

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ **μια διδακτική προσέγγιση για μαθητές κάθε ηλικίας**

ΝΤΡΙΑΝΚΟΣ Σωκράτης, μαθηματικός, δευτεροβάθμια εκπαίδευση,
Μπουμπουλίνας 33, 56430 Σταυρούπολη, Θεσ/νικη,
[**sntriankos@sch.gr**](mailto:sntriankos@sch.gr)

ΤΡΑΝΟΣ Τριαντάφυλλος, Ζωγράφος, δευτεροβάθμια εκπαίδευση,
Ηλέκτρας 8-10, 546 43 Θεσ/νικη,
[**tritranos@yahoo.gr**](mailto:tritranos@yahoo.gr)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δραστηριότητες που προκαλούν περιέργεια ή έκπληξη, κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών και αποτελούν ουσιαστικά κίνητρα για αυτενέργεια, για ελεύθερη παραγωγή, για εσωτερική, ζωντανή, δική τους δημιουργία. Στην εργασία αυτή προτείνουμε μια παρουσίαση του διασημότερου ίσως θεωρήματος των μαθηματικών με την μέθοδο του Henry Perigal, η οποία δεν διαμερίζει και τα δύο τετράγωνα των καθέτων πλευρών¹. Η πρωτοτυπία στην παρουσίαση είναι ότι το θεώρημα προκύπτει μέσα από το παιγνίδι και προσφέρει στους μαθητές την ευχαρίστηση, την «γλυκιά γεύση» που θα πρέπει να αφήνει η ενασχόληση με τα μαθηματικά.

ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ – ΣΤΟΧΟΙ

Η πρόταση αυτή προέκυψε από την παρουσίαση του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο Σχολείο Δεύτερης Ευκαιρίας Νεάπολης Θεσ/νίκης, όπου και υλοποιήθηκαν για πρώτη φορά αυτές οι σκέψεις(οι φωτογραφίες, όπου υπάρχουν, είναι από αυτήν την παρουσίαση).

Τα μαθηματικά θεωρούνται δύσκολο και δυσνόητο αντικείμενο. Ίσως εξ αιτίας της αφηρημένης φύσης των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία δεν βλέπουμε, δεν ακούμε, δε γεύομαστε, δεν πιάνουμε και δε μυρίζουμε (Παντελίδης, 1998). Ίσως εξ αιτίας των απαιτήσεων για αποδείξεις μόνο με τη χρήση της Λογικής και όχι παραδοσιακών «πειστικών» διαδικασιών.

¹ Η ιδέα αυτή αναφέρεται στα Bunt(1981), Davidson (1997). Μία ακόμη τέτοια μέθοδος παρουσιάζεται στη σελ.131 του σχολικού βιβλίου Β' Γυμνασίου(Βλάμος, 2007).

Ίσως εξαιτίας του βασικού χαρακτηριστικού που τα διακρίνει από όλες τις άλλες επιστήμες: *«τα μαθηματικά δεν περιορίζονται πλέον στο να βάζουν τάξη σε μια υπάρχουσα εμπειρία και διαίσθηση, αλλά, ερχόμενα σε σύγκρουση με την κοινή εμπειρία και διαίσθηση, υπερισχύουν»* (Νεγρεπόντης, 2009:4). Κύριοι παιδαγωγικοί μας στόχοι είναι η άμβλυνση πιθανόν δυσάρεστων εμπειριών των μαθητών(από την μαθηματική τους ενασχόληση), η σύνδεση του γνωστικού αντικειμένου με τον περιβάλλοντα χώρο και την Τέχνη, η ενίσχυση της διεπιστημονικής προσέγγισης και η συνακόλουθη άρση της διάκρισης ανάμεσα σε "ηγεμονικά" και "περιθωριακά" μαθήματα, που ταλαιπωρεί την σχολική πρακτική, η επαναφορά της χαρούμενης ατμόσφαιρας στον χώρο διδασκαλίας, η δημιουργία μιας «παιδαγωγικής γιορτής».

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Αναφορικά με τη μέθοδο, η πρόταση στηρίζεται στις αρχές της βιωματικής μάθησης (Βεκρής, 2003), ενώ από την άποψη των μορφών διδασκαλίας προτείνουμε να εφαρμοστεί ένας συνδυασμός της διδακτικής μορφής της παρουσίασης-επίδειξης και των κοινωνικών μορφών της ατομικής και ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας (ομάδες τεσσάρων μαθητών). Μέσα από τη βιωματική διδακτική πράξη, που βασίζεται στην κοινή καθημερινή εμπειρία, επιδιώκεται συνειδητά από τον δάσκαλο να απαλλαγούν οι μαθητές από τον φόβο του λάθους και την άρνηση της μάθησης, που συνδέεται αρκετές φορές με την αυστηρή μαθηματική παρουσίαση. Το ζήτημα δεν είναι να αποφύγουμε τα λάθη των μαθητών αλλά να οδηγήσουμε το μαθητή να τα συναντήσει, να δημιουργήσει λάθη και να τα υπερπηδήσει(Papert, 1991).

Θεωρούμε ότι υπάρχει η άνεση του χώρου και για τον δάσκαλο αλλά και για τους μαθητές. Είναι ενστικτώδης η επιθυμία του παιδιού για κίνηση. Αποκτούμε γνώσεις όχι μόνο με το μάτι και το αυτί, αλλά και με το χέρι, με το πιάσιμο, με την αφή. *«η σκέψη δεν σφηνώνεται λοιπόν στο κεφάλι. Υφαίνεται κατά κάποιον τρόπο με το γρήγορο παλινδρομικό της πέρασμα από το χέρι στο κεφάλι και αντίστροφα»*(Δαμαλάς, 1980:37).

«Η φύση είναι κείνη που διάλεξε τη ζωνρή κινητικότητα και την υπέρμετρη χρησιμοποίηση των χεριών, σαν τους καλύτερους τρόπους για να εξασκήσει το παιδί σωματικές και ψυχικές δυνάμεις και παράλληλα να πετύχει τη γνωριμία του με τον γύρο κόσμο. Η Φύση είναι κείνη που προίκισε το παιδί με τη ζωνρή επιθυμία να μιλάει πολύ, να φλυαρεί, γιατί έτσι θα εξασκηθεί και θα κατακτήσει τον έναρθρο λόγο.

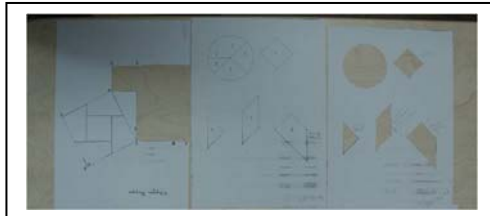
Ο Έναρθρος λόγος παρέχει μοναδική στήριξη στην ανθρώπινη σκέψη, τόσο αποφασιστική, ώστε η ανθρώπινη σκέψη να πάρει το όνομα «Λογική» (Πολυδούρης, 1997 : 21)

Επιτρέπεται λοιπόν η κίνηση και η ομιλία. Επιτρέπεται (μάλλον επιβάλλεται) να ζωγραφίσουν, να βάψουν, να γράψουν αφιερώσεις, επιτρέπεται τελικά να χειριστούν τα σχήματα σαν παιχνίδια. Η αυξημένη ελευθερία εξωτερικών κινήσεων είναι βέβαια μέσο και όχι σκοπός. Ο δάσκαλος γνωρίζει έτσι καλύτερα τους μαθητές του.



Ο αντικοινωνικός χαρακτήρας του παραδοσιακού σχολείου φαίνεται από το γεγονός ότι μια από τις πρώτες «αρετές» που διακηρύσσει είναι η ακινησία και η παρατεταμένη σιωπή. Ο παιδαγωγικός κόσμος κατευθύνεται από την Ανθρώπινη λογική αλλά η φύση έχει άλλους νόμους. Η κίνηση και ο νους πηγαίνουν μαζί κι ωστόσο πολλοί θεωρούν αδύνατο να γίνουν σχολεία όπου τα παιδιά μελετάνε, αλλά περπατάνε κιόλας, όπου θέλουν (Μοντεσσόρι, 1960· Ντιούι, 1938· Πολυδούρης, 1997).

Κατά την προετοιμασία της διδασκαλίας προσπάθεια άοκνη θα πρέπει να καταβληθεί ώστε να αποφευχθεί η άσκοπη σπατάλη του πολύτιμου διδακτικού χρόνου και να οδηγηθούν οι μαθητές γρήγορα



σε άμεσα και ασφαλή συμπεράσματα. Το υλικό θα το δώσουμε έτοιμο (Όλα τα σχήματα που θα χρειαστούν, φυσικά θα φροντίσουμε να έχουμε αρκετά περισσότερα από τα απαραίτητα φωτοτυπημένα, κάποια θα «καταστραφούν», ψαλίδια, πινέλα, τέμπερες, κόλες, κοπίδια, σκληρό χαρτόνι πάνω στο οποίο θα κόβουν ότι κρίνουν ότι τους χρειάζεται από τα έτοιμα σχήματα, φωτοτυπίες σε σκληρό χαρτόνι Α4. Το υλικό θα δοθεί για κάθε ομάδα 4 μαθητών. Τονίζουμε αυτή τη σημαντική λεπτομέρεια. Δεν θα αναθέσουμε στους μαθητές να φέρουν οτιδήποτε. Εμείς, οι δάσκαλοι, θα φροντίσουμε να έχουμε ότι είναι απαραίτητο για την ολοκλήρωση της συγκεκριμένης διδασκαλίας).

Οι μαθητές απλά θα διαπιστώσουν την ισχύ του Πυθαγόρειου θεωρήματος στα ορθογώνια τρίγωνα. Θα τους «οδηγήσουμε» σ' αυτό.

Για να αποφύγουμε διερευνημένα προβλήματα ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας (Κυνηγός, 2006:159-180) καλό θα είναι οι ομάδες να καθορίζονται από τον δάσκαλο σε κάθε μάθημα έτσι ώστε οι "συνεργασίες" να αλλάζουν κάθε φορά (δεν επιλέγουμε συνήθως τους συνεργάτες μας, και καλό θα είναι να αναπτύξουμε ένα πλαίσιο συνεννόησης και με αυτούς που συμπαθούμε αλλά και με τους υπόλοιπους).

Η Γεωμετρία με τα προτερήματα του χώρου, την απλότητα των εννοιών και την ανάγλυφη μορφή των συμπερασμάτων είναι το κατάλληλο αντικείμενο για να προκαλέσει και τους αδιάφορους μαθητές, για να καλλιεργήσει και να αναπτύξει την μέθοδο σκέψης και αυτών των μαθητών. Εξάλλου, αυτός είναι ο βασικός στόχος του δασκάλου: ο καθένας πρέπει να πάει ένα βήμα μπροστά. Ο δάσκαλος «*αποδέχεται την υποχρέωση να μην καταστρέψει, ούτε να σπαταλήσει, καμιά από τις ικανότητες που ενυπάρχουν στη φύση του παιδιού και που πρώτη η κοινωνία καλείται να αξιοποιήσει, αντί άλλες να τις αφήσει να χάνονται και άλλες να τις εκμηδενίζει*»²(Πολυδούρης, 1997:22).

Η διδασκαλία που οργανώνεται από κοινού από τον μαθηματικό και τον ζωγράφο έχει κύριους γνωστικούς στόχους:

- ο να κατανοήσουν οι μαθητές ότι αν ένα επίπεδο χωρίο επιστρώνεται από γεωμετρικά σχήματα που δεν έχουν κοινά σημεία, τότε το εμβαδόν του χωρίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους σχημάτων.
- ο να κατανοήσουν ότι όλα τα επίπεδα χωρία που επιστρώνονται με τα ίδια σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.
- ο Να κατανοήσουν ότι η αλγεβρική σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος είναι σχέση εμβαδών.
- ο να χρησιμοποιήσουν και να εξοικειωθούν με τα ζεύγη συμπληρωματικών χρωμάτων (κόκκινο-πράσινο, μπλε-κίτρινο, πορτοκαλί-μοβ).
- ο Να χρησιμοποιήσουν ψαλίδια και κόλλα και να δημιουργήσουν μικρά κολλάζ.

² Σχόλιο του Piaget για το άρθρο 26 της παγκόσμιας διακήρυξης των δικαιωμάτων του ανθρώπου που αναφέρει ότι κάθε άνθρωπος έχει δικαίωμα στην εκπαίδευση και ότι η εκπαίδευση πρέπει να αποβλέπει στην πλήρη ανάπτυξη της ανθρώπινης προσωπικότητας και στην ενίσχυση του σεβασμού προς τα ανθρώπινα δικαιώματα)

ΠΟΡΕΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

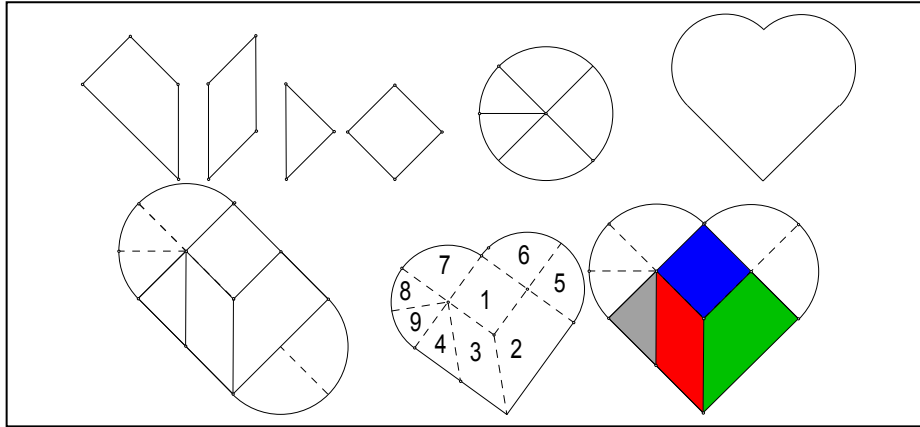
Μια ενδεικτική οργάνωση αυτής της πρότασης στην δεύτερη τάξη του Γυμνασίου, ή σε σχολεία ενηλίκων, ή στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού, ή ακόμα σε οποιουσδήποτε θέλουν να μάθουν, ανεξάρτητα από το προηγούμενο επίπεδο γνώσεών τους, σε τρία δίωρα, προτείνουμε να είναι η παρακάτω:

Κατά το πρώτο δίωρο γίνεται παρουσίαση με επίδειξη από τον μαθηματικό μιας σειράς κατασκευασμένων επίπεδων σχημάτων (έτοιμα σχήματα σε φύλλο εργασίας) και δίνονται πληροφορίες που αφορούν στην ονοματολογία και στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους. Δεν ζητάμε από τους μαθητές να απομνημονεύσουν τους ορισμούς. Ζητάμε μόνο να αναγνωρίζουν τα σχήματα. Το μυαλό του μαθητή θα πρέπει να μείνει καθαρό για να συλλάβει την ολότητα, τη μορφή, που πιθανώς θα χάσει, όταν αρχίσει να πελαγοδρομεί στις λεπτομέρειες των ορισμών, οι οποίες δεν είναι απαραίτητες σ' αυτό το επίπεδο διδασκαλίας. Ο δάσκαλος θα παρουσιάσει τους αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς. Δεν θα ζητήσει από τους μαθητές να τους απομνημονεύσουν, ή να τους «κατανοήσουν». Είναι ανεξήγητη και ανώφελη κατά την άποψη μας η επιμονή στην απομνημόνευση των ορισμών, ή στην άποψη...αν δεν μάθει αυτό δεν πάμε παρακάτω. Σημαντικό είναι να κατανοήσουμε ότι για τον μαθητή έχει μεγαλύτερη αξία το ξεπέρασμα της δυσκολίας και όχι το ίδιο το έργο. Προτείνουμε η επίδειξη των επίπεδων σχημάτων να γίνει πάνω στα στερεά, σύνορα των οποίων αποτελούν τα συγκεκριμένα σχήματα και μετά να «αφαιρέσουμε» από τα στερεά τα «σύνορα» που μας ενδιαφέρουν. Η πρόταση διδασκαλίας θα πρέπει να ολοκληρωθεί «δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε αποκλειστικά με μια έννοια μέχρι να την συλλάβει και ο τελευταίος μαθητής. Κάτι τέτοιο είναι μάταιο και ανέφικτο. Ο μαθητής αφομοιώνει προοδευτικά μια έννοια: η έννοια ωριμάζει στο μυαλό του με τη χρήση και την εφαρμογή» (Arons,1992:60).



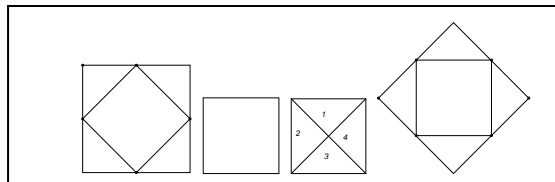
Μετά την παρουσίαση των σχημάτων που είναι απαραίτητα, με τις οδηγίες του ζωγράφου, οι μαθητές χρωματίζουν το ειδικό φύλλο εργασίας με τέμπρες, κόβουν τα διάφορα σχήματα –που τους έχουν δοθεί- από τα χαρτόνια και δημιουργούν με επιστρώσεις (tilling) και αρκετή φαντασία πιο σύνθετα σχήματα, αρχίζοντας φυσικά με το γέμισμα της καρδιάς που έχει και αυτή δοθεί σχεδιασμένη.

Τελειώνοντας το πρώτο δίωρο ζητάμε από τους μαθητές να



διαλέξουν μια από τις τρεις έννοιες: περίμετρο, εμβαδόν, όγκο, για να χαρακτηρίσουν τη δραστηριότητα της επίστρωσης του χωρίου της καρδιάς και του τραπεζιού με την οποία ασχολήθηκαν. Δεν μας ενδιαφέρει κάποια αριθμητική τιμή για απάντηση. Στόχος μας είναι να κατανοήσουν ότι οποιοδήποτε σχήμα μπορεί να δημιουργηθεί από τα συγκεκριμένα 9 (και όχι μόνο αυτά τα δύο) έχει εμβαδόν όσο είναι το άθροισμα των εμβαδών των 9 επιμέρους τετραπλεύρων και κυκλικών τομέων³.

Στο δεύτερο δίωρο δίνονται δυο ίσα τετράγωνα, χαράσσουν τις διαγώνιες στο ένα και βάφουν τα 4 τρίγωνα με ότι χρώμα τους αρέσει, κόβουν τα 4 τρίγωνα και μετά τους ζητείται να κατασκευάσουν με αυτά και το άλλο δοσμένο τετράγωνο ένα νέο τετράγωνο.

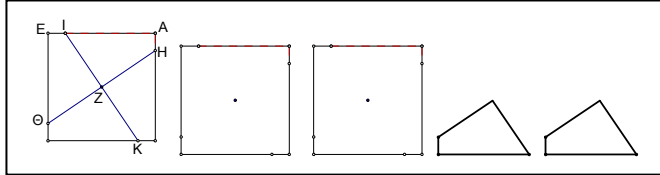


Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με δυο ακόμα ίσα τετράγωνα, αλλά διαφορετικής πλευράς από τα προηγούμενα (τα τετράγωνα δίνονται σχεδιασμένα). Φέρνουν τις διαγώνιες στο ένα, βάφουν, κόβουν, αναδιατάσσουν και δημιουργούν ένα τετράγωνο με εμβαδόν, όσο τα δυο μαζί και μήκος πλευράς, όσο η διαγώνιος ενός από τα αρχικά. Η διαδικασία είναι απλή και εύκολη και ο τρόπος τοποθέτησης των 4 τριγώνων γύρω από το δεύτερο από τα αρχικά δεν παρουσιάζει καμιά δυσκολία.

³ Δημιουργικό παιχνίδι: Μαγνήσαλης (1998), σελ.99-110.

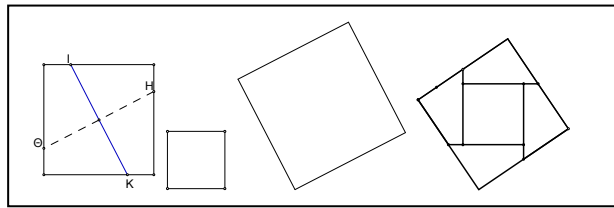
Στη συνέχεια λέμε στους μαθητές ότι θα τους δείξουμε τη μέθοδο να κατασκευάζουν τετράγωνο (όχι τυχαίο σχήμα) που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα δυο τυχαίων (όχι απαραίτητα ίσων) τετραγώνων.

Αρχικά δίνουμε δυο ίσα τετράγωνα, στο ένα είναι χαραγμένες οι ΙΚ και ΘΗ, Ζ είναι το κέντρο του τετραγώνου, βάφουν, κόβουν και γεμίζουν με τα 4 τετράπλευρα



το δεύτερο από τα δοσμένα. Ονομάζουμε τις ΘΗ, ΙΚ «ψευδοδιαγώνιες», είναι ευθ. τμήματα από το κέντρο Ζ του τετραγώνου, κάθετα, και τα άκρα Ι και Η απέχουν ίσες αποστάσεις από τις κορυφές Ε και Α, δηλ τα τμήματα ΕΙ και ΑΗ είναι ίσα. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία με την εξής ελαφρά τροποποίηση: δίνουμε τα 4 ίσα τετράπλευρα και το τετράγωνο και ζητάμε απλά τη διεύθετηση, την επικάλυψη του τετραγώνου.

Στη συνέχεια δίνουμε σχεδιασμένο ένα μικρότερο τετράγωνο και πολλά έτοιμα κομμένα τετράπλευρα, από το μεγαλύτερο. Λέμε στους



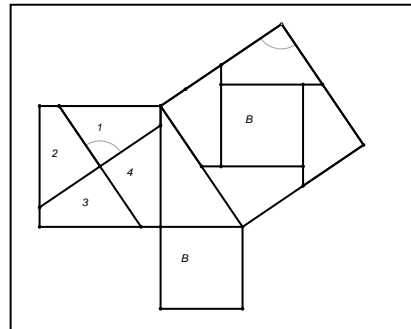
μαθητές ότι για να δημιουργηθεί τετράγωνο ίσο με το άθροισμα των δυο δοσμένων, η τοποθέτηση γίνεται με βάση το μικρότερο. Σ' αυτό το σημείο ο δάσκαλος επεμβαίνει ανάλογα με την πρόοδο σε κάθε ομάδα. Όπου υπάρχει δυσκολία, δίνει έτοιμο το τετράγωνο στο οποίο θα τοποθετηθούν το μικρότερο και τα 4 τετράπλευρα του μεγαλύτερου. Αν υπάρχει επιπλέον δυσκολία, τοποθετεί και το ένα τετράπλευρο από τα 4 του μεγαλύτερου. Άσκηση για το σπίτι: δίνουμε φωτοτυπίες με δυο τετράγωνα και ζητούμε να κόψουν κατάλληλα το μεγαλύτερο και μαζί με το μικρότερο να δημιουργήσουν ένα νέο τετράγωνο. Για την επιτυχία της κατασκευής θα πρέπει να κόψουν κατάλληλα το μεγαλύτερο από τα δοσμένα. Υπάρχει ένα μυστικό: η αποκάλυψη στο επόμενο μάθημα.

Στο τρίτο δίωρο γίνεται αρχικά για εύλογο χρόνο έλεγχος πιθανών λύσεων των μαθητών και συζήτηση για το μυστικό της κατασκευής. Πως πρέπει να κόψουμε τα 4 τετράπλευρα από το μεγαλύτερο ώστε μαζί με το μικρότερο να δημιουργούν το νέο τετράγωνο; Και ποια είναι η πλευρά αυτού του νέου τετραγώνου;

Μερικοί μαθητές θα χρειαστούν βοήθεια. Στην περίπτωση αυτή δίνουμε σχεδιασμένο το τετράγωνο που θα δημιουργηθεί με τα 5 τετράπλευρα και ζητάμε μόνο την επίστρωσή του.

Τέλος, αποκαλύπτουμε το μυστικό της κατασκευής, το ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τις πλευρές των δυο δοσμένων τετραγώνων. Πως θα φέρουμε τις «ψευδοδιαγώνιες»; Από το κέντρο του μεγαλύτερου, φέρνουμε παράλληλη στην υποτεινούσα. Και μετά, κάθετη σ'αυτήν, στο κέντρο του μεγαλύτερου τετραγώνου.

Διατυπώνουμε το θεώρημα: Το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται με πλευρά την υποτεινούσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τις κάθετες πλευρές αυτού του ορθογωνίου τριγώνου.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ

Απαραίτητη προϋπόθεση εφαρμογής αυτής της πρότασης είναι η ευχαρίστηση του ίδιου του δασκάλου από τα μαθηματικά. Κάποιος που δεν μπορεί να εκτιμήσει την ομορφιά και την δύναμη των μαθηματικών δεν θα μεταδώσει σε άλλους τη γνήσια συγκίνηση του.

«Τα παιδιά μπορούν να δουν πολύ καθαρά τον δάσκαλο που δεν αγαπάει τα μαθηματικά περισσότερο από τα ίδια και ότι ο λόγος που τα διδάσκει είναι απλά ότι περιλαμβάνονται στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα» (Papert,1991:71)

Αν λοιπόν υπάρχει ο ενθουσιασμός, και τα προτεινόμενα υλικά τότε ο δάσκαλος μπορεί να γίνει γέφυρα για να περάσει απέναντι ο μαθητής του, κι όταν πια του έχει διευκολύνει το πέρασμα ...χαρούμενα να γκρεμιστεί , ενθαρρύνοντας τον μαθητή να φτιάξει δικές του γέφυρες για μια αυτόνομη πρόοδο σε όλη την διάρκεια της ζωής του(Νικ. Καζαντζάκης για τον ιδανικό δάσκαλο, παρατίθεται στο: Μπουσκάλια, 1982:9) .

Στο πλαίσιο αυτής της πρότασης διδασκαλίας μπορεί να γίνει αναφορά (κίνητρα μάθησης) στα μαθηματικά των Αιγυπτίων και Βαβυλωνίων, στον Πυθαγόρα και τη σχολή του, στην φιλοσοφία των Πυθαγορείων(τα πάντα είναι αριθμοί), στις διάφορες μεθόδους απόδειξης του θεωρήματος, στα Στοιχεία του Ευκλείδη (Πρόταση Ι.47), στον Πλατωνικό διάλογο «Μένων», στην ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, στην ειδική ποιότητα και αρμονική σχέση των ζευγαριών των

συμπληρωματικών χρωμάτων, στην φαινομενική διαφορά στα εμβαδά τετραγώνων που είναι βαμμένα με διαφορετικά χρώματα και η οποία οφείλεται στην ειδική εντύπωση που αυτά προκαλούν στον αμφιβληστροειδή (Itten, 1998).

Αυτή η διδασκαλία, με τις κατάλληλες περικοπές, μπορεί να υλοποιηθεί και από τον/την νηπιαγωγό, ο οποίος πιστεύει στις απεριόριστες δυνατότητες του παιδιού, *«καταλαβαίνει την ιδέα ότι οι συνέπειες ενός νεοτερισμού για τη διανοητική ανάπτυξη μπορεί να είναι ποιοτικά ανώτερες από το συσσωρευμένο πλήθος αποτελεσμάτων χιλιάδων άλλων»* (Papert, 1991:37) και κατανοεί, ότι, το να εξοικειωθεί το παιδί με τα επίπεδα σχήματα (μέσω των στερεών), την ονοματολογία τους και μερικές κατασκευές με χαρτόνι και κόλλες, δεν είναι πολυπλοκότερο από τον όγκο της γνώσης που έχει αποκτήσει μέχρι τα πέντε χρόνια. Σ' αυτήν την περίπτωση προτείνουμε όλα τα σχήματα να δοθούν έτοιμα. Τα παιδιά μόνο θα βάνουν και θα κολλήσουν. Είναι γνωστή η άποψη του Bruner ότι μπορούμε να διδάξουμε οτιδήποτε σε οποιονδήποτε αρκεί να προσαρμόσουμε με ευαισθησία την διδασκαλία στον τρόπο που εκείνος μπορεί να κατανοήσει (Bruner, 1960).

Αν η διδασκαλία γίνει στη Β' Λυκείου, φυσικά, δεν είναι απαραίτητα τρία δίωρα, ιδίως με αυτόν τον τρόπο ανάπτυξης. Οι μαθητές ήδη έχουν εξοικειωθεί με αρκετές έννοιες και ίσως όλη η «χειροτεχνία» συμπυκνωθεί σε ένα δίωρο. Μπορούν όμως να διατεθούν οι απαραίτητες ώρες για να γίνουν αποδείξεις για την ισότητα των 4 τετραπλεύρων στα οποία διαμερίζεται το μεγαλύτερο από τα δυο τετράγωνα των καθέτων πλευρών (Θωμαΐδης, 2000:304), για το γιατί είναι τετράγωνο το σχήμα που δημιουργείται από τα δύο ίσα τετράγωνα, να αποδειχθεί με επαγωγή ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τετράγωνο με εμβαδόν όσο n δοσμένα τετράγωνα, να αποδειχθεί ότι τα σημεία με τα οποία κατασκευάζουμε τις «ψευδοδιαγώνιες» απέχουν από την «κοντινότερη» κορυφή απόσταση ίση με την ημιδιαφορά των καθέτων πλευρών του δοσμένου ορθογωνίου τριγώνου και επίσης μπορεί να ζητηθεί σχεδίαση από τους μαθητές με κανόνα και διαβήτη όλων των απαραίτητων σχημάτων. Αν υπάρχουν οι προϋποθέσεις (ελεύθερο εργαστήριο, λογισμικά και εξοικείωση από τον δάσκαλο) η ανάπτυξη μπορεί να γίνει και στο εργαστήριο πληροφορικής, με κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. Sketchpad, Cabri, GeoGebra) ή λογισμικό συμβολικής έκφρασης (π.χ. Χελωνόκοσμος, διατίθεται ελεύθερα από το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας, <http://eti.ppp.uoa.gr>).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Arons, A.(1992). *Οδηγός Διδασκαλίας της Φυσικής*, μτφρ. Ανδρέας Βαλαδάκης. Αθήνα : Τροχαλία.
- Βεκρής Λ., Χοντολίδου Ε. (επιμ.) (2003), *Προδιαγραφές Σπουδών για τα Σχολεία Δεύτερης Ευκαιρίας*. Αθήνα: Γ.Γ.Ε.Ε. – Ι.Δ.ΕΚ.Ε.
- Βλάμος Π., Δρούτσας Π., Πρέσβης Γ., Ρεκούμης Κ.(2007) *Μαθηματικά Β΄Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Bruner, J. (1960), *Η διαδικασία της Παιδείας*, μτφρ. Χρυσάνθη Κληρίδη, Αθήνα: Καραβία
- Bunt L., Jones P., Bedient J.(1981) *Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, Αθήνα: Γ.Α. Πνευματικός.
- Δαμαλάς, Γ.(1980).*Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα.
- Davidson D., Kauffman L. (1997). Οπτικές αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. *Quantum*, Τόμος 4, Τεύχος 5, σελ.31-35.
- Θωμαΐδης Γ., Πούλος Α. (2000), *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*, Θεσσαλονίκη: Ζήτης.
- Itten J. (1998), *Τέχνη του χρώματος*. Αθήνα ΕΚΚΜ.
- Κυνηγός, Χ. (2006). *Το Μάθημα της Διερεύνησης: Παιδαγωγική αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών. Από την έρευνα στη σχολική τάξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Μαγνήσαλης, Κ.(1998). *Δημιουργικά παιχνίδια*. Αθήνα: Μπάστας-Πλέσσας.
- Μοντεσσόρι Μ. (1960). *Εκπαίδευση για έναν καινούργιο κόσμο*, μτφρ. Μαρίνα Λώμη. Αθήνα: Γλάρος.
- Μπουσκάλια, Λ.(1982). *Να ζεις ν' αγαπάς και να μαθαίνεις*, μτφρ. Μαρίνα Λώμη. Αθήνα: Γλάρος.
- Νεγρεπόντης Σ.,Β. Φαρμάκη(2009). Η παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες[διαδίκτυο].
- Ντιούι, Τ. (1938). *Εμπειρία και Εκπαίδευση*, μτφρ.Λεάνδρος Πολενάκης. Αθήνα: Γλάρος.
- Παντελίδης, Γ. (1998). *Βιβλίο του διδάσκοντος για το μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ'Λυκείου*. Θεσ/νίκη: Ζήτη
- Papert, S.(1991). *Νοητικές Θύελλες*, μτφρ. Αγνή Σταματίου. Αθήνα: Οδυσσέας.
- Πολυδούρης, Β.(1997). *Παιδεία, το Αθέατο ημισφαίριο*. Θεσ/νίκη: Αφοί Κυριακίδη.