο πραγματικός κόσμος, σελ.35-75.

Όμως υπάρχει και ο Φανταστικός κόσμος, Κεφάλαιο IV, σελ.76-89.

Βλ.επίσης στην ενότητα «Βαρύτητα, Χώρος και νέα γεωμετρία», σελ.304-307 στο: Hewitt, P. (2006). *Οι έννοιες της Φυσικής, τόμος ΙΙ*, μτφρ.Ελένη Σηφάκη.Ηράκλειο:ΠΕΚ.

9. Βλ. το άρθρο του Mikhailov, A. «Η μακρά πορεία προς το γεωγραφικό μήκος», στο *Quantum*, Τόμος 4(1997), τεύχος 3, σελ.59-65.

10. Και η έλικα έχει αυτή την ιδιότητα, βλ.ενότητα «Από τον Αριστοτέλη στο Γαλιλαίο», σελ.22-28, στο Narlikar, J. (1999). *Η ελαφρότητα της Βαρύτητας,* μτφρ.Π.Τραυλός. Αθήνα: Τροχαλία.

11. Για το πλεονέκτημα της προς βορράν πτήσης, όταν ο προορισμός είναι ανατολικός ή δυτικός, ενότητα 2.4, «Σφαιρική Γεωμετρία», σελ.138-155, στο Davis, D. (2007). *Η φύση και η δύναμη των μαθηματικών*, μτφρ. Δημήτρης Καραγιαννάκης - Μανώλης Μαγειρόπουλος. Ηράκλειο: ΠΕΚ.

12.Το πρόβλημα με τα παγωτά είναι στη σελ.15 του: Chernyak, Y., Rose, R.(2001). *Το κοτόπουλο από το Μινσκ*, μτφρ. Νικ. Λιλής, Σαββάλας.

Κεφάλαιο 5: Κλάσματα

1. Ας προσέξουμε το …μπορεί να τεθεί: Ένας ρητός έχει άπειρους τρόπους για να γραφεί και δεν θα θέλαμε ο ορισμός «ρητός» να εξαρτάται από τον εκάστοτε επιλεγμένο τρόπο. Τα σύμβολα είναι κάπως πολύπλοκα και αρκετές φορές χρειάζεται να σκεφτούμε λίγο πριν απαντήσουμε στην ερώτηση: είναι ρητός ή όχι; π.χ. μερικοί από τους τρόπους που μπορούμε να γράψουμε τον ρητό $\frac{2}{3}$ είναι οι $\frac{4}{6}, \frac{2\pi}{3\pi}, \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}, \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}, \frac{-10}{-15}$ κλπ.

2. Βλ. σελ.6 στο εκπληκτικό άρθρο του Morris Kline: «Λογική εναντίον Παιδαγωγικής», μτφρ. Δημήτρης Χασάπης. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, Τόμος Ε(1981), τεύχος 22, σελ. 3-34. Αθήνα: ΕΜΕ.

3.Ο πολλαπλασιασμός είναι διαδοχικές προσθέσεις, η διαίρεση είναι πράξη διαδοχικών αφαιρέσεων. Αλλά, ότι η αφαίρεση μπορεί να μετατραπεί σε πρόσθεση, σίγουρα ανήκει στις ιδιοτροπίες των μαθηματικών. Ιδου!

Συμπλήρωμα ενός αριθμού ως προς 9, είναι ο αριθμός που σχηματίζεται από τα συμπληρώματα των ψηφίων του, π.χ. το συμπλήρωμα του 15 είναι ο αριθμός 84, το συμπλήρωμα του 2014 είναι ο αριθμός 7985.

Ψηφίο	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Συμπλήρωμα ψηφίου	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Για την αφαίρεση ακολουθούμε τα εξής βήματα, π.χ. 386-13

ι. Προσθέτουμε μηδενικά στην αρχή του αφαιρετέου ώστε να έχει το ίδιο πλήθος ψηφίων με τον μειωτέο, **0**13

ιι. Προσθέτουμε 1 στο συμπλήρωμα ως προς 9 του αριθμού που προέκυψε: 013…986… 986+1=987 (συμπλήρωμα αφαιρετέου ως προς βάση 10).

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

ιιι. **Προσθέτουμε** τον προηγούμενο αριθμό, τον 987, στον μειωτέο, στον 386 : 386+987=1373

ιν. Διαγράφουμε το σημαντικότερο ψηφίο, το «1», χιλιάδες, αποτέλεσμα 373, εξήγηση:386-13=386+(1000-13)-1000=1373-1000=373!

Πού όμως χρειάζονται όλα αυτά; Στον άνθρωπο ίσως δεν χρειάζονται γιατί κάνει πράξεις, όσο πολύπλοκες και να είναι, χρησιμοποιώντας το μυαλό του, δηλ. για την ακρίβεια, αυτό γινότανε παλιότερα. Χρειάζονται όμως στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές (οι οποίοι χρησιμοποιούνται από τους ανθρώπους **και** για να κάνουν πράξεις) γιατί οι Η.Υ., σαν μηχανές που είναι, δεν διαθέτουν την ευελιξία του ανθρώπινου μυαλού, και οι μόνες (αριθμητικές) πράξεις που εκτελούν είναι δυο: υπολογισμός συμπληρώματος και πρόσθεση, φυσικά στο αριθμητικό σύστημα που καταλαβαίνουν, στο δυαδικό.

Βλ. σχετική μας εισήγηση: «Οι τέσσερις πράξεις σε συσκευασία ...μιας» στα Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ(2004), σελ.104-108. Για το δυαδικό σύστημα: Κιουντούζης(1977)ό.π.

4.Βλ.σελ.194 στο: Βάρβογλης, Α.(2006). *Χημεία και καθημερινή ζωή.* Αθήνα: Κάτοπτρο.

5.Δυο ήχοι μπορούν να δημιουργήσουν σιωπή, δυο φωτεινές πηγές μπορούν να δημιουργήσουν σκοτάδι: Eisenkraft, A., Kirkpatrick, L. (1994). Ανερχόμενοι αστέρες. *Quantum,* 1(4) : 46-48. Κάτοπτρο.

6.Ο «γνώμονας» για τον εκπαιδευτικό βήχα είναι το «μηχάνημα» για τις εισπνοές που περιέχεται στη συσκευασία της «θεραπείας».

7.Βλ. σελ. 60 στο: Arons, A. (1992). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*, μτφρ. Ανδρέας Βαλαδάκης. Αθηνα : Τροχαλία.

Για την παραβολή βλ. σελ.68-71 στο: Brian Bolt(1985). *More Mathematical activities*,ό.π.

8. Αναλυτικά στην «Αριθμητική των ακεραίων» του Β.Πολυδούρη, κεφ.18.

9. Perelman, Y.(2001). Διασκεδαστικά Μαθηματικά (Μέρος 2, Άλγεβρα) μτφρ.Κώστας Γαβράς.Αθήνα: Κάτοπτρο.

10. Λογισμικό «Elica 5.6»

11. Βλ. σελ.3 στο: Flannery D. (2006). *The Square Root of 2. A Dialogue Concerning a Number and a Sequence*. New York: Praxis Publishing.

12. Wagner, S. (1984). Αυτές οι μεταβλητές…τι είναι; μτφρ.Ν.Μάγειρας. *Ευκλείδης Γ΄*, 3(1): 82-96.

13. Για μια εκπληκτικά σύντομη απόδειξη του ότι ο «π» είναι άρρητος, βλ. στο: Niven, Ivan (1956). *Irrational Numbers*. The Mathematical Association of America, σελ.19-21.

14. Olds, C. (1963). *Continued Fractions*. The Mathematical Association of America, Κεφ.1, Expansion of Rational Fractions, σελ.5-30.

15. Σταμάτη, Ε.(1975). Ευκλείδου, Περί Ασσυμμέτρων. Στοιχεία. Βιβλίον Χ.ΟΕΔΒ.

16. Βλ. σελ.307 στο:Adler, A., Coury, J. E. (1994). *The Theory of Numbers*. Vancouver, Canada: Jones & Bartlett Publishers.

17. Στον «Θεαίτητο» του Πλάτωνα αναφέρεται ότι ο Θεόδωρος απέδειξε την αρρητότητα των τετραγωνικών ριζών των αριθμών 3,5,6,7,8,10,11, 12,13,14,15,17. Δεν έχουν βρεθεί οι αποδείξεις. Ο Θεαίτητος, μαθητής του Θεόδωρου, είναι πιθανόν ο συγγραφέας του Χ βιβλίου, Περί ασυμμέτρων, των Στοιχείων. Βλ. Theodorus, Theaetetus, πολλές αναφορές στο:

Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy*. A New Reconstruction. Oxford University Press.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Επίσης σελ.170-236, κεφάλαιο VI, «Ο Αιώνας του Πλάτωνος» στο Waerden, V. (2007). *Η αφύπνιση της Επιστήμης*, μτφρ.Γιάννης Χριστιανίδης.ΠΕΚ.

18. Ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός ξ ονομάζεται **αλγεβρικός**, αν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, δηλ. αν ο ξ ικανοποιεί μια εξίσωση της μορφής $\alpha_\nu \chi^\nu + \ldots + \alpha_1 \chi + \alpha_o = 0$, όπου τα α_κ είναι ακέραιοι, όχι όλοι μηδέν, π.χ. **κάθε** ρητός αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 0$ είναι ρίζα του βχ-α=0, κάθε ρητός είναι αλγεβρικός βαθμού 1. Ένας άρρητος **μπορεί** να είναι αλγεβρικός, π.χ. ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός βαθμού 2, ο $\sqrt[3]{2}$ αλγεβρικός βαθμού 3. Υπερβατικοί είναι οι μη αλγεβρικοί άρρητοι.

Ο Lindemann απέδειξε το εξής γενικό θεώρημα:

Η ισότητα $\sum_{k=1}^{m} A_k e^{a_k} = 0$ όπου οι A_k είναι αλγεβρικοί αριθμοί και οι εκθέτες a_k είναι **διαφορετικοί** μεταξύ τους αλγεβρικοί αριθμοί (πραγματικοί ή μιγαδικοί), είναι δυνατή μόνον αν μηδενίζονται όλοι οι «συντελεστές» A_k, που δηλώνει την γραμμική ανεξαρτησία των $e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots e^{a_m}$ επί του σώματος των αλγεβρικών αριθμών (απόδειξη στο: Irrational Numbers του Ivan Niven, κεφ.9). Δύο συνέπειες:

α. Αν $x \neq 0$,αλγεβρικός αριθμός και y αλγεβρικός δεν είναι δυνατόν να ισχύει η: $e^x - ye^0 = 0$. Αν έχουμε την $e^x = y$, τότε οι αριθμοί x, y δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αλγεβρικοί, εκτός αν x=0 και y=1. Ο e^x είναι υπερβατικός για κάθε μη μηδενικό αλγεβρικό x.

Αν x=1, τότε ο y=e, είναι υπερβατικός. Το μόνο σημείο με συντεταγμένες αλγεβρικούς αριθμούς από το οποίο διέρχεται η εκθετική καμπύλη e^x είναι το (0,1).

β. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η $e^{i\pi}+e^0=0$ (Euler). Επομένως ο iπ δεν είναι δυνατόν να είναι αλγεβρικός και επειδή ο i είναι αλγεβρικός (ρίζα της $x^2+1=0$) και το σύνολο των αλγεβρικών σώμα, υπερβατικός θα είναι ο π.

Δύο από τους διασημότερους αριθμούς της επιστήμης των μαθηματικών, οι e και π, αποδείχθηκαν λοιπόν υπερβατικοί και το κυριότερο, οι αριθμοί αυτοί ήταν «δημιουργημένοι» από φυσικές μεθόδους και, ιδίως ο π, πολύ πριν την κατασκευή «τεχνητών» υπερβατικών από τον Liouville (1809-1882), π.χ. $\xi=10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+10^{-4!}+...+10^{-m!}+...=$

$$...=\sum_{m=1}^{\infty}10^{-m!}=0.110001000000000000000001000...\ !$$

19. TLG (Thesaurus Linguae Graecae-Θησαυρός Ελληνικής Γλώσσας). Βάση δεδομένων Musaios: Aristoteles, Politica, page I286a, line 10-12.

20. Σχόλια για τους ορισμούς του 1ου βιβλίου: σελ.89-109 στον πρώτο τόμο του: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001). *Ευκλείδη "Στοιχεία"*.

21. Pauchet,V.(1975).*Ο δρόμος της ευτυχίας*, μτφρ.Νίκου Σημηριώτη. Αθήνα: Κακουλίδη.

Κεφάλαιο 6: Αναλογίες

1.Mathematica.

2. Για τις διάφορες ερμηνείες των κλασμάτων βλέπε στα:

Arons, A. (1992). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*, ό.π. σελ. 27-33, ενότητα 1.7, «Περιφραστική ερμηνεία του λόγου»

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σταματόπουλος, Κ(2011).Η μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος. Διπλωματική Εργασία. Πανεπιστήμιο Αθηνών.

3. Είναι γνωστό ότι ο Γαλιλαίος και άλλοι ιδρυτές της σύγχρονης φυσικής δεν έγραφαν εξισώσεις αλλά αναλογίες, βλ. σελ.21 στο: Farmelo, G. *Οι μεγάλες εξισώσεις του 20ου αιώνα*, ό.π.

4.Βλ. ενότητα «Πολυώνυμα» στο: Littlewood, D. (1960). *Στοιχειώδης Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά*, μτφρ. Στράτος Μάκρας.Κάτοπτρο.

5.Το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι στις σελ.95-96 του: The open University(1985). *Εισαγωγή στην ανάλυση*, μτφρ. Ελένη Λαμπροπούλου. Αθήνα: Κουτσουμπός.

6. Βλ. «Ιστορία IX, τι είναι συνάρτηση;» στο Tikhomirov, V. (1999). *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, μτφρ. Κώστας Γαβράς. Αθήνα: Κάτοπτρο.

7. «Τι είναι τα Μαθηματικά;», του W.T.Tutte, σελ.285-297 στο:Σπύρου, Π.(2004). *Θεωρία Γραφημάτων*. Αθήνα.

8.Η μικροβιακή εικόνα είναι από την Επιτροπή Νοσοκομειακών Λοιμώξεων του «Θεαγενείου».

Κεφάλαιο 7: Γνώμονες

1.Βλ. Κιουντούζης(1977),ό.π., 1ο κεφάλαιο.

2. Βλ.και σχετική μας εισήγηση «Μεταβολές Εμβαδών». Πρακτικά 27ου Συνεδρίου ΕΜΕ(2010), σελ.709-717.

3.Lang, S. (1998). *Μαθηματικές Συναντήσεις με μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου*, μτφρ. Αριστείδης Μουζακίτης.Αθήνα: Κάτοπτρο, σελ.17-58.

4.TLG:Plato, Meno:84 d 3-85 b 7.

5.Βλ. Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. (2001),ό.π., ενότητα «Ευκλείδης: Η ζωή και η δράση του», σελ.10-14.

6.Τα τετραγωνικά δέκατα τα κατασκεύασε η χελώνα της Logo. Το κορίτσι είναι από τις εικόνες του Scratch.

7. Οι ιδέες για τους γνώμονες βρίσκονται στα:

Πολυδούρης, Β. (1990). *Αριθμοί τετράγωνοι και κύβοι.* Δωδώνη.

Πολυδούρης, Β. (1995). Η *Αριθμητική των ακεραίων.* Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.Τομος Ι, κεφάλαιο 14, σελ.193-212.

Gindikin, S. (1995). Αριθμητική στο τετραγωνισμένο χαρτί. *Quantum*, Τόμος 2, τεύχος 3, σελ.56-59

The first attempt: The method of gnomons, σελ.74-83 και 371-378 Fowler, D. (2003). *The Mathematics of Plato's Academy*. A New Reconstruction. Oxford University Press.

8. Οι γνώμονες με Logo. Ο δάσκαλος στην πολυθρόνα είναι στη σελ.46 του: Brian Bolt(1985).*More Mathematical Activities*.Cambridge University Press. Η «ενεργοποίηση της φαντασίας» είναι από το Scratch.

9. Οποιοσδήποτε φυσικός μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο πρώτων με μοναδικό τρόπο. Η αντίφαση φαίνεται ήδη από την $2χ^2=10^2$: αριστερά του «=» έχουμε περιττό πλήθος παραγόντων «δυο», δεξιά άρτιο, αφού τα τετράγωνα έχουν τους παράγοντες της βάσης στο τετράγωνο. Ανεξάρτητα από το πλήθος των παραγόντων «2» του φυσικού χ, το μηδέν είναι άρτιος.

Οπωσδήποτε δεν είναι τετριμμένο. Χρειαστηκε να φτάσουμε στον Gauss για ρητή διατύπωση και απόδειξη. Βλ. στο περιοδικό «Το φ»(2006), σελ.34-52, το άρθρο του Barry Mazur: «Πως απέδειξε ο Θεαίτητος το θεώρημά του;», μτφρ. Φίλιππος Φουρναράκης.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

10. Βλ. στη σελ. 80 του:Polya, G. (1991). *Πώς να το λύσω*, ό.π. «*Αν θέλουμε να διατυπώσουμε μια εξίσωση, πρέπει να εκφράσουμε σε μαθηματική γλώσσα ότι όλα τα μέρη της συνθήκης ικανοποιούνται, αν και δεν ξέρουμε ακόμη αν είναι πράγματι δυνατόν να ικανοποιήσουμε όλα αυτά τα μέρη*» .

11. «Ὅτι μεν οὖν οἱ δεικτικοὶ περαίνονται διὰ τῶν προειρημένων σχημάτων, φανερόν· ὅτι δ καὶ οἱ εἰς τὸ ἀδύνατον, δῆλον ἔσται διὰ τούτων. πάντες γὰρ οἱ διὰ τοῦ ἀδυνάτου περαίνοντες τὸ μ ν ψεῦδος συλλογίζονται, τὸ δ' ἐξ ἀρχῆς ἐξ ὑποθέσεως δεικνύουσιν, ὅταν ἀδύνατόν τι συμβαίνῃ τῆς ἀντιφάσεως τεθείσης, οἷον ὅτι ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διὰ τὸ γίνεσθαι τὰ περιττὰ ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρου τεθείσης. τὸ μεν οὖν ἴσα γίνεσθαι τὰ περιττὰ τοῖς ἀρτίοις συλλογίζεται, τὸ δ' ἀσύμμετρον ειναι τὴν διάμετρον ἐξ ὑποθέσεως δείκνυσιν, ἐπεὶ ψεῦδος συμβαίνει διὰ τὴν ἀντίφασιν», Αριστοτέλης :Αναλυτικά Πρότερα, 41α,21-41α,32.

12. Βλ. σελ. 28 του: Burton, D. (1997). Elementary number theory. New York: McGraw-Hill.

13. Είναι ο πρώτος ορισμός του 10^{ου} βιβλίου των Στοιχείων.

14. Βλ. σελ.142-144 στην «Αφύπνιση της επιστήμης», ό.π.

15. Πληρης διερεύνηση των προσεγγίσεων των αρρήτων από τους ρητούς με την βοήθεια των συνεχών κλασμάτων στην διπλωματική μας εργασία: «Άρρητοι Αριθμοί και Συνεχή κλάσματα: Παραστάσεις, Προσεγγίσεις, Εξισώσεις και Διδακτικές Εφαρμογές».(2011). Πανεπιστήμιο Αθηνών.
(Η διπλωματική είναι αναρτημένη).

16. Βλ. στην ενότητα «Απομνημονεύοντας το π» στο βιβλίο του Ντεϊβιντ Μπλατνερ(2001). *Η χαρά του π*. Αθήνα. Ωκεανίδα.

Κεφάλαιο 8: Επινοήσεις

1. Η ιδέα βρίσκεται στη σελ.185 του: Learning and teaching geometry, (1987) Yearbook, NCTM.

2. Διοφαντική, 4χ+5ψ=2, ΜΚΔ(4,5)=1, μια λύση η (-2,2), οι άπειρες λύσεις: (χ,ψ)=(-2+5t, 2-4t), $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

3. Αν η $y = \sqrt{2}\chi$ είχε σημείο με ακέραιες συντεταγμένες διαφορετικό από το O(0,0), το Z(p,q), p,q ακέραιοι, τότε η κλίση του OZ θα ήταν ρητή: $\frac{q}{p}$, αλλά είναι άρρητη, $\sqrt{2}$. Η $y = \sqrt{2}\chi + 5$ διέρχεται μόνο από το (0,5). Αν είχε και δεύτερο, Z(p,q), τότε θα γινόταν ο $\sqrt{2}$ πηλίκο ακεραίων: $\sqrt{2} = \frac{q-5}{p-0}$. Αν η $y = \sqrt{2}\chi + 0,5$ διέρχεται από το Z(p,q), τότε $q = \sqrt{2}p + 0,5$ και ο ακέραιος q θα έπρεπε να ήταν άρρητος.

4. Πλήρης Διερεύνηση στο Κεφ1: Lattice Points and Straight Lines του: Olds, C., Lax, A., Davidoff, G.(2000). *The Geometry of Numbers*. The Mathematical Association of America.

5. Βλ.σελ.77 στο: Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. (2006). Ηράκλειο: ΠΕΚ, επιμ. Γ.Χριστιανίδης, Δ.Διαλέτης.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε τις απεριόριστες δυνατότητες των παιδιών, το «άρρητο» νεανικό τους πνεύμα, προσπαθούμε να γεμίσουμε με φώς τα αστραφτερά τους μάτια, να απαντήσουμε με σοβαρότητα, άμεσα, στα αλλεπάλληλα «γιατί» τους και να δημιουργήσουμε νέα.

Ο Σωκράτης Ντριάνκος είναι καθηγητής Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.